

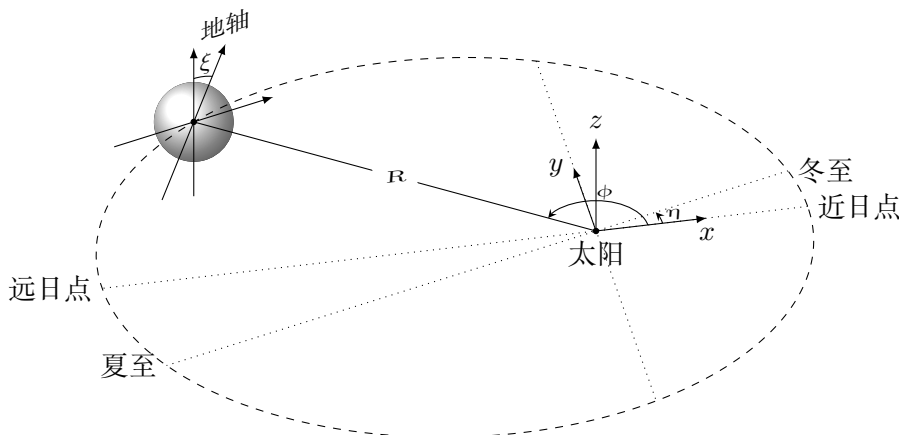
不卖，纯恶心人卷 5

命题人：@ 一碗星空汤

一. (60 分) 两小儿辩日

太阳究竟是日出离地面近，还是中午离地面近，是一个值得思考的问题，其受到地球自转与公转影响。在本题中，我们将**尽可能精确**地解决这个问题。（本题中，我们忽略光线因为大气的折射，因此日出时即太阳光线与地面平行时刻。）

- 我们先只考察自转对太阳距离的影响，此题中，我们认为地球中心固定不动。如图，以太阳为原点， x 轴平行于长轴， y 轴平行于短轴， z 轴垂直于黄道面建立空间直角坐标系。给定以下参量，计算此地日出与正午时刻到太阳的距离。本题中我们不考虑发生极昼或极夜的地区，在这些区域“日出”不是良定义的。（提示：根据冬至的定义，地轴位于冬至矢径与 z 张成的平面内，可以先把地轴方向的直角坐标分量算出来。）



物理量	字母
地球中心到太阳中心距离	R
地球半径	r
参考点纬度	θ
黄赤交角	ξ
地球相对于近日点转过角度	ϕ
近日点与冬至夹角	η

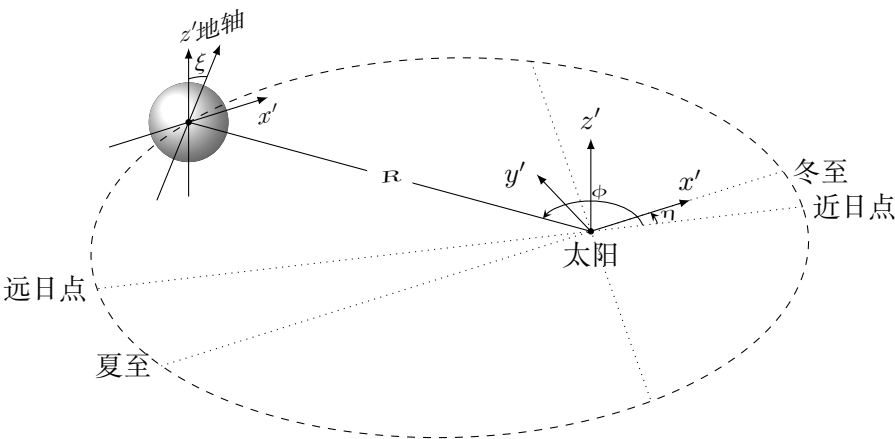
注：实际上，冬至通常发生在 12 月 21 日或 22 日，近日点通常发生在 1 月 3 日或 4 日，因此有 $\eta < 0$ 。

- 我们再来考察公转对日地中心距离 R 的影响，我们可以使用轨道方程来描述其轨迹

$$R(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

若有 a 表示轨道长半轴， b 表示轨道短半轴， c 表示半焦距，则有 $p = b^2/a$, $e = c/a$ 。但我们需要将其与实际的运动时间联系在一起，一个不错的方法是使用代换 $R - a = -c \cos \kappa$, ($0 \leq \kappa < 2\pi$)。若地球的运动周期为 T ，试着使用 κ 表示从近地点的运动时间 t ，角度 ϕ ，最后结果只能包含 κ, e, T 。（提示：你可以利用能量表达式写出 $\frac{dR}{dt} = f(R)$ ，则有 $t = \int dR/f(R)$ 。）

