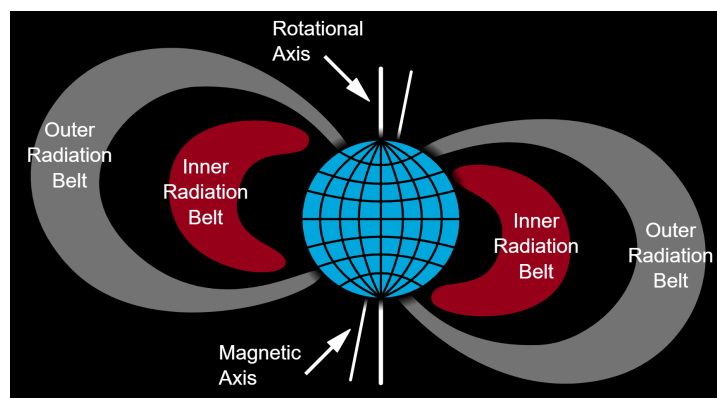


不卖，纯恶心人卷 6

命题人：@ 一碗星空汤

一. (40 分) 范艾伦辐射带

地球通具有强大的磁场，在其周围束缚了大量的带电粒子，这些带电粒子在地球周围形成了巨大的辐射带，被称为范艾伦辐射带。本题中，我们将探讨辐射带产生的原因，并计算其分布的区域。



我们不妨将地球的磁场视为一磁偶极子产生的场，其磁矩大小为 M ，方向沿 z 轴正方向放置在坐标原点。带电量为 q 、质量为 m 的粒子在地球的偶极场中运动。

1. 在柱坐标系 (s, z, ϕ) 中列出电荷的运动方程。
2. 找到两个守恒量 E, p_ϕ ，由此将电荷的运动方程化简到只包含 s, z 两个坐标。(提示：当 $M = 0$ 时，这两个守恒量分别为能量与 z 轴角动量分量。)
3. 不妨考察 $z = 0$ 即赤道面上粒子的运动。证明其在 $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ 的初始条件下不会脱离赤道面，由此在给定 p_ϕ 时给出粒子在赤道面上运动时的有效势能 $V_{\text{eff}}(s)$ ，给出粒子能够被地球磁场束缚的条件。
4. 现在考察赤道面上束缚的低能量粒子的运动，若其能量为 E ，试着用守恒量给出其粒子环绕地球运动的周期关于 E 的首阶近似。
5. 我们再来看电荷在全空间中的运动区域，给定 p_ϕ ，给出粒子在全空间中运动的有效势能 $V_{\text{eff}}(s, z)$ ，地球半径为 R ，粒子最有可能在哪一个纬度撞击地球。画出低有效势能区域在空间中分布的大致形状，同时试着定性描述低能量粒子在空间中运动轨迹的形状。

