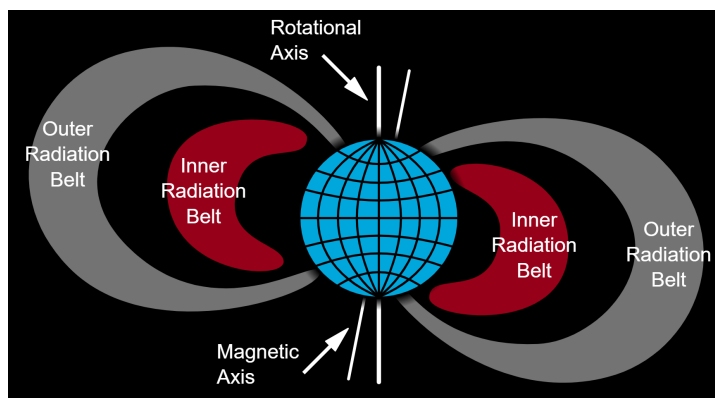


# 不卖，纯恶心人卷 6

命题人：@ 一碗星空汤

## 一. (40 分) 范艾伦辐射带

地球通具有强大的磁场，在其周围束缚了大量的带电粒子，这些带电粒子在地球周围形成了巨大的辐射带，被称为范艾伦辐射带。本题中，我们将探讨辐射带产生的原因，并计算其分布的区域。



我们不妨将地球的磁场视为一磁偶极子产生的场，其磁矩大小为  $M$ ，方向沿  $z$  轴正方向放置在坐标原点。带电量为  $q$ 、质量为  $m$  的粒子在地球的偶极场中运动。

1. 在柱坐标系  $(s, z, \phi)$  中列出电荷的运动方程。
2. 找到两个守恒量  $E, p_\phi$ ，由此将电荷的运动方程化简到只包含  $s, z$  两个坐标。(提示：当  $M = 0$  时，这两个守恒量分别为能量与  $z$  轴角动量分量。)
3. 不妨考察  $z = 0$  即赤道面上粒子的运动。证明其在  $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$  的初始条件下不会脱离赤道面，由此在给定  $p_\phi$  时给出粒子在赤道面上运动时的有效势能  $V_{\text{eff}}(s)$ ，给出粒子能够被地球磁场束缚的条件。
4. 现在考察赤道面上束缚的低能量粒子的运动，若其能量为  $E$ ，试着用守恒量给出其粒子环绕地球运动的周期关于  $E$  的首阶近似。
5. 我们再来看电荷在全空间中的运动区域，给定  $p_\phi$ ，给出粒子在全空间中运动的有效势能  $V_{\text{eff}}(s, z)$ ，地球半径为  $R$ ，粒子最有可能在哪一个纬度撞击地球。画出低有效势能区域在空间中分布的大致形状，同时试着定性描述低能量粒子在空间中运动轨迹的形状。

[解答]

### 1. (6 分)

电荷在空间中运动的速度为 (1 分)

$$\mathbf{v} = \dot{s}\hat{s} + s\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$

空间中的磁场为 (1 分)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}) = \frac{\mu_0 M}{4\pi(s^2 + z^2)^{5/2}} ((2z^2 - s^2)\hat{\mathbf{z}} + 3zs\hat{\mathbf{s}})$$

因此电荷运动受到的作用力为 (2 分)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q M}{4\pi(s^2 + z^2)^{5/2}} (s\dot{\phi}(2z^2 - s^2)\hat{\mathbf{s}} + (3zs\dot{z} - (2z^2 - s^2)\dot{s})\hat{\phi} - 3s^2 z \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}})$$

故其运动方程为 (2 分)

$$\begin{cases} m(\ddot{s} - s\dot{\phi}^2) = \frac{\mu_0 q M}{4\pi(s^2 + z^2)^{5/2}} s\dot{\phi}(2z^2 - s^2) \\ m(2\dot{s}\dot{\phi} + s\ddot{\phi}) = \frac{\mu_0 q M}{4\pi(s^2 + z^2)^{5/2}} (3zs\dot{z} - (2z^2 - s^2)\dot{s}) \\ m\ddot{z} = \frac{\mu_0 q M}{4\pi(s^2 + z^2)^{5/2}} \cdot (-3s^2 z \dot{\phi}) \end{cases}$$

2. (9 分)

首先一个显而易见的守恒量是体系的能量，即 (1 分)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

考察  $\phi$  分量对应的运动方程，体系  $z$  轴角动量随时间变化量为 (2 分)

$$\frac{d(ms^2\dot{\phi})}{dt} = m(2s\dot{s}\dot{\phi} + s^2\ddot{\phi}) = \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \cdot \frac{3zs^2\dot{z} - (2z^2 - s^2)s\dot{s}}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

为了凑全微分，不妨考察表达式的  $\dot{z}$  分量，有

$$\int \frac{3zs^2 dz}{(s^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3}{2}s^2 \int \frac{d(z^2)}{(s^2 + z^2)^{5/2}} = -\frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} + C$$

同时注意到，

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right) = -\frac{2s}{(s^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{2s^3}{(s^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{s^3 - 2z^2 s}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

因此有，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{-s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{3zs^2\dot{z} - (2z^2 - s^2)s\dot{s}}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

由此我们得到守恒量，(2 分)

$$p_\phi = ms^2\dot{\phi} + \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}}$$

将  $\dot{\phi}$  用  $s, z$  表示，可以得到，(2 分)

$$\dot{\phi} = \frac{1}{ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

代入运动方程可以得到 (2 分)

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \frac{1}{ms^3} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right) \left( p_\phi + \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2(z^2 - 2s^2)}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \right) \\ m\ddot{z} = -\frac{\mu_0 q M}{4\pi m} \frac{3z}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{cases}$$

3. (9 分)

当初始时刻  $z = 0, \dot{z} = 0$  时，有  $m\ddot{z} = 0$ ，因此这之后一直有  $z = 0$ ，故粒子的运动始终会限制在  $z = 0$  平面 (1 分)，此时  $\dot{\phi}$  可以表示为 (1 分)

$$\dot{\phi} = \frac{1}{ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi s} \right)$$

代入能量的表达式后可以得到 (1 分)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi s} \right)^2$$

因此体系的有效势能为 (2 分)

$$V_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi s} \right)^2$$

当  $p_\phi \leq 0$  时， $V_{\text{eff}}(s)$  关于  $s$  严格减，此时粒子无法被地球磁场束缚，会逃离到无穷远。(1 分) 当  $p_\phi > 0$  时， $V_{\text{eff}}(s)$  在  $p_\phi = \frac{\mu_0 q M}{4\pi s}$  处取得最小值 0，要求得势能曲线极大值的位置，我们对势能求导，

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{ds} = -\frac{1}{ms^3} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi s} \right) \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{2\pi s} \right) = 0$$

解得，(1 分)

$$s_1 = \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi}, \quad s_2 = \frac{\mu_0 q M}{2\pi p_\phi}$$

因此势能极小值在  $s_1$  取到，极小值为 0；势能最大值在  $s_2$  取到，极大值为  $\frac{\pi^2 p_\phi^2}{2m(\mu_0 q M)^2}$ 。若要求粒子被地球磁场束缚，那么 (2 分)

$$E < \frac{\pi^2 p_\phi^2}{2m(\mu_0 q M)^2}, \quad s(0) < \frac{\mu_0 q M}{2\pi p_\phi}$$

4. (8 分)

在  $s = \mu_0 q M / (4\pi p_\phi)$  处展开势能曲线，可以得到，(1 分)

$$V_{\text{eff}}(s) = \frac{p_\phi^2}{2m} \left( \frac{4\pi p_\phi}{\mu_0 q M} \right)^4 \left( s - \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi} \right)^2$$

此处的等效劲度系数为，(1 分)

$$k_{\text{eff}} = \frac{p_\phi^2}{m} \left( \frac{4\pi p_\phi}{\mu_0 q M} \right)^4$$

因此粒子在  $s$  方向的振幅与角频率为，(2 分)

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k_{\text{eff}}}} = \sqrt{2mE} \cdot \frac{\mu_0^2 q^2 M^2}{16\pi^2 p_\phi^3}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \frac{16\pi^2 p_\phi^3}{m\mu_0^2 q^2 M^2}$$

因此粒子在  $s$  方向的运动为 (1 分)

$$s(t) = \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi} + A \cos \omega t$$

于是有

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m \left( \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi} + A \cos \omega t \right)^3} \cdot A \cos \omega t$$

由  $A \ll s_1$ ，我们可以作小量展开，得到 (1 分)

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m \left( \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi} \right)^3} A \cos \omega t \left( 1 - 3 \frac{4\pi p_\phi}{\mu_0 q M} A \cos \omega t \right)$$

相比于绕转角速度，径向振动角频率更为高频，因此对  $\dot{\phi}$  取时间平均可以得到 (1 分)

$$\langle \dot{\phi} \rangle = -\frac{3}{2} A^2 \frac{p_\phi}{m} \left( \frac{4\pi p_\phi}{\mu_0 q M} \right)^4 = -\frac{3E}{p_\phi}$$

因此绕转周期为 (1 分)

$$T = \frac{2\pi p_\phi}{3E}$$

5. (8 分)

