

安徽大学2024-2025学年第二学期

《高等代数(下)》期中考试试题

(闭卷 · 时间120分钟)

年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题(每小题4分, 共20分)

1. 多项式 $x^6 + 2x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4$ 的重因式为_____.
2. 多项式 $x^6 + 1$ 在实数域上的标准分解式为_____.
3. 多项式 $2x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ 的有理根为_____.
4. 已知 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & a \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似. 则 $a + b =$ _____.
5. 已知 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda^3, (\lambda - 1)^2, \lambda - 2, (\lambda - 2)^2$, 且秩为4. 则 $A(\lambda)$ 的所有不变因子为_____.

二、计算题(共40分, 其中第6题10分, 第7、8题每题15分)

6. 设多项式 $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 13x - 2$, $g(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$. 求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 并求 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.
7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
 - (1) 求可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.
 - (2) 求 A^n , 其中 n 为任意正整数.
8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - (1) 求 A 的特征值与特征向量.
 - (2) 求 A 的极小多项式.
 - (3) 求 A 的Jordan标准形.

三、证明题(每题10分, 共40分)

9. 设 p 是素数. 证明: $x^p + px + p$ 在有理数域上不可约.
10. 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是可逆阵. 证明: 存在 $g(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, $\deg g(\lambda) \leq n - 1$, 使得 $A^{-1} = g(A)$.
11. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $AB = BA$. 证明: A 与 B 至少有一个公共的特征向量.
12. 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 证明: 存在可对角化矩阵 B 和幂零阵 C , 使得 $A = B + C$.