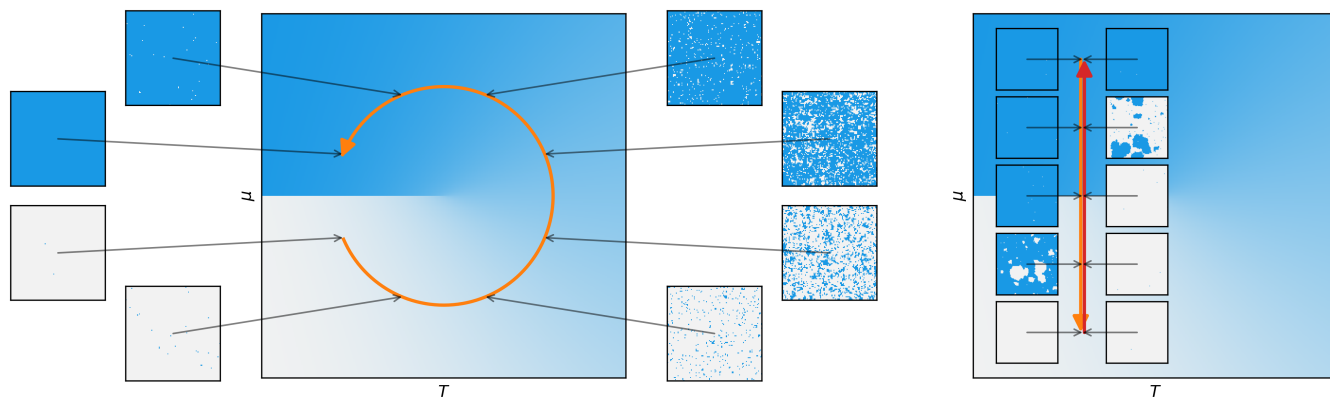
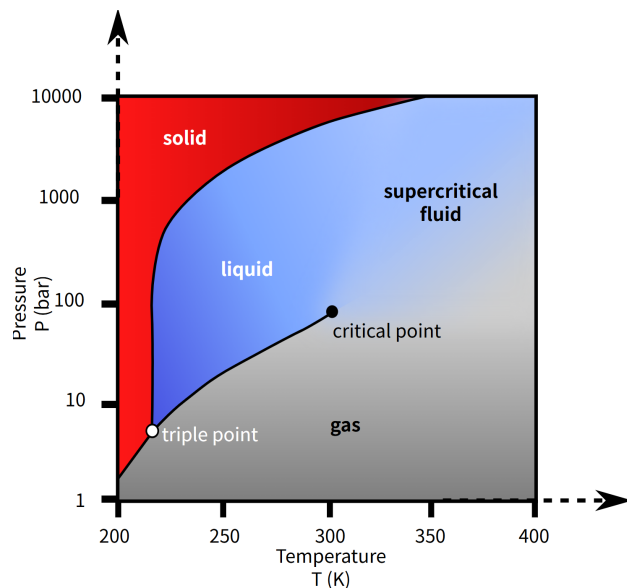
二. (40 分) 超临界流体¹

我们知道水有固液气三态，当我们改变温度和压强时，流体在这三态之间发生转化，即“相变”。然而，在水的相图中，当温度与压强达到特定的值时，我们会发现其可以连续地从气体转化为液态。这一过程中，物质所经历的相就是超临界流体。

为了探究这一现象的成因，我们使用一个简单的二维网格模型来模拟这一问题。每个格子有两种状态，分别为“蓝色”表示液体，数值上用 1 表示，“白色”表示气体，数值上用 0 表示，而我们称网格中所有格点的状态总和为一个“态”。由于在一个网格中，实现压强的固定比较困难，因此在这里我们选择了温度 T 与化学势 μ 两个参量来表征物质所处的环境。

态的分布满足玻尔兹曼分布，态 X 的概率满足 $\mathbb{P}[X] \propto \exp\left(-\frac{E-\mu N}{T}\right)$ 其中 E 为体系的能量， N 为蓝色格子的数量。(这里我们通过选取合适的坐标，使得 $k_B = 1$)。由于液体具有“聚拢”的性质，我们可以认为 E 正比于相邻的“格点对”都有水的对数，且聚拢对数越多，能量越低，即 $E = -J \sum_{(i,j) \in \text{pair}} s_i s_j$ 。

通过编写模拟程序，改变 T, μ 进行模拟。若将模拟得到的液体“密度”（蓝色格点与总格点数比值）画在 (T, μ) 平面上，可以得到如下的图。可以看到与水临界点处类似的图像。



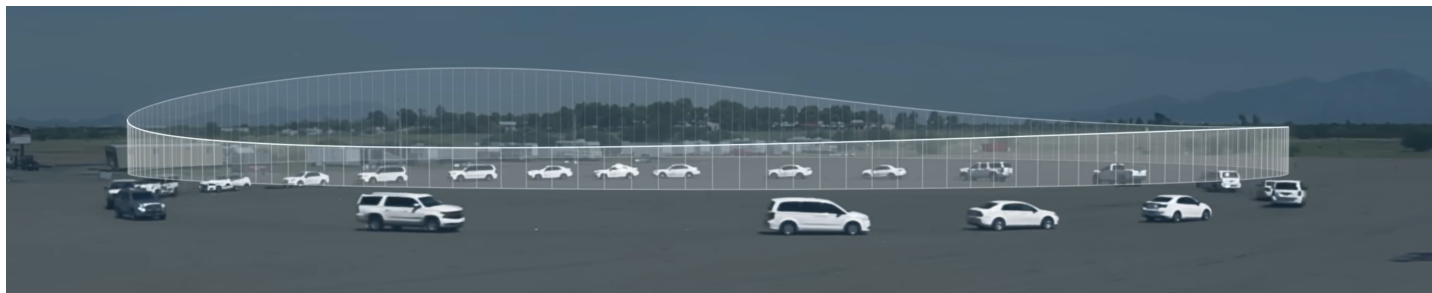
1. 我们考察一个极简化的网格：全连接图。考察一个共有 N 个格点的网格，网格上的任意两个点都算作“格点对”。此时我们取 $J = \frac{4}{N}$ 。给出密度 ρ 满足的概率分布（可以包含一个归一化常数）。
2. 继上一问，当 $N \gg 1$ 时，给出最概然密度满足的方程，并定性画出不同温度下最概然密度随 μ 的变化曲线。（需要注意方程多解性！）你从方程的解中发现了什么？（提示：考察不同温度下，最概然密度随化学势的变化关系。）计算出你认为重要的临界值。
3. 当温度在临界点之下时，我们让模拟过程的化学势缓慢增加越过相变线，我们发现体系并没有发生相变，而是处