将  $\dot{\phi}$  由  $p_\phi, s, z$  表示并带入能量的表达式, (1 分)

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2$$

因此空间中的有效势能为, (2 分)

$$V_{\text{eff}}(s, z) = \frac{1}{2ms^2} \left( p_\phi - \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2$$

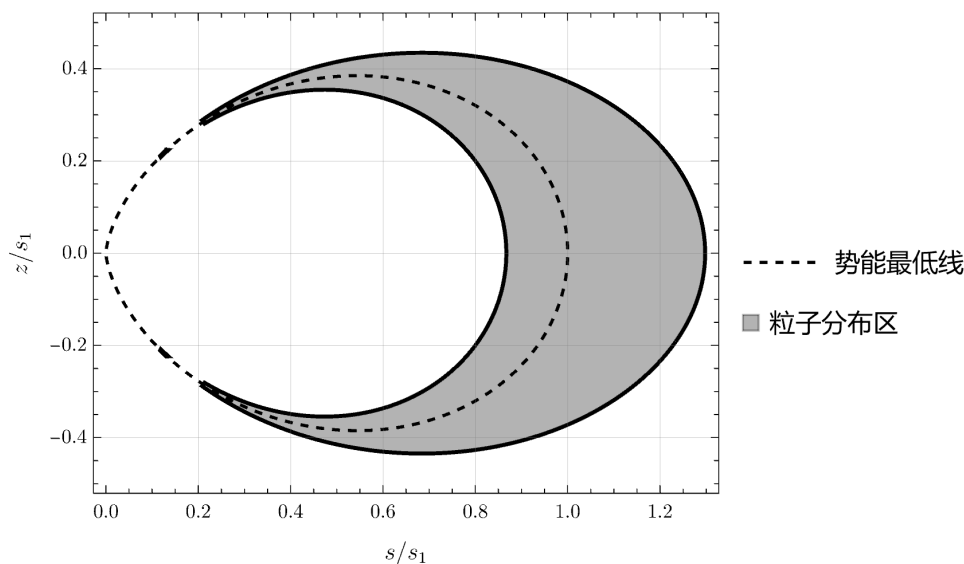
因此空间中势能最低区域的曲线即为,

$$p_\phi = \frac{\mu_0 q M}{4\pi} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}}$$

令  $z = r \sin \theta, s = r \cos \theta$  可以得到, (1 分)

$$r(\theta) = \frac{\mu_0 q M}{4\pi p_\phi} \cos^2 \theta$$

由此可以画出低势能区域的大致分布形状, 是一个环绕地球的 “C” 型环状区域. (1 分)



电荷最有可能分布在势能最低的区域, 因此有其与地球的交点为  $r(\theta) = R$ , 可以解得 (1 分)

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{4\pi p_\phi R}{\mu_0 q M}}$$

由于随着纬度的增加, 粒子越发接近两级, 因而磁场相加。因此粒子在空间中运动时, 其轨迹在呈现出环绕磁感线的螺旋状的同时、在南北极之间来回振荡, 并且还有绕  $z$  轴的单向进动. (2 分)

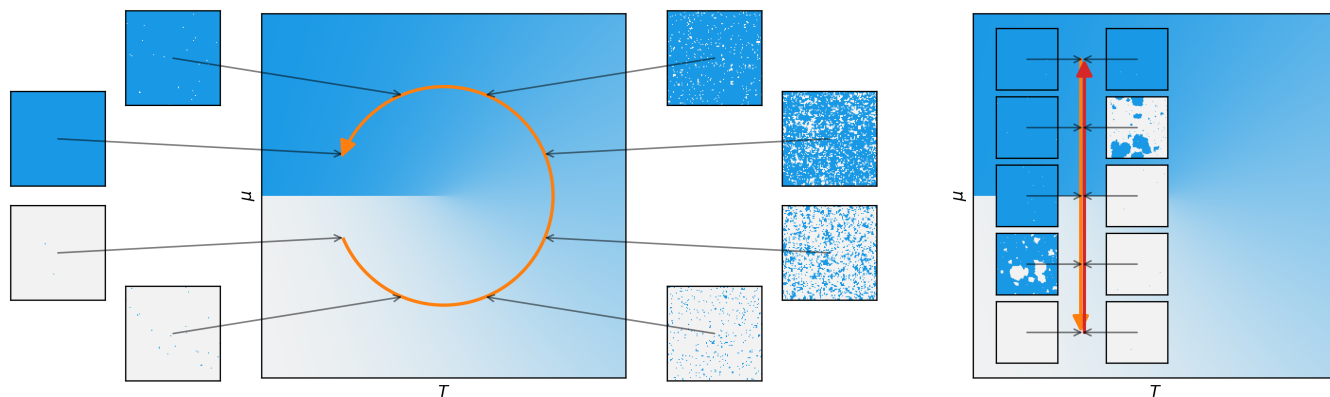
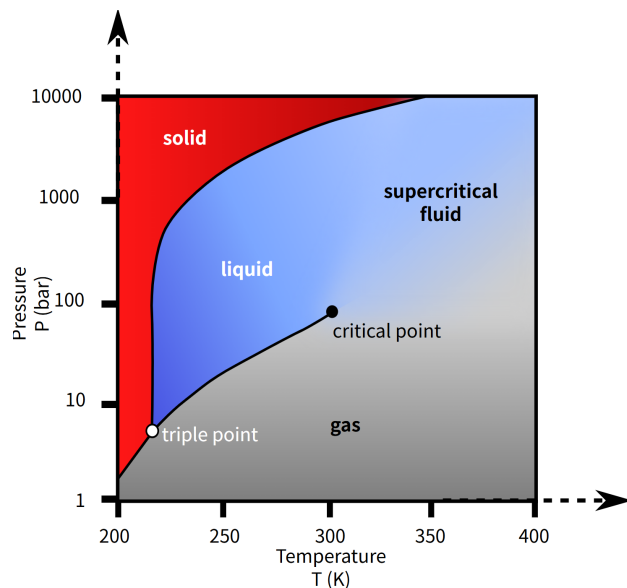
二. (40 分) 超临界流体<sup>1</sup>

我们知道水有固液气三态，当我们改变温度和压强时，流体在这三态之间发生转化，即“相变”。然而，在水的相图中，当温度与压强达到特定的值时，我们会发现其可以连续地从气体转化为液态。这一过程中，物质所经历的相就是超临界流体。

为了探究这一现象的成因，我们使用一个简单的二维网格模型来模拟这一问题。每个格子有两种状态，分别为“蓝色”表示液体，数值上用 1 表示，“白色”表示气体，数值上用 0 表示，而我们称网格中所有格点的状态总和为一个“态”。由于在一个网格中，实现压强的固定比较困难，因此在这里我们选择了温度  $T$  与化学势  $\mu$  两个参量来表征物质所处的环境。

态的分布满足玻尔兹曼分布，态  $X$  的概率满足  $\mathbb{P}[X] \propto \exp\left(-\frac{E-\mu N}{T}\right)$  其中  $E$  为体系的能量， $N$  为蓝色格子的数量。(这里我们通过选取合适的坐标，使得  $k_B = 1$ )。由于液体具有“聚拢”的性质，我们可以认为  $E$  正比于相邻的“格点对”都有水的对数，且聚拢对数越多，能量越低，即  $E = -J \sum_{(i,j) \in \text{pair}} s_i s_j$ 。

通过编写模拟程序，改变  $T, \mu$  进行模拟。若将模拟得到的液体“密度”（蓝色格点与总格点数比值）画在  $(T, \mu)$  平面上，可以得到如下的图。可以看到与水临界点处类似的图像。



1. 我们考察一个极简化的网格：全连接图。考察一个共有  $N$  个格点的网格，网格上的任意两个点都算作“格点对”。此时我们取  $J = \frac{4}{N}$ 。给出密度  $\rho$  满足的概率分布（可以包含一个归一化常数）。
2. 继上一问，当  $N \gg 1$  时，给出最概然密度满足的方程，并定性画出不同温度下最概然密度随  $\mu$  的变化曲线。（需要注意方程多解性！）你从方程的解中发现了什么？（提示：考察不同温度下，最概然密度随化学势的变化关系。）计算出你认为重要的临界值。
3. 当温度在临界点之下时，我们让模拟过程的化学势缓慢增加越过相变线，我们发现体系并没有发生相变，而是处

<sup>1</sup>一个可以把玩的交互模拟网址 (<https://vilas.us/simulations/liquidvapor/>)。

于一种“亚稳态”，只有继续增加化学势或添加足够的扰动，物质才从气态转变为液态。用前一问的结果解释这一现象，并在低温时分别对  $\mu$  增加与  $\mu$  减小的情形进行绘制。

**[解答]**

1. (8 分)

对于一个  $N$  个格点的网格，在密度为  $\rho$  时，有  $\rho N(\rho N - 1)/2$  对格子对，因此有 (4 分)

$$\mathbb{P}[X] \propto \exp\left(\frac{2\rho(\rho N - 1) + \mu\rho N}{T}\right)$$

而密度为  $\rho$  的态不仅仅有  $X$  一个，一共有  $\binom{N}{\rho N}$  个，因此有 (4 分)

$$P(\rho) = A \binom{N}{\rho N} \exp\left(\frac{2\rho(\rho N - 1) + \mu\rho N}{T}\right)$$

