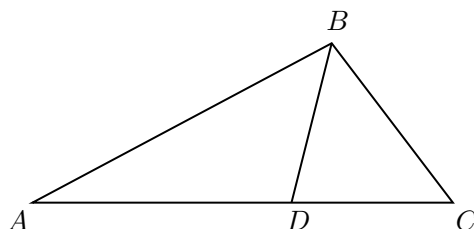


不卖，纯恶心人卷 1

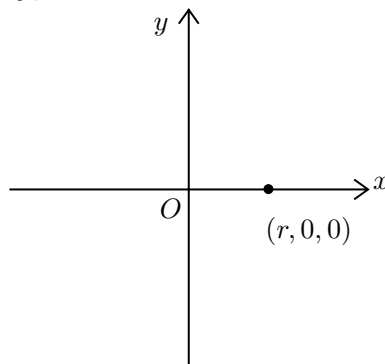
命题人：@ 一碗星空汤

一. (40 分) 电荷的有趣运动

1. 在三角形 ABC 中，边 AC 上有一点 D ，满足 $AD = a, CD = b, BD = c, (a > b)$ ， BD 与 AC 的夹角是可以改变的，试着讨论 $AB + BC$ 的最大值与 $|AB - BC|$ 的最小值。



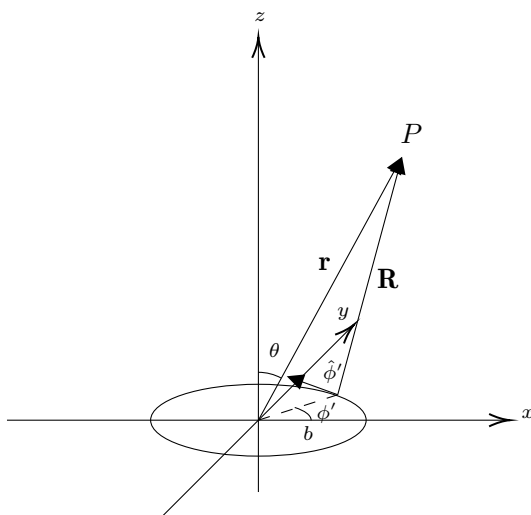
2. 在空间中，存在 $\mathbf{E} = -a(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}), \mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ 的电磁场。在 xy 平面内，带电量为 q 的电荷在 $(r, 0, 0)$ 处以速率 v_0 向任意方向在 xy 平面内发射，试着计算这些电荷运动时能达到的范围。这里我们假设这些电荷不会形成闭合轨道，并且 a 为正数。（提示，令 $z = x + iy$ ，用复数表示并求解运动方程。）



二. (60 分) 旋转磁矩的辐射

1. 简谐振动的磁矩

- i. 考察电流为 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ ，半径为 b 的电流环。如图，求解 $P(r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$ 处的磁矢势 $\mathbf{A}$ （其中 $b \ll r, c/\omega$ ），并且使用 $m = \pi b^2 I_0$ 代换。而后分别给出 $r \ll c/\omega$ 与 $r \gg c/\omega$ 时的近似结果，并说明其物理意义。



提示：对于振荡变化的电流，磁矢势的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t - R/c)}{R} d\mathbf{l}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_0 \cos\left(\omega(t - \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta})\right)}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta}} b \hat{\phi}' d\phi'\end{aligned}$$

使用小量近似对其计算。（请注意 $\hat{\phi}'$ 的表达式）

- ii. 续前问，在 $r \gg c/\omega$ 的近似下，计算空间中的磁场、感生电场与坡印廷矢量（均保留至最低阶）。试问辐射强度最大的方向是什么？

提示：

- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \implies \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- 坡印廷矢量： $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