¹一个可以把玩的交互模拟网址 (<https://vilas.us/simulations/liquidvapor/>)。

于一种“亚稳态”，只有继续增加化学势或添加足够的扰动，物质才从气态转变为液态。用前一问的结果解释这一现象，并在低温时分别对 μ 增加与 μ 减小的情形进行绘制。

三. (40 分) 堵车波

在高速上，我们常常会遇到这样的情况：车子向前运动的一段距离，又停了下来。此时如果你拉高观察的视角，你会看到地面上车子与车子之间的间距出现了如同纵波一样的变化。本题中，我们将尝试探究堵车现象的产生条件，并尝试用简单的参数描述其中的各种堵车模式。



我们认为司机在开车时，会在保持与前车的距离的同时会希望能够保持与前车相同的速度。我们不妨使用 $x(t)$ 表示司机的位移， $x_L(t)$ 为前车的位移。首先，司机在开车时有一个反应时间 τ ，这使得司机会希望与前车保持 $\frac{dx}{dt}\tau$ 的距离，司机保持间距的能力我们称之为灵敏度 α 。具体而言， $\alpha(\frac{x_L - x}{\tau} - \frac{dx}{dt})$ 为司机为了保持间隔所具有的加速度。同时，司机控制车辆平滑形式的能力我们称之为预判力 β ，这一能力使得司机能更好预判自身车辆与前方车辆的速度差，并使之减小。具体而言， $\beta(\frac{dx_L}{dt} - \frac{dx}{dt})$ 为司机预测前方车辆速度所具有的加速度。上述两者之和为司机此时此刻的加速度。

1. 给出司机位移 $x(t)$ 满足的二阶微分方程。
2. 我们来看看一个“好司机”应该具有的性质。我们希望其能够在逼近前车时，能够不要“开过头”，即我们希望其表现得像一个临界阻尼或过阻尼的弹簧。在前车匀速运动的情况下给出 α, β, τ 所满足的不等式。
3. 仅仅做一个“好司机”并不足够，我们还要看看这个车流是否稳定，即一个小扰动是否会在后续车辆运动中方法。设 $x_L(t) = v_0 t + A_L \cos \omega t$ ，给出 $x(t)$ 对应的振幅 A 与相位差 $\Delta\phi$ 。若要使得车流稳定，则要求对于任意 $\omega > 0$ ，都有 $A/A_L \leq 1$ ，给出 α, β, τ 所满足的不等式。
4. 在给定 τ 时，在 α, β 平面上画出上述不等式所描述的四个区域，试着定性描述四个区域中汽车运动所满足的性质，并给出特征临界点的坐标（即对这个点作任意小的扰动都能进入四种不同的运动模式中）。
5. 现在不妨考察恰好临界的车流。计算在平均速度为 v_0 的车流中，角频率 ω 的堵车波波包在地面系中的前进速度。

