

一、(6分) 用极限的定义证明: 若数列 $\{a_n\}$ 的奇数项及偶数项收敛于同一极限 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

得分

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$ 知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_1$, 成立 $|a_{2n} - a| < \varepsilon$;
由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a$ 知 $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_2$, 成立 $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$.

于是, 取 $N = \max\{2N_1, 2N_2-1\}$, 则 $\forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$.

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

二、计算下列极限 (每题 6 分, 共 36 分)

得分

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \dots + \cos^2 n}$

解: 因为 $\sqrt[n]{\cos^2 1} < \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \dots + \cos^2 n} < \sqrt[n]{n}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

所以由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \dots + \cos^2 n} = 1$.

夹逼、夹逼

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1) \cdot \frac{n+1}{2n+1}}$
 $= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + u_n)^{v_n} \quad (u_n \rightarrow 0, v_n \rightarrow \infty)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{v_n}{v_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n}} \cdot \frac{v_n}{v_n}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n \sin(\sqrt{n^2 + 2} \pi)$

初等变形

解: 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin(\sqrt{n^2 + 2} \pi - n\pi)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$, Heine 定理

= $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{(n^2 + 2)\pi^2 - (n\pi)^2}{\sqrt{n^2 + 2} \pi + n\pi}$

= $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{2\pi^2}{\sqrt{n^2 + 2} \pi + n\pi}$

= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi^2}{\sqrt{n^2 + 2} \pi + n\pi}}{\frac{2\pi^2}{\sqrt{n^2 + 2} \pi + n\pi}} \cdot n \cdot \frac{2\pi^2}{\sqrt{n^2 + 2} \pi + n\pi}$

= π

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - \cos x}{\tan^2 x}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - \cos x}{x^2}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} (\sin x + x \cos x) + \sin x}{2x}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \sin x} \left(\frac{\sin x}{2x} + \frac{x \cos x}{2x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

= $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

① 等价无穷小: ($x \rightarrow 0$)

$\sin x, \tan x, \ln(1+x) \sim x$

$e^x \sim 1+x, 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$\arcsin x, \arctan x \sim x$

$(1+x)^a \sim 1+ax, a^x \sim 1+x \ln a$

② 洛比达法则

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + (1 - \cos x) \right]^{\frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}}$

= $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \sqrt{1+6x} - e^{-3x}}{\ln(1-x^2)}$

Taylor 公式

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 + 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)) - (1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2))}{-x^2 + o(x^2)}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = 1$

三、计算与求解(每题 7 分, 共 28 分)

得分

1. 求 $(x^2 e^x)^{(10)}$.

高阶导数, Leibniz 公式

解: $(x^2 e^x)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{(k)} (e^x)^{(10-k)}$

= $C_{10}^0 x^2 e^x + C_{10}^1 \cdot 2x \cdot e^x + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot e^x$

= $(x^2 + 20x + 90)e^x$

2. 求 $f(x) = e^x \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的三阶 Taylor 公式(展开到 x^3).

解: $e^x \ln(1+x) = (1+x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$

= $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Taylor 公式.

直接法或间接法

3. 求函数 $f(x) = xe^{-x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大、最小值和上凸、下凸区间.

解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$, $f''(x) = -2x(3-2x^2)e^{-x^2}$

最值, 凸性区间

(1) 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 令 $f''(x) = 0$ 解得 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ 时, $f''(x) < 0$; $x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 时, $f''(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的上凸区间为 $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$,

下凸区间为 $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

4. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1}$.

解: $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

参数方程求导

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3} = \frac{t^2 + 1}{4t}$$

四、分析与证明题(共 30 分).

得分

1. (6 分)证明: 当 $x \in (0,1]$ 时, $\sin^2 x < \sin x^2$.

不等式证明, 利用导数判断单调性

证明: 当 $x \in (0,1]$ 时, $\sin x < x$, $\omega x < \omega x^2$

$$\text{令 } f(x) = \sin^2 x - \sin x^2, x \in [0,1].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f'(x) &= 2 \sin x \omega x - 2x \omega x^2 < 2x \omega x - 2x \omega x^2 \\ &= 2x(\omega x - \omega x^2) < 0, x \in (0,1). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递减.

又因为 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) < f(0) = 0, \forall x \in (0,1]$.

也即: 当 $x \in (0,1]$ 时, $\sin^2 x < \sin x^2$.

2. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$ 且 $0 < f(x) < x (x \in (0,a))$.

令 $x_{n+1} = f(x_n)$, 其中 $x_1 \in (0,a)$.

(1) 证明: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

数列收敛性
Stolz 公式

证: (1) 由 $x_1 \in (0,a)$, $0 < f(x) < x (x \in (0,a))$ 知 $0 < x_{n+1} = f(x_n) < x_n < a, n=1,2,\dots$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 则 $0 \leq b < a$.

在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时令 $n \rightarrow \infty$ 得 $b = f(b)$.

又由 $0 < f(x) < x, x \in (0,a)$, 所以 $b = 0$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b = 0, f(0) = f(b) = b = 0$.

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 处带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \text{ 其中 } \xi \in (0,x).$$

$$\text{因此, } x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1} + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}x_{n-1}^2 = x_{n-1} \left(1 + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}x_{n-1}\right), \text{ 其中 } \xi_{n-1} \in (0, x_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^2 \left(1 + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}x_{n-1}\right)}{-\frac{f''(\xi_{n-1})}{2}x_{n-1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(2 + f''(\xi_{n-1})x_{n-1})}{f''(\xi_{n-1})} \end{aligned}$$

所以 $\{nx_n\}$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = -\frac{2}{f''(0)}$. 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f''(\xi_{n-1}) = f''(0)$.

3. (7 分) 证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证明: 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

另外, 由于 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 上一致连续, 所以 $\exists \delta_1 > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, X+1]$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立.

取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$, 则 $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有下面两种可能情形:

(1) $x_1, x_2 \in [a, X+1]$. 此时 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

(2) $x_1, x_2 \in (X, +\infty)$. 此时 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

综上, 可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, 1\}, \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

4. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$ 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (a, b), f(\xi) = 0$;

(2) 存在 $a < \xi_1 < \xi_2 < b, f'(\xi_1) = f(\xi_1), f'(\xi_2) = f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta \in (a, b), f''(\eta) = f(\eta)$.

证明: (1) 由 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ 知 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 同号. 不妨设 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$.

由 $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ 知 $\exists \delta_1 > 0$, 使 $\forall x \in (a, a + \delta_1)$, 都有 $f(x) > f(a) = 0$.

同理, 由 $f'_-(b) > 0$ 知 $\exists \delta_2 > 0$, 使 $\forall x \in (b - \delta_2, b)$, 都有 $f(x) < f(b) = 0$.

由于 $f(x) \in C[a, b]$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在极大值与最小值, 分别记为 M, m .

显然 $m < 0 < M$. 从而由介值定理知 $\exists \xi \in (a, b)$ 满足 $f(\xi) = 0$.

(2) 令 $F(x) = \begin{cases} f'(x) - f(x), & x \in (a, b) \\ f'_+(a) - f(a), & x = a \\ f'_-(b) - f(b), & x = b \end{cases}$ 显然 $F(x) \in C[a, b]$ 且 $F(a) = f'_+(a) - f(a) > 0, F(b) = f'_-(b) - f(b) > 0$.

记 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点为 β , 则 $f(\beta) = M$ 且 $\beta \in (a, b)$, 所以 β 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 故 $f'(\beta) = 0$.

则 $F(\beta) = f'(\beta) - f(\beta) = -f(\beta) = -M < 0$, 而 $F(a) > 0, F(b) < 0, F(x) \in C[a, b]$,

所以由介值定理知 $\exists \xi_1 \in (a, \beta) \subset (a, b)$ 使得 $F(\xi_1) = 0, \exists \xi_2 \in (\beta, b) \subset (a, b)$ 使得 $F(\xi_2) = 0$,

进而有 $f'(\xi_1) = f(\xi_1), f'(\xi_2) = f(\xi_2)$, 且 $a < \xi_1 < \xi_2 < b$.

(3) 令 $G(x) = e^x (f'(x) - f(x)), x \in [\xi_1, \xi_2]$. 则 $G(\xi_1) = G(\xi_2) = 0, G(x) \in C[\xi_1, \xi_2]$ 且在 (ξ_1, ξ_2) 内可导.

由 Rolle 中值定理知 $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使得 $G'(\eta) = 0$,

也即 $e^\eta (f''(\eta) - f(\eta)) = 0$, 进而有 $f''(\eta) = f(\eta)$. 证毕.