

浙江海洋大学 2021-2022 学年第一学期

《线性代数》期末试卷

一、单选题 (21 分)

1. 设 A 、 B 为 n 阶方阵, 当()时, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 不成立。

A. $A=E$

B. A, B 为任意矩阵

C. $AB=BA$

D. $A=B$

2. 下列命题正确的是 ()。

A. 如果有全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

B. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 若其中有一个向量可由该向量组线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

C. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个部分组线性相关, 则原向量组线性相关

D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则每一个向量都可由其余向量线性表示

3. 若方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ x-2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$, 则 $x =$ ()。

A. -2 或 3

B. -3 或 2

C. -2 或 -3

D. 2 或 3

4. 若 n 方阵 A 可逆, 则 A 的秩 ()。

A. $r(A) < n$

B. $r(A) \leq n$

C. $r(A) > n$

D. $r(A) = n$

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ()。

A. 4

B. 4

C. 8

D. 8.

6. 设 A 、 B 是 n 阶方阵, 则下列关系正确的是 ()。

A. $(AB)^T = B^T A^T$

B. $(AB)^2 = A^2 B^2$

C. $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

D. $AB = BA$

7. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & t \\ 0 & t & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 则 $t = (\quad)$.
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0.

二、填空题 (15 分)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 均为线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的特解, 则 $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ 是方程 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的一个解.

3. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$ 无解, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|3A| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|2A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知向量组 $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, \dots)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, a, 4)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, -2, -2)$ 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (24 分)

1. λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 和无穷多解? 有解时求解。

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A^{-1} .

4. 求向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{\alpha}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (1, 1, 2, 5)$, $\vec{\alpha}_4 = (4, 1, -1, 6)$ 的秩与其中一个最大线性无关组.

四、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明:
 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

五、(15分) 设 n 阶方阵满足 $A^2 - 2A + I = 0$, 证明: $A + I$ 可逆, 并求 $(A + I)^{-1}$.

六、(10分) 试求当 λ 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 4 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷解. 当有无穷解时求其通解.