

2018-2019 第一学期《数学分析》(下)A卷 答案及评分标准

一、填空题 (每题2分, 共8分) 1. $x - y - 3 = 0$; 2. $-3\sqrt{2}$; 3. $\frac{13\pi}{3}$; 4. $\frac{2xe^{x^2}}{2-\cos y}$

二、计算题 (共58分)

5. (6分)

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{2+xy} - \sqrt{2}}{\sin xy} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{(\sqrt{2+xy} + \sqrt{2}) \cdot \sin xy} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sin xy} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{2+xy} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \dots\dots\dots 6分 \end{aligned}$$

6. (6分) 记 $I = (x+y) \cos \frac{x}{x^2+y^2} + (x-y) \sin \frac{y}{x^2+y^2}$. 注意到当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时成立

$$0 \leq |I| \leq |x+y| + |x-y| \leq 2|x| + 2|y| \rightarrow 0$$

由夹逼定理知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x+y) \cos \frac{x}{x^2+y^2} + (x-y) \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right] = 0 \dots\dots\dots 6分$$

7. (6分)

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\ln x^3 + \ln y^3) e^{-(x+y)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} [e^{-y} e^{-x} \ln x^3 + e^{-x} e^{-y} \ln y^3] \dots\dots\dots 2分 \end{aligned}$$

由L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x^3 = 0 \dots\dots\dots 2分$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} e^{-y}(e^{-x} \ln x^3) = 0$. 类似可得 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} e^{-x}e^{-y} \ln y^3 = 0$. 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\ln x^3 + \ln y^3)e^{-(x+y)} = 0 \quad \dots\dots 2\text{分}$$

8. (8分) 易知, 函数 $x^3 \sin(x^4 + y^2)$ 在关于 y 轴对称的区域 D 上是奇函数, 所以

$$\iint_D [x^3 \sin(x^4 + y^2)] dx dy = 0 \quad \dots\dots 3\text{分}$$

由极坐标变换得

$$\begin{aligned} & \iint_D [x^2 + y^2] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D [x^3 \sin(x^4 + y^2) + x^2 + y^2] dx dy = \frac{\pi}{2} \dots\dots 5\text{分}$$

9. (8分) $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. (... 2分) 于是

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (z + 1) dx dy dz = \iint_{\Omega_{xy}} dx dy \int_0^{xy} (z + 1) dz \\ &= \iint_{\Omega_{xy}} \left(\frac{x^2 y^2}{2} + xy \right) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{x^2 y^2}{2} + xy \right) dy \\ &= \frac{17}{360} \quad \dots\dots 6\text{分} \end{aligned}$$

10. (8分) 易知

$$du = f'(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz) \quad \dots\dots 2\text{分},$$

$$d^2u = f''(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz) \quad \dots\dots 2\text{分}.$$

假设 $d^{n-1}u = f^{(n-1)}(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz)^{n-1} \dots\dots 2\text{分}$, 则有

$$\begin{aligned} d^n u &= d(f^{(n-1)}(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz)^{n-1}) \\ &= d(f^{(n-1)}(x + 2y + 3z))(dx + 2dy + 3dz)^{n-1} \\ &= f^{(n)}(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz)^n \quad \dots\dots 2\text{分} \end{aligned}$$

11. (8分) 易知 $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^2 \cos \alpha x + 4x + 8}$ 在 $[0, 1] \times [-1, 1]$ 上连续. 由连续性定理知 $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 \cos \alpha x + 4x + 8} dx$ 关于 α 在 $[0, 1]$ 上连续. (...4分) 于是有

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{x^2 \cos \alpha x + 4x + 8} dx \\ &= \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \cos \alpha x + 4x + 8} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\arctan \frac{x+2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots 4分 \end{aligned}$$

12. (8分) 作球坐标变换: $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$, 于是 $\Omega' = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$, $J = r^2 \sin \varphi$. (...3分) 于是