2. (24 分)

对概率密度求对数可以 (2 分)

$$\ln P = \ln A + \ln N! - \ln(\rho N)! - \ln((1 - \rho)N)! + \frac{\rho(\rho N - 1) + \mu\rho N}{T}$$

由于  $N \gg 1$ ，使用斯特林公式可以得到  $\ln n! \approx n \ln n - n$ ，因此有 (3 分)

$$\begin{aligned} \ln P &= \ln A + N \ln N - \rho N \ln \rho N - (1 - \rho)N \ln(1 - \rho)N + \frac{2\rho^2 N + \mu\rho N}{T} \\ &= \ln A + N \left[ 1 - \rho \ln \rho - (1 - \rho) \ln(1 - \rho) + \frac{2\rho^2 + \mu\rho}{T} \right] \end{aligned}$$

若要最大化  $P$ ，只需要最大化  $f_{\mu,T}(\rho) = \frac{2\rho^2 + \mu\rho}{T} - \rho \ln \rho - (1 - \rho) \ln(1 - \rho)$ 。关于  $\rho$  求导可以得到 (3 分)

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{4\rho + \mu}{T} - \ln \rho + \ln(1 - \rho) = 0$$

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} = \frac{4}{T} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{1 - \rho} \leq 0$$

需要对解的数量进行讨论。容易注意到当  $\rho \rightarrow 0$  时  $\frac{df}{d\rho} \rightarrow +\infty$ ，当  $\rho \rightarrow 1$  时  $\frac{df}{d\rho} \rightarrow -\infty$ ，因此在  $\rho \in (0, 1)$  内，一定至少存在一个零点。

**【情况 1】方程只有一个零点**

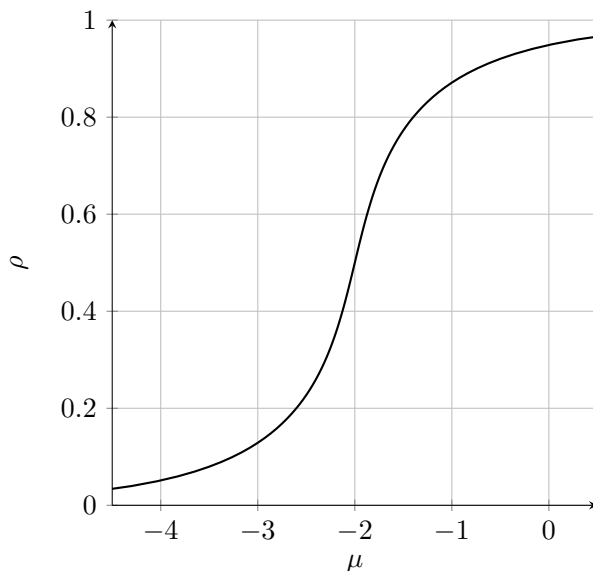
当  $\frac{d^2 f}{d\rho^2}$  在  $(0, 1)$  上恒小于等于 0 时，函数  $\frac{df}{d\rho}$  严格减，方程只有一个零点，此时 (2 分)

$$T \geq \max_{\rho \in (0,1)} 4\rho(1 - \rho) = 1$$

我们可以用  $\rho$  表示  $\mu$  得到 (2 分)

$$\mu = -4\rho + T(\ln \rho - \ln(1 - \rho))$$

由此作出如下图像：(2 分)



可以看到曲线关于  $\mu = -2$  对称，而且连续变化。

### 【情况 2】方程有多个零点

由前一种情况的反面可以知道，当  $0 < T < 1$  时，方程有可能多个零点，具体而言，通过计算  $\frac{d^2 f}{d\rho^2} = 0$ ，我们可以得到两个零点  $\rho_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-T}}{2}$ ，因此有如下表格（2 分）

| $\rho$                  | $(0, \rho_-)$ | $\rho_-$ | $(\rho_-, \rho_+)$ | $\rho_+$ | $(\rho_+, 1)$ |
|-------------------------|---------------|----------|--------------------|----------|---------------|
| $\frac{d^2 f}{d\rho^2}$ | -             | 0        | +                  | 0        | -             |
| $\frac{df}{d\rho}$      | $\searrow$    | 极小值      | $\nearrow$         | 极大值      | $\searrow$    |

值得注意的是，

$$\begin{aligned}
 f_{-4-\mu, T}(\rho) &= \frac{2\rho^2 - (4+\mu)\rho}{T} - \rho \ln \rho - (1-\rho) \ln(1-\rho) \\
 &= \frac{2(1-\rho)^2 + \mu(1-\rho)}{T} - \rho \ln \rho - (1-\rho) \ln(1-\rho) - \frac{\mu}{T} = f_{\mu, T}(1-\rho) - \frac{\mu}{T}
 \end{aligned}$$

因此若  $\rho$  为  $f_{\mu, T}(\rho)$  的最大值点，那么  $1-\rho$  为  $f_{-4-\mu, T}(\rho)$  的最大值点。故  $\rho$ - $\mu$  的图像应当关于  $(\mu, \rho) = (-2, 0.5)$  对称，所以在这里我们只对  $\mu > -2$  的情况进行讨论。（2 分）

1° 若  $\mu \geq -4\rho_- + T(\ln \rho_- - \ln(1-\rho_-))$ ，即  $\left. \frac{df}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_-} \geq 0$ ， $f$  仍然只有一个极大值点，其位于区间  $(\rho_+, 1)$ ，不存在多解性。

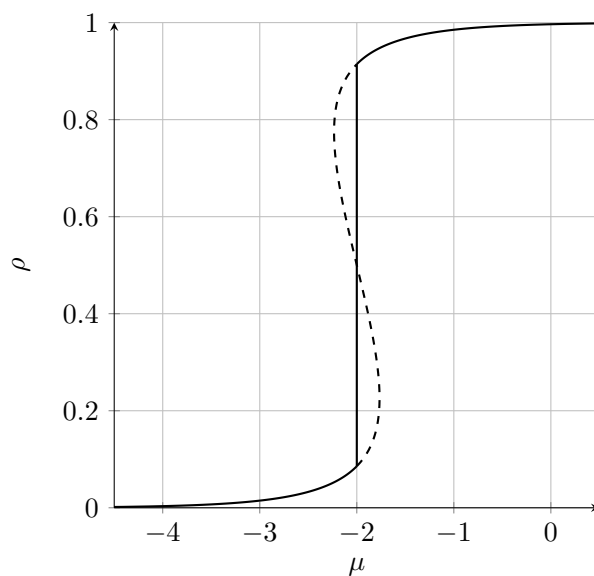
2° 若  $-2 < \mu < -4\rho_- + T(\ln \rho_- - \ln(1-\rho_-))$ ，即  $\left. \frac{df}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_-} < 0$ ， $\left. \frac{df}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_+} > 0$ ，可以得到方程有三个根，记为  $\rho_1(\mu) < \rho_2(\mu) < \rho_3(\mu)$ ，其中  $\rho_2(\mu)$  为极小值点。考察函数  $H(\mu) = f_{\mu, T}(\rho_3(\mu)) - f_{\mu, T}(\rho_1(\mu))$ 。由于函数  $f_{-2, T}(\rho)$  关于  $\rho = 0.5$  对称，因此  $H(-2) = 0$ 。

现在试着计算  $\frac{dH}{d\mu}$ ，根据链式法则展开可以得到

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{d\mu} &= \left. \frac{\partial f_{\mu, T}}{\partial \mu} \right|_{\rho_3(\mu)} + \left. \frac{\partial f_{\mu, T}}{\partial \rho} \right|_{\rho_3(\mu)} \frac{d\rho_3}{d\mu} - \left. \frac{\partial f_{\mu, T}}{\partial \mu} \right|_{\rho_1(\mu)} - \left. \frac{\partial f_{\mu, T}}{\partial \rho} \right|_{\rho_1(\mu)} \frac{d\rho_1}{d\mu} \\
 &= \frac{\rho_3(\mu) - \rho_1(\mu)}{T} > 0
 \end{aligned}$$

因此对于  $\mu > -2$ ，有  $H(\mu) > H(-2) = 0$ ，即  $f_{\mu,T}(\rho_3(\mu)) > f_{\mu,T}(\rho_1(\mu))$ 。故  $(\rho_+, 1)$  内的解仍然为最大值。综上所述，当  $\mu > -2$  时，最大值点在  $(\rho_+, 1)$  内；当  $\mu < -2$  时，最大值点在  $(0, \rho_-)$  内；当  $\mu = -2$  时，有两个极大值点都是最大值点。(2 分)

由此作出如下图像：(2 分)