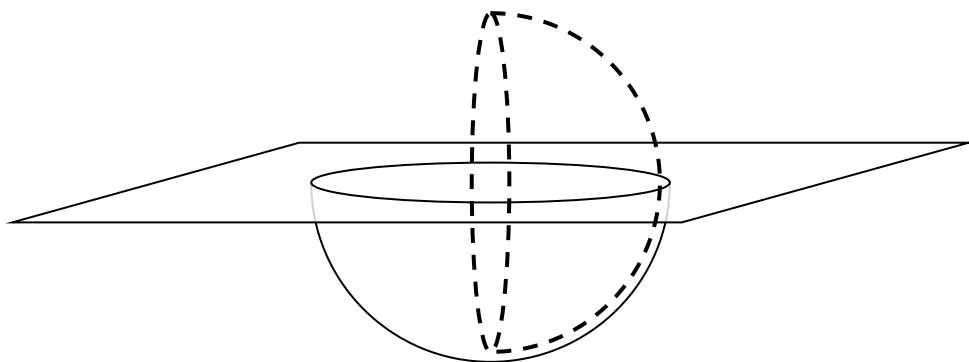
- iii. 续前问，计算偶极子辐射的平均功率 $\langle P \rangle = \oint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a}$ 。

2. 匀速转动的磁矩

- 考察在 xy 平面内以角速度 ω ，大小为 m ，绕自身中心逆时针匀速转动的磁矩，试着计算其平均辐射功率。（提示：可以将匀速转动的磁矩分解为在两个方向上作简谐振动的磁矩）
- 考察在三维空间中与 z 轴夹角为 α 的磁矩 m ，关于 z 轴匀速逆时针转动，试计算其平均辐射功率。
- 中子星以其高转速与强磁场而著称。设现有一半径为 10km 的中子星，其以 $\omega = 2.0 \times 10^2 \text{ rad/s}$ 旋转，南北极与自转轴夹角为 $\alpha = \frac{\pi}{10}$ 。在其表面磁场最强处，磁感应强度为 $B = 10^{11} \text{ T}$ ，合理估算其向外辐射的功率大小。

三. (40 分) 小心地滑！

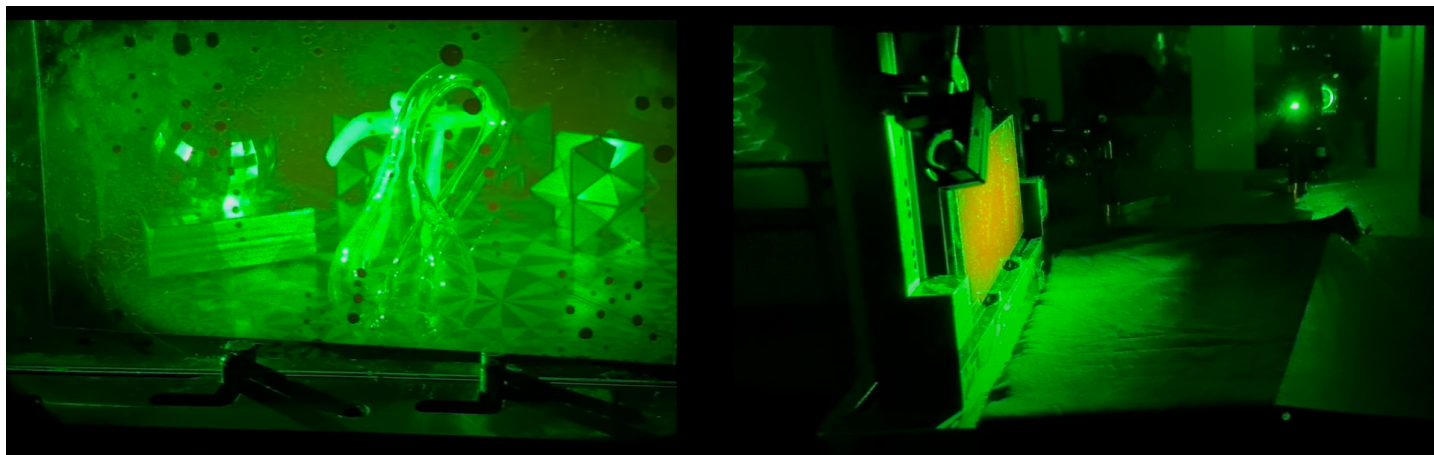
小孩洗澡时，一不小心在澡盆里滑倒了，接下来我们将要探讨澡盆中的小孩的可能运动。如图，我们将澡盆建模为一个光滑半圆槽，半径为 R 。我们将小孩也建模成一个质量为 m ，半径为 R ，且质量分布均匀的半球（忽略图示中两者半径的差别）。现在我们假设半球在运动的过程中不会离开澡盆。



