

《电磁场与电磁波》

典型例题

2024年12月17日

第一章 静电场 (叠加积分法) 😊

例1.1.1 真空中有一长为 L 的均匀带电直导线，电荷线密度为 τ ，试求 P 点的电场。

解：轴对称场，圆柱坐标系。

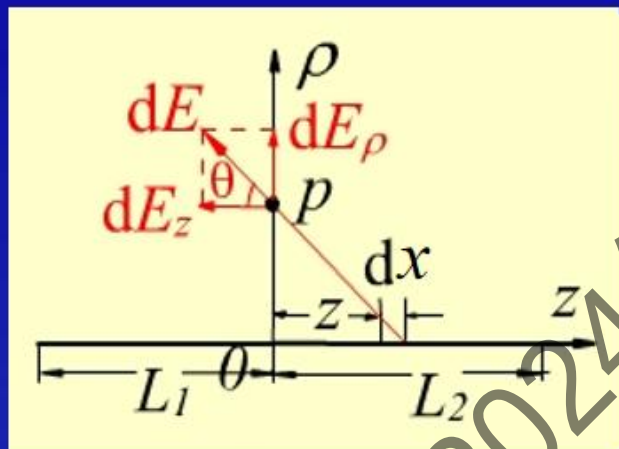


图1.1.5 带电长直导线的电场

$$dE(z, \rho) = \frac{\tau dz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho^2)}$$

$$dE_z = -dE \cos \theta$$

$$dE_\rho = dE \sin \theta$$

$$dE_z = \frac{-z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} dE$$

$$dE_\rho = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} dE$$

第一章 静电场 (叠加积分法) ☺

$$E_z = \int_{-L_1}^{L_2} \frac{-\tau z}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho^2)^{3/2}} dz = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{L_2^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_1^2 + \rho^2}} \right)$$

$$E_\rho = \int_{-L_1}^{L_2} \frac{\tau\rho}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho^2)^{3/2}} dz = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\rho} \left(\frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + \rho^2}} + \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + \rho^2}} \right)$$

当 $L = L_1 + L_2 \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = E_\rho \mathbf{e}_\rho + E_z \mathbf{e}_z = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho$$

无限长直导线产生的电场

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho \quad \text{平行平面场。}$$

第一章 静电场 (高斯定理法) 😊

例:单芯电缆有两层绝缘, 内外导体间电压为 U , 求电缆中电场的分布。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_l L$$

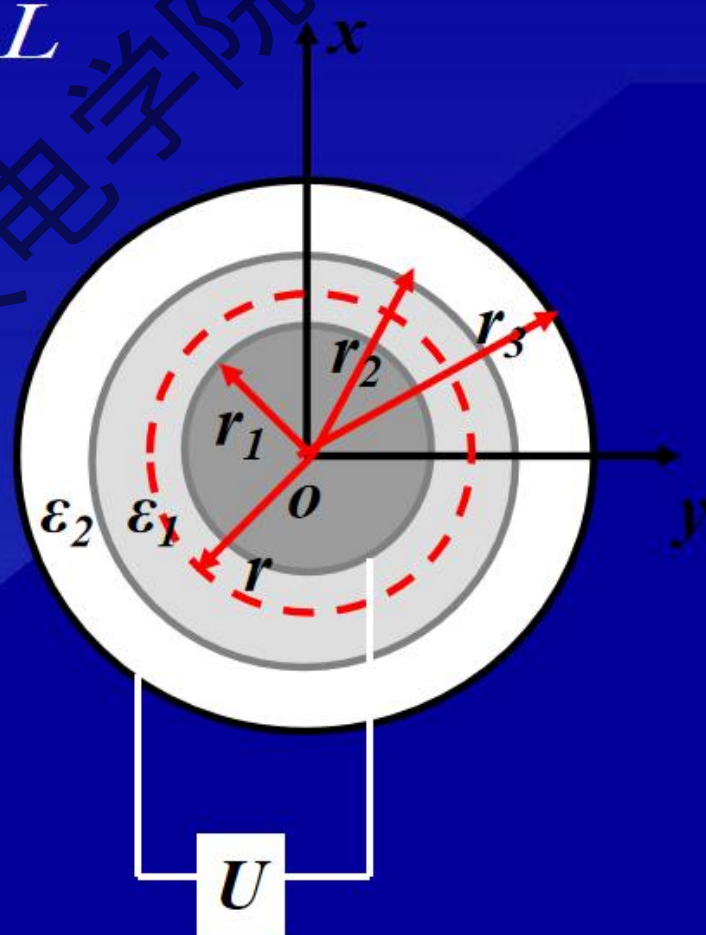
得 $D \cdot 2\pi r L = \rho_l L$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_l}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1} = \frac{\rho_l}{2\pi r \varepsilon_1} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2} = \frac{\rho_l}{2\pi r \varepsilon_2} \mathbf{e}_r$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr$$



第一章 静电场

(高斯定理法)



$$\rho_l = \frac{2\pi U}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} \mathbf{e}_r$$

代入，写出 E_1 和 E_2

$$\varphi = \int_r^{r_3} E_2 dr \quad r_2 < r < r_3$$

$$r = r_2$$

$$\varphi = \varphi_{r_2} + \int_r^{r_2} E_1 dr \quad r_1 < r < r_2$$

$$r = r_1$$

第一章 静电场

(分界面衔接条件法)



例：已知 $y=0$ 平面为两种电介质的分界面，介质2一侧的电场强度为 $E = e_x 10 + e_y 20 \text{ V/m}$ ，分界面两侧的介电常数分别为 $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$ ， $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ 。求 D_1 、 D_2 和 E_1 。

解：

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 = 3\epsilon_0 E_2 = \epsilon_0 (e_x 30 + e_y 60)$$

$$\text{设 } E_1 = A e_x + B e_y$$

$$\text{由 } E_{1t} = E_{2t} \text{ 得 } A = 10$$

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ 得 } 5\epsilon_0 B = 60\epsilon_0, \quad B = 12$$

所以，

$$E_1 = 10 e_x + 12 e_y,$$

$$D_1 = 5\epsilon_0 (10 e_x + 12 e_y) = \epsilon_0 (50 e_x + 60 e_y)$$

第一章 静电场 (边值问题法)



例1.4.3 试求体电荷产生的电位及电场。

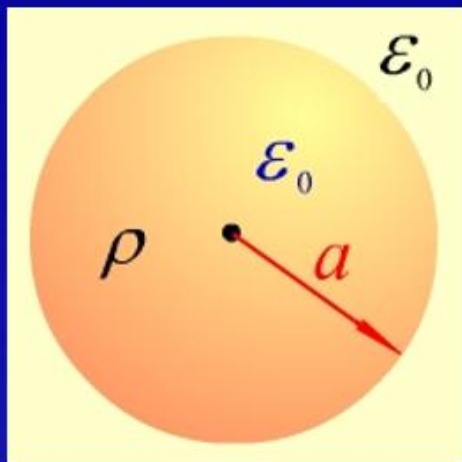


图1.4.2 体电荷分布的球体

解：采用球坐标系,分区域建立方程

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (r \leq a)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad (a < r < \infty)$$

$$\text{通解} \quad \varphi_1(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_1 \frac{1}{r} + C_2 \quad \varphi_2(r) = \frac{C_3}{r} + C_4$$

$$\text{边界条件} \quad \varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad \varphi_1|_{r \rightarrow 0} = \text{有限值}$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad \varphi_2|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{参考电位}$$



得到

$$\varphi_1(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2) \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \quad a \leq r \leq \infty$$

电场强度 (球坐标梯度公式) :

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{E}_1(r) = -\nabla\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_r \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\mathbf{E}_2(r) = -\nabla\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \quad a \leq r \leq \infty$$