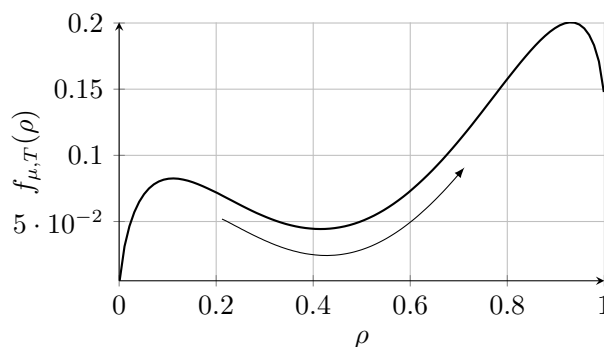


可以看到曲线在  $\mu = -2$  处存在突变，此即气液相变。

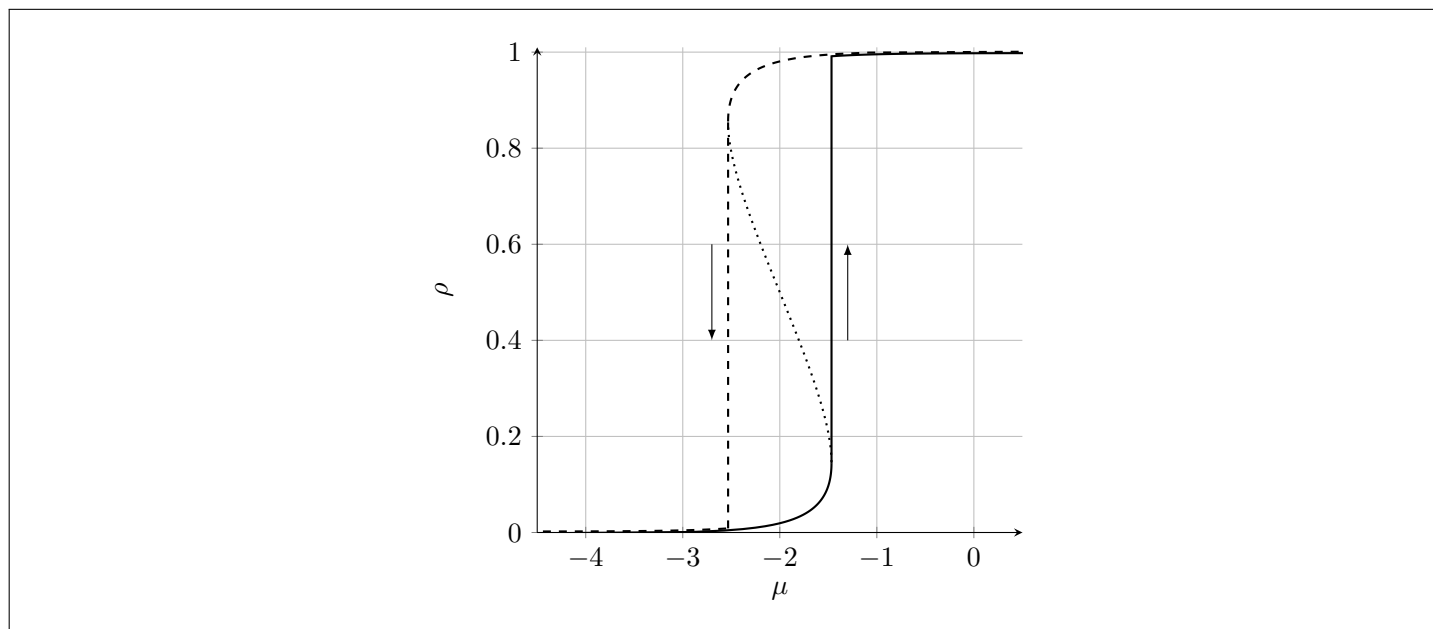
我们发现，当温度  $T \geq 1$  时，物质的相变时连续的，此时物体处于超流态；而当温度  $T < 1$  物质的相变不连续，此时物体处于明确的液态与气态。这两个现象对应相图上的临界点为  $(T, \mu) = (1, -2)$ 。(2 分)

### 3. (8 分)

这解释起来并不困难。我们考察  $T \leq 1$  时展现出来的双峰概率分布，当  $\mu$  稍稍增加越过  $-2$  时，虽然右侧的峰高于左侧，但体系没有足够的热扰动由左峰的状态越变为右峰的状态，因此仍然位于左侧。直至左峰变得很浅，越过中间势垒的能量足够低时，才会有概率变为右峰的状态。(4 分)

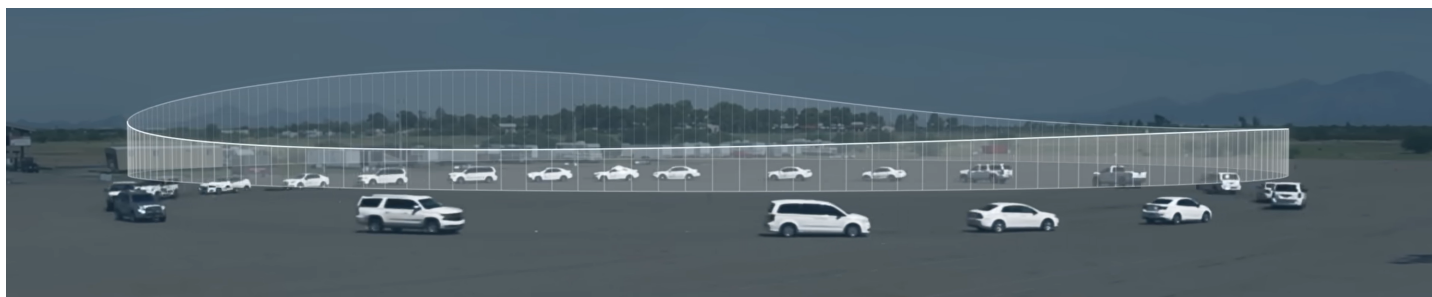


当温度很低时，我们可以认为只有当左峰消失时，系统会越变至右峰的状态。因此我们可以根据前问得到的  $\mu = -4\rho + T(\ln \rho - \ln(1 - \rho))$  得到如下图像。(4 分)



### 三. (40 分) 堵车波

在高速上，我们常常会遇到这样的情况：车子向前运动的一段距离，又停了下来。此时如果你拉高观察的视角，你会看到地面上车子与车子之间的间距出现了如同纵波一样的变化。本题中，我们将尝试探究堵车现象的产生条件，并尝试用简单的参数描述其中的各种堵车模式。



我们认为司机在开车时，会在保持与前车的距离的同时会希望能够保持与前车相同的速度。我们不妨使用  $x(t)$  表示司机的位移， $x_L(t)$  为前车的位移。首先，司机在开车时有一个反应时间  $\tau$ ，这使得司机会希望与前车保持  $\frac{dx}{dt}\tau$  的距离，司机保持间距的能力我们称之为灵敏度  $\alpha$ 。具体而言， $\alpha(\frac{x_L - x}{\tau} - \frac{dx}{dt})$  为司机为了保持间隔所具有的加速度。同时，司机控制车辆平滑形式的能力我们称之为预判力  $\beta$ ，这一能力使得司机能更好预判自身车辆与前方车辆的速度差，并使之减小。具体而言， $\beta(\frac{dx_L}{dt} - \frac{dx}{dt})$  为司机预测前方车辆速度所具有的加速度。上述两者之和为司机此时此刻的加速度。

1. 给出司机位移  $x(t)$  满足的二阶微分方程。
2. 我们来看看一个“好司机”应该具有的性质。我们希望其能够在逼近前车时，能够不要“开过头”，即我们希望其表现得像一个临界阻尼或过阻尼的弹簧。在前车匀速运动的情况下给出  $\alpha, \beta, \tau$  所满足的不等式。
3. 仅仅做一个“好司机”并不足够，我们还要看看这个车流是否稳定，即一个小扰动是否会在后续车辆运动中方法。设  $x_L(t) = v_0 t + A_L \cos \omega t$ ，给出  $x(t)$  对应的振幅  $A$  与相位差  $\Delta \phi$ 。若要使得车流稳定，则要求对于任意  $\omega > 0$ ，都有  $A/A_L \leq 1$ ，给出  $\alpha, \beta, \tau$  所满足的不等式。

4. 在给定  $\tau$  时，在  $\alpha, \beta$  平面上画出上述不等式所描述的四个区域，试着定性描述四个区域中汽车运动所满足的性质，并给出特征临界点的坐标（即对这个点作任意小的扰动都能进入四种不同的运动模式中）。
5. 现在不妨考察恰好临界的车流。计算在平均速度为  $v_0$  的车流中，角频率  $\omega$  的堵车波波包在地面系中的前进速度。

**[解答]**

1. (2 分)

由题设可知，(2 分)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \left( \frac{x_L - x}{\tau} - \frac{dx}{dt} \right) + \beta \left( \frac{dx_L}{dt} - \frac{dx}{dt} \right)$$

2. (6 分)

在前车参考系下考察司机的运动，设  $r = x - x_L$ ,  $\frac{dx_L}{dt} = v_0$ ，有 (2 分)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha \left( -\frac{r}{\tau} - \frac{dr}{dt} - v_0 \right) - \beta \frac{dr}{dt}$$

代入试探解  $r(t) = -v_0\tau + Ae^{\lambda t}$ ，有 (2 分)

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} = -\frac{\alpha}{\tau} Ae^{\lambda t} - (\alpha + \beta)\lambda Ae^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda + \frac{\alpha}{\tau} = 0$$

若司机在开车时没有“过冲”，则要求上述方程的根为实根，故有 (2 分)

$$\Delta = (\alpha + \beta)^2 - \frac{4\alpha}{\tau} \geq 0 \quad (\text{I})$$

3. (12 分)