1. 小孩由竖直站立开始滑倒，当小孩滑倒到最低点的位置时，求出小孩的角速度大小。
2. 求出小孩泡澡过程中做小振动的角频率。
3. 小孩现在绕着过球心的竖直轴做定轴转动，背部位于角度 α 的位置（即半圆切面法向量与竖直方向夹角为 α ）。请问小孩能否在不受其此外力的情况下做稳定的定轴转动？如果能，求出定轴转动角速度的大小；如果不能，求出半球角速度的最小值与其方向。

四. (40 分) 全息照片

下图为一透射式全息照片，当使用特定波长的激光以特定角度照射全息照片时，即使其背后没有物体，你将会看到照片后似乎放置着不同的东西。本题中将会探讨全息照片背后的物理成因。



全息照片是一片涂有特殊涂层的玻璃，当被光照射时，涂层会与电磁波的电场互动。在一定的照射时间后，我们会得到一片振幅透射率 $\tilde{t}$ 随位置变化的玻璃板。具体而言，我们将会得到振幅透射率 $\tilde{t}$ 正比于光强 $|\vec{E}|^2$ 的一片玻璃板，比例系数为 α 。

当我们要拍摄全息照片时，我们需要两相干光源 O_1 与 O_2 ，光源 O_1 直接照射在底片之上，而光源 O_2 照射在物体上，物体的反射光照射在底片上。而当我们要观察全息照片时，我们只需要将 O_2 关闭，并拿走物体，当 O_1 照射全息照片时，我们可以直接看到其背后的物体。

1. 我们先来考察一个玩具模型。我们设物体是一个到玻璃板平面距离为 d 的点， O_1 是由无穷远发来的平面波， O_2 照射在点上使其向外反射球面波。描述玻璃板平面上得到的干涉图像，并且计算出到中心距离为 r 处的条纹间距 Δr ($\Delta r \ll r$)。
2. 继上一问，若我们将 r 处高频变化的透射率视为一光栅，求出其 ± 1 级衍射角。你发现了什么巧合？试着根据这一发现描述在只有 O_1 的照射下我们将会看到怎样的光场。

3. 现在不妨从更一般的角度考察全息照片的实现原理。我们不妨设光源 O_1 照射在玻璃板上的光场为 $\tilde{O}$ ，由物体反射的光场为 $\tilde{R}$ 。试着表示振幅透射率 $\tilde{t}$ ，与移去物体后投射的光场。证明我们能从全息照片中看到物体原先的位置。

(提示：与静电场中的泊松方程 $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ 相同，定态光场满足亥姆霍兹方程 $(\nabla^2 + k^2)U = 0$ 。当给定方程在某一个边界上的值时，光场在全空间中的形式就能够被唯一确定。同时， $|\tilde{O}|^2$ 与 $|\tilde{R}|^2$ 在全息照片处可以认为是缓变的，因此光源离平面有一定距离，光强的衰减可以认为很小。)

