

学号

姓名

专业

年级

院/系

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《数学分析（下）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

一、 填空题（每小题 3 分，共 9 分）

得分

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x} = 2.$

2. 曲面 $z = \arctan(xy)$ 在 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的切平面方程为 $x + y - 2z + \frac{\pi}{2} - 2 = 0.$

3. $\left(\int_u^{u^2} \frac{\sin ux}{x} dx \right)' = \frac{3 \sin u^3 - 2 \sin u^2}{u}.$

二、 计算题（共 58 分）

得分

4. (6 分) 写出 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

解:

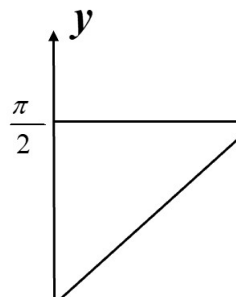
$$f(x, y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \right)$$

$$= y + \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) + \left(\frac{y^3}{3} - \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} \right) + o(\sqrt{x^2 + y^2}^3)$$

亦可通过计算 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处的各阶偏导得到.

5. (6分) 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 由 $x=0, y=x, y=\frac{\pi}{2}$ 围成的平面区域.

解: $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left(\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = 1.$



6. (6分) 计算三重积分 $\iiint_V xyz dV$, 其中 V 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 的第一卦限部分.

解: 作球坐标变换 $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$, 得:

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot (r \cos \theta) \cdot (r^2 \sin \theta) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

7. (10分) 求函数 $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ 在 3 个坐标平面与 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 围成闭区域上的最小值与最大值.

解: 连续函数 f 在闭区域上的最值一定存在.

(1) 先考虑区域内部可能的最值点, 必为极值点. 由 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 以及 $x > 0, y > 0,$

$z > 0, x + y + z < \frac{\pi}{2}$ 知无解. 故最值点必在区域边界上取到.

(2) 在边界平面 $x=0, y=0, z=0$ 上, $f \equiv 0$. 显然 $f \geq 0$. 故 f 的最小值为 0. 于是最大值点必在平面 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 上. 设 $g(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x + y + z - \frac{\pi}{2})$. 由 Lagrange 条件极值定理知, 最大值点满足

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0 \\ \cos y \sin x \sin z - \lambda = 0 \\ \cos z \sin x \sin y - \lambda = 0 \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{\pi}{6}.$$

故最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}.$

8. (10 分) 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y+z)ds$, 其中 C 由直线段 $AB: A(1,1,0), B(1,0,0)$ 和螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 组成.

解: 线段 AB 的参数方程为 $x = 1, y = t, z = 0 (0 \leq t \leq 1)$, 在此段上的积分为

$$I_1 = \int_{C_1} (x+y+z)ds = \int_0^1 (t+1) \cdot 1 dt = \frac{3}{2}; \text{ 在螺线上的积分为}$$

$$I_2 = \int_{C_2} (x+y+z)ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \cdot \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2 + (t)'^2} dt = 2\sqrt{2}\pi^2;$$

$$\text{故结果为: } I_1 + I_2 = \frac{3+4\sqrt{2}\pi^2}{2}.$$

9. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\oint_C (2z+3)dx + (3x+1)dy + (y+2)dz$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x+2y+3z=0$ 的交线, 正向规定为: 从 z 轴负半轴看为顺时针方向.

解: 由 Stokes 公式, 原积分 $I = \iint_S \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z+3 & 3x+1 & y+2 \end{vmatrix} \cdot d\vec{S}$, 其中 S 为交线 (大圆) 决定

的平面 $x+2y+3z=0$ 上的区域, 法向为 $n = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$. 故 $I = \iint_S (1,2,3) \cdot n dS = \iint_S \sqrt{14} dS = \sqrt{14}\pi R^2$.

10. (10 分) 计算第二型曲面积分 $\iint_S yzdzdx + (x^2 + y^2)zdx dy$, 其中 S 为椭圆抛物面 $x^2 + y^2 = z$ ($0 \leq z \leq 1$), 正向指向下侧.