- 接着我们将要计算日出与正午的时间点。我们虽然不能用显式表达出时间点，但我们能够写出时间点满足的方程。我们假设地球自转周期为 T' ，给出日出与正午时分， κ 满足的方程，方程中可以包含一个未定参量，因为 $t = 0$ 时地球上正午的经度是未知的。为了方便求解，我们使用另一个坐标系，如下图所示：



(提示：可以先将地点在空间中的坐标与地球矢径直角坐标写出来，用矢量运算找到日出与正午条件，几何方法不推荐!)

4. 给出以下数据，试问 2025 年上海哪些天是日出离地面近，哪些天是中午离地面近？给出第一个日出比中午近的时间的早晨 κ_1 与中午 κ_2 ，给出最后一个日出比中午近的时间的早晨的 κ_3 与中午的 κ_4 。（提示：可以先使用给出参量计算轨道的参数，如 a, e, η_0 ）

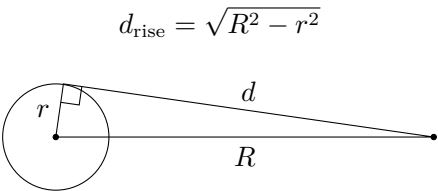
物理量	数值
冬至时刻	2024/12/21 17:20:34 ($-3.88011 \times 10^{-2} T$)
近日点时刻	2025/01/04 21:28:44 (0 T)
近日点后的第一个正午	2025/01/05 11:59:33 ($+1.65564 \times 10^{-3} T$)
近日点距离	0.98332740 AU
远日点距离	1.01664375 AU
黄赤交角 ξ	23.4360°
轨道周期 T	366.25636 T'
上海纬度 θ	31.2323°
上海处地球半径 r	4.25970×10^{-5} AU

为了减少尝试的次数，这里可以直接给出 κ_1, κ_3 前两位小数的准确值， $\kappa_1 \approx 0.46, \kappa_3 \approx 2.59$ ，对于其余两者，可以使用早晨数据加上一个早晨到中午时间的估算值（如 $1/4$ 天， $\Delta\kappa \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{365}$ ）作为初始值代入。答案中给出的小数位数至少为 4 位。

[解答]

1. (10 分)

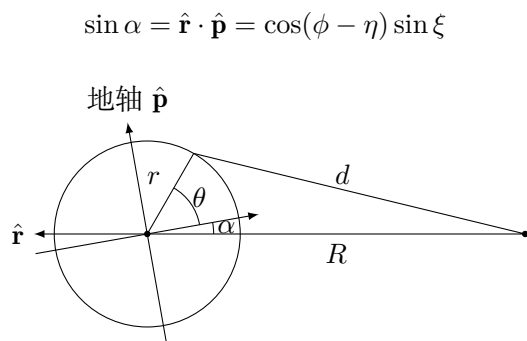
对于日出时刻，由于光线与地表平行，因此其一定与地球半径垂直，因此日出时地面到太阳的距离为 (3 分)



在正午时刻，从考察地点可以看到太阳位于天球正中间，因此其位于地轴与矢径张成的平面内。由于地轴位于冬至地球矢径与 $\hat{z}$ 张成的平面内，所以矢径与地轴的方向为 **(2 分)**

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \hat{\mathbf{p}} = (\cos \eta \sin \xi, \sin \eta \sin \xi, \cos \xi)$$

因此如下图几何，可以得到 **(2 分)**



由余弦定理可以得到 **(3 分)**

$$d_{\text{noon}} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta + \alpha)} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta + \arcsin(\cos(\phi - \eta) \sin \xi))}$$

2. **(14 分)**

我们先来求解 ϕ 与 κ 的关系，有 **(2 分)**

$$\cos \phi = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{R} - 1 \right) = \frac{\cos \kappa - e}{1 - e \cos \kappa} \Rightarrow \phi = \pm \arccos \left(\frac{\cos \kappa - e}{1 - e \cos \kappa} \right)$$

