本题得分	

五、设线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=10, \\ -x_1+2x_2+3x_3=12, \\ 4x_1+2x_2+x_3=16, \end{cases}$$

（1）写出 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法解该方程组的迭代公式；〖6 分〗

（2）考察用 Gauss-Seidel 解该方程组的收敛性。〖12 分〗

(1) Jacobi
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}-5 \\ x_2^{(k+1)}=0.5x_1^{(k)}-1.5x_3^{(k)}+6 \\ x_3^{(k+1)}=-4x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}+16 \end{cases}$$

Gauss-seidel
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}-5 \\ x_2^{(k+1)}=0.5x_1^{(k+1)}-1.5x_3^{(k)}+6 \\ x_3^{(k+1)}=-4x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+16 \end{cases}$$

(2) 由
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}-5 \\ x_2^{(k+1)}=0.25x_2^{(k)}-1.25x_3^{(k)}+3.5 \\ x_3^{(k+1)}=-2.5x_2^{(k)}+0.5x_3^{(k)}+29 \end{cases}$$

得 $M_{GS}=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & -2.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,

$|\lambda-M_{GS}E|=\lambda(\lambda^2-0.75\lambda-3)$

则 $\rho(M_{GS})=\dfrac{0.75\pm\sqrt{12.5625}}{2}>1$

得 G-S法发散

本题得分	

六、用最小二乘拟合方法求一形如 $y=ax+bx^3$（a，b 为常数）的经验公式，其中数据表如下：

x	-2	-1	0	1	2
y	-8.99	-1.51	0.001	1.47	9.02

〖18 分〗

取 $\varphi_0(x)=x$，$\varphi_1(x)=x^3$

得 $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10$，$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}x_i^4=34$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}x_i^6=130$

$(y,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{5}y_ix_i=39$，$(y,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}y_ix_i^3=147.06$

得正则方程组

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 34 \\ 34 & 130 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 39 \\ 147.06 \end{bmatrix}$$

得 $a\approx 0.4858$，$b\approx 1.0042$

则拟合曲线为 $y=0.4858x+1.0042x^3$