

安徽大学 20 23—20 24 学年第 1 学期

《 高等代数(上) 》考试试卷 (B 卷)

(闭/开卷 满分 100 分 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|-----|---|---|---|---|---|----|
| 得 分 |   |   |   |   |   |    |
| 阅卷人 |   |   |   |   |   |    |

得分

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  的一组基,  $A$  为  $\mathbb{F}$  上  $n \times s$  矩阵. 若

$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ , 则  $L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  的维数=\_\_\_\_\_.

2 设  $\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 1, 0), \beta_3 = (1, 0, 0)$  为  $\mathbb{F}^3$  的一组基, 则  $\alpha = (-1, 1, 1)$  在这组基下的坐标为\_\_\_\_\_.

3. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $(A^*)^{-1} =$ \_\_\_\_\_.

4. 设  $\alpha = (1, 3, 5), \beta = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}), A = \alpha^T \beta$ , 则  $A^k =$ \_\_\_\_\_ ( $k > 1$ ).

5. 已知线性映射  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 满足  $\varphi(1, 1) = (1, 0, 2), \varphi(2, 3) = (1, -1, 4)$ , 则  $\varphi(7, 8) =$ \_\_\_\_\_.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得分

6. 若矩阵  $A$  的秩等于  $r$ ，则( ).

- A. 至多有一个  $r$  阶子式不为零;
- B. 所有  $r$  阶子式都不为零;
- C. 所有  $r+1$  阶子式全为零，而至少有一个  $r$  阶子式不为零;
- D. 所有低于  $r$  阶子式都不为零.

7. 下列矩阵不是初等矩阵的是( ).

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;    B.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;    C.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;    D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. 行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$  中元素  $x$  的代数余子式是( ).

A.  $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$ ;    B.  $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ ;    C.  $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$ ;    D.  $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ .

9. 下列子集构成  $V = \mathbb{R}^3$  的子空间的是( ).

- A.  $V_1 = \{(a, b, c) | 2a + 3b + 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ;
- B.  $V_2 = \{(a, b, c) | a + b + c = 1, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ;
- C.  $V_3 = \{(a, b, c) | a^2 + b^2 + c^2 \leq 1, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ;
- D.  $V_4 = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  ( $\mathbb{Q}$  为有理数域).

10. 设  $A$ 、 $B$  都是  $n$  阶可逆矩阵，则  $\left| -3 \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \right|$  等于( ).

A.  $(-3)^{2n} |A| |B|^{-1}$ ;    B.  $(-3)^n |A| |B|^{-1}$ ;    C.  $-3 |A^T| |B|$ ;    D.  $-3 |A| |B|^{-1}$ .

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

11. 计算  $n$  阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. 解矩阵方程  $AX = B$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

13. 设向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2, 1)^T, \alpha_2 = (0, 2, 1, 5, -1)^T, \alpha_3 = (2, 0, 3, -1, 3)^T, \alpha_4 = (1, 1, 0, 4, -1)^T$ , 求该向量组的一个极大线性无关组.

四、证明题（每小题 10 分，共 30 分）

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

14. 设  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times l}$ , 证明: 若  $AB = 0$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ , 其中  $r(A)$  表示  $A$  的秩.

15. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  线性相关, 证明:  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出, 且表示法唯一.

16. 设  $V_1, V_2$  分别是数域  $\mathbb{F}$  上的齐次线性方程组  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  与  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  的解空间, 求证:  $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ .

五、简答题（5 分, 判断叙述是否正确并简要说明理由）

|    |  |
|----|--|
| 得分 |  |
|----|--|

17. 已知  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{s \times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}, \gamma \in \mathbb{F}^{s \times 1}, \delta \in \mathbb{F}^{m \times 1}, X \in \mathbb{F}^{n \times 1}, \bar{A} = (A : \gamma), \bar{B} = (B : \delta)$ , 则线性方程组  $AX = \gamma$  与  $BX = \delta$  同解的充要条件是  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  的行向量组等价.