在近远日点，有 **(2 分)**

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{a+c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{a-c} = E \\ mv_1(a+c) = mv_2(a-c) = L \end{cases}$$

解得 **(2 分)**

$$a = -\frac{GMm}{2E}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

由能量守恒，可以得到 **(2 分)**

$$\frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{R} = E$$

由角动量守恒，可以得到 **(2 分)**

$$mR^2\dot{\phi} = L$$

因此可以得到 **(2 分)**

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{GMm}{R} \right) - \frac{L^2}{m^2 R^2}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{2a}{R} - 1 - \frac{b^2}{R^2}}$$

所以有

$$t = \sqrt{\frac{a}{GM}} \int_{a-c}^R \frac{RdR}{\sqrt{-R^2 + 2aR - b^2}} = \sqrt{\frac{a}{GM}} \int_{a-c}^R \frac{RdR}{\sqrt{c^2 - (R-a)^2}}$$

代入 $R - a = -c \cos \kappa$ 得到 (2 分)

$$t = \sqrt{\frac{a}{GM}} \int_0^\kappa \frac{(a - c \cos \kappa) c \sin \kappa d\kappa}{c \sin \kappa} = \frac{T}{2\pi} (\kappa - e \sin \kappa)$$

3. (16 分)

我们可以先写出地球矢径，这是很显然的 (2 分)

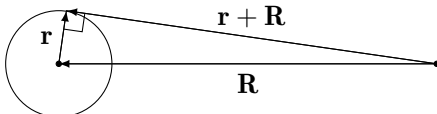
$$\mathbf{R} = R(\cos(\phi - \eta), \sin(\phi - \eta), 0)$$

我们再写出考察地点关于地心的矢量，(3 分)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r[\cos \theta \cos \gamma \cdot (\cos \xi, 0, -\sin \xi) + \cos \theta \sin \gamma \cdot (0, 1, 0) + \sin \theta \cdot (\sin \xi, 0, \cos \xi)], \quad \underbrace{\gamma = \gamma_0 + \frac{2\pi}{T'} t}_{\text{地球自转}} \\ &= r(\cos \gamma \cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi, \sin \gamma \cos \theta, -\cos \gamma \cos \theta \sin \xi + \sin \theta \cos \xi) \end{aligned}$$

在日出时，有光线与地表平行，因此有 (2 分)

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{R}) = 0 \Rightarrow r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = 0$$



因此可以得到日出方程 (3 分)

$$R(\cos \gamma \cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi) \cos(\phi - \eta) + R \sin \gamma \cos \theta \sin(\phi - \eta) + r = 0$$

其中 (1 分)

$$R = a(1 - e \cos \kappa), \quad \phi = \arccos\left(\frac{\cos \kappa - e}{1 - e \cos \kappa}\right), \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{T}{T'} (\kappa - e \sin \kappa)$$

代入 (如果你愿意的话) 可以得到

$$\begin{aligned} &\left[\cos\left(\gamma_0 + \frac{T}{T'} (\kappa - e \sin \kappa)\right) \cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi \right] \left[(\cos \kappa - e) \cos \eta + \sqrt{1 - e^2} \sin \kappa \sin \eta \right] \\ &+ \sin\left(\gamma_0 + \frac{T}{T'} (\kappa - e \sin \kappa)\right) \cos \theta \left[\sqrt{1 - e^2} \sin \kappa \cos \eta - (\cos \kappa - e) \sin \eta \right] + \frac{r}{a} = 0 \end{aligned}$$

(注：上述方程给出的解还有可能是日落时间，如果要判断是否为日出时间，可以略微减小 κ ，若等式左侧变为正，则是日出时间。)

在正午时， $\mathbf{r}$ 在 $\hat{\mathbf{p}}$ 与 $\mathbf{R}$ 张成的平面内。因此有 (2 分)

$$\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{R}) = 0$$

代入 $\hat{\mathbf{p}} = (\sin \xi, 0, \cos \xi)$ 可以得到正午方程 (3 分)

$$\sin \gamma \cos \xi \cos(\phi - \eta) = \cos \gamma \sin(\phi - \eta)$$

代入（如果你愿意的话）可以得到

$$\begin{aligned} & \sin\left(\gamma_0 + \frac{T}{T'}(\kappa - e \sin \kappa)\right) \cos \xi \left[(\cos \kappa - e) \cos \eta + \sqrt{1 - e^2} \sin \kappa \sin \eta\right] \\ &= \cos\left(\gamma_0 + \frac{T}{T'}(\kappa - e \sin \kappa)\right) \left[\sqrt{1 - e^2} \sin \kappa \cos \eta - (\cos \kappa - e) \sin \eta\right] \end{aligned}$$

