

安徽大学 2024—2025 学年第一学期

《数学分析（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $u = xyz$, 则 $du|_{(1,2,3)} =$ _____.
2. 平面 $x - y + z = 2$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在点 $(1, 1, 2)$ 处切线的参数方程为 _____.
3. $f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$ 在点 $(0, 0)$ 处的 3 阶 Taylor 多项式为 _____.
4. 设 $f(u, v)$ 一阶连续可偏导, $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$ 且 $\frac{\partial f}{\partial u}|_{(1,2)} = 1, \frac{\partial f}{\partial v}|_{(1,2)} = 4$, 则 $f(1, 2) =$ _____.
5. 设 $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{1+\alpha} e^{\alpha x^2} dx$, 则 $F'(\alpha) =$ _____.

二、 计算题（共 60 分）

6. (8 分) 设 $u(x, y, z)$ 是由方程 $e^{z+u} - xy - yz - zu = 0$ 确定的隐函数, 求 $u(x, y, z)$ 在 $P(1, 1, 0)$ 处的方向导数的最大值.
7. (8 分) 求 $u = x - 2y + 2z$ 在约束 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最值.
8. (8 分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 围成的区域.
9. (8 分) 计算三重积分 $\iiint_V |ax + by + cz| dx dy dz$, 其中 V 为单位球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$; a, b, c 为常数, 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.
10. (8 分) 求 $\iint_{\Sigma} |y| \sqrt{z} dS$, 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$.
11. (10 分) 求平面向量场 $(xy^2 + y^2 e^x + x^2 + y, x^2 y + 2ye^x - x + y^2)$ 沿曲线 $L: r(t) = (\cos t, 2 \sin t) (0 \leq t \leq \pi)$ 的第二型曲线积分, 曲线正向为沿 t 增加的方向.
12. (10 分) 求第二型曲面积分 $\iint_{S^+} (f(x, y, z) + 2x) dy dz + (2f(x, y, z) + y) dz dx + (f(x, y, z) + 2z) dx dy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, S^+ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分 ($x > 0, y < 0, z > 0$ 区域) 的上侧.

三、 分析证明题（共 20 分）

13. (6 分) 设 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 且 F 可微, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.
14. (8 分) 设 $f(x, y) = |x - y| \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的某邻域内连续, 证明: 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $\varphi(0, 0) = 0$.
15. (6 分) 证明: $g(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx$ 在 $(1, 4)$ 上连续.