

安徽大学 2024—2025 学年第一学期
《数学分析（下）》考试试卷（B 卷）
参考答案及评分标准

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{xy+4}-2} = 4.$

2. 设函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $du|_{(1,2,3)} = \frac{1}{\sqrt{14}}(dx + 2dy + 3dz).$

3. 设函数 $u = x^2 + xy + y^2$, 则它在点 $(1,1)$ 处沿方向 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 的方向导数为 $\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}).$

4. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $x + 2y - 4 = 0.$

5. 设区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})dxdy = 2.$

二、计算题（共 52 分）

6. (10 分) 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $(1,-1,3)$ 处的切线方程和法平面方程.

解: 曲线的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 14 = 0, \\ G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z = 0. \end{cases}$ 所以

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 6y & 2z \\ 4y & -1 \end{vmatrix} = -6y - 8yz, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 2z & 4x \\ -1 & 2x \end{vmatrix} = 4xz + 4x, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 4x & 6y \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 4xy.$$

因此 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_{(1,-1,3)} = 30, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_{(1,-1,3)} = 16, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_{(1,-1,3)} = -4.$ (6 分)

于是, 所求的切线方程为: $\frac{x-1}{30} = \frac{y+1}{16} = \frac{z-3}{-4}$, 即 $\frac{x-1}{15} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-3}{-2},$

法平面方程为: $30(x-1) + 16(y+1) - 4(z-3) = 0$, 即 $15x + 8y - 2z - 1 = 0.$ (10 分)

7. (10 分) 写出函数 $f(x,y) = e^{2x+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

解: 记 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则在点 $(0,0)$ 处有

$$f(x,y) = e^{2x+y^2} = 1 + (2x + y^2) + \frac{(2x + y^2)^2}{2} + \frac{(2x + y^2)^3}{6} + o((2x + y^2)^3) \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + y^2 + \frac{4x^3}{3} + 2xy^2 + o(\rho^3). \quad (10 \text{ 分})$$

8. (10 分) 计算第二类曲线积分 $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 的上半

部分, 方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$.

解: 添加线段 $L_1: y=0, x: 0 \rightarrow 2$. (3 分)

由 Green 公式可得

$$\int_{L+L_1} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = \iint_D (-1+1)dxdy = 0. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = \int_{L_1} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

9. (10 分) 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + ydzdx + z dxdy$, 其中 Σ 是曲面

$z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的上侧.

解: 补充 $\Sigma_1: z=1, x^2 + y^2 \leq 1$, 方向取下侧. (3 分)

设 Ω 是 $\Sigma + \Sigma_1$ 所围成的空间区域, 由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (2x+z)dydz + ydzdx + z dxdy = -\iiint_{\Omega} 4dxdydz = -4 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = -2\pi. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } \iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + ydzdx + z dxdy = -2\pi - \iint_{\Sigma_1} dxdy = -\pi. \quad (10 \text{ 分})$$

10. (12 分) 求函数 $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值.

解: 先求函数在区域内部 $x^2 + y^2 < 1$ 的可疑点. 令 $f_x = 0, f_y = 0$, 即

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 3x + 2y = 0, \end{cases}$$

得唯一解 $(0,0)$, $f(0,0) = 0$. (3 分)

再求边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的可疑点. 作 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

令 $L_x = 0, L_y = 0$, 得方程

$$(1) \quad \begin{cases} (4-2\lambda)x + 3y = 0, \\ 3x + (2-2\lambda)y = 0. \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

因在 $x^2 + y^2 = 1$ 上 $(x, y) \neq (0,0)$, 此方程有非零解, 必须

$$\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ 3 & 2-2\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } 4\lambda^2 - 12\lambda - 1 = 0, \text{ 得 } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}. \quad (9 \text{ 分})$$

将式(1)中的第一个方程乘 x , 第二个方程乘 y , 相加得

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 = \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

比较以上三个可疑值, 得函数在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值为 $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$, 最小值 $\frac{3-\sqrt{10}}{2}$. (12 分)

三、分析证明题（共 28 分）

11. (8 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(xy, z - 2x) = 0$ 确定的隐函数, 其中 F 具有连续偏导数,

证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$.

解: 记 $F_1 = F_u(u, v), F_2 = F_v(u, v)$, 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

在方程 $F(xy, z - 2x) = 0$ 两边对 x 求导可得 $yF_1 + (\frac{\partial z}{\partial x} - 2)F_2 = 0$, 进而可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2F_2 - yF_1}{F_2}$. (4 分)

同理, 在方程 $F(xy, z - 2x) = 0$ 两边对 y 求导可得 $xF_1 + \frac{\partial z}{\partial y}F_2 = 0$, 进而可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xF_1}{F_2}$. (6 分)

于是, $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{2F_2 - yF_1}{F_2} - y \frac{-xF_1}{F_2} = 2x$. (8 分)

12 (10 分) 设 $f(x, y) = \varphi(|xy|)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 且在 $u = 0$ 附近满足 $|\varphi(u)| \leq u^2$, 证明: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

证明: $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(|x \cdot 0|) - \varphi(0)}{x} = 0$. 同理 $f_y(0, 0) = 0$. (4 分)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \quad (8 \text{ 分}) \\ &= \left| \frac{\varphi(|xy|)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|xy|^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |xy|^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

因此 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微. (10 分)

13. (10 分) 设 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+x^2} dx$, 证明: (1) $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续; (2) $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导.

证明: (1) 记 $f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{1+x^2}$, 则 $f(x, t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

由于 $|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(xt)}{1+x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{1+x^2} \right|$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+x^2} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛, 所以 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+x^2} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. (5 分)

(2) $f_t(x, t) = \frac{x \cos(xt)}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

对于 $t \geq t_0 > 0$, 由于 $\left| \int_0^A \cos(xt) dx \right| = \left| \frac{\sin At}{t} \right| \leq \frac{1}{t_0}, \forall A > 0$, 所以 $\int_0^A \cos(xt) dx$ 在 $[t_0, +\infty)$ 一致有

界. 而当 $x > 1$ 时, $\frac{x}{1+x^2}$ 是 x 的单调减少函数且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, 于是由 Dirichlet 判别法知

$\int_0^{+\infty} \frac{x \cos(xt)}{1+x^2} dx$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上一致收敛. 故 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+x^2} dx$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上可导. 由 t_0 的任意性

知 $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导. (10 分)