（注：上述方程给出的解还有可能是午夜时间，如果要判断为正午时间，可以计算 $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{R})$ ，若小于 0，则为正午。）

4. (20 分)

我们先来计算一些轨道常数 (2 分)

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 0.999985575 \text{ AU}, \quad e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = 0.016658415$$

当时间为冬至时， $\phi = \eta$ ，因此有 (3 分)

$$t_1 = \frac{T}{2\pi}(\kappa_1 - e \sin \kappa_1) = -3.88011 \times 10^{-2}T \Rightarrow \kappa_1 = -0.247882 \text{ rad}$$

$$\eta = -\arccos\left(\frac{\cos \kappa_1 - e}{1 - e \cos \kappa_1}\right) = -0.252002 \text{ rad}$$

当时间为第一个正午时，有 (3 分)

$$t_2 = \frac{T}{2\pi}(\kappa_2 - e \sin \kappa_2) = 1.65564 \times 10^{-3}T \Rightarrow \kappa_2 = 0.0105789 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \arccos\left(\frac{\cos \kappa_2 - e}{1 - e \cos \kappa_2}\right) = 0.0107566 \text{ rad}$$

我们可以将其代入正午方程，得到 (2 分)

$$\gamma_0 = \arctan\left(\frac{\tan(\phi_2 - \eta)}{\cos \xi}\right) - \frac{2\pi}{T'}t + q\pi = 2.7583 + q\pi, q \in \mathbb{Z}$$

我们需要排除午夜的情况，一个比较简单的方法是注意到近日点在晚上 21 点，因此 $\mathbf{r}$ 应当大致指向 x 正方向，此时代入 $\kappa = 0$ ，则有 $\cos \gamma_0 \cos \theta \cos \xi + \sin \theta \sin \xi > 0$ ，因此我们可以确定得到 q 为奇数，即 (2 分)

$$\gamma_0 = -0.383288$$

代入数据可以得到日出方程：(2 分)

$$\begin{aligned} & [0.784533 \cos(-366.256\kappa + 6.10125 \sin(\kappa) + 0.383288) + 0.206224] [-0.249309 \sin(\kappa) + 0.968415 \cos(\kappa) - 0.0161323] \\ & - 0.213207 \sin(-366.256\kappa + 6.10125 \sin(\kappa) + 0.383288) [3.88332 \sin(\kappa) + 1. \cos(\kappa) - 0.0166584] + 0.0000425976 = 0 \end{aligned}$$

与正午方程：(2 分)

$$\begin{aligned} & \cos(-366.256\kappa + 6.10125 \sin(\kappa) + 0.383288)(3.88332 \sin(\kappa) + 1. \cos(\kappa) - 0.0166584) \\ & + \sin(-366.256\kappa + 6.10125 \sin(\kappa) + 0.383288)(-0.917378 \sin(\kappa) + 3.56346 \cos(\kappa) - 0.0593616) = 0 \end{aligned}$$

利用提给 κ_1, κ_3 的近似值，我们最后可以求解得到 (4 分)

$$\kappa_1 = 0.461393, \quad \kappa_2 = 0.465228, \quad \kappa_3 = 2.59432, \quad \kappa_4 = 2.59924$$

（注：实际上上述两天对应的是 1 月 31 日与 6 月 4 日。）

二. (40 分) 静电练习题

现有一半径为 R 的实心球内，有电荷分布 $\rho(r) = kr$ 。

1. 计算实心球带有的总电荷量。
2. 计算全空间电场与电势分布，并大致画出图像。
3. 计算静电能。
4. 计算实心球上下半球之间的作用力。

[解答]

1. (6 分)

实心球带有的总电荷量为, (6 分)

$$Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \pi k R^4$$

2. (14 分)

对于 $r \geq R$ 的区域，电场为, (2 分)

$$\mathbf{E}_{\geq R}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

对于 $0 < r < R$ 的区域，电场只由半径小于 r 区域的电荷贡献，这一区域的电荷量为, (4 分)

$$Q_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = \pi k r^4$$

$$\mathbf{E}_{< R}(r) = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

综上可以得到,

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r \geq R \\ \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} & 0 < r < R \end{cases}$$