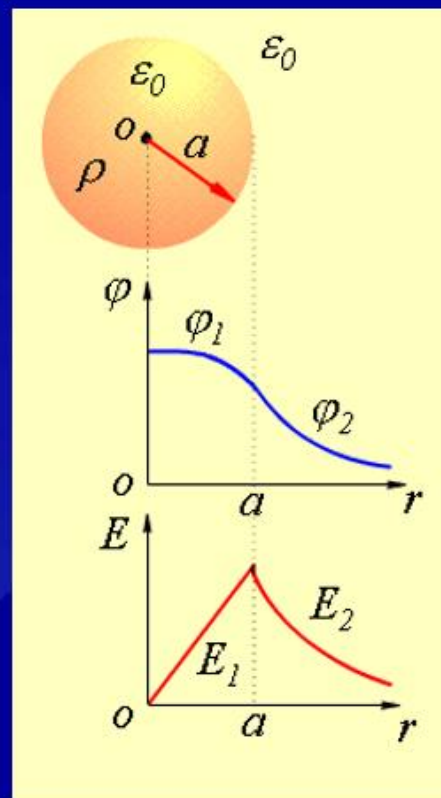


图1.4.3 φ, E 随 r 变化曲线

第一章 静电场 (边值问题法)



例：单芯电缆有两层绝缘，内外半径为 a 、 b ，中间填充绝缘介质的介电常数为 ε ，内外导体间电压为 U ，求电场的分布。

解：采用圆柱坐标系，建立方程

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

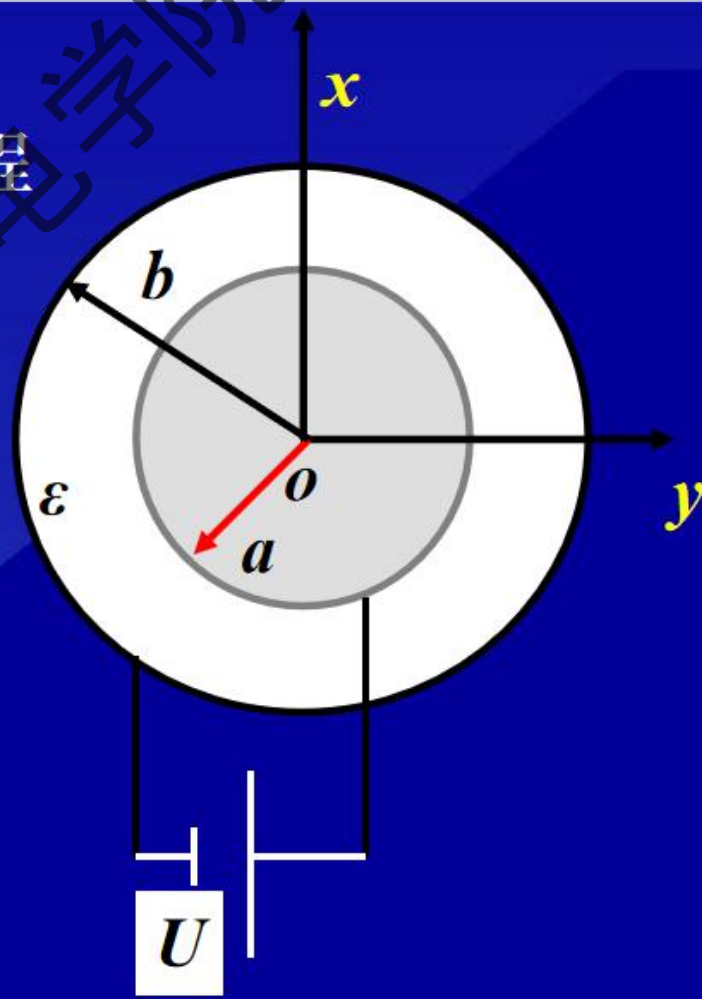
通解

$$\varphi = B \ln r + C$$

边界条件

$$r = a, \phi = U$$

$$r = b, \phi = 0$$



第一章 静电场

(边值问题法)



$$B = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \quad C = -\frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln b$$

$$\varphi = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln r - \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln b = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b}$$

$$E(r) = -\nabla \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} r^0 = -\frac{U}{r \ln \frac{a}{b}} r^0$$



例1.8.1 试求同心球壳电容器的电容。

解： 设内导体的电荷为 q ，则

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

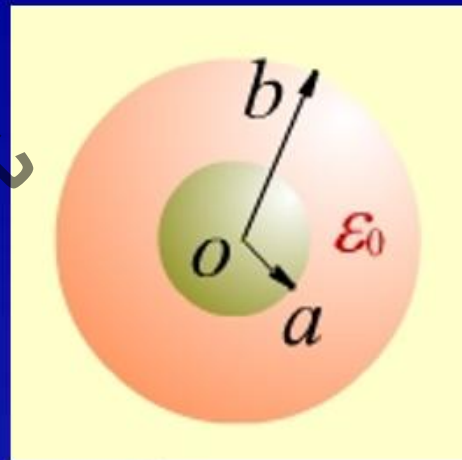


图1.8.1 同心球壳电容器

同心球壳间的电压

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

球形电容器的电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

当 $b \rightarrow \infty$ 时 $C = 4\pi\epsilon_0 a$ (孤立导体球的电容)

第二章 恒定电场 (欧姆定律)



例 3-1 设同轴线的内导体半径为 a , 外导体的内半径为 b , 内、外导体间填充电导率为 σ 的导电媒质, 如图 3-5 所示, 求同轴线单位长度的漏积电导。

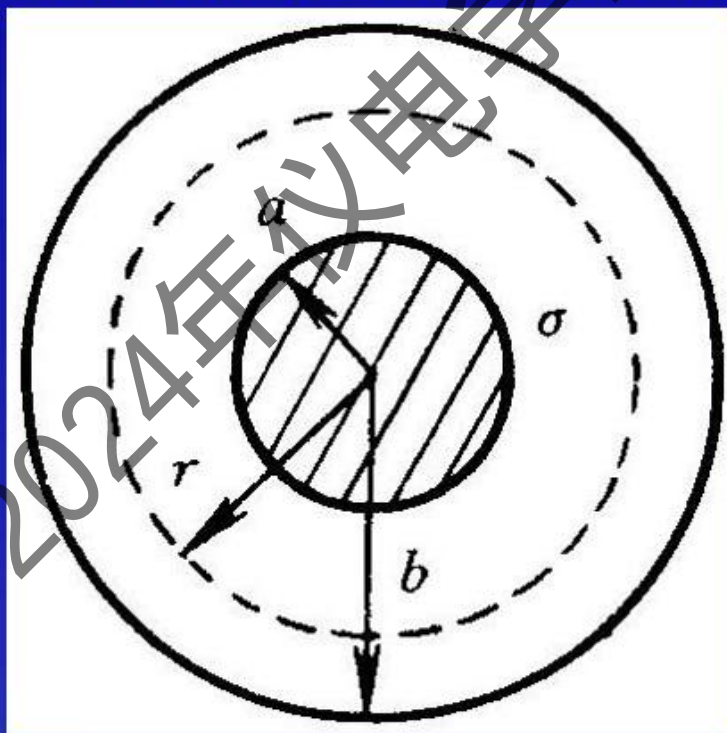


图 3-5 同轴线横截面

第二章 恒定电场 (欧姆定律)



解：媒质内的漏电电流沿径向从内导体流向外导体，设流过半径为 r 的任一同心球面的漏电电流为 I ，则媒质内任一点的电流密度和电场为

$$J = \frac{I}{2\pi r L} e_r$$

$$E = \frac{I}{2\pi \sigma r L} e_r$$

内、外导体间的电压为

$$U = \int_{R1}^{R2} \frac{I}{2\pi r L \sigma} dr = \frac{I}{2\pi L \sigma} \left(\ln \frac{R2}{R1} \right)$$

