

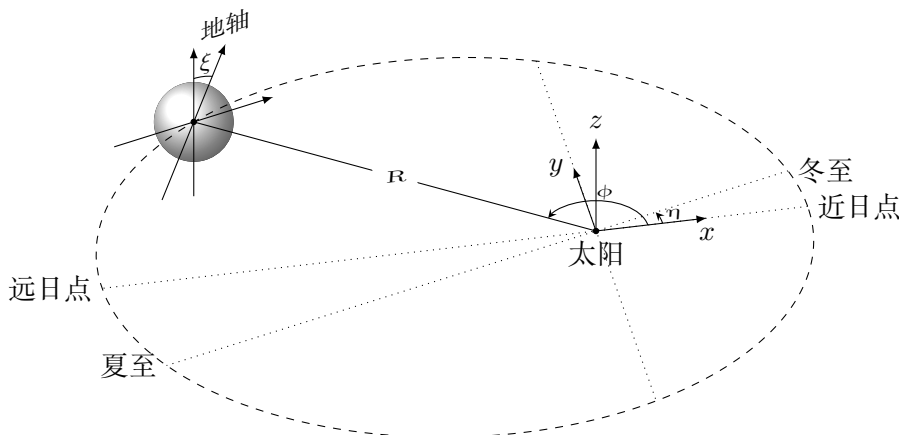
不卖，纯恶心人卷 5

命题人：@ 一碗星空汤

一. (60 分) 两小儿辩日

太阳究竟是日出离地面近，还是中午离地面近，是一个值得思考的问题，其受到地球自转与公转影响。在本题中，我们将**尽可能精确**地解决这个问题。（本题中，我们忽略光线因为大气的折射，因此日出时即太阳光线与地面平行时刻。）

- 我们先只考察自转对太阳距离的影响，此题中，我们认为地球中心固定不动。如图，以太阳为原点， x 轴平行于长轴， y 轴平行于短轴， z 轴垂直于黄道面建立空间直角坐标系。给定以下参量，计算此地日出与正午时刻到太阳的距离。本题中我们不考虑发生极昼或极夜的地区，在这些区域“日出”不是良定义的。（提示：根据冬至的定义，地轴位于冬至矢径与 z 张成的平面内，可以先把地轴方向的直角坐标分量算出来。）



物理量	字母
地球中心到太阳中心距离	R
地球半径	r
参考点纬度	θ
黄赤交角	ξ
地球相对于近日点转过角度	ϕ
近日点与冬至夹角	η

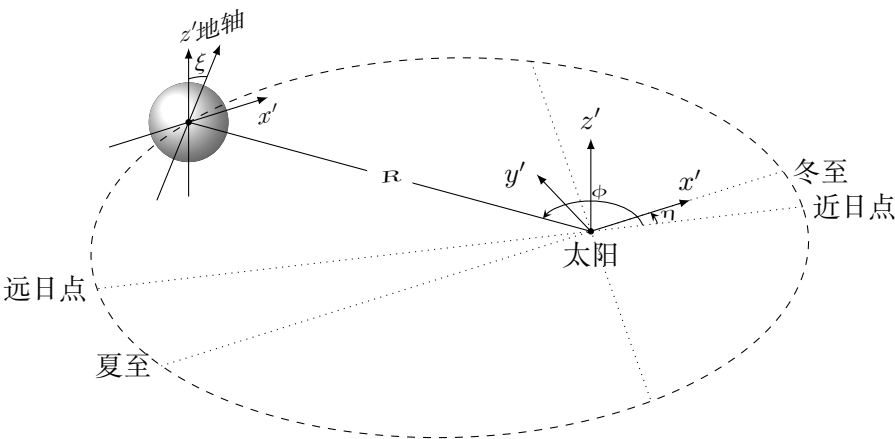
注：实际上，冬至通常发生在 12 月 21 日或 22 日，近日点通常发生在 1 月 3 日或 4 日，因此有 $\eta < 0$ 。

