

浙江海洋大学 2022-2023 学年第 一 学期

《高等数学 A1》课程期末考试卷 (A) 答案

(适用班级 A22 理工类各班级)

考试时间: 120 分钟

一	二	三	四	五	六	七	总分

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数哪一个是 x 的三阶无穷小 (C)

A. $x^3(e^x - 1)$

B. $1 - \cos x$

C. $\sin x - \tan x$

D. $\ln(1+x)$

2、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处均不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 点 (C)

A. 必连续

B. 为第一类间断点

C. 不一定连续

D. 为第二类间断点

3、曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数是 (C)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

4、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (C)

A. 连续但不可导

B. 不连续

C. 可导

D. 不一定

5、若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$, 则下列函数中为 $f(x)$ 的一个原函数的是 (B)

A. $1 + \sin x$

B. $1 - \sin x$

C. $1 + \cos x$

D. $1 - \cos x$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + \Delta x^2) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\quad\quad} f'(x_0) \underline{\quad\quad}$.

学号
姓名
班级
专业
学院

线
订
装

2、设 $y = f(x^2 + 2)$ ，且 $f''(x)$ 存在，则 $y'' = \underline{2f'(x^2 + 2) + 4x^2 f''(x^2 + 2)}$ 。

3、将函数 $f(x) = \tan x$ 作带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林展开 $\underline{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$ 。

4、 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \underline{\frac{1}{a}}$ ， $a > 0$ 。

5、已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2}, & x > 1 \end{cases}$ ，则 $\int_0^2 f(x) dx = \underline{-\frac{8}{3}}$ 。

三、求下列函数的极限（每小题 5 分，共 20 分）

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

2、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} \cdot \frac{x+1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

4、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}$

四、求下列函数的导数或微分（每小题 5 分，共 15 分）

1、设 $y = \sqrt{\frac{x^3 + \sin x}{(3-x)(x-2)^2}}$ ，求 dy 。

解：两边取对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x^3 + \sin x) - \frac{1}{2} \ln(3-x) - \ln(x-2) \quad 2 \text{ 分}$$

两边关于 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \frac{3x^2 + \cos x}{x^3 + \sin x} + \frac{1}{2} \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x-2} \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{故 } dy = \sqrt{\frac{x^3 + \sin x}{(3-x)(x-2)^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{3x^2 + \cos x}{x^3 + \sin x} + \frac{1}{2} \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x-2} \right) dx \quad 1 \text{ 分}$$

2、已知 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题, 得 $\frac{dx}{dt} = 6t + 2$, 1 分

由 $e^y \frac{dy}{dt} \sin t + e^y \sin t - \frac{dy}{dt} = 0$ 得 $\frac{dy}{dt} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$ 2 分

故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}$ 2 分

3、已知 $e^y + xy = e$, 求 $y''(0)$.

解: 由题, 可知 $x = 0, y = 1$ 1 分

$e^y y' + y + xy' = 0$, 可得 $y'(0) = -\frac{1}{e}$ 2 分

$e^y (y')^2 + e^y y'' + 2y' + xy'' = 0$, 可得 $y''(0) = \frac{1}{e^2}$ 2 分

五、求下列积分 (每小题 5 分, 共 20 分)

1、 $\int \sin^3 x dx = -\int \sin^2 x d \cos x = -\int (1 - \cos^2 x) d \cos x = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

2、 $\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx \quad \underline{\underline{\sqrt{2x} = t}} \int \frac{t}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = \sqrt{2x} - \ln|1 + \sqrt{2x}| + C$

3、 $\int_1^e x \ln x dx = [\frac{x^2}{2} \ln x]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} [x^2]_1^e = \frac{1+e^2}{4}$

4、 $\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin 2x} dx = \int_0^\pi |\sin x + \cos x| dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \left| \sin(x + \frac{\pi}{4}) \right| dx$

$$\underline{\underline{x + \frac{\pi}{4} = t}} \quad \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = \sqrt{2} \int_0^\pi \sin t dt = 2\sqrt{2}$$

六、简答题 (每小题 5 分, 共 15 分)

1、当 $0 < b \leq a$ 时, 证明 $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$.

解: 令 $f(x) = \ln x$, 1 分

易见 $f(x) \in C[b, a]$, 于是有拉格朗日等式成立

$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi}, \xi \in (b, a)$ 2 分

因为 $\frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{b}$, 从而有 $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$; 若 $b = a$, $\ln \frac{a}{b} = \frac{a-b}{b}$ 得证. 2 分

2、求由 $y = x^3, x = 2, y = 0$ 所围图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解: $V_y = \int_0^8 4\pi dy - \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy$ 3 分

$$= \frac{64\pi}{5} \quad 2 \text{ 分}$$

3、设有底为等边三角形的直柱体，体积为 V ，要使其总面积最小，问底边的长应为多少？

解：设直柱体底边长为 x ，高为 h ，由题意知 $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h$ 。故总面积为

$$s(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4\sqrt{3}V}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2 + \frac{8V}{x}\right), \quad x \in (0, +\infty) \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } s'(x) = \frac{\sqrt{3}(x^3 - 4V)}{x^2} = 0, \quad \text{得 } x = \sqrt[3]{4V}. \quad 2 \text{ 分}$$

由实际问题中最值点一定存在， $x = \sqrt[3]{4V}$ 又是唯一的驻点，知底边的长为 $\sqrt[3]{4V}$ 时，其总面积最小。 1 分