第二章 恒定电场 (欧姆定律)



计算媒质内的焦耳损耗功率

$$G = \frac{1}{2\pi L \sigma} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$P = \int_V J \cdot E dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{I^2}{(2\pi r L)^2 \sigma} r dr d\varphi dz$$

第二章 恒定电场

(边值问题法)



例2.3.2 试用边值问题求解电弧片中电位、电场及导体分界面上的面电荷分布。

解： 选用圆柱坐标系，边值问题为：

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\gamma_1 \text{ 区域})$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\gamma_2 \text{ 区域})$$

$$\varphi_2 \Big|_{\phi=0} = 0 \quad \varphi_1 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = U_0$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} \text{ 时}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi}$$

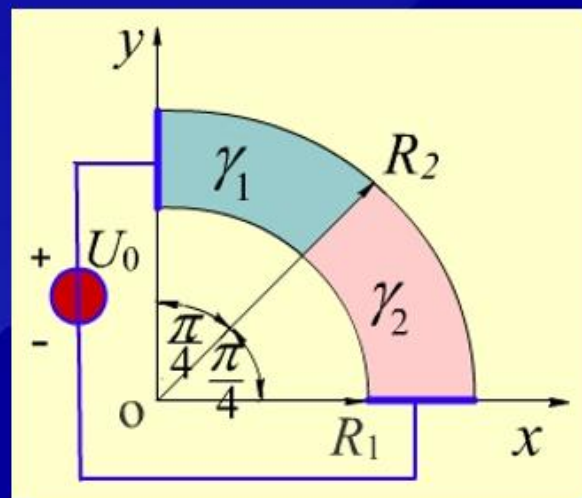


图2.3.4 不同媒质弧形导电片

第二章 恒定电场

(边值问题法)



通解 $\varphi_1 = A\phi + B$, $\varphi_2 = C\phi + D$

电位 $\varphi_1 = \frac{4\gamma_2 U_0}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)} \phi + \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)U_0}{\gamma_1 + \gamma_2}$

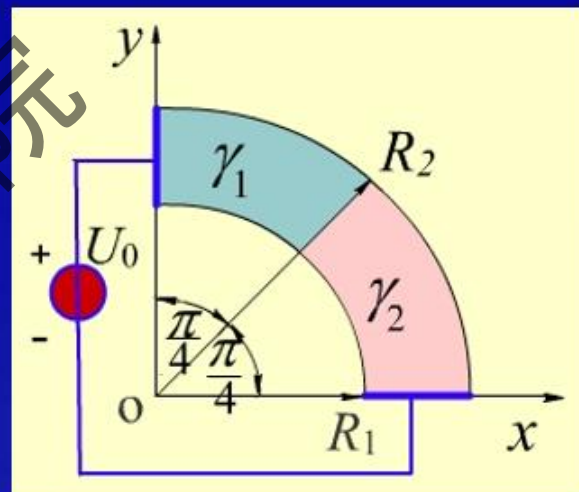
$$\varphi_2 = \frac{4\gamma_1 U_0}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)} \phi$$

电场强度

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{4\gamma_2 U_0}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)\rho} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{4\gamma_1 U_0}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)\rho} \mathbf{e}_\phi$$

电荷面密度

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_0 E_2 = \frac{4\varepsilon_0 U_0}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)\rho} (\gamma_1 - \gamma_2)$$





1 比拟方法 (Contrast Method)

静电场 ($\rho = 0$)	恒定电场 (电源外)	静电场	恒定电场
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	E	E
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	D	J
$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$	ε	γ
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$	φ	φ
$q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	q	I



2. 比拟法

当满足比拟条件时，用比拟法由电容计算电导。

$$\begin{aligned}\frac{C}{G} &= \frac{Q/U}{I/U} \\ &= \frac{\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} / \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} / \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\varepsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{\varepsilon}{\gamma}\end{aligned}$$

即

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$



例2.5.1 求图示同轴电缆的绝缘电阻。

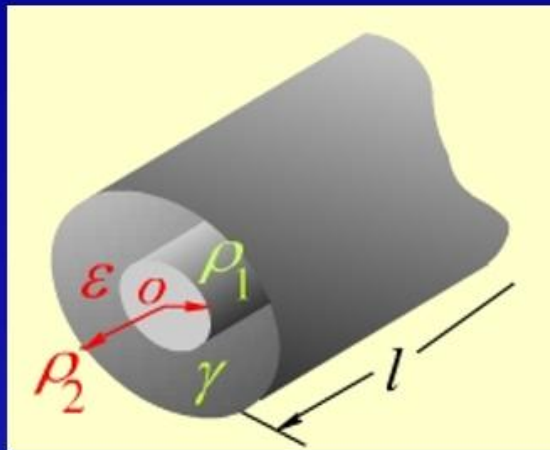


图2.5.1 同轴电缆横截面

解 设 $I \rightarrow J = \frac{I}{2\pi\rho l} \rightarrow E = \frac{I}{2\pi\rho l\gamma}$

$$U = \int_l E \cdot dl = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{I}{2\pi\rho l\gamma} d\rho = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

电导 $G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$

用静电比拟法求解

由静电场 $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$, 根据 $\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\gamma}$ 关系式, 得

绝缘电阻 $R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$



1. 深埋球形接地器

解法一 通过电流场计算电阻

$$I \rightarrow J = \frac{I}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{I}{4\pi \gamma r^2} \rightarrow$$

$$U = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi \gamma r^2} dr = \frac{I}{4\pi \gamma a}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi \gamma a}$$

解法二 比拟法

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

$$C = 4\pi \varepsilon a, \quad G = 4\pi \gamma a,$$

$$R = \frac{1}{4\pi \gamma a}$$

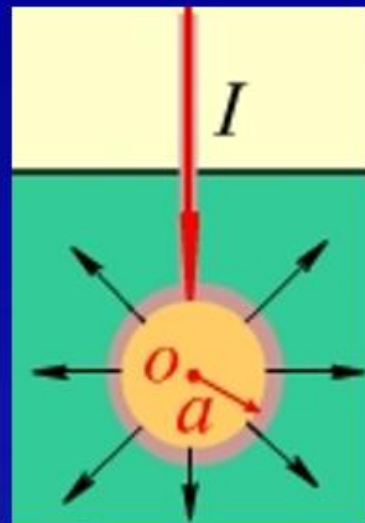


图2.5.3 深埋球形接地器

第三章 恒定磁场

(叠加积分法)



例3.1.1 试求有限长直载流导线产生的磁感应强度。

解：采用圆柱坐标系，取电流 $I dz$,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad \text{式中 } R^2 = \rho^2 + z^2$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R = dz \sin \theta \mathbf{e}_\phi = dz \sin \alpha \mathbf{e}_\phi = \frac{\rho}{R} dz \mathbf{e}_\phi$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L_2}^{L_1} \frac{I \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{L_1}{\sqrt{\rho^2 + L_1^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{\rho^2 + L_2^2}} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$$

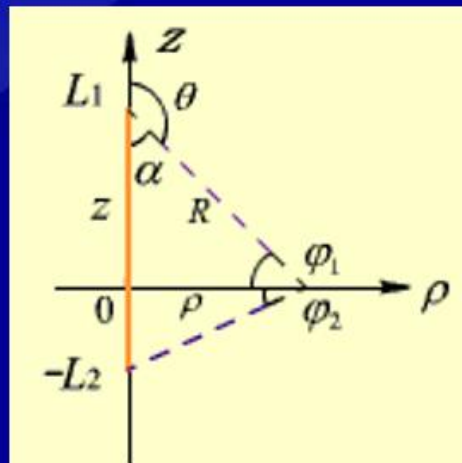


图3.1.2 长直导线的磁场

当 $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$

第三章 恒定磁场

(叠加积分法)