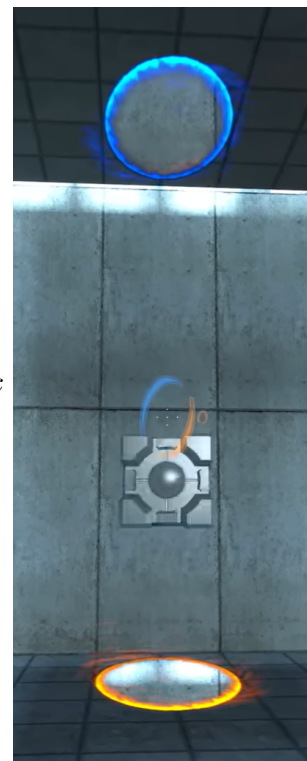
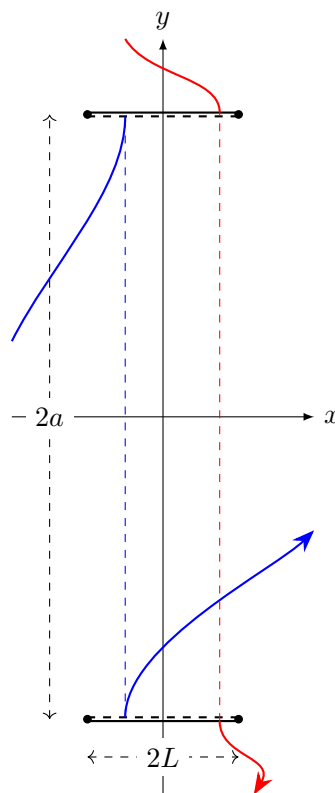
四. (80 分) 传送门物理学

在传送门这款游戏中，若将两个传送门在竖直方向上对其放置，就能构建出无限加速下落的永动机（图中的方块在落入下方的椭圆形传送门后会被直接传送到上方的椭圆形传送门）。这显然是不满足能量守恒定律的。那么如果我们要求传送门满足能量守恒会发生什么呢？

一个重要的观察在于传送门不仅仅会传送物体，还会传送重力场！这导致重力场线在进入下方传送门后被传送到上方传送门，两个传送门之间并不是均匀的重力场！

对于本问题而言，我们不妨考察一个二维平面中的两个一维传送门，分别位于 $y = a$ 与 $y = -a$ ，且有 $|x| \leq L$ 。若物体从 (x, a^+) 进入传送门，则其会被传送到 $(x, (-a)^-)$ 处；同样地，若物体从 (x, a^-) 进入传送门，则其会被传送到 $(x, (-a)^+)$ 。即图中上方传送门实线部分会传送进入下方传送门实线部分，虚线部分会传送到虚线部分。

我们不妨求解这个体系的空间重力势 $\phi(x, y)$ ，即单位质量的重力势能。此时，点 (x, y) 处的重力加速度为 $-\nabla\phi(x, y)$ 。本题中，我们设万有引力常数为 $G = \frac{1}{4\pi}$ 。



1. 设重力势 $\phi(x, y) = gy + u(x, y)$ ，给出 $u(x, y)$ 满足的方程与边界条件。
2. 对于势 $u(x, y)$ ，由调和函数的性质，其可以表示为边界上单极层与偶极层产生的场，即可以表示为

$$u(x, y) = \int_{-L}^L \rho(\xi) G(x - \xi, y - a) d\xi + \int_{-L}^L \sigma(\xi) G(x - \xi, y + a) d\xi + \int_{-L}^L \mu(\xi) K(x - \xi, y - a) d\xi + \int_{-L}^L \nu(\xi) K(x - \xi, y + a) d\xi$$

其中 $G(x, y)$ 为位于原点的单位单极子（即质点）产生的势， $K(x, y)$ 为位于原点方向为 $\hat{y}$ 的单位偶极子产生的势， $\rho(x), \sigma(x)$ 分别为上下单极层密度， $\mu(x), \nu(x)$ 分别为上下偶极层密度。试着给出 $\rho(x), \sigma(x), \mu(x), \nu(x)$ 满足的积分方程。（最后只得保留一个积分方程，把能够显然求解的积分方程求解。）

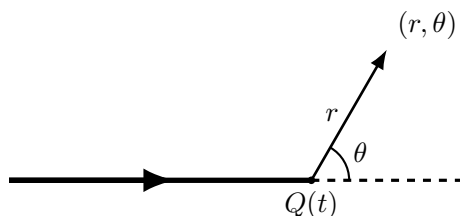
3. 当 $L \ll a$ 时，给出空间的重力势 $\phi(x, y)$ 分布的最低阶近似。并由此计算平衡位置和质点在水平、竖直方向小振动的稳定性与角频率。