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \pi^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots\dots 5分 \end{aligned}$$

三、应用题 (共28分)

13. (10分) 记力 $\vec{F}$ 对质点所做的功为 W , 则

$$W = \int_L (x^2 - y + \cos x) dx + (x + \sin^2 y + 2y) dy. \quad \dots\dots 3分$$

记有向直线段 $l: y = 0, x: 2 \rightarrow 0$. 记 D 为由曲线 L 和 l 围成的闭区域. 则由Green公式可得

$$\begin{aligned} W &= \int_L (x^2 - y + \cos x) dx + (x + \sin^2 y + 2y) dy \\ &= \oint_{L+l} (x^2 - y + \cos x) dx + (x + \sin^2 y + 2y) dy - \int_l (x^2 - y + \cos x) dx + (x + \sin^2 y + 2y) dy \\ &= \iint_D 2 dx dy - \int_2^0 (x^2 + \cos x) dx \\ &= \pi + \frac{8}{3} + \sin 2 \quad \dots\dots\dots 7分 \end{aligned}$$

14.(10分) 设所求的流量为 Φ , 则

$$\Phi = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy, \quad \dots\dots\dots 3分$$

其中 Σ 为球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧. 记平面 σ 为: $z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, 并取下侧. 于是 Σ 和 σ 围成闭区域 Ω . ($\dots$ 2分) 由Gauss公式知

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= \iint_{\Sigma+\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 3dxdydz - \iint_D \left[x\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{-\partial z}{\partial y}\right) + z \right] dxdy \\ &= 2\pi R^3 + \iint_D 0dxdy \\ &= 2\pi R^3, \quad \dots\dots\dots 5分 \end{aligned}$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

15. (8分) 设 $P(x, y, z)$ 为曲线上的 $\begin{cases} z - (x^2 + y^2) = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 上的点. 则点P到

原点的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ($\dots$ 1分) 下求函数 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在条

件 $\begin{cases} z - (x^2 + y^2) = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 下的最大值和最小值. 作拉格朗日函数:

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1). \quad \dots\dots\dots 2分$$

由

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - 2x\lambda + \mu = 0 \\ L_y &= 2y - 2y\lambda + \mu = 0 \\ L_z &= 2z + \lambda + \mu = 0 \\ z &= x^2 + y^2 = 0 \\ x + y + z &= 1 \quad \dots\dots\dots 3分 \end{aligned}$$

得 $\lambda = 1$ 或 $x = y$. 若 $\lambda = 1$, 可得 $x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}$, 不成立. 当 $x = y$ 时, 可得: $x_1 = y_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = y_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. 于是 $d_{\min} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$, $d_{\max} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$. 所以曲线上的点到原点的最大距离为 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$, 最小距离为 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$. ($\cdots$ 2分)

四、证明题 (6分)

16. 证明 (1) 记 $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$. 易知, 对 $x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$ 成立 $f(x, \alpha) \leq \frac{1}{1+x^2}$. 由 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$ 收敛和Weierstrass判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$ 关于 α 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 由 $f(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续和连续性定理知, $I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续. ($\cdots$ 3分)

(2) 易知, 对 $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $|\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}| = |\frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}| \leq e^{-\alpha x}$, $|\frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial \alpha^2}| = |\frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2}| \leq e^{-\alpha x}$. 对任意给定的 $\alpha_0 > 0$, 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ 收敛. 由Weierstrass判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ 和 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial \alpha^2} dx$ 关于 α 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛. 显然, $f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ 和 $\frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial \alpha^2}$ 在 $[0, +\infty) \times [\alpha_0, +\infty)$ 上连续. 由可导性定理知 $I'(\alpha)$ 和 $I''(\alpha)$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上存在. 由 α_0 的任意性知, $I'(\alpha)$ 和 $I''(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在. 由 $I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$ 知 $I''(\alpha) + I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. 证毕($\cdots$ 3分)