例3.1.1 试求有限长直载流导线产生的磁感应强度。

解：采用圆柱坐标系，取电流 $I dz$,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2} \quad \text{式中 } R^2 = \rho^2 + z^2$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R = dz \sin \theta \mathbf{e}_\phi = dz \sin \alpha \mathbf{e}_\phi = \frac{\rho}{R} dz \mathbf{e}_\phi$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L_2}^{L_1} \frac{I \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{L_1}{\sqrt{\rho^2 + L_1^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{\rho^2 + L_2^2}} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$$

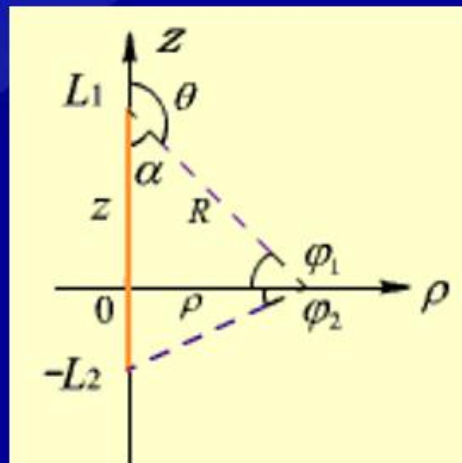


图3.1.2 长直导线的磁场

当 $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$

第三章 恒定磁场

(叠加积分法)



例 3.1.2 真空中有一载流为 I ，半径为 R 的圆环，试求其轴线上 P 点的磁感应强度 B 。

解： 元电流 $I dl$ 在 P 点产生的 B 为

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times e_r}{4\pi r^2} \quad (Idl \perp e_r)$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi (R^2 + x^2)}$$

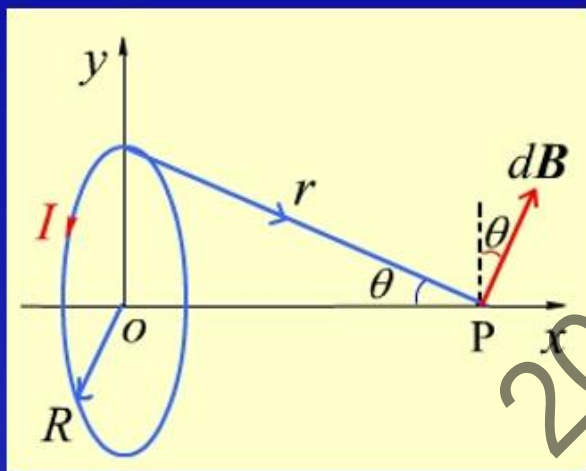


图3.1.3 圆形载流回路

根据圆环电流对 P 点的对称性，

$$dB_x = dB \sin \theta \quad dB_y = 0$$

$$\sin \theta = R / r$$

第三章 恒定磁场

(叠加积分法)



$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \sin \frac{\pi}{2}}{4\pi(R^2 + x^2)} \sin \theta$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + x^2)} \sin \theta \oint dl \right] \mathbf{e}_x$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + x^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot 2\pi R \right] \mathbf{e}_x$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x$$

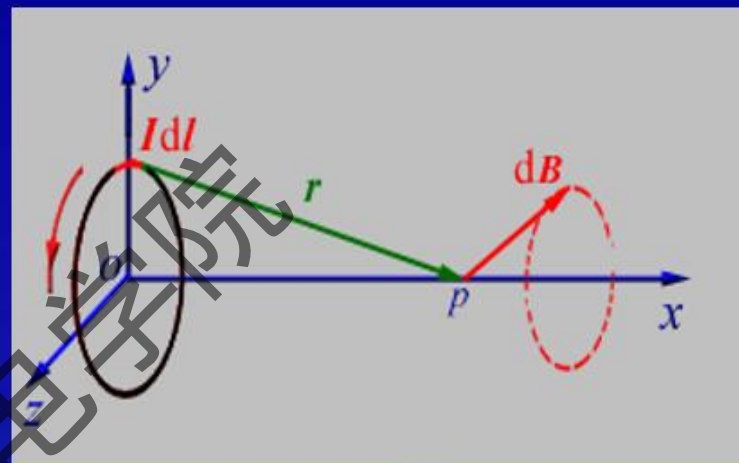


图3.1.4 圆形载流回路轴线上的
磁场分布

第三章 恒定磁场

(安培环路定律法) 😊

例 3.2.2 试求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

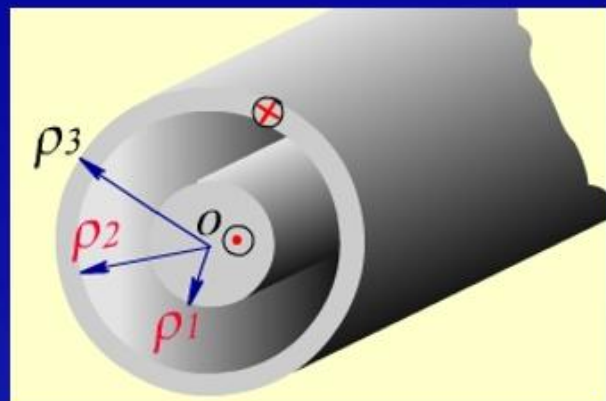


图3.2.10 同轴电缆

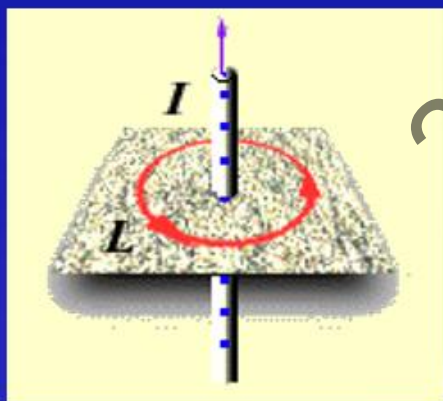


图3.2.11 安培定律示意图

解： 平行平面磁场， $B = B(\rho)e_\phi$

1) $0 \leq \rho < \rho_1$

安培环路定律 $\oint_l B \cdot dl = \mu_0 I'$

$$I' = \frac{I}{\pi \rho_1^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$$

$$\oint_l B \cdot dl = 2\pi \rho B = \mu_0 \frac{I \rho^2}{\rho_1^2}$$

故 $B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi \rho_1^2} e_\phi$

第三章 恒定磁场

(安培环路定律法) 😊

$$2) \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B = \mu_0 I$$

得到
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} e_\phi$$

$$3) \quad \rho_2 \leq \rho < \rho_3,$$

$$I' = I - I \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} = I \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B = \frac{\mu_0 I (\rho_3^2 - \rho^2)}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