代入  $x_L = v_0t + \tilde{A}_L e^{i\omega t}$ ，并猜解  $x = v_0(t - \tau) + \tilde{A} e^{i\omega t}$ ，有 (2 分)

$$-\omega^2 \tilde{A} = \alpha \frac{\tilde{A}_L - \tilde{A}}{\tau} - (\alpha + \beta)i\omega \tilde{A} + \beta i\omega \tilde{A}_L$$

由此解得，(2 分)

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{A}_L} = \frac{\alpha/\tau + i\beta\omega}{\alpha/\tau - \omega^2 + i(\alpha + \beta)\omega}$$

因此有，(4 分)

$$\frac{A}{A_L} = \frac{\sqrt{(\alpha/\tau)^2 + \beta^2\omega^2}}{\sqrt{(\alpha/\tau - \omega^2)^2 + (\alpha + \beta)^2\omega^2}}, \quad \Delta\phi = \arctan\left(\frac{\beta\omega\tau}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{(\alpha + \beta)\omega\tau}{\alpha - \omega^2\tau}\right)$$

若要求对于任意  $\omega > 0$ ，有  $A/A_L \leq 1$ ，则有

$$\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2 + \beta^2\omega^2 \leq \left(\frac{\alpha}{\tau} - \omega^2\right)^2 + (\alpha + \beta)^2\omega^2$$

整理可以得到，(2 分)

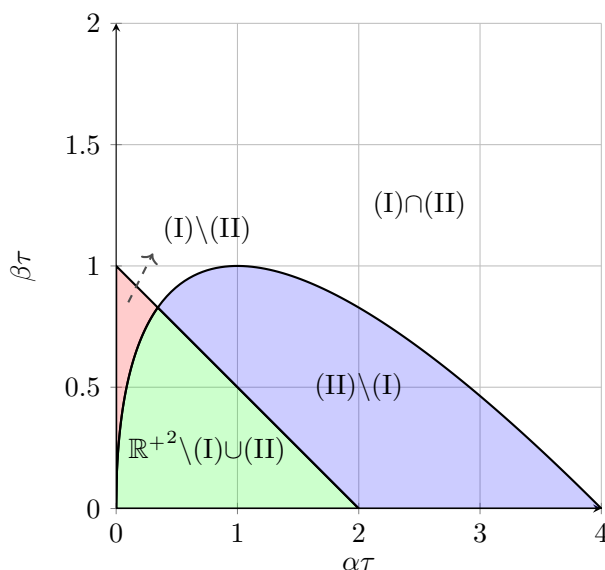
$$\left(\omega^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\frac{\alpha}{\tau}\right)\omega^2 \geq 0$$

若上述表达式对任意  $\omega > 0$  成立，那么 (2 分)

$$\alpha + 2\beta - \frac{1}{\tau} \geq 0 \quad (\text{II})$$

## 4. (12 分)

在给定  $\tau$  之后，两个不等式将平面划分为了四个区域。其中 (I) 描述的是一个双曲线边界，(II) 描述的是一个直线边界。(2 分)



由此我们将平面分为四个区域，分别为  $(I) \cap (II)$ ,  $(II) \setminus (I)$ ,  $(I) \setminus (II)$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus ((I) \cup (II))$ 。分别表征了：(4 × 2 分)

1.  $(I) \cap (II)$  - 理想区域：司机对间距的调整不过冲（平稳调整），且整个车流能有效地抑制扰动（交通稳定）。
2.  $(II) \setminus (I)$  - 震荡-稳定：司机对间距的调整有过冲（震荡调整），但预判力  $\beta$  或灵敏度  $\alpha$  足够大，使得车流整体上是稳定的，扰动最终仍会衰减。
3.  $(I) \setminus (II)$  - 不当阻尼-堵车：司机个体调整平稳（不过冲），但车流稳定性条件不满足。这通常意味着灵敏度  $\alpha$  太小或预判力  $\beta$  不足，导致扰动向后传递时放大，是堵车波产生的根本原因。
4.  $\mathbb{R}^2 \setminus ((I) \cup (II))$  - 欠阻尼-堵车：司机个体调整有过冲，且车流不稳定。这是最差的模式，个体行为和车流整体都表现出强烈的震荡和放大，堵车波会迅速形成和发展。

对于特征临界点，联立 (I)(II) 可以得到 (2 分)

$$\alpha = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\tau}, \quad \beta = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{\tau}$$

## 5. (10 分)

在随车流平动的参考系中，相邻两车运动时的相位差为 (2 分)

$$\Delta\phi = \arctan\left((1 + \sqrt{2})\omega\tau\right) - \arctan\left(\frac{2(-2 + \sqrt{2})\omega\tau}{-6 + 4\sqrt{2} - \omega^2\tau^2}\right)$$

相邻两车运动的间隔为，(2 分)

$$\Delta x = v_0\tau$$

因此有波矢，(2 分)

$$k = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{1}{v_0\tau} \left[ \arctan\left((1+\sqrt{2})\omega\tau\right) - \arctan\left(\frac{2(-2+\sqrt{2})\omega\tau}{-6+4\sqrt{2}-\omega^2\tau^2}\right) \right]$$

所以在车流平动系中，波包运动的群速度为 (2 分)

$$v'_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = v_0 \frac{-(3+2\sqrt{2})\tau^6\omega^6 - 5\tau^4\omega^4 + 8(2\sqrt{2}-3)\tau^2\omega^2 + 48\sqrt{2}-68}{(3+\sqrt{2})\tau^4\omega^4 - 2(5\sqrt{2}-8)\tau^2\omega^2 - 48\sqrt{2}+68}$$

因此在地面系下，有波包运动的群速度为 (2 分)

$$v_g = v_0 + v'_g = v_0\tau^2\omega^2 \frac{-(3+2\sqrt{2})\tau^4\omega^4 + (\sqrt{2}-2)\tau^2\omega^2 + 6\sqrt{2}-8}{(3+\sqrt{2})\tau^4\omega^4 - 2(5\sqrt{2}-8)\tau^2\omega^2 - 48\sqrt{2}+68}$$

【注】

利用这种方法，我们还可以探讨如何从堵车的状态中调整出来。一个可行的方法是设置若干个“自动驾驶”车，这些自动驾驶车之间能够通过直接通过计算机控制“超距”相互作用（与人类开车时只能与前方的车有相互作用相对），从而能够有效缓解堵车状态。

有兴趣的同学还可以研究这一问题更复杂的非线性版本（因为车子不能倒退，因为存在车子直接停下的情况，而不是简谐振动），会出现更有意思的滞回现象、双稳态、最优运输效率与最省油速度。

#### 四. (80 分) 传送门物理学

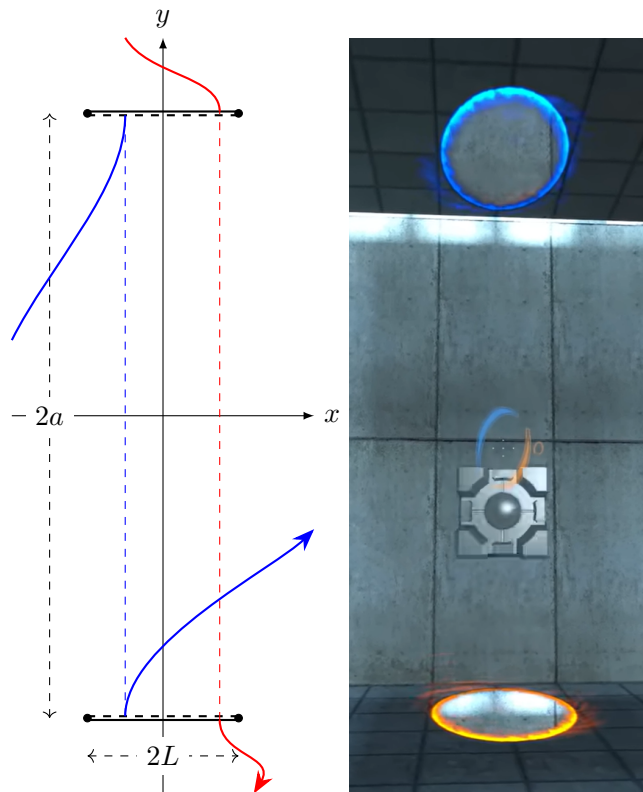
在传送门这款游戏中，若将两个传送门在竖直方向上对其放置，就能构建出无限加速下落的永动机（图中的方块在落入下方的椭圆形传送门后会被直接传送到上方的椭圆形传送门）。这显然是不满足能量守恒定律的。那么如果我们要求传送门满足能量守恒会发生什么呢？

一个重要的观察在于传送门不仅仅会传送物体，还会传送重力场！这导致重力场线在进入下方传送门后被传送到上方传送门，两个传送门之间并不是均匀的重力场！

对于本问题而言，我们不妨考察一个二维平面中的两个一维传送门，分别位于  $y = a$  与  $y = -a$ ，且有  $|x| \leq L$ 。若物体从  $(x, a^+)$  进入传送门，则其会被传送到  $(x, (-a)^-)$  处；同样地，若物体从  $(x, a^-)$  进入传送门，则其会被传送到  $(x, (-a)^+)$ 。即图中上方传送门实线部分会传送进入下方传送门实线部分，虚线部分会传送到虚线部分。