五. (60 分) 统计力学基础

在研究含有大量粒子体系的各种宏观物理量时，我们往往需要统计力学的帮助，通过统计力学的手段快速得到一些物理量。

- 我们不妨考察含有 N 个粒子的体系，分布在能级 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 上 ($N \gg n$)，每一个能级 ω_l 都有 ω_l 种不同的状态，此时单个粒子的能量满足玻尔兹曼分布 $f(\epsilon_l) \propto \omega_l e^{-\beta \epsilon_l}$ ，其中 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 。本题中不考虑玻色（费米）系统带来的额外量子效应。
 - 设 $f(\epsilon_l) = Z^{-1} \omega_l e^{-\beta \epsilon_l}$ ，求出归一化系数 Z 。
 - 计算体系的总能量 U ，使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ 表示。(提示： $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$)
 - 设每一个能级的能量 ϵ_l 与某一个环境参量 y 有关 (可以理解为外界环境中的位置、面积等物理量)，此时可以认为单个粒子上受到的力大小为 $\frac{\partial \epsilon_l}{\partial y}$ ，计算体系受到的总的合力 Y (即所有粒子受力之和)，使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial y}$ 表示。
 - 由热力学第一定律， $dQ = dU - Y dy$ ，由此计算体系熵 $S = \int dQ/T$ 的表达式，使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ 表示。(本题需要你强大的凑全微分能力)
- 我们可以用这一理论解释固体热容在低温处的异常现象。晶体中有 N 个原子，每一个原子有三个振动自由度，每一个自由度可以看成是一个一维简谐振子态。根据量子力学的理论，简谐振子的能量是分立的，具体为：

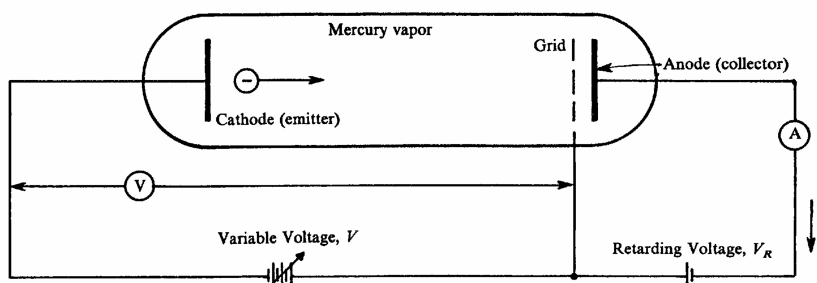
$$\epsilon_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

且每一个能级只有一种状态。

- 写出并计算归一化系数 Z 。
- 计算固体定容热容 $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ ，给出其高温与低温近似，表达式请使用 $\theta_E = \hbar \omega / k_B$ 代换。

六. (40 分) 弗兰克-赫兹实验

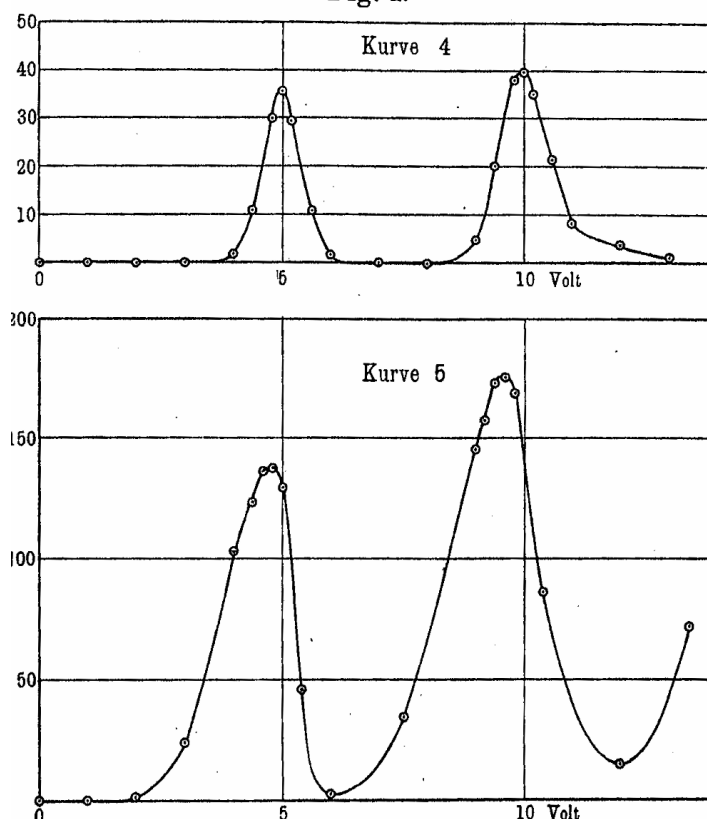
下图为弗兰克-赫兹实验的装置图像。在真空管的左侧为阴极 (Cathode)，在会向外发出自由电子，自由电子在阴极与栅极 (Grid) 之间会被外加的电场加速，最后越过栅极时若有一定的速度，则被阳极 (Anode) 收集，此时我们就测得了阳极接收到的电子形成的电流。在电子运动的过程中，会与管内存在的汞蒸气发生碰撞，使其损耗部分的动能。通过改变可变电源电压 (Variable Voltage)，测量阳极电流，我们可以得到一系列实验数据。