得到
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} e_\phi$$

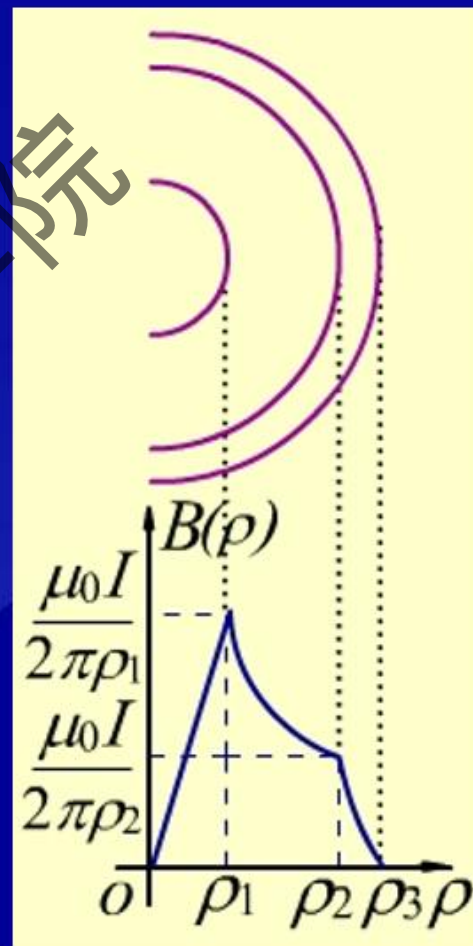
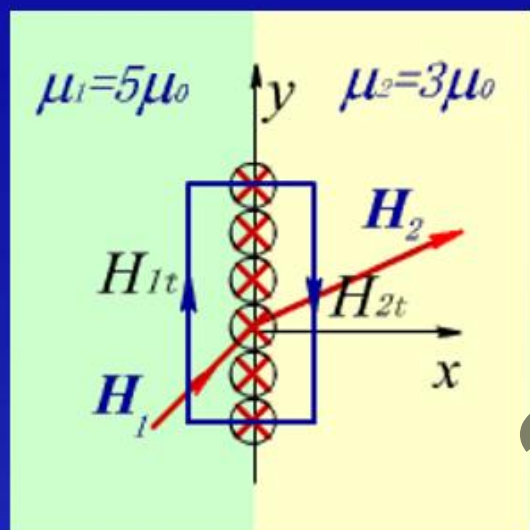


图3.2.12 同轴电缆的磁场分布



例 3.3.3 在两种媒质分界面处, $\mu_1 = 5\mu_0$, $\mu_2 = 3\mu_0$
面电流 $K = -4e_z$ A/m, 且 $H_1 = 6e_x + 8e_y$ A/m,
试求 B_1 , B_2 与 H_2 的分布。



解: $B_1 = \mu_1 H_1 = 5\mu_0(6e_x + 8e_y)$

$$B_{1x} = B_{2x} \text{ 得 } B_{2x} = 30\mu_0 \quad H_{2x} = \frac{B_{2x}}{\mu_2} = 10$$

$$(H_{1y} - H_{2y}) \times e_x = -K_z e_z \quad H_{2y} = H_{1y} - K = 8 - 4 = 4$$

$$(H_{1z} - H_{2z}) \times e_x = K_y e_y \quad H_{1z} = H_{2z}$$

图3.3.4 含有 K 的分界面
衔接条件

即 $H_2 = H_{2y}e_y + H_{2x}e_x = 10e_x + 4e_y$ A/m

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \mu_0(30e_x + 12e_y) \quad \text{T}$$



例3.4.2 应用磁矢位 A , 试求空气中长直载流细导线产生的磁场。

解: 定性分析场分布, $A = Ae_z$

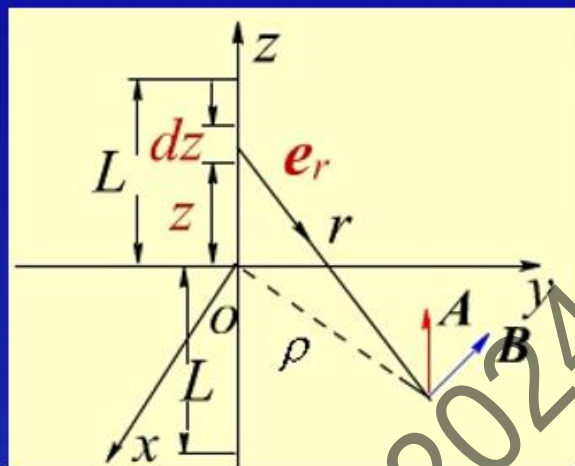


图3.4.4 长直载流细导线的磁场

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln(z + \sqrt{\rho^2 + z^2}) \right]_{-L}^L \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln(L + \sqrt{\rho^2 + L^2}) - \ln(-L + \sqrt{\rho^2 + L^2}) \right] \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho} \quad (L \gg \rho)$$

磁感应强度 $B = \nabla \times A = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} e_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} e_\phi$



3.5.3 磁位、磁矢位与电位的比较

(Comparison of φ_m , A and φ)

位函数 比较内容	电位 φ (有源或无源)	磁位 φ_m (无源)	磁矢位 A (有源或无源)
引入位函数依据	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = 0$
位与场的关系	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ $\varphi = \int_p^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ $\varphi_m = \int_p^0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
微分方程	$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$	$\nabla^2 \varphi_m = 0$	$\nabla^2 A = -\mu J$
位与源的关系	$\varphi = \int_{V'} \frac{\rho dV}{4\pi \varepsilon r}$	$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega$	$A = \int_V \frac{\mu_0 J dV}{4\pi r}$

第三章 恒定磁场 (电感的计算) 😊

求自感的一般步骤:

$$\text{设 } I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow \psi \rightarrow L(L_1, L_0)$$

$\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad A \quad \quad \quad$

第三章 恒定磁场

(电感的计算)



例 3.7.1 试求图示长为 l 的同轴电缆的自感 L 。

解: 1. 内导体的内自感 ($0 \leq \rho \leq \rho_1$)

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{\rho_1^2} \rho^2 = \frac{I}{\rho_1^2} \rho^2$$

$$H = \frac{I}{2\pi\rho_1^2} \rho, \quad \text{匝数} \quad N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$$

$$\text{磁通} \quad d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1^2} \rho l d\rho$$

$$\text{因此,} \quad \psi_{i1} = \int_S N d\phi = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi\rho_1^2} \frac{\rho^2}{\rho_1^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

$$\text{内自感} \quad L_{i1} = \frac{\psi_{i1}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

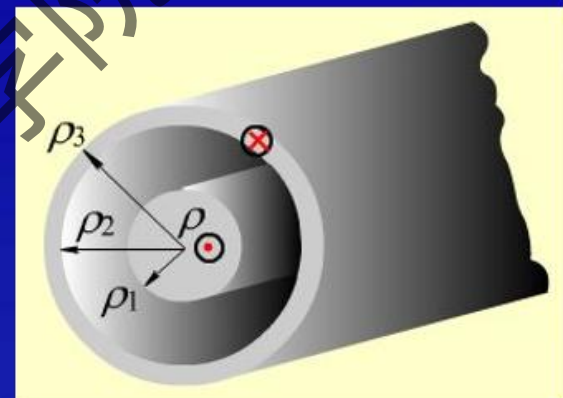


图3.7.2 同轴电缆截面

第三章 恒定磁场 (电感的计算) ☺

2. 外导体内自感 ($\rho_2 \leq \rho \leq \rho_3$)

由例3.2.2 知

$$B = \frac{I'\mu_0}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

$$d\Phi_{i2} = B dS = B \cdot l d\rho$$

匝数 $N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$

$$L_{i2} = \frac{1}{I} \int_{\rho_2}^{\rho_3} N B l d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{\rho_3^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)^2 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\mu_0 l \rho_3^2}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)} + \frac{\mu_0 l (\rho_3^2 + \rho_2^2)}{8\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}$$

