

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《数学分析（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷、满分 100 分 时间 120 分钟）

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x+y} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (1+xy)^{1/\ln(1+2x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 已知 $z = z(x, y)$ 是由 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的隐函数，则 $dz|_{(1,0,-1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 上与平面 $x + y - z = 0$ 平行的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
4. 函数 $u = x^2 + 2yz$ 在 $(1, 1, 1)$ 处方向导数的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
5. 设 $z = f(x, y)$ 二阶可偏导， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, f(x, 0) = 1, f'_y(x, 0) = x$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、 计算题（共 62 分）

6. (6 分) 写出 $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y}}{1-y}$ 在 $(0, 0)$ 处的 3 阶 Taylor 公式 (展开至 3 次项).
7. (8 分) 设 $f(u, v)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续偏导数， $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} f(x + \alpha, x - \alpha) dx$. 求 $F'(0)$.
8. (10 分) 求 $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ 在区域 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最值.
9. (8 分) 计算二重积分 $\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} y^2 \sin(xy) dy$.
10. (10 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (|x| + z) e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
11. (10 分) 设 $u(x, y)$ 在圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq \pi$ 上有二阶连续偏导，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x^2 + y^2)$, n 为边界圆周 $\partial D: x^2 + y^2 = \pi$ 的单位外法向，计算曲线积分 $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds$.
12. (10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + (x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}) dx dy$, 其中 $f(u)$ 具有连续导数， Σ 为曲面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧.

三、 分析证明题（共 18 分）

13. (10 分) 设 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续偏导，且在 $\partial D: x^2 + y^2 = 1$ 上有 $f(x, y) \equiv 0$. 证明：

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D_r} \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi f(0, 0),$$
 其中 $D_r: r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.
14. (8 分) 证明： $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导且满足微分方程 $f(x) - f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$