

《概率论与数理统计》 期末考试卷 A 参考答案

一、填空题〔每小题 5 分，共计 25 分〕

1、设 A, B, C 是三个随机事件，则事件 A, B, C 中不超过两个发生的事件可表示为 $\overline{ABC}$ 。

2、已知随机事件 A, B 满足： $P(A) = 1/3$ ， $P(B|A) = 1/4$ ， $P(A|B) = 1/6$ ，则 $P(A \cup B) = \underline{0.75}$ 。

3、已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $x_1, \dots, x_n$ 来自总体 X 的样本 ($n > 1$)，其样本均值和样本方差分别记为 $\bar{x}$ 和 s^2 。则 $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s}$ 服从的分布为 $\underline{t(n-1)}$ 。

4、已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $x_1, \dots, x_n$ 来自总体 X 的样本 ($n > 1$)，其样本均值和样本方差分别记为 $\bar{x}$ 和 s^2 。在 σ^2 已知的条件下， μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的左侧置信区间是 $\underline{\left[\bar{x} - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)}$ ；相应的所用枢轴量为 $\underline{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ (注：指明分布)。

5、 n 个男孩和 m 个女孩 ($m \leq n+1$) 随机地站成一排，则任意两个女孩都不相邻的概率为 $\underline{\frac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^m}}$ 。

二、〔计 10 分〕某种型号电子元件的寿命 X (以小时计) 具有如下的概率密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

现有一大批此元件 (设各种元件工作相互

独立)，试求：(1) 任取 1 只，其寿命大于 1500 小时的概率；(2) 任取 4 只，4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时的概率。

解：(1) 记“寿命大于 1500 小时”的事件为 A ，则

$$P(A) = P(X > 1500) = \int_{1500}^{+\infty} p(x) dx = \int_{1500}^{+\infty} \frac{1000}{x^2} dx = \frac{2}{3}。$$

(2) 记“4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时”的事件为 B ，则

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - C_4^4 P^4(\bar{A}) = \frac{80}{81}。$$

三、〔计 14 分〕设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数是

$$p(x, y) = \begin{cases} a \cdot x^2 \cdot y, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 a 是常数，且 $a > 0$ ，试求：

- (1) 常数 a ;
 (2) 判别随机变量 X 与 Y 是否相互独立, 并计算 $\text{Corr}(X, Y)$;
 (3) 设 $Z = X + Y$, 求 Z 的概率密度函数 $p_Z(z)$ 。

解: (1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = a \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y dy = \frac{a}{6}$ 得: $a = 6$ 。

$$(2) \quad p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 6 \cdot x^2 y dy = 3x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 6 \cdot x^2 y dx = 2y, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

因 $p_X(x) \cdot p_Y(y) = p(x, y)$, 则随机变量 X 与 Y 是相互独立的, 且 $\text{Corr}(X, Y) = 0$ 。

$$(3) \text{ 由 (2) 知: } p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z 6 \cdot x^2 \cdot (z-x) dx = z^4/2, & \text{当 } 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^1 6 \cdot x^2 \cdot (z-x) dx = -z^4/2 + 3z^2 - 2z, & \text{当 } 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

四、【计 10 分】设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一组样本, 且 X 的期望 μ 和方差 σ^2 ($\sigma^2 > 0$) 均存在。对 σ^2 考虑如下三个估计量:

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_3^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

试问: 三个估计量中哪一个是 σ^2 的无偏估计量?

解: 由 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$, 于是 $E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = \sum_{i=1}^n E(x_i^2) - n \cdot E(\bar{x}^2) =$

$\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = (n-1)\sigma^2$, 因此有

$$E[S_1^2] = \sigma^2, \quad E[S_2^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2, \quad E[S_3^2] = \frac{n-1}{n+1} \sigma^2$$

故 S_1^2 是 σ^2 的无偏估计量。

五、【计 14 分】为研究金属导线含碳量 x (单位: %) 对电阻 y (单位: Ω), 在 20°C 时测得 8 组试验数据对 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 8$), 整理如下:

$\bar{x} = 0.4865$, $\bar{y} = 19.8000$, $l_{xx} = 2.6031$, $l_{xy} = 86.7800$,
 $l_{yy} = 3273.2000$ 。假定 Y 对 X 具有近似线性关系, 试求: (1) Y 对 X 的线性回归方程; (2) 对建立的回归方程进行显著性检验 ($\alpha = 0.05$); (3) 当 $x = 0.65$, 计算 y 的预测值。

解: (1) 由正则方程
$$\begin{cases} n\beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_1 = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \beta_1 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{cases}, \text{ 代入数据可解得}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{86.7800}{2.6031} = 33.3372 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x} = 19.8000 - 33.3372 \times 0.4865 = 3.5815 \end{cases}$$

即线性回归方程是: $y = 33.3372 + 3.5815x$ 。

(2) 由 $S_T = S_R + S_e$, $S_R = \hat{\beta}_1^2 l_{xx}$, $S_T = l_{yy}$, 可得回归方程方差分析表如下:

来 源	平方和	自 由 度	均 方 和	F 比
回 归	$S_R = 2893.0000$	$f_R = 1$	$MS_R = 2893.0000$	45.6549
残 差	$S_e = 380.2000$	$f_e = 6$	$MS_e = 0.5117$	
总 计	$S_T = 3273.2000$	$f_T = 7$		

由 $F_{1-\alpha}(1, 6) = 5.99$, 因为 $F = 45.6549 > 5.99 = F_{1-\alpha}(1, 6)$, 所以在 $\alpha = 0.05$ 下, 回归方程是显著的。

(3) 当 $x = 0.65$, y 的预测值为 $y = 3.5815 + 33.3372 \times 0.65 = 25.2506$ 。

六、【计 10 分】设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 分别来自 X 与 Y 的样本, 它们的样本方差分别是 $S_x^2 = 54.22$ 和 $S_y^2 = 53.14$ 。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 是否可以认为 X 与 Y 的方差是相等的?

解: 检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

取检验统计量: $F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(m-1, n-1)$

其中 $m = n = 10$ 。

当 $\alpha = 0.05$ 时, 拒绝域为

$W = \{F \mid F > F_{0.975}(9, 9) \text{ 或 } F < F_{0.025}(9, 9)\} = \{F \mid F > 4.03 \text{ 或 } F < 1/4.03\}$ 。

由 $F = \frac{S_x^2}{S_y^2} = 1.0203 \notin W$ 知: 因此, 可以认为 X 与 Y 的方差是相等的。

七、【计 11 分】设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$, 记 $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$ 。试证明: 对任意的实数 y , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt。$$

证明: 由于 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$, 记 $X_n - \mu$ 的特征函数为 $\varphi(t)$, 于是有: $\varphi'(0) = 0$,

$\varphi''(0) = -\sigma^2$ 。由特征函数的性质知: $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$ 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)。$$

从而

$$\ln \varphi_{Y_n}(t) = n \ln \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2}t^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \varphi_{Y_n}(t) = -\frac{1}{2}t^2$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ 。因此, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 随机变量 Y_n 按分布收敛于标准正态分布, 故结论成立。

八、【计 6 分】试简述贝叶斯统计学与经典统计学的差异。

解: 经典统计学主要是依据总体信息和样本信息来进行统计推断分析, 而贝叶斯统计学除依据总体信息和样本信息之外, 还要考虑先验分布信息, 也就是说, 贝叶斯统计学是依据总体信息、样本信息和先验分布信息进行统计推断分析。因此, 叶斯统计学与经典统计学的差异在于是否使用先验分布信息。