

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《数学分析 (下)》 考试试卷 (A 卷)

(闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟)

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

一、 填空题 (每空 3 分, 共 21 分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{x}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知函数 $z = \sin(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 曲面 $S: x^2 + yz + z^2 = 1$ 在 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{\hspace{4cm}}.$

4. $u = x \cdot \sin y \cdot e^z$, 则 $\text{grad}(u) \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, 0)} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad du \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, 0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $I(u) = \int_0^{\sin u} e^{x^2 - xu} dx$, 则 $I'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、 计算题 (共 66 分)

6. (6 分) 求 $\lim_{u \rightarrow 0} \int_u^{1+u} \frac{1}{1+x^2+u^2} dx.$

7. (6 分) 写出 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

8. (10 分) 求椭球面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上距离平面 $x + y + 2z = 9$ 最远和最近的点.

9. (8 分) 计算二重积分 $\iint_D (\|x\| + \|y\|) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 为单位圆盘.

10. (8 分) 计算三重积分 $\iiint_V \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, 其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.

11. (8 分) 计算第一型曲线积分 $\int_C (xy + yz + zx) ds$, 其中 C 是平面 $x + y + z = 0$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得圆周.

12. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\oint_C (x - y \sin x) dx + (xy + \cos x) dy$ 其中 C 是有界闭区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$ 的边界, 取逆时针方向.

13. (10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint_S (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 S 为椭圆抛物面 $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ 介于平面 $z = 0$ 和 $z = 2$ 之间的部分, 曲面正向指向下侧.

三、 分析证明题 (共 13 分)

14. (7 分) 设 $z = f(\ln x + \frac{1}{y})$, f 为可微函数, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

15. (6 分) 证明: (1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛;

(2) 证明 $I(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, 并利用其导数求 $I(\alpha).$