弗兰克与赫兹当年在做实验时，其中两次实验的图像如下¹。

1. 解释产生如下图像的原因，并且从中你能得到关于汞原子的什么物理信息？（提示：汞原子的核外价电子排布式为 $5d^{10}6s^2$ ）
2. 真空管内充满了温度为 160°C 的汞蒸气，计算阴极发射的自由电子在无外加电场的情况下与一个汞原子发生弹性碰撞之前的平均距离 λ （称为平均自由程）。汞蒸气压在 160°C 大小为 4.189mmHg ，汞原子的半径为 160pm ，汞原子的式量为 200.6 。阴极发出电子的温度为 2000K ，质量为质子的 $\frac{1}{1836}$ 倍。（绝对零度为 -273.15°C ）

Fig. 4.



七. (40 分) 艾诺拉·盖号轰炸机

1945 年的 8 月 6 日，美国飞机向日本广岛市扔下了原子弹，这是历史上核武器第一次用于战争。名为艾诺拉·盖 (Enola Gay) 的轰炸机于 1945 年 8 月 6 日凌晨两点左右起飞，机上有包括加肯巴赫在内的 10 名机组人员。

在《广岛倒计时》(Shockwave: Countdown to Hiroshima) 一书中，我们摘取了以下几个片段，其记录了小男孩原子弹在投放过程中的几个关键数据：

原子弹滚出弹舱，落入冰冷的空中。……蒂贝茨解除自动驾驶，抓住操纵杆，做出了那个长期练习的动作：猛地操纵飞机直接俯冲右转。巨大的轰炸机侧倾到 60° ，几乎竖了起来。……杰普森将护目镜套在眼睛上，开始倒数。离爆炸还有 44 秒。

在他们后方，“大师号”投下了那三只测量爆炸的铝罐……两架飞机加足油门，发动机尖叫着飞速向南驶离，空速达到每小时 350 英里。

……在距离相生桥 200 米的地方，在细工町岛馨医生诊所上方整 1903 英尺处，“小男孩”爆炸了。……

¹引自 J. Franck, G. Hertz, Phys. Z. 20, 132 (1919)

在战后，机上飞行员蒂贝茨写了一篇标题很直白的文章，叫《怎样投下一颗原子弹》(*How to Drop An Atom Bomb*)，其中写道：

数学计算与试飞已经给我们了一个最好的直截了当的选择：一个 150° 度的转弯正正好好，而一个 60° 度的侧倾能让我们在 28 秒内完成这个动作。

在本题中，我们假设：

- 不考虑空气阻力
- 飞机在等海拔高度匀速率飞行
- 飞机所受升力垂直于机翼

你可能需要的常数：

- 重力加速度大小为 $g = 9.8\text{m/s}^2$
- 声速为 340m/s
- 1英里 = 1.609344km
- 1英尺 = 0.3048m

1. 飞机飞行的高度是多少米？
2. 飞机急转弯时的半径是多少？
3. 使用计算验证在《怎样投下一颗原子弹》给出的训练数据的准确性，你算出来的真实投弹时的转弯的最优角度与转弯时间是多少？冲击波在 20km 外可以认为已经衰减到对轰炸机足够安全的程度，请问轰炸机能否安全执行任务？