- 我们再来考察公转对日地中心距离 R 的影响，我们可以使用轨道方程来描述其轨迹

$$R(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

若有 a 表示轨道长半轴， b 表示轨道短半轴， c 表示半焦距，则有 $p = b^2/a$, $e = c/a$ 。但我们需要将其与实际的运动时间联系在一起，一个不错的方法是使用代换 $R - a = -c \cos \kappa$, ($0 \leq \kappa < 2\pi$)。若地球的运动周期为 T ，试着使用 κ 表示从近地点的运动时间 t ，角度 ϕ ，最后结果只能包含 κ, e, T 。（提示：你可以利用能量表达式写出 $\frac{dR}{dt} = f(R)$ ，则有 $t = \int dR/f(R)$ 。）

- 接着我们将要计算日出与正午的时间点。我们虽然不能用显式表达出时间点，但我们能够写出时间点满足的方程。我们假设地球自转周期为 T' ，给出日出与正午时分， κ 满足的方程，方程中可以包含一个未定参量，因为 $t = 0$ 时地球上正午的经度是未知的。为了方便求解，我们使用另一个坐标系，如下图所示：



(提示：可以先将地点在空间中的坐标与地球矢径直角坐标写出来，用矢量运算找到日出与正午条件，几何方法不推荐!)

4. 给出以下数据，试问 2025 年上海哪些天是日出离地面近，哪些天是中午离地面近？给出第一个日出比中午近的时间的早晨 κ_1 与中午 κ_2 ，给出最后一个日出比中午近的时间的早晨的 κ_3 与中午的 κ_4 。（提示：可以先使用给出参量计算轨道的参数，如 a, e, η_0 ）

物理量	数值
冬至时刻	2024/12/21 17:20:34 ($-3.88011 \times 10^{-2} T$)
近日点时刻	2025/01/04 21:28:44 (0 T)
近日点后的第一个正午	2025/01/05 11:59:33 ($+1.65564 \times 10^{-3} T$)
近日点距离	0.98332740 AU
远日点距离	1.01664375 AU
黄赤交角 ξ	23.4360°
轨道周期 T	366.25636 T'
上海纬度 θ	31.2323°
上海处地球半径 r	4.25970×10^{-5} AU

