

浙江海洋学院 2020-2021 学年第 二 学期
《线性代数》课程期末考试卷 (B)

一	二	三	总分

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 6 分,共计 30 分)

1. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2, 则其伴随矩阵 A^* 的秩为 _____

2. 非零矩阵 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \Lambda & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \Lambda & a_2b_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \Lambda & a_nb_n \end{pmatrix}$ 的秩为 _____

3. 设 A 为 100 阶矩阵, 且对任何 100 维非零列向量 X , 均有 $AX \neq 0$, 则 A 的秩为 _____

4. 若 $A = (a_{ij})$ 为 15 阶矩阵, 则 $A^T A$ 的第 4 行第 8 列的元素是 _____

5. 若方阵 A 与 $4I$ 相似, 则 $A =$ _____

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 5 分,共计 25 分)

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则下面各式恒正确的是 ()。

(a) $|2A| = 2|A^T|$

(b) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(c) $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^T]^{-1}$

(d) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^T]^T$

2. 如果 $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - 3a_{31} & a_{12} - 3a_{32} & a_{13} - 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()。

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()。

(a) $A^T = A$

(b) $A^{-1} = A^*$

(c) $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设 A, B, C, I 为同阶方阵, I 为单位矩阵, 若 $ABC = I$, 则 ()。

(a) $ACB = I$

(b) $CAB = I$

(c) $CBA = I$

(d) $BAC = I$

5. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| \neq 0$, 则 ()。

- (a) A 经列初等变换可变为单位阵 I
 (b) 由 $AX = BA$, 可得 $X = B$
 (c) 当 $(A|I)$ 经有限次初等变换变为 $(I|B)$ 时, 有 $A^{-1} = B$
 (d) 以上 (a)、(b)、(c) 都不对

三、简答题(本题共 5 小题,每小题 9 分,共计 45 分)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. 已知 $A+B=AB$, 且

2. 设 $\alpha = (1, -1, -1, 1), \beta = (-1, 1, 1, -1)$, 而 $A = \alpha^T \beta$, 求 A^n 。

3. 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2 \end{cases}$$
 有无穷多解, 求 a 以及方程组的通解。

4. 求一个正交变换将二次型化成标准型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且的秩 $R(A)$ 为 n , 判断 $A^T A$ 是否为正定阵? 证明你的结论。