

浙江海洋学院 2020-2021 学年第 一 学期

《线性代数》课程期末考试卷 (C)

一、选择题 (3×5=15 分)

1. 已知 m 个方程 n 个未知量的一般线性方程组 $AX=B$ 有解, 则无穷多解的条

A. $m \neq n$ B. $m=n$ C. 秩 $A < n$ D. 秩 $A=n$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 则 秩 $A = (A)$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 的关系是

A. $A_{ij} = M_{ij}$ B. $A_{ij} = (-1)^n M_{ij}$ C. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ D. $A_{ij} = -M_{ij}$

4. 已知数域 F 上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 下列不正确的是 (D)

A. α_1, α_2 线性无关 B. α_2, α_3 线性无关 C. α_3, α_1 线性无关

中必有一个向量是其余向量的线性组合。

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$,

则 $|\alpha| = (C)$ A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

二、填空题 (3×6=18 分)

1. 设 A 是一个 n 阶实可逆矩阵, 则二次型 $X'(A'A)X$ 的标准形是 $(X'IX)$.

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$.

3. 向量 (x, y, z) 关于基 $(0, 1/2, 0), (1/3, 0, 0), (0, 0, 1/4)$ 的坐标为

4. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 是四维欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$,

则 $|\alpha| = (2)$

5. 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, (a > 0)$ 是正交阵, 则 $b=0$ 。

6. A 与 B 相似, 则 $|A|$ $(=)$ $(\neq, =)$ $|B|$ 。

三、计算题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix} = I$, (10 分)

解: 原式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$ 。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B , 使 $AB=A-B$ 。 (10 分)

解: 设 $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $\because AB=A-B$, $\therefore \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 & 5c_1 \\ 3a_2 & 4b_2 & 7c_2 \\ a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_1 & 3-b_1 & 5-c_1 \\ 3-a_2 & 4-b_2 & 7-c_2 \\ 1-a_3 & 2-b_3 & 2-c_3 \end{pmatrix}$

解得 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求可逆矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角形 (15 分)

解: 由 $|E-A|=0, \lambda_1=1, \lambda_2=3, X_1=(1,-1)^T, X_2=(1,1)^T$ 分别单位化, 得 $\lambda_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$

$\lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

,所以

4. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$, 回答下列问题: (1) 二次型的秩为何? (2) 二次型的正、负惯性指标及符号差为何? (3) 二次型是否是正定二次型? (12 分)

解: (1) $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 15y_4^2$, (2) $r=4$, (3) $p=3; s=2$, (4) $A=10 > 0$, 是正定二次

四、证明题 1. 试证: 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$ (10 分)

证 明 : $AA^* = |A|E$ 取行列式得到 $|A||A^*| = ||A|E|$

$|A| \neq 0$ 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 若 $|A| = 0$ 则 $|A^*| = 0$ 此时命题也成立, 即 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。

2. 试证: 行列式 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, (10 分)

证明: 原式 = $\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$