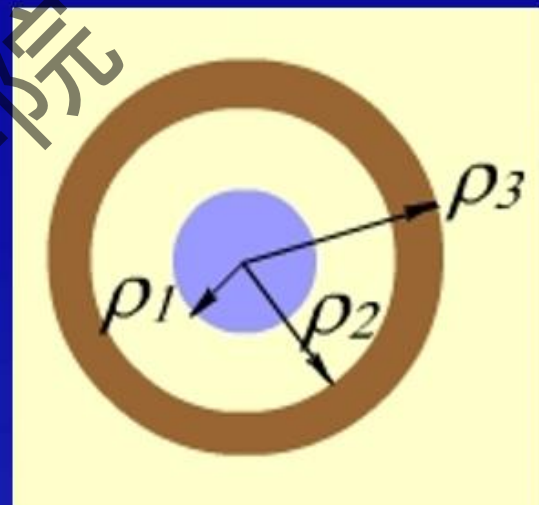


图3.7.3 同轴电缆

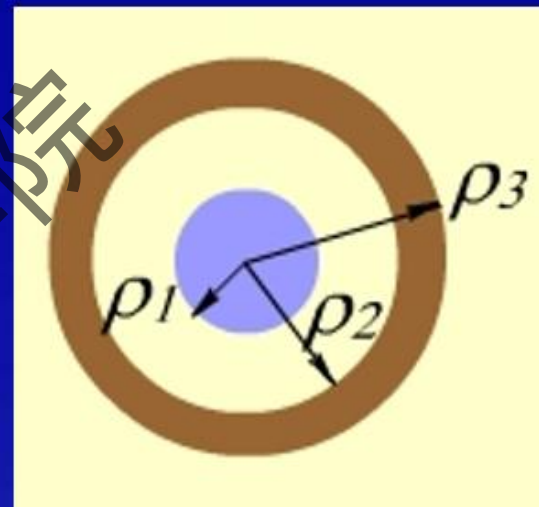
3. 外自感 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$d\psi_0 = d\Phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$L_0 = \frac{\psi_0}{I} = \frac{1}{I} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

总自感 $L = L_0 + L_{i1} + L_{i2}$



第三章 恒定磁场

(电感的计算)



例 3.7.2 试求半径为 R 的两平行传输线自感。

解: 内自感 $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$, 总自感 $L = 2L_i + L_0$

解法一 由 $B \rightarrow L_0$

$$\text{设 } I \rightarrow B = \frac{I\mu_0}{2\pi x} + \frac{I\mu_0}{2\pi(D-x)} \rightarrow$$

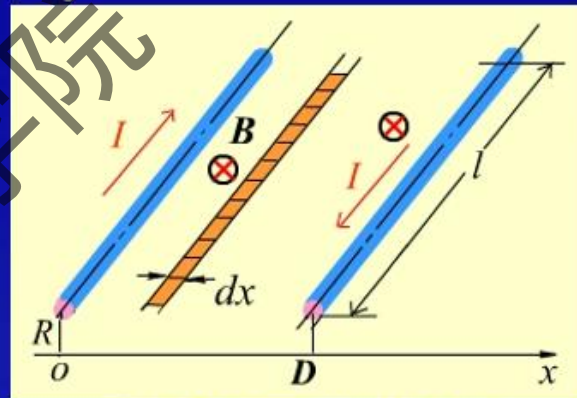


图3.7.4 两线传输线

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{D-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(D-x)} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$L_0 = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$\text{总自感为 } L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

第三章 恒定磁场

(电感的计算)



解法二 由 $A \rightarrow L_0$

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} e_z$$

$$A_1|_{x=R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{D-R}{R} \right) e_z$$

$$A_2|_{x=D-R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{D-R} \right) e_z$$

$$\psi = \oint_l A \cdot dl = A_1 l - A_2 l = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R} = L_0 I$$

$$L_0 = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

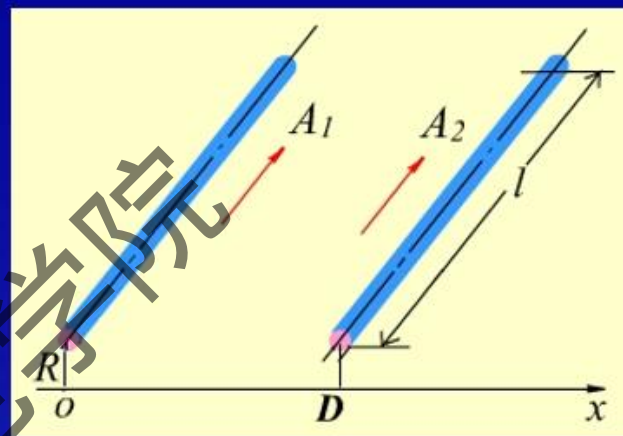


图3.7.5 双线传输线

第四章 时变电磁场

(位移电流) ☺

关于电流

- 传导电流：带电粒子在电场的作用下的定向运动。
- 位移电流：具有磁效应，可以产生磁场。但与带电粒子的定向运动无关。

例 海水的电导率为 4S/m ，相对介电常数为 81 ，求频率为 1MHz 时，位移电流与传导电流的比值。

解：设电场随时间作正弦变化，表示为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_m \cos \omega t$

则位移电流密度为 $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mathbf{e}_x \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m \sin \omega t$

其幅值为

$$J_{dm} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m = 4.5 \times 10^{-3} E_m$$

传导电流的幅值为 $J_{cm} = \gamma E_m = 4 E_m$

故

$$\frac{J_{dm}}{J_{cm}} = 1.125 \times 10^{-3}$$

第四章 时变电磁场

(位移电流) ☺

例 计算铜中的位移电流密度和传导电流密度的比值。设铜中的电场为 $E_0 \sin \omega t$ ，铜的电导率为 $6.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ， $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ 。

解：铜中的传导电流大小为

$$J_c = \gamma E_0 \sin(\omega t)$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon E_0 \cos \omega t$$

$$\frac{J_d}{J_c} = \frac{\omega \varepsilon}{\gamma} = \frac{2\pi f \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{5.8 \times 10^7} = 9.6 \times 10^{-19} f$$



例 在无源的自由空间中, 已知磁场强度

$$H = e_y 2.63 \times 10^{-5} \cos(3 \times 10^9 t - 10z) \quad (A/m)$$

求位移电流密度 J_d 。

解: 无源的自由空间中 $J=0$,

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times H = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= -e_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = -e_x 2.63 \times 10^{-4} \sin(3 \times 10^9 t - 10z) \quad (A/m^2)$$

第四章 时变电磁场 (麦克斯韦方程组计算场分布)

例 已知在无源的自由空间中, $E = e_x E_0 \cos(\omega t - \beta z)$

其中 E_0 、 β 为常数, 求 H 。

解: 所谓无源, 就是所研究区域内没有场源电流和电荷, 即 $J=0$, $\rho=0$ 。

$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$



等式两边写为：

$$e_y E_0 \beta \sin(\omega t - \beta z) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (e_x H_x + e_y H_y + e_z H_z)$$

由上式可以写出：

$$H_x = 0, H_z = 0$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = E_0 \beta \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z)$$

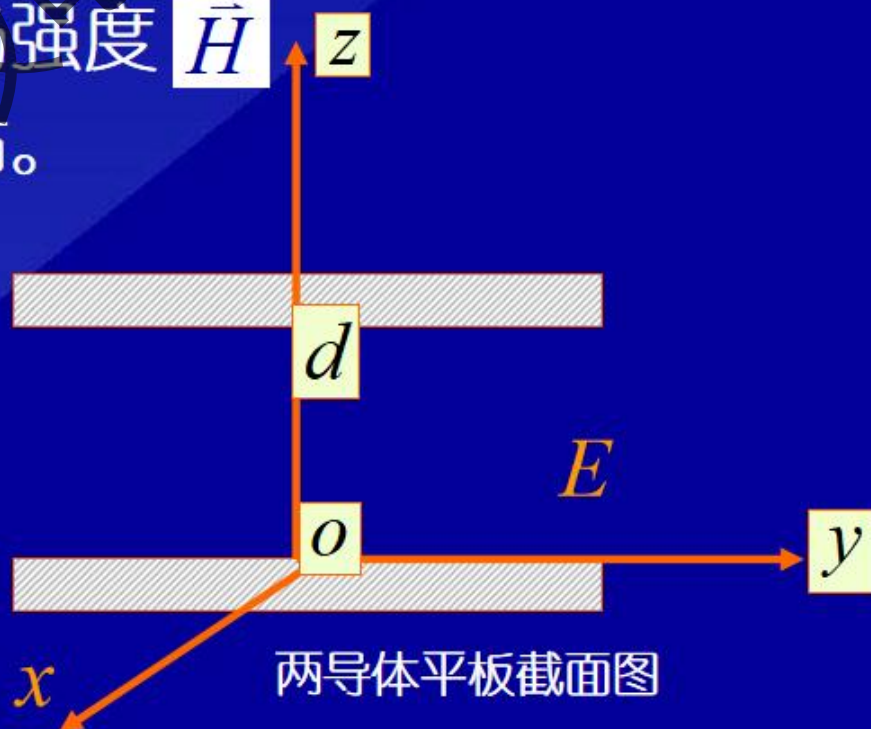
$$H = e_y \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z)$$