我们不妨求解这个体系的空间重力势  $\phi(x, y)$ ，即单位质量的重力势能。此时，点  $(x, y)$  处的重力加速度为  $-\nabla\phi(x, y)$ 。本题中，我们设万有引力常数为  $G = \frac{1}{4\pi}$ 。

1. 设重力势  $\phi(x, y) = gy + u(x, y)$ ，给出  $u(x, y)$  满足的方程与边界条件。



2. 对于势  $u(x, y)$ ，由调和函数的性质，其可以表示为边界上单极层与偶极层产生的场，即可以表示为

$$u(x, y) = \int_{-L}^L \rho(\xi) G(x - \xi, y - a) d\xi + \int_{-L}^L \sigma(\xi) G(x - \xi, y + a) d\xi + \int_{-L}^L \mu(\xi) K(x - \xi, y - a) d\xi + \int_{-L}^L \nu(\xi) K(x - \xi, y + a) d\xi$$

其中  $G(x, y)$  为位于原点的单位单极子（即质点）产生的势， $K(x, y)$  为位于原点方向为  $\hat{y}$  的单位偶极子产生的势， $\rho(x), \sigma(x)$  分别为上下单极层密度， $\mu(x), \nu(x)$  分别为上下偶极层密度。试着给出  $\rho(x), \sigma(x), \mu(x), \nu(x)$  满足的积分方程。（最后只得保留一个积分方程，把能够显然求解的积分方程求解。）

3. 当  $L \ll a$  时，给出空间的重力势  $\phi(x, y)$  分布的最低阶近似。并由此计算平衡位置和质点在水平、竖直方向小振动的稳定性与角频率。

（我们可以给到如下积分的提示： $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln |t - x| dt = -\pi \ln 2 \quad (-1 < x < 1)$ 。）

[解答]

1. (16 分)

重力势满足拉普拉斯方程 (2 分)

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0$$

而传送门能够同时传送重力势与重力势法向导数，因此有对于  $-L \leq x \leq L$ , (6 分)

$$\phi(x, a^-) = \phi(x, (-a)^+), \quad \phi(x, a^+) = \phi(x, (-a)^-), \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=a^+} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=(-a)^-}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=a^-} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=(-a)^+}$$

代入  $\phi(x, y) = gy + u(x, y)$ ，可以得到方程 (2 分)

$$\nabla^2 u(x, y) = 0$$

以及边界条件 ( $-L \leq x \leq L$ ), (6 分)

$$u(x, a^-) - u(x, (-a)^+) = -2ga, \quad u(x, a^+) - u(x, (-a)^-) = -2ga$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=a^+} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=(-a)^-}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=a^-} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=(-a)^+}$$

2. (36 分)

单位质量产生的重力势满足 (2 分)

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

在二维平面上，有 (2 分)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

对于位于原点的偶极子，考察两个质量分别为  $\pm m$  的质点，分别位于  $(0, \pm l/2)$ ，则空间中的重力势为 ( $x, y \gg l$ ) (2 分)

$$K(x, y) = \frac{m}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - l/2)^2} - \frac{m}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + l/2)^2} = \frac{ml}{2\pi} \frac{d \ln \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}}{dy_0} \bigg|_{y_0=0} = \frac{ml}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

因此对于单位偶极子，有  $ml = 1$ ，因此有，(2 分)

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

因此代入可以得到，(2 分)

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_{-L}^L \rho(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-a)^2} d\xi + \int_{-L}^L \sigma(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+a)^2} d\xi \\ & + \int_{-L}^L \mu(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{y-a}{(x-\xi)^2 + (y-a)^2} d\xi + \int_{-L}^L \nu(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{y+a}{(x-\xi)^2 + (y+a)^2} d\xi \end{aligned}$$

注意到有，(2 分)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\pi((x-\xi)^2 + q^2)} d\xi = \text{sign}(q), \quad \lim_{q \rightarrow 0, x \neq \xi} \frac{q}{\pi((x-\xi)^2 + q^2)} = 0$$

因此有，(2 分)

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{q}{\pi((x-\xi)^2 + q^2)} = \delta(x-\xi), \quad \lim_{q \rightarrow 0^-} \frac{q}{\pi((x-\xi)^2 + q^2)} = -\delta(x-\xi)$$

所以，我们可以得到传送门上下边界处的重力势为 (4 分)

$$\begin{aligned} u(x, a^\pm) = & \int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{2\pi} \ln |x-\xi| d\xi + \int_{-L}^L \frac{\sigma(\xi)}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi \pm \frac{1}{2} \mu(x) + \int_{-L}^L \frac{\nu(\xi)}{\pi} \frac{a}{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi \\ u(x, (-a)^\pm) = & \int_{-L}^L \frac{\sigma(\xi)}{2\pi} \ln |x-\xi| d\xi + \int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi \pm \frac{1}{2} \nu(x) - \int_{-L}^L \frac{\mu(\xi)}{\pi} \frac{a}{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi \end{aligned}$$

由连续性可以得到，(2 分)

$$\int_{-L}^L \frac{\rho(\xi) - \sigma(\xi)}{2\pi} \ln \frac{|x-\xi|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2}} d\xi \pm \frac{1}{2} (\mu(x) + \nu(x)) + \int_{-L}^L \frac{1}{\pi} \frac{a(\mu(\xi) + \nu(\xi))}{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi = 2ga$$

这是两个方程，两个方程相加、相减之后可以解得 (2 分)

$$\mu(x) + \nu(x) = 0$$

$$\int_{-L}^L \frac{\rho(\xi) - \sigma(\xi)}{2\pi} \ln \frac{|x-\xi|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2}} d\xi = -2ga$$

对于上下界面处的导数，有 (2 分)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = & \int_{-L}^L \rho(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{y-a}{(x-\xi)^2 + (y-a)^2} d\xi + \int_{-L}^L \sigma(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{y+a}{(x-\xi)^2 + (y+a)^2} d\xi \\ & + \int_{-L}^L \mu(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 - (y-a)^2}{[(x-\xi)^2 + (y-a)^2]^2} d\xi + \int_{-L}^L \nu(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 - (y+a)^2}{[(x-\xi)^2 + (y+a)^2]^2} d\xi \end{aligned}$$

要处理  $\frac{1}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 - q^2}{[(x-\xi)^2 + q^2]^2}$  在  $q \rightarrow 0$  的奇异性，有

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \mu(\xi) \frac{(x-\xi)^2 - q^2}{[(x-\xi)^2 + q^2]^2} d\xi = \left[ \frac{\mu(\xi)}{2\pi(x-\xi)} \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{\mu'(\xi)}{2\pi} \frac{1}{x-\xi} d\xi$$

由此，我们将原先直接取极限得到的  $(x-\xi)^{-2}$  奇异性转化为了  $(x-\xi)^{-1}$  奇异性，此时  $\xi$  在  $x$  两侧发散的被积函数相互抵消，留下收敛的结果，更方便我们对问题的处理。(也就是计算积分的主值， $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\int_{-L}^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^L) [\cdots] d\xi$ 。)

所以，我们可以得到传送门上下边界处的重力势偏导数为 **(4 分)**

$$\partial_y u(x, a^\pm) = \pm \frac{1}{2} \rho(x) + \int_{-L}^L \frac{\sigma(\xi)}{\pi} \frac{a}{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi + \frac{\mu(\xi)}{2\pi(x-\xi)} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{\mu'(\xi)}{2\pi(x-\xi)} d\xi + \int_{-L}^L \frac{\nu(\xi)}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 - 4a^2}{[(x-\xi)^2 + 4a^2]^2} d\xi$$

$$\partial_y u(x, (-a)^\pm) = \pm \frac{1}{2} \sigma(x) - \int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{\pi} \frac{a}{(x-\xi)^2 + 4a^2} d\xi + \frac{\nu(\xi)}{2\pi(x-\xi)} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{\nu'(\xi)}{2\pi(x-\xi)} d\xi + \int_{-L}^L \frac{\mu(\xi)}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 - 4a^2}{[(x-\xi)^2 + 4a^2]^2} d\xi$$

由连续性可以得到，**(2 分)**

$$\pm \frac{1}{2} (\rho(x) + \sigma(x)) + \int_{-L}^L \frac{a(\sigma(\xi) + \rho(\xi))}{\pi((x-\xi)^2 + 4a^2)} d\xi + \int_{-L}^L \frac{\mu(\xi) - \nu(\xi)}{2\pi} \left[ -\frac{(x-\xi)^2 - 4a^2}{((x-\xi)^2 + 4a^2)^2} \right] d\xi$$

$$+ \frac{\mu(\xi) - \nu(\xi)}{2\pi(x-\xi)} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{\mu'(x) - \nu'(x)}{2\pi(x-\xi)} d\xi = 0$$

这是两个方程，两个方程相加、相减之后可以解得 **(2 分)**

$$\rho(x) + \sigma(x) = 0$$

$$\int_{-L}^L (\mu(\xi) - \nu(\xi)) \cdot f(x-\xi) d\xi + \frac{\mu(\xi) - \nu(\xi)}{2\pi(x-\xi)} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{\mu'(x) - \nu'(x)}{2\pi(x-\xi)} d\xi = 0 \quad (*)$$