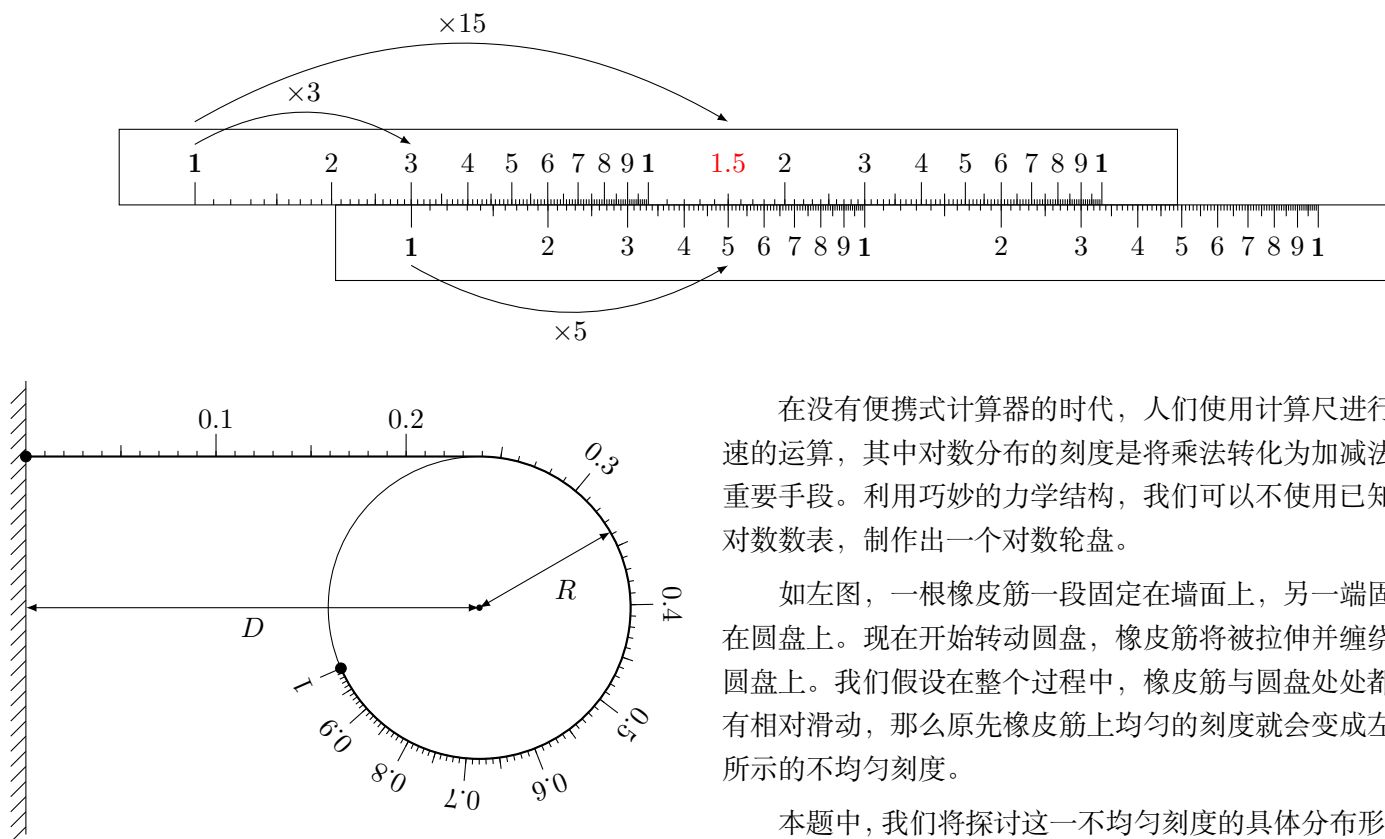
为了减少尝试的次数，这里可以直接给出 κ_1, κ_3 前两位小数的准确值， $\kappa_1 \approx 0.46, \kappa_3 \approx 2.59$ ，对于其余两者，可以使用早晨数据加上一个早晨到中午时间的估算值（如 1/4 天， $\Delta\kappa \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{365}$ ）作为初始值代入。答案中给出的小数位数至少为 4 位。

二. (40 分) 静电练习题

现有一半径为 R 的实心球内，有电荷分布 $\rho(r) = kr$ 。

1. 计算实心球带有的总电荷量。
2. 计算全空间电场与电势分布，并大致画出图像。
3. 计算静电能。
4. 计算实心球上下半球之间的作用力。

三. (40 分) 对数轮



在没有便携式计算器的时代，人们使用计算尺进行快速的运算，其中对数分布的刻度是将乘法转化为加减法的重要手段。利用巧妙的力学结构，我们可以不使用已知的对数数表，制作出一个对数轮盘。

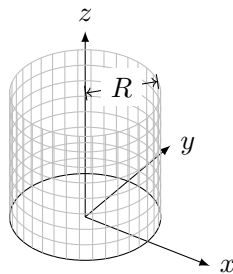
如左图，一根橡皮筋一段固定在墙面上，另一端固定在圆盘上。现在开始转动圆盘，橡皮筋将被拉伸并缠绕在圆盘上。我们假设在整个过程中，橡皮筋与圆盘处处都没有相对滑动，那么原先橡皮筋上均匀的刻度就会变成左图所示的不均匀刻度。