第四章 时变电磁场 (麦克斯韦方程组计算场分布)

例：在 $z=0$ 和 $z=d$ 位置有两个无限大理想导体板，在极板间存在时变电磁场，其电场强度为

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x)$$

求：(1) 该时变场相伴的磁场强度 $\vec{H}$
(2) 导体板上的电流分布。





解：(1) 由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - \vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{e}_z E_0 k_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) + \vec{e}_x \frac{\pi E_0}{d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{e}_z \frac{E_0 k_x}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) + \vec{e}_x \frac{\pi E_0}{\omega d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{e}_x \frac{\pi E_0}{\omega d \mu_0} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) + \vec{e}_z \frac{E_0 k_x}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x)$$

第四章 时变电磁场

(麦克斯韦方程组计算场分布)



(2) 由边界条件

在下极板上:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = \vec{e}_z \times \vec{H} \Big|_{z=0}$$

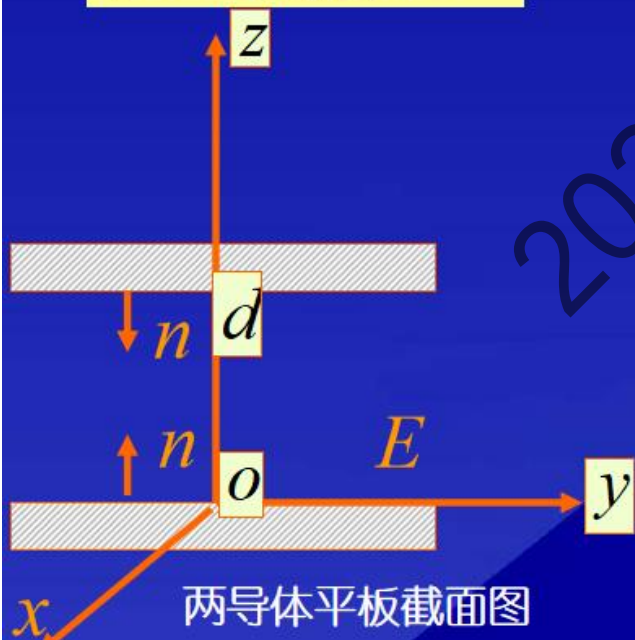
$$= \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega d \mu_0} \sin(\omega t - k_x x)$$

在上极板上:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = -\vec{e}_z \times \vec{H} \Big|_{z=d}$$

$$= -\vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega d \mu_0} \cos\left(\frac{\pi}{d} \cdot d\right) \sin(\omega t - k_x x)$$

$$= \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega d \mu_0} \sin(\omega t - k_x x)$$



两导体平板截面图

第四章 时变电磁场 (坡印廷定理分析能量传输过程) 😊

例 4.4.1 用坡印廷矢量分析直流电源沿同轴电缆向负载传送能量的过程。设电缆为理想导体，内外半径分别为 a 和 b 。

解：理想导体内部电磁场为零。

电场强度

$$E = \frac{U}{\rho \ln(b/a)} e_\rho$$

磁场强度

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} e_\phi$$

坡印廷矢量

$$S = E \times H = \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} e_z$$

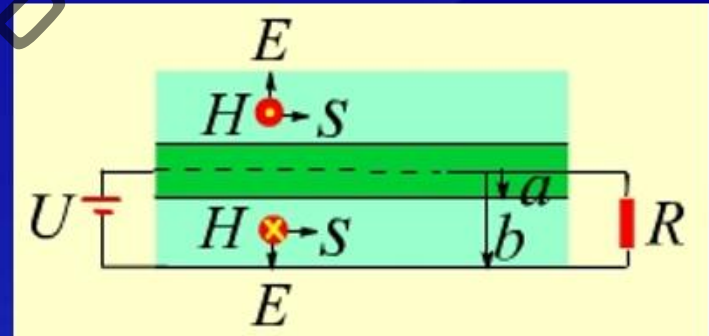


图4.4.2 同轴电缆中的电磁能流

坡印廷矢量 $S = E \times H = \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} e_z$

流入内外导体间的横截面 A 的功率为

$$P = -\int_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} 2\pi\rho d\rho = UI$$

电源提供的能量全部被负载吸收。

- 电磁能量是通过导体周围的介质传播的，导线只起导向作用。

第四章 时变电磁场 (能量的计算)



例 4.4.2 导线半径为 a ，长为 l ，电导率为 γ ，试用坡印亭矢量计算导线损耗的能量。

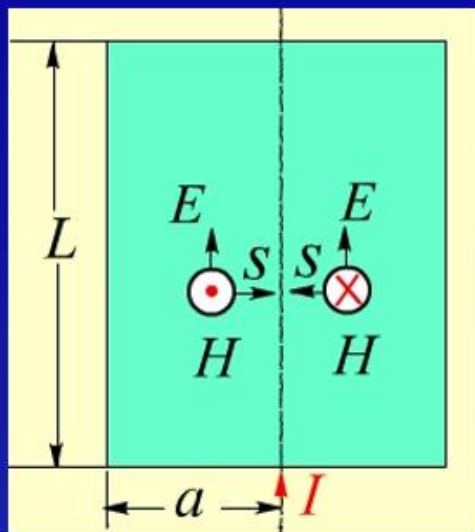


图4.4.3 计算导线损耗的能量

解：思路：设 $I \rightarrow E, H \rightarrow S \rightarrow P$

电场

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma} e_z$$

磁场

$$H = \frac{I}{2\pi a^2} \rho e_\phi$$

导体吸收的功率为：

$$P = -\oint_S (E \times H) \cdot dS = I^2 \frac{l}{\pi a^2 \gamma} = I^2 R$$

第四章 时变电磁场 (能量的计算) 😊

例：已知无源的自由空间中，时变电磁场的电场强度为

$$E = e_y E_0 \cos(\omega t - kz) \text{ (V/m)}$$

求：(1) 磁场强度； (2) 瞬时坡印廷矢量； (3) 平均坡印廷矢量

解：(1) $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial t} = e_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - e_x \frac{\partial E_y}{\partial z} = -e_x k E_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$\Rightarrow H = \frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial B}{\partial t} dt = -e_x \frac{k E_0}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kz)$$

第四章 时变电磁场 (能量的计算)

$$\begin{aligned}(2) \quad S(t) &= E(t) \times H(t) \\ &= -e_y E_0 \cos(\omega t - kz) \times e_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz) \\ &= e_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad S_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T E(t) \times H(t) dt \\ &= e_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0 T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt \\ &= e_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0 T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t - 2kz) + 1}{2} dt \\ &= e_z \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0} (W / m^2)\end{aligned}$$

第五章 平面电磁波



例6-1 已知无界理想媒质($\varepsilon=9\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $\sigma=0$)中正弦均匀平面电磁波的频率 $f=10^8$ Hz, 电场强度

$$E = e_x 4e^{-jkz} + e_y 3e^{-jkz + j\frac{\pi}{3}} \text{ (V/m)}$$

试求: (1) 均匀平面电磁波的相速度 v_p 、波长 λ 、波数 k 和波阻抗 η ;