值得注意的是，(\*) 式告诉我们

$$\mu(x) - \nu(x) = 0$$

综合以上四式，我们可以得到 **(4 分)**

$$\mu(x) = \nu(x) = 0$$

$$\int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{\pi} \ln \frac{|x-\xi|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2}} d\xi = -2ga, \quad \sigma(x) = -\rho(x)$$

### 3. (28 分)

当  $L \ll a$  时，有

$$\int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{\pi} \ln \frac{|x-\xi|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4a^2}} d\xi \approx \int_{-L}^L \frac{\rho(\xi)}{\pi} \ln \frac{|x-\xi|}{2a} d\xi = -2ga$$

猜解  $\rho(x) = \frac{A}{\sqrt{L^2 - x^2}}$ ，可以得到 **(2 分)**

$$\int_{-L}^L \frac{A}{\pi \sqrt{L^2 - x^2}} (\ln |x-\xi| - \ln 2a) d\xi = A \ln \frac{L}{4a} = -2ga$$

因此可以得到，**(2 分)**

$$A = -\frac{2ga}{\ln(L/4a)}$$

因此我们解得，**(2 分)**

$$\rho(x) = -\frac{2ga}{\ln(L/4a)} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}}, \quad \sigma(x) = \frac{2ga}{\ln(L/4a)} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}}$$

由于  $L \ll a$ ，因此我们可以将上下单极子层视为两个质点，质量为 **(2 分)**

$$m_\rho = \int_{-L}^L \rho(x) dx = -\frac{2\pi ga}{\ln(L/4a)}, \quad m_\sigma = \int_{-L}^L \sigma(x) dx = \frac{2\pi ga}{\ln(L/4a)}$$

因此可以得到空间中的重力势为 **(4 分)**

$$u(x, y) = \frac{m_\rho}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \frac{m_\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y+a)^2} = \frac{ga}{\ln(L/4a)} \cdot \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}}$$

$$\phi(x, y) = gy + \frac{ga}{\ln(L/4a)} \cdot \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}}$$

计算梯度可以得到空间重力场为 **(2 分)**

$$\mathbf{g}(x, y) = -\nabla\phi = \left( \frac{4a^2 gxy}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)((y-a)^2 + x^2)((y+a)^2 + x^2)}, -g - \frac{2a^2 g(a^2 + x^2 - y^2)}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)((y-a)^2 + x^2)((y+a)^2 + x^2)} \right)$$

注意到在  $y = 0$  平面上，由于  $L \ll a$ ，因此有 **(2 分)**

$$g_y = -g - \frac{2a^2 g}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)(a^2 + x^2)} \leq -g - \frac{2g}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)} < 0$$

所以在  $y = 0$  上没有平衡位置，故平衡位置在  $x = 0$  上，此时有 **(2 分)**

$$g_y(y) = -g + \frac{2a^2 g}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)(y-a)(y+a)} = 0$$

由此解得，**(2 分)**

$$y = \pm a \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}}$$

在  $(x, y) = \left(0, a \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}}\right)$  处，有 **(2 分)**

$$\left. \frac{\partial g_x}{\partial x} \right|_{(0, y_+)} = \frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{L}{4a}\right) < 0, \quad \left. \frac{\partial g_y}{\partial y} \right|_{(0, y_+)} = -\frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{L}{4a}\right) > 0$$

因此水平方向上的小振动是稳定的，竖直方向上的是不稳定的，角频率为 **(2 分)**

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{4a}{L}\right)}$$

在  $(x, y) = \left(0, -a \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}}\right)$  处，有 **(2 分)**

$$\left. \frac{\partial g_x}{\partial x} \right|_{(0, y_-)} = -\frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{L}{4a}\right) > 0, \quad \left. \frac{\partial g_y}{\partial y} \right|_{(0, y_-)} = \frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{L}{4a}\right) < 0$$

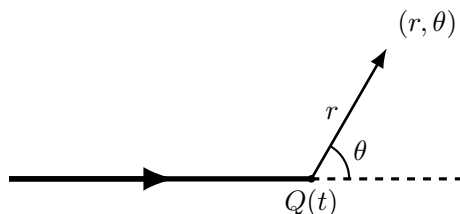
因此竖直方向上的小振动是稳定的，水平方向上的是不稳定的，角频率为 **(2 分)**

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{a} \sqrt{1 + \frac{2}{\ln\left(\frac{L}{4a}\right)}} \ln\left(\frac{4a}{L}\right)}$$

## 五. (30 分) 半截导线

考察截止于原点的半无穷长导线，导线上有恒定电流  $I$ 。在原点处有一点电荷  $Q(t)$ ，根据电荷守恒，显然有  $Q(t) = It$ 。已知点电荷产生的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



求出空间中的磁场分布  $\mathbf{B}(r, \theta, t)$ ，并验证电磁场满足 Maxwell 方程组（可以验证积分形式或微分形式）。

【提示：球坐标下的散度和旋度表达式为

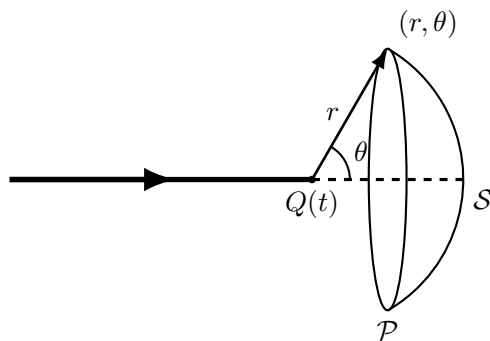
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

】

[解答]

由于体系具有旋转对称性，因此可以考察绕轴的圆环，其对应半径为  $r$  球面上纬度角在  $0$  到  $\theta$  的部分的边界。有 (4 分)

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \sin \theta B, \quad \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^\theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2} (1 - \cos \theta)$$



上述两者相等，因此可以得到 (4 分)

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \tan \frac{\theta}{2} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

接下来验证 Maxwell 方程组, (16 分)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta^3(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \tan \frac{\theta}{2} \right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (1 - \cos \theta) \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \tan \frac{\theta}{2} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

特别的，对于  $z$  轴负半轴上，考察一个半径为  $r \sin \theta$  的小环，有 (2 分)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 I$$

因此有 (4 分)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(x) \delta(y) \Theta(-z) + \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{\mathbf{r}} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

其中  $\Theta(x)$  为 Heaviside 函数，表示为  $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 。

## 六. (40 分) 引力透镜与费马原理

根据广义相对论，质量会使时空弯曲，从而导致光线的传播路径发生偏折。当一颗质量为  $M$  的恒星位于遥远光源与观察者之间时，光线会被引力场弯曲，形成所谓的“引力透镜”现象。下图示意了一束原本应沿直线传播的光线，在经过透镜天体附近时发生偏折，并在观察者处形成像。

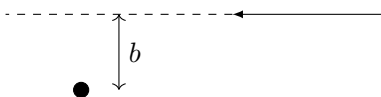
在弱场、低速近似下，质量  $M$  产生的引力势为

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r},$$

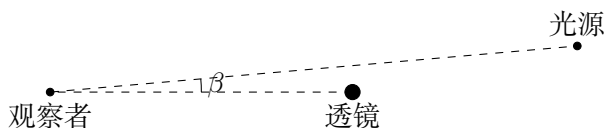
光在该引力场中的传播可视为在折射率

$$n(r) = 1 - \frac{2\Phi(r)}{c^2} = 1 + \frac{2GM}{c^2 r}$$

的非均匀介质中传播。



1. 利用费马原理  $\delta \int n ds = 0$ ，推导光线在该折射率分布中的轨迹方程，并写出其在极坐标  $(r, \varphi)$  下的微分方程形式。
2. 假设光线从无穷远处以冲量参数（瞄准距离） $b$  入射，求其在弱偏折近似下的总偏折角  $\Delta\varphi$ 。
3. 设透镜天体到观察者的距离为  $D_L$ ，光源到观察者的距离为  $D_S$ ，光源到透镜的距离为  $D_{LS}$ 。利用几何关系，写出透镜方程，给出像角位置  $\theta$  与源角位置  $\beta$  之间的关系。



4. 当光源、透镜、观察者三者严格共线时，证明像形成一个半径为

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

的爱因斯坦环。

5. 讨论当光源稍微偏离光轴时像的数量与位置，并定性说明随  $\beta$  变化时像角位置  $\theta$  与像亮度的变化行为。说明在何种条件下可以观测到强引力透镜的多像现象。

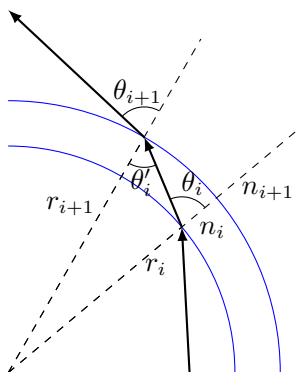
提示：

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arctan \sqrt{x^2-1} + C, \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C$$

**[解答]**

1. (8 分)