（我们可以给到如下积分的提示： $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = -\pi \ln 2 \quad (-1 < x < 1)$ 。）

五. (30 分) 半截导线

考察截止于原点的半无穷长导线，导线上有恒定电流 I 。在原点处有一点电荷 $Q(t)$ ，根据电荷守恒，显然有 $Q(t) = It$ 。已知点电荷产生的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



求出空间中的磁场分布 $\mathbf{B}(r, \theta, t)$ ，并验证电磁场满足 Maxwell 方程组（可以验证积分形式或微分形式）。

【提示：球坐标下的散度和旋度表达式为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

】

六. (40 分) 引力透镜与费马原理

根据广义相对论，质量会使时空弯曲，从而导致光线的传播路径发生偏折。当一颗质量为 M 的恒星位于遥远光源与观察者之间时，光线会被引力场弯曲，形成所谓的“引力透镜”现象。下图示意了一束原本应沿直线传播的光线，在经过透镜天体附近时发生偏折，并在观察者处形成像。

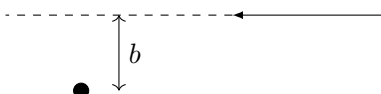
在弱场、低速近似下，质量 M 产生的引力势为

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r},$$

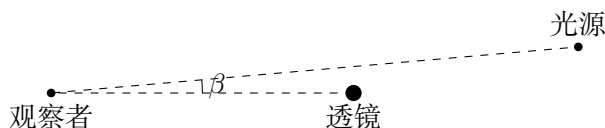
光在该引力场中的传播可视为在折射率

$$n(r) = 1 - \frac{2\Phi(r)}{c^2} = 1 + \frac{2GM}{c^2 r}$$

的非均匀介质中传播。



1. 利用费马原理 $\delta \int n ds = 0$ ，推导光线在该折射率分布中的轨迹方程，并写出其在极坐标 (r, φ) 下的微分方程形式。
2. 假设光线从无穷远处以冲量参数（瞄准距离） b 入射，求其在弱偏折近似下的总偏折角 $\Delta\varphi$ 。
3. 设透镜天体到观察者的距离为 D_L ，光源到观察者的距离为 D_S ，光源到透镜的距离为 D_{LS} 。利用几何关系，写出透镜方程，给出像角位置 θ 与源角位置 β 之间的关系。



4. 当光源、透镜、观察者三者严格共线时，证明像形成一个半径为

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

的爱因斯坦环。

5. 讨论当光源稍微偏离光轴时像的数量与位置，并定性说明随 β 变化时像角位置 θ 与像亮度的变化行为。说明在何种条件下可以观测到强引力透镜的多像现象。

提示：

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arctan \sqrt{x^2-1} + C, \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C$$

七. (50 分) 电池的玩具模型

我们来考察一个电池的玩具模型。有一个半径为 a ，电导率为 σ 的球形介质被镶嵌在一电导率为 σ' 的介质中。在球内部存在一个沿 z 方向的均匀“化学力”，它对载流子起作用。这个力可以等效为进入欧姆定律的一个附加电场 $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{z}}$ 。稳恒态下，球内外都存在电场，且球面上存在面电荷。

1. 计算全空间的电场（除开 $\mathbf{F}$ ）与电流分布，计算界面上的面电荷分布，并计算球体的总偶极矩。
2. 计算通过球的上半球面流出的总电流 I 。
3. 计算球外的焦耳热功率 P_e 。利用集总电路的模型，使用 $P_e = I^2 R_e = IV_e$ ，计算等效外电阻 R_e 与外电压 V_e 。
4. 计算球外的焦耳热功率 P_i 。利用集总电路的模型，使用 $P = I^2 R_i = IV_i$ ，计算等效内电阻 R_i 与内损耗电压 V_i 。
5. 计算电池的电动势 $V_t = I(R_i + R_e)$ ，验证其满足 $V_t = V_i + V_e$ 。并证明“化学力”做功功率等于 IV_t 。固定 σ 与其他参数，改变 σ' ，当 σ'/σ 为何时，电势输出功率最大？