(2) 电场强度和磁场强度的瞬时值表达式;

(3) 与电磁波传播方向垂直的单位面积上通过的平均功率。

第五章 平面电磁波



均匀平面电磁波的相速度

解：(1)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{9}} = 10^8 \text{ m/s}$$

波速

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = 1 \text{ m}$$

波数

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v_p} = 2\pi \text{ rad/m}$$

波阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{9}} = 40\pi \Omega$$

第五章 平面电磁波



(2) 电场强度和磁场强度的瞬时值表达式

$$H = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times E = \frac{1}{\eta} (4e_y e^{-jkz} - e_x 3e^{-jkz + j\frac{\pi}{4}}) \quad (A/m)$$

$$E(t) = \text{Re}[Ee^{j\omega t}]$$

$$= e_x 4 \cos(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z) + e_y 3 \cos\left(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z + \frac{\pi}{3}\right) \quad (V/m)$$

$$H(t) = \text{Re}[He^{j\omega t}]$$

$$= -e_x \frac{3}{40\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z + \frac{\pi}{3}) + e_y \frac{1}{10\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \quad (V/m)$$

第五章 平面电磁波



(3) 复坡印廷矢量:

$$S = \frac{1}{2} E \times H^* = \frac{1}{2} \left[e_x 4e^{-jkz} + e_y 3e^{-j\left(kz - \frac{\pi}{3}\right)} \right] \times \left[-e_x \frac{3}{40\pi} e^{j\left(kz - \frac{\pi}{3}\right)} + e_y \frac{1}{10\pi} e^{jkz} \right]$$
$$= e_z \frac{5}{16\pi} W / m^2$$

坡印廷矢量的时间平均值:

$$S_{av} = \text{Re}[S] = e_z \frac{5}{16\pi} W / m^2$$

与电磁波传播方向垂直的单位面积上通过的平均功率:

$$P_{av} = \int_S S_{av} \cdot dS = \frac{5}{16\pi} W$$

第五章 平面电磁波



例 6.2.1 自由空间中 $B = 10^{-6} \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$

试求: *a.* f, v, λ, β 及传播方向; *b.* E 和 S 。

解: *a.* 波沿 z 轴方向传播; $\beta = 2\pi \text{ rad/m}$

$$\lambda = 2\pi/\beta = 1 \text{ m} \quad f = \omega/2\pi = 3 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$v = \omega/\beta = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$b. \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \dot{\mathbf{B}} = \frac{10^{-6}}{\mu_0} e^{-j2\pi z} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = 377 \Omega$$

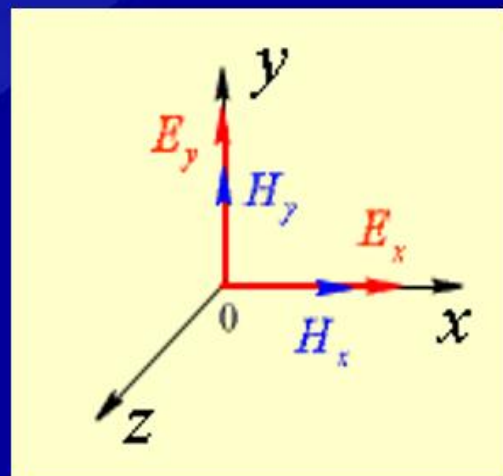


图6.2.1 计算 Z_0

第五章 平面电磁波



$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \dot{\mathbf{B}} = \frac{10^{-6}}{\mu_0} e^{-j2\pi z} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$\dot{E}_y = -Z_0 \dot{H}_x = -\frac{B_x}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -v \dot{B}_x = -300 e^{-j2\pi z}$$

$$\dot{E}_x = Z_0 \dot{H}_y = v \dot{B}_y = 300 e^{-j2\pi z}$$

$$\mathbf{E} = 300 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E H (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \times (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

$$= 477.4 \cos^2(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \mathbf{e}_z \text{ W/m}^2$$

第五章 平面电磁波



例6.3:

频率为**550KHz**的正弦波在有损耗介质中传播，已知媒质的损耗角正切为**0.02**，相对介电常数**2.5**，求平面波的衰减常数、相移常数及相速度、波阻抗。

损耗角正切

$$\tan \delta_c = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon}$$

第五章 平面电磁波



衰减常数

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

相移常数

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{\gamma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right]$$

相速度

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{\gamma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right]}$$

波阻抗

$$\eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon})}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{3\gamma^2}{8\omega^2\epsilon^2} + j\frac{\gamma}{2\omega\epsilon} \right)$$

第五章 平面电磁波



例 6-2 海水的电磁参数是 $\varepsilon_r=81$, $\mu_r=1$, $\sigma=4 \text{ S/m}$, 频率为3 kHz和30 MHz的电磁波在紧切海平面下侧处的电场强度为1V/m, 求:

(1) 电场强度衰减为 $1\mu\text{V/m}$ 处的深度, 应选择哪个频率进行潜水艇的水下通信;

(2) 频率3 kHz的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度。

第五章 平面电磁波



解：(1) $f=3\text{kHz}$ 时：

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 3 \times 10^3 \times 80} = 3 \times 10^5 \gg 1$$

(2) $f=30\text{MHz}$ 时：

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 30 \times 10^6 \times 80} = 30$$

所以海水对依此频率传播的电磁波呈显为良导体，故

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} = 2\pi \times 3 \times 10^3 \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 80}{2 \times 36\pi \times 10^9} \times 3 \times 10^5} = 0.2175$$

$$l = \frac{13.8}{\alpha} = 63.45\text{m}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} = 2\pi \times 3 \times 10^6 \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 80}{2 \times 36\pi \times 10^9} \times 29} = 21.4$$

$$l = \frac{13.8}{\alpha} = 0.645\text{m}$$

由此可见，选高频30MHz的电磁波衰减较大，应采用低频3kHz的电磁波。

第五章 平面电磁波



(2) 平均功率密度为
频率3 kHz的电磁波

$$\begin{aligned} |S_{av}| &= P_{\sigma} = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} = \frac{1}{2} E_m^2 \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} = \frac{\gamma}{4\alpha} E_0^2 \\ &= \frac{4}{4 \times 0.218} \approx 4.6 W / m^2 \end{aligned}$$

第五章 平面电磁波



例 6-3 微波炉利用磁控管输出的2.45 GHz的微波加热食品。在该频率上，牛排的等效复介电常数 $\varepsilon' = 40\varepsilon_0$ ， $\tan\delta_e = 0.3$ ，求：

(1) 微波传入牛排的趋肤深度 δ ，在牛排内8mm处的微波场强是表面处的百分之几；

(2) 微波炉中盛牛排的盘子是用发泡聚苯乙烯制成的，其等效复介电常数的损耗角正切为 $\varepsilon' = 1.03\varepsilon_0$ ， $\tan\delta_e = 0.3 \times 10^{-4}$ 。说明为何用微波加热时牛排被烧熟而盘子并没有被烧毁。

第五章 平面电磁波



解：(1) 根据牛排的损耗角正切知，牛排为不良导体，

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{-1/2} = 0.0208m = 20.8mm$$

$$\frac{|E|}{|E_0|} = e^{-z/\delta} = e^{-8/20.8} = 68\%$$

第五章 平面电磁波



(2) 发泡聚苯乙烯是低耗介质，所以其趋肤深度为

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\mu}} = \frac{2}{\omega \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \right)} \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2.45 \times 10^9 \times (0.3 \times 10^{-4}) \times \sqrt{1.03}} = 1.28 \times 10^3 \text{ m}\end{aligned}$$