

浙江海洋学院 2021-2022 学年第 一 学期

《线性代数》课程期末考试卷 (A)

一、选择题 (3X7=21 分)

1. 已知 m 个方程 n 个未知量的一般线性方程组 $AX=B$ 有解, 则无穷多解的条件是 (C)

A. $m \neq n$ B. $m=n$ C. 秩 $A < n$ D. 秩 $A=n$

2. 设矩阵 A 是 n 维向量空间 V 中由基 $\alpha_1, \Lambda, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \Lambda, \beta_n$ 的过渡矩阵, 则 A 的第 j

A. α_j 关于基 $\alpha_1, \Lambda, \alpha_n$ 的坐标

B. α_j 关于基 $\beta_1, \Lambda, \beta_n$ 的坐标

基 $\alpha_1, \Lambda, \alpha_n$ 的坐标

D. β_j 关于基 $\beta_1, \Lambda, \beta_n$ 的坐标

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 则 秩 $A =$ (C) A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 的关系是 (C)

A. $A_{ij} = M_{ij}$ B. $A_{ij} = (-1)^n M_{ij}$ C. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ D. $A_{ij} = -M_{ij}$

5. 在 n 维向量空间 V 中, 如果 $\sigma, \tau \in L(V)$ 关于 V 的一个基 $\{\alpha_1, \Lambda, \alpha_n\}$ 的矩阵分别为

么对于 $a, b \in F$, $a\sigma + b\tau$ 关于基 $\{\alpha_1, \Lambda, \alpha_n\}$ 的矩阵是 (C)

A. $A+B$

B. $aA+B$

C. $aA+bB$

D. $A+Bb$

6. 向量空间 R^3 的如下变换中, 为线性变换的是 (C)

A. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (|x_1|, 1, 1)$

B. $\sigma(x_1, x_2, x_3) =$

C. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$

D. $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$

7. 已知数域 F 上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 下列不正确的是 (D)

A. α_1, α_2 线性无关

B. α_2, α_3 线性无关

C. α_3, α_1 线性无关

中必有一个向量是其余向量的线性组合。

二. 填空题 (3X10=30 分)

1. 设 A 是一个 n 阶实可逆矩阵, 则二次型 $X'(A'A)X$ 的标准形是 $(X'IX)$

2. σ 是向量空间 $R[x]$ 上的变换 (即 $\sigma(f(x)) = f'(x)$), 则 $(\sigma^2 - \sigma)(x^2 - x + 3) = -4x^3 + 12x^2 - 20x + 1$

3. 矩阵 $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ 。

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$,

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, 则 $|\alpha| = (2), \langle \alpha, \beta \rangle = (3), \alpha$ 与 β 的夹角 $\theta = \left(\frac{\pi}{6}\right) d(\alpha, \beta) = (1)$.

5. 向量 (x, y, z) 关于基 $(0, 1/2, 0), (1/3, 0, 0), (0, 0, 1/4)$ 的坐标为 $(1/3,$

6. 已知 $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_2 - x_4 = 0\}$, 则 $\dim V = (4)$ 。

7. 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, (a > 0)$ 是正交阵, 则 $b = (0)$ 。

三、计算题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \Lambda & a_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & 1+a_n \end{vmatrix}, (10 \text{ 分})$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B , 使 $AB = A - B$ 。 (10 分)

解: 设 $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \because AB = A - B, \therefore \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 & 5c_1 \\ 3a_2 & 4b_2 & 7c_2 \\ a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_1 & 3-b_1 & 5-c_1 \\ 3-a_2 & 4-b_2 & 7-c_2 \\ 1-a_3 & 2-b_3 & 2-c_3 \end{pmatrix}$

解得 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求可逆矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角形 (10 分)

解：由 $|E - A| = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, X_1 = (1, -1)^T, X_2 = (1, 1)^T$ 分别单位化，得 $\lambda_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$
 $\lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 所以 $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

四、证明题

1. 设 ξ, η 是欧氏空间任意向量，证明： $|\xi + \eta| \leq |\xi| + |\eta|$, (10 分)

证明：因为

$$|\xi + \eta|^2 = \langle \xi + \eta, \xi + \eta \rangle = \langle \xi, \xi \rangle + 2\langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \leq \langle \xi, \xi \rangle + 2|\xi||\eta| + \langle \eta, \eta \rangle = |\xi|^2 + 2|\xi||\eta| + |\eta|^2 = (|\xi| + |\eta|)^2$$

所以 $|\xi + \eta| \leq |\xi| + |\eta|$ 。

2. 行列式 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, (9 分)

证明：原式 = $\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$