解: 设 S_1 为曲面顶端的平面块 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$, 方向指向上侧. 设 V 为 S, S_1 围成的立体. S_1 在

XOY 平面的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 1$. 由 Gauss 定理,

$$\begin{aligned} \iint_{S+S_1} yzdzdx + z^2dx dy &= \iiint_V \operatorname{div}(0, yz, z^2) dV = 3 \iiint_V z dV = 3 \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^1 z dz \\ &= \frac{3}{2} \iint_D (1 - (x^2 + y^2)^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^4) r dr = \pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{S_1} yzdzdx + z^2dx dy = \iint_{S_1} (0, yz, z^2) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_{S_1} dS = \pi.$$

故所求积分为 $\pi - \pi = 0$.

(2) 也可先转换为第一型曲面积分, 在利用对称性得 0.

三、证明题 (共 33 分)

得分	
----	--

11. (10 分) 证明: 变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ (设二阶偏导都连续).

证明: 由复合函数的求导公式有:
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = (-2) \frac{\partial z}{\partial u} + 3 \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

进而 $\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 12 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 9 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{cases}$ 代入原方程得:

$$\begin{aligned} 0 &= 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + \left(-2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) - \left(4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 12 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 9 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0. \text{ 即为所证.} \end{aligned}$$

12. (7 分) 平面 $Ax + By + Cz + D = 0 (C \neq 0)$ 上的一个有界区域 G 在 XOY 平面上的投影为 G_1 .

记 G 和 G_1 的面积分别为 S_G, S_{G_1} . 证明: $\frac{S_G}{S_{G_1}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}}$.

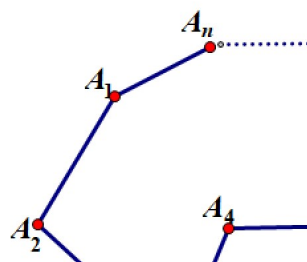
解: 平面方程为 $z = f(x, y) = \frac{Ax + By + D}{-C}$, 故 $S_G = \iint_{G_1} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$

$$= \iint_{G_1} \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}} dx dy = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}} \iint_{G_1} dx dy = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}} S_{G_1}. \text{ 即有:}$$

$$\frac{S_G}{S_{G_1}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}}.$$

13. (8 分) 证明: 如图, 平面上以 $A_i(x_i, y_i) (1 \leq i \leq n)$ 为顶点的 n 边形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} (y_{i+1} x_i - x_{i+1} y_i) \right|. \text{ 其中 } x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1.$$



解: 设 $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = A_1(x_1, y_1)$, n 边形边界为 $L = \bigcup_{1 \leq i \leq n} L_i$, L_i 为有向线段 $A_i A_{i+1}$, 方向由 A_i

指向 A_{i+1} . 由 Green 公式有: $S = \left| \oint_L x dy \right| = \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{L_i} x dy \right|$.

L_i 有参数表示 $\begin{cases} x = (1-t)x_i + tx_{i+1} \\ y = (1-t)y_i + ty_{i+1} \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$. 故

$$\int_{L_i} x dy = \int_0^1 ((1-t)x_i + tx_{i+1})(y_{i+1} - y_i) dt = \frac{y_{i+1} - y_i}{2} (x_{i+1} + x_i).$$

$$\text{故 } S = \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{L_i} x dy \right| = \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{y_{i+1} - y_i}{2} (x_{i+1} + x_i) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} (y_{i+1} x_i - x_{i+1} y_i) \right|.$$

-
14. (8 分) $p > 0$ 为常数. 证明: (1) $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛;
(2) $p = 1$ 时, $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, 并求 $I'(t)$.

证明: (1). $\forall t \in [0, +\infty)$, 由于 e^{-tx} 关于 $x \in (0, +\infty)$ 一致有界, 且单调递减; 又 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 关于 t 一致收敛, 由 Abel 判别法知, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) $p = 1$ 时, 对 $\forall \delta > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛: e^{-tx} 关于 x 单调递减且一致趋于 0, $\left| \int_0^b \sin x dx \right| \leq 2$ 一致有界, 故由 Dirichlet 判别法即知. 于是 $I(t)$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上可导, 进而由 δ 的任意性知 $I(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, 且 $I'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx = -\frac{1}{1+t^2}$.