

实变函数期末

1. (10') 设 $f_k(x) \in L^1(\mathbb{R}_n)$, ($k \in \mathbb{N}$) 且在 $L^1(\mathbb{R}_n)$ 中 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 收敛到 f . 证明 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f .

2. (30') 概念题

(1) 叙述控制收敛定理, 并用控制收敛定理推导有界收敛定理.

(2) 给出有界闭区间 $[a, b]$ 上绝对连续函数的定义, 并证明绝对连续函数是有界变差函数.

3. (10') 设 $E_1, \dots, E_n$ 是 $[0, 1]$ 上的可测子集且 $\sum_{i=1}^n m(E_i) > n - 1$, 证明 $m\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) > 0$.

4. (15') 对 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数 f , $E_a = \{x \mid |f(x)| > a\}$, ($\forall a > 0$), 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} m(E_a) da.$$

5. (15') 对函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 证明 f Lipschitz 连续当且仅当它满足

(1) f 绝对连续; (2) $|f'(x)| \leq L$, a.e. x .

6. (10') 对 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可积函数 f , 若对任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\int_E f(x) dx \geq 0$, 证明 $f(x) \geq 0$ a.e. x .

7. (10') 对 $[0, 1]$ 上的连续单增函数 f , 显然 f 几乎处处可微, 证明:

$$\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0).$$