本题中，我们将探讨这一不均匀刻度的具体分布形式。

1. 设圆盘半径为 R ，圆心到墙面距离为 D 。若初始时刻橡皮筋上的刻度均匀排开，左端为最小值 0，右端位最大值 1。求在缠绕后，刻度 x 与刻度 1 和圆心形成的夹角 θ （此时刻度 x 已经缠绕在了圆盘上）。
2. 继上一问，我们设橡皮筋劲度系数为 k ，原长为 D ，橡皮筋与圆盘之间的静摩擦因数为 μ 。计算不滑动的情况下，缠绕部分张力的分布 $T(\theta)$ 。如要不滑动，给出静摩擦因数需要满足的条件。
3. 继上一问，若在圆盘转动 θ 后，松开圆盘，让橡皮筋自由回弹，给出全部橡皮筋解旋后圆盘的角速度 ω 。设圆盘质量均匀分布，质量为 M ，橡皮筋质量为 0。

四. (30 分) 有趣的光晕

将马克杯放在光照下，会看到杯子内部出现一个美丽的“心形线”，本题中，我们将对不同光照条件下的马克杯焦散曲线进行探究。



我们将马克杯建模为一个内半径为 R 的圆柱，外来的光线通过在马克杯内壁上的单次反射与杯底相碰。为了简便起见，我们假设光线在马克杯底发生漫反射。同时，我们不考虑马克杯外壁对光线入射的遮挡。在接下来的内容中，我们将考虑点光源与平行光的情况，并以圆柱底面圆心作为原点建立坐标系。

1. 为了将这个三维问题简化，我们先将证明其与如下二维问题等价：考察垂直于 xy 平面的平面 Σ ，其与 xy 平面的交线为 ℓ 。对于 Σ 内的光线，其通过反射照亮的马克杯底部区域为 ℓ' 。若记马克杯底面圆的边界为 C ，证明 ℓ' 所在直线是 ℓ 通过圆 C 的反射光线。
2. 当两个不同平面的照亮区域 ℓ' 交叠时，这个区域会格外的亮。考察一个点光源位于 $(-R, 0, z)$ 的位置，计算其在马克杯底产生的焦散曲线参数方程。
3. 平行光以 $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ 的方向入射马克杯，计算其在马克杯底产生的焦散曲线参数方程。

五. (80 分) 开尔文勋爵的 18 岁

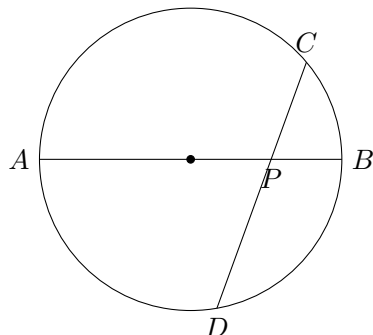
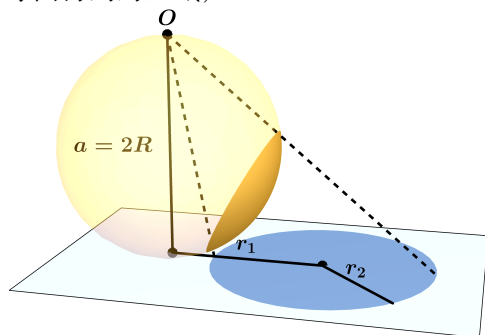
在 1872 年，开尔文勋爵发表了“静电学与几何物体”一书，其中包含了他发表的许多静电学论文。接下来所有求解面电荷密度的问题都要求对于导体的上/下（内/外）两面分别给出。