**【法一：几何法】**



将平面划分为一个个同心圆形成的薄层，在两个薄层之间，由折射定律可以得到 (2 分)

$$n_i \sin \theta'_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}$$

同时，由正弦定理，可以得到，(2 分)

$$\frac{r_i}{\sin \theta_i} = \frac{r_{i+1}}{\sin \theta'_i}$$

联合可以得到守恒量为 (2 分)

$$n_i r_i \sin \theta_i = n_{i+1} r_{i+1} \sin \theta_{i+1} \Rightarrow n(r) r \sin \theta = b$$

其中  $b$  为冲量参数。由几何关系，(1 分)

$$\sin \theta = \frac{r d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2}}$$

代入可以得到轨道方程，(1 分)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b}{r^2 \sqrt{n^2(r) - b^2/r^2}}$$

**【法二：变分法】**

费马原理给出光路满足 (2 分)

$$\delta \int n(r) ds = 0$$

在极坐标中, (2 分)

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt, \quad L = n(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

由于  $\varphi$  为循环坐标, 对应守恒量为 (2 分)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{n(r) r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}} = b$$

其中常数  $b$  为冲量参数。由此得轨道方程 (2 分)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b}{r^2 \sqrt{n^2(r) - b^2/r^2}}$$

2. (10 分)

代入折射率  $n(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r}$ , 在弱场近似  $GM/(c^2 r) \ll 1$  下展开 (2 分)

$$\frac{d\varphi}{dr} \simeq \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2}} \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)$$

无引力情形给出直线传播的散射角  $\pi$ , 引力引起的附加偏折为 (由于光线近直线传播, 因此可以认为最近距离就是瞄准距离  $b$ ) (4 分)

$$\Delta\varphi = 2 \int_b^\infty \frac{2GM}{c^2} \frac{b dr}{r^3 \sqrt{1 - b^2/r^2}} = \frac{4GM}{c^2 b}$$

故总偏折角为 (4 分)

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 b}$$

3. (8 分)

设像角为  $\theta$ , 源角为  $\beta$ , 几何关系给出 (4 分)

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \Delta\varphi, \quad b = D_L \theta$$

代入偏折角公式得透镜方程 (4 分)

$$\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{1}{\theta}$$

4. (6 分)

当  $\beta = 0$  时, 有 (2 分)

$$\theta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}$$

因此形成半径为 (2 分)

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

的圆环像 (爱因斯坦环)。(2 分)

5. (8 分)

透镜方程为二次方程 (2 分)

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0$$

其解为 (2 分)

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

因此当  $\beta \neq 0$  时形成两个像，一个位于透镜外侧，一个位于内侧。(2 分)

随  $\beta$  增大，外侧像像角增加，内侧像像角减小，其中内像亮度迅速减小，外像对应的亮度增加。当  $\beta \rightarrow 0$  时两像合并为爱因斯坦环。(2 分)

强引力透镜产生多像的条件为：透镜质量足够大、对准度高 ( $\beta \lesssim \theta_E$ )，且几何距离组合使  $\theta_E$  可分辨。(2 分)

## 七. (50 分) 电池的玩具模型

我们来考察一个电池的玩具模型。有一个半径为  $a$ ，电导率为  $\sigma$  的球形介质被镶嵌在一电导率为  $\sigma'$  的介质中。在球内部存在一个沿  $z$  方向的均匀“化学力”，它对载流子起作用。这个力可以等效为进入欧姆定律的一个附加电场  $\mathbf{F} = F\mathbf{\hat{z}}$ 。稳恒态下，球内外都存在电场，且球面上存在面电荷。

1. 计算全空间的电场（除开  $\mathbf{F}$ ）与电流分布，计算界面上的面电荷分布，并计算球体的总偶极矩。
2. 计算通过球的上半球面流出的总电流  $I$ 。
3. 计算球外的焦耳热功率  $P_e$ 。利用集总电路的模型，使用  $P_e = I^2 R_e = IV_e$ ，计算等效外电阻  $R_e$  与外电压  $V_e$ 。
4. 计算球外的焦耳热功率  $P_i$ 。利用集总电路的模型，使用  $P = I^2 R_i = IV_i$ ，计算等效内电阻  $R_i$  与内损耗电压  $V_i$ 。
5. 计算电池的电动势  $V_t = I(R_i + R_e)$ ，验证其满足  $V_t = V_i + V_e$ 。并证明“化学力”做功功率等于  $IV_t$ 。固定  $\sigma$  与其他参数，改变  $\sigma'$ ，当  $\sigma'/\sigma$  为何时，电势输出功率最大？

[解答]

1.

设全空间的电势为  $V(r, \theta)$ ，电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V(r, \theta) = 0$$

故不妨设内外电势分布为

$$V_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad V_{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

有电势连续、电流密度法相连续的条件，

$$V_{\text{in}}(a, \theta) = V_{\text{out}}(a, \theta), \quad \sigma \left( F \cos \theta - \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{a^-} \right) = -\sigma' \frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{a^+}$$

代入通解并对比系数可以得到，

$$\begin{cases} A_l a^l = B_l a^{-l-1} \\ -l\sigma A_l a^{l-1} = (l+1)\sigma' B_l a^{-l-2} \quad (l \neq 1) \\ -\sigma A_1 + \sigma F = 2\sigma' B_1 a^{-3} \quad (l = 1) \end{cases}$$

由此解得，

$$A_l = B_l = 0 \quad (l \neq 0), \quad A_1 = \frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F, \quad B_1 = \frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F a^3$$

因此可以得到全空间电势分布为，

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F r \cos \theta & (r < a) \\ \frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F \frac{a^3}{r^2} \cos \theta & (r > a) \end{cases}$$

由此可以得到全空间电场分布，

$$\mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla V = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & (r < a) \\ \frac{\sigma}{2\sigma' + \sigma} F \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & (r > a) \end{cases}$$

由此可以得到全空间的电流分布（对于内部电流，应当使用  $\mathbf{J}_{\text{in}} = \sigma(\mathbf{F} + \mathbf{E})$ ），

$$\mathbf{J}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{2\sigma\sigma'}{2\sigma' + \sigma} F (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & (r < a) \\ \frac{\sigma\sigma'}{2\sigma' + \sigma} F \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & (r > a) \end{cases}$$

在界面处，面电荷密度为，

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0(\mathbf{E}_{\text{out}} - \mathbf{E}_{\text{in}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{3\epsilon_0\sigma F}{2\sigma' + \sigma} \cos \theta$$

由对称性可知其总偶极矩方向沿  $z$  轴向上，因此有

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \sigma da = \int_0^\pi a \cos \theta \cdot \frac{3\epsilon_0\sigma F}{2\sigma' + \sigma} \cos \theta \cdot 2\pi a \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{z}} = \frac{4\pi\epsilon_0\sigma F a^3}{2\sigma' + \sigma} \hat{\mathbf{z}}$$

2.

通过上半球的总电流为

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sigma\sigma'}{2\sigma' + \sigma} F \cos \theta \cdot 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\sigma\sigma'}{2\sigma' + \sigma} \pi a^2 F$$

3.

球外单位体积的焦耳热功率为

$$p_e = \mathbf{J}_{\text{out}}^2 / \sigma'$$

因此，球外的总焦耳热功率为

$$P_e = \int_{\text{球外空间}} p_e d\tau = \int_0^\pi \int_a^\infty \frac{\sigma^2 \sigma' F^2}{(2\sigma' + \sigma)^2} \frac{a^6}{r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cdot 2\pi r^2 dr \sin \theta d\theta = \frac{8\pi a^3}{3} \frac{\sigma^2 \sigma' F^2}{(2\sigma' + \sigma)^2}$$

因此等效电阻为

$$R_e = \frac{P_e}{I^2} = \frac{2}{3\pi a \sigma'}$$

等效外电压为

$$V_e = \frac{4\sigma}{3(2\sigma' + \sigma)} F a$$

4.

球内单位体积的焦耳热功率为

$$p_i = \mathbf{J}_{\text{in}}^2 / \sigma$$

因此，球内的总焦耳热功率为

$$P_i = \int_{\text{球内空间}} p_i d\tau = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sigma} \left( \frac{2\sigma\sigma'}{2\sigma' + \sigma} F \right)^2 = \frac{16\pi a^3}{3} \frac{\sigma\sigma'^2}{(2\sigma' + \sigma)^2} F^2$$

因此等效内电阻为

$$R_i = \frac{P_e}{I^2} = \frac{4}{3\pi a\sigma}$$

等效内损耗电压为

$$V_i = \frac{8\sigma'}{3(2\sigma' + \sigma)} Fa$$

5.

电池的电动势为

$$V_t = I(R_i + R_e) = \frac{4}{3} aF$$

而对于  $V_i + V_e$ ，其为

$$V_i + V_e = \frac{4}{3} aF = V_t$$

化学力做功功率为

$$P_{\text{chem}} = \int_{\text{球内空间}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{J} d\tau = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{2\sigma\sigma' F^2}{2\sigma' + \sigma} = IV_t$$

6.

容易改写  $P_e$  为如下形式：

$$P_e = \frac{8\pi\sigma a^3 F^2}{3} \frac{1}{4\sigma'/\sigma + 4 + \sigma/\sigma'} \leq \frac{\pi\sigma a^3 F^2}{3}$$

其中等号只有在  $\sigma'/\sigma = 1/2$  时才能取得。故在  $\sigma'/\sigma = 1/2$  时有最大输出功率，此时  $R_i = R_e$ 。