1. 论文集的第一篇，是他在 18 岁时求解的椭球表面的电荷分布。在论文中，他注意到若考察两个**相似**的同心椭球围成的薄壳区域，在薄壳内均匀填充上电荷，那么薄壳内部的电场为 0。
 - i. 证明开尔文的注意力是正确的。（提示：椭球可以由球拉伸而来。）
 - ii. 求出带电量为 Q 的导体椭球表面的电荷密度分布 $\sigma(x, y, z)$ ，其中椭球的半轴分别为 a, b, c 。
 - iii. 将椭球压扁得到一个圆盘，若圆盘的半径为 R ，给出圆盘上的面电荷分布，证明其表达式满足 $\sigma(r) \propto \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ 。
 - iv. 改用圆盘电势 V_0 表示其面电荷分布。
2. 利用圆盘上的电荷分布，开尔文得以实现了如下问题的求解：一个导体碗在外加 V_0 电势的情况下的电荷分布。他使用的技巧是“反演变换”。具体而言，如果你知道了某一个体系的电势分布在球坐标系下的表达式 $V(r, \theta, \phi)$ ，那么利用变换 $r \rightarrow \frac{a^2}{r}$ ，我们可以轻松得到另一个体系的电势分布 $V'(r, \theta, \phi)$ 。在这一变换下，电荷与电势满足如下变换

$$\begin{aligned} V'(r, \theta, \phi) &= \frac{a}{r} V\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \\ q' &= \frac{r}{a} q \\ \sigma'(r, \theta, \phi) &= \frac{a^3}{r^3} \sigma\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \\ \rho'(r, \theta, \phi) &= \frac{a^5}{r^5} \rho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \end{aligned}$$

值得注意的是，如果在无穷远处电势不是 0，而是 V_∞ ，那么在变换后原点处凭空产生一个电荷。

- i. 当无穷远处电势为 V_∞ 时，给出变换后这个“凭空产生”的电荷的电荷量。（注意 $V'(r)$ 在 $r \rightarrow 0$ 的表达式）
- ii. 取 $a = 2R$ ，考察距离原点 $2R$ 的平面上的一个圆盘，证明在经过反演变换 $r \rightarrow a^2/r$ 后圆盘变成一个偏心的碗（平面截取球面得到的区域）。

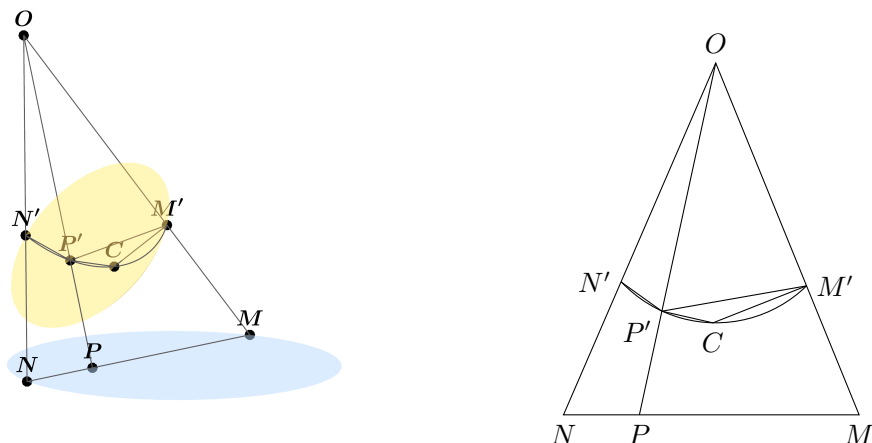


- iii. 知道了这个之后，开尔文开始展示他的超绝平面几何能力。根据相交弦定理，在上图的圆中有

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$

现在对于 (1.iv) 圆盘上任意一点 P ，过 P 点的一条弦被分为 ℓ_1, ℓ_2 两段。利用 ℓ_1, ℓ_2 表示 P 点处的面电荷密度。利用平面几何能够大幅化简接下来解析计算的内容。

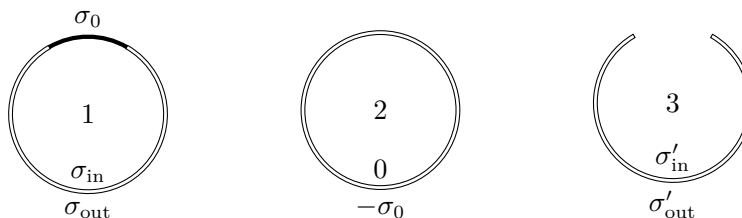
- iv. 继上一问，将整个体系的电势分布整体加上 $-V_0$ ，此处无穷远处电势变为 $-V_0$ ，圆盘电势变为 0。利用 (2.ii) 中的反演变换，可以得到一个电势为 0 的半球碗在 O 处放有一个点电荷时的电荷分布。



如图，我们不妨考察盘上点 P' 处的面电荷密度。设圆盘上的点 P 通过反演对应的是碗上的点 P' ，碗的中心为点 C 。我们考察平面 OPC ，其与圆盘交于线段 MN ， MN 通过反演得到的是圆弧 $M'CP'N'$ 。值得注意的是 M, N 在圆周的边缘上， M', N' 为 M, N 的反演点。用 $\overline{OP'}, \overline{CP'}, \overline{OC}, \overline{CM'}$ 四条线段的长度，以及反演在原点处产生的点电荷电荷量 q 表示 P' 处的电荷密度，证明其满足 $\sigma \propto \frac{1}{OP'^2} \sqrt{\frac{OC^2 - CM'^2}{CM'^2 - CP'^2}}$ 。

(提示：你首先需要注意到两对相似三角形 $\triangle ONP \sim \triangle ON'P', \triangle OMP \sim \triangle OM'P'$ ，将 $\overline{MP}, \overline{NP}$ 转化为 $\overline{M'P'}, \overline{N'P'}, \overline{OM'}, \overline{ON'}, \overline{OP'}, R$ 。然后你需要使用 $\overline{M'P'} \cdot \overline{N'P'} = \overline{CM'}^2 - \overline{CP'}^2, \overline{OM'} \cdot \overline{ON'} = \overline{OC}^2 - \overline{CM'}^2$ ，别忘了在适时的时候要使用反演变换带来的线段长度关系。)

- v. 然而，这离我们所要求解的问题还有些距离，接下来，开尔文继续展示他的神来一笔，他将碗摆正（即旋转对称轴与 z 轴重合）。利用 (2.iv) 的结论，他得以将问题转化为如下问题：



- 问题 1：一个半径为 R 的金属导体碗接地，在碗口处均匀涂有一层面密度为 σ_0 的面电荷。
- 问题 2：一个半径为 R 的金属导体球壳，球壳外表面均匀带有 $-\sigma_0$ 的面电荷，内表面不带电。
- 问题 3：一个半径为 R 的金属导体碗电势为 V ，求 $\sigma'_{in}, \sigma'_{out}$ 。

上述三个问题在无穷远处的电势都是 0。观察问题 1、问题 2、问题 3 之间的联系，求解问题 3。在求解时，我们使用如下参数：我们用 α 表示碗的边缘一点与碗底所夹的圆心角，用 η 表示考察点与碗底所夹的圆心角。

你可能需要的积分：

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{A + B \cos x} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} & -A < B < A \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} & A < B < -A \\ \text{不收敛} & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{A+x}}{B+x} dx = 2\sqrt{A+x} - 2\sqrt{B-A} \arctan \sqrt{\frac{A+x}{B-A}} + C$$

六. (30 分) 快速真空

根据低温下稀薄气体的容器壁上可以吸附分子的现象，人们发明了可以提高真空度的“低温泵”。考虑一个半径为 0.2 m 的球形容器，除对其壁上面积为 1.0 cm^2 的区域冷却到 77 K 外，其余部分及其内部保持温度 300 K。假设初始时刻容器中水蒸气的压强为 1.33 Pa，每一个水分子碰撞到上述被冷却的区域即被吸附或凝结到上面。

1. 试问需要多少时间可以使容器内的压强降低到 $1.33 \times 10^{-6} \text{ Pa}$?
2. 在前问基础上，我们还可以问一个有趣的问题，在水蒸气不断吸附压强下降的过程中，冰是否会因为压强过低而升华，你认为这个数值是否有意义？查阅文献，我们可以给出冰升华压强 p_{subl} 满足的经验公式：

$$\ln \left(\frac{p_{\text{subl}}}{611.657 \text{ Pa}} \right) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^3 a_i \theta^{b_i}, \quad \text{其中 } \theta = \frac{T}{273.16 \text{ K}}$$

i	a_i	b_i
1	$-0.212\,144\,006 \times 10^2$	$0.333\,333\,333 \times 10^{-2}$
2	$0.273\,203\,819 \times 10^2$	$0.120\,666\,667 \times 10^1$
3	$-0.610\,598\,130 \times 10^1$	$0.170\,333\,333 \times 10^1$

七. (40 分) 塞曼效应

当原子被置于磁场中时，其能级会发生变化，并且发生“分裂”。本题中，我们将考察氢原子这一较为简单的体系，对这一现象进行探讨与阐释。

1. 氢原子的电子绕着原子核高速转动，可以认为形成了一个“电流环”，即一个小磁矩。这一小磁矩和外加的磁场之间存在相互作用，故会导致能级改变。假设磁场沿 z 方向向上，为 $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ ，电流环对应的 z 方向角动量为 $m_l \hbar$ 。若设电子的质量为 m_e ，轨道半径为 r_e ，给出外加磁场对应的能级变化量 ΔE 。
2. 然而使用上述计算仍然与实验有所偏差，原因在于我们忽略了电子自身的自旋。电子自身拥有 $\frac{1}{2} \hbar$ 的角动量，这一角动量会对体系贡献磁矩。为了计算其大小，你可以将电子假设为一半径为 r ，电荷均匀分布的小球，由此计算其磁矩大小。不过这样子计算出来的结果恰为实际磁矩的一半，这被称为 g 因子（对于电子而言 $g = 2$ ）。在补充上 g 因子的修正后，若电子在 z 方向上的角动量为 $m_s \hbar$ ，用 m_l 与 m_s 表示外加磁场对应的能级变化量 ΔE 。
3. 接下来，我们来探讨能级的分裂。电子轨道 z 方向可取的角动量有许多值，具体如下：

s 轨道 ($l = 0$): $m_l = 0$

p 轨道 ($l = 1$): $m_l = 0, \pm 1$

d 轨道 ($l = 2$): $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$

f 轨道 ($l = 3$): $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

电子自旋角动量 z 方向可取的值 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ，试问 H_α 谱线（氢原子 $n = 3 \rightarrow n = 2$ ）会分裂成几条谱线？在 1 T 的磁场下，波长的变化量分别为多少？（值得注意的是，并不是所有的轨道之间都能够相互跃迁，必须要满足选择定则 $\Delta l = \pm 1, \Delta m_l = 0, \pm 1, \Delta m_s = 0$ 。）

4. 在更精细的检视下，你会发现即使不存在外磁场，看似单色谱线也是由两条极为相近的谱线构成。其对应的两个能级由于过于相近，在其间跃迁会产生微波。由于微波的特性，其在宇宙中的传播范围极广，是我们探测星际物质中氢元素的重要手段。其本质原因是原子核磁矩与电子磁矩的耦合，若方向相反则能级下降，反之能级上升，两者之间跃迁发出如此微波。对于 $1s$ 轨道中的电子，计算耦合产生的能级差，与对应的跃迁波长。

注：氢原子里德伯常数 $R_H = \frac{R_\infty}{1+m_e/m_p}$ ，其中 R_∞ 为理想化的里德伯常数（计算器中科学常数提供）， m_e 为电子质量， m_p 为质子质量。电子的 g 因子为 2，质子的 g 因子为 5.5857， g 因子的含义是实际测量的磁矩大小与上述粗糙模型计算的磁矩大小之比。电子、质子都是自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子。