对于电势，我们可以使用积分求解。对于 $r \geq R$ 的区域，电势为, (2 分)

$$V_{\geq R}(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r}$$

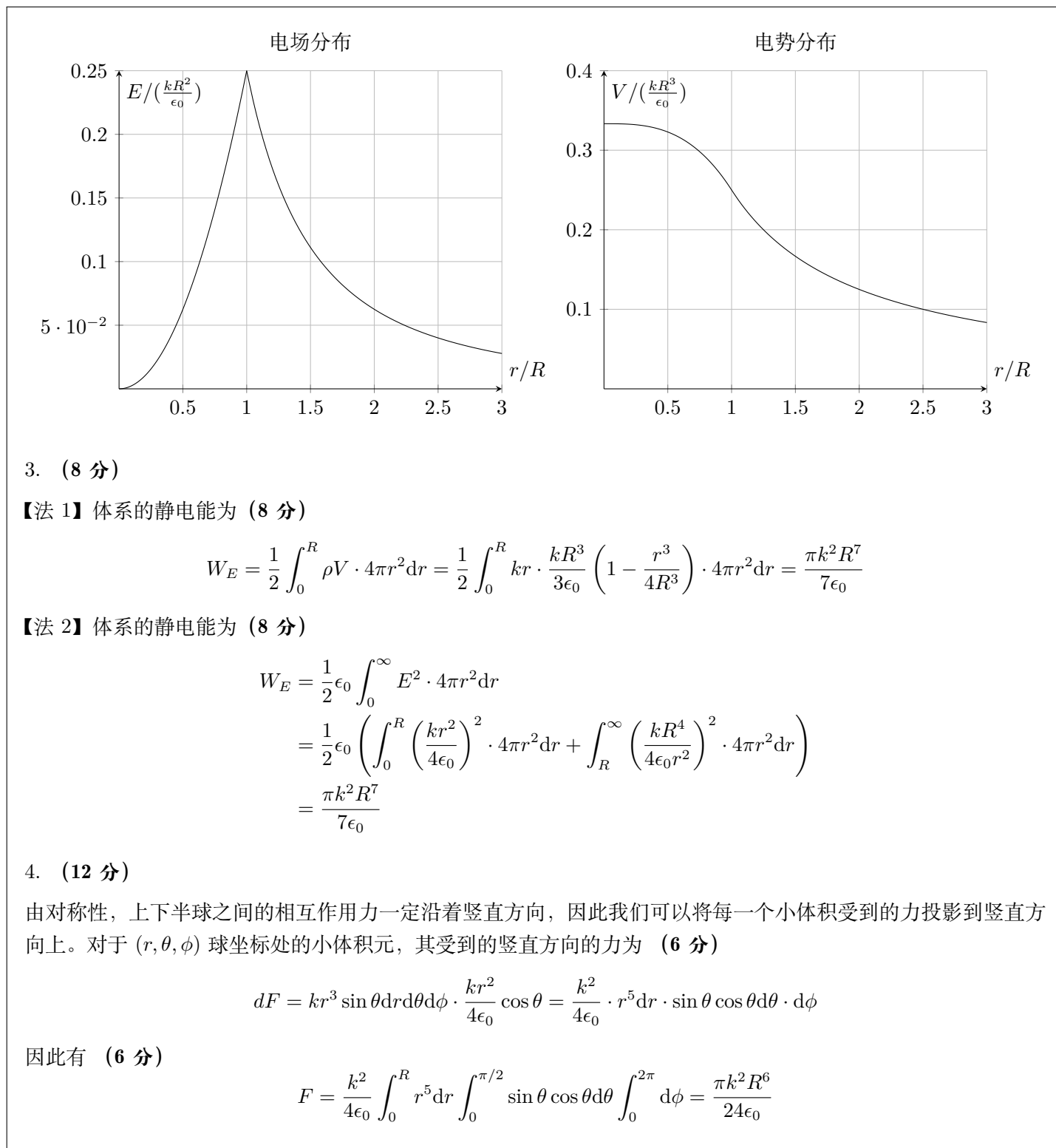
对于 $r < R$ 的区域，电势为, (2 分)

$$V_{< R}(r) = - \int_{\infty}^R \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} - \int_R^r \mathbf{E}(r) dr = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^3}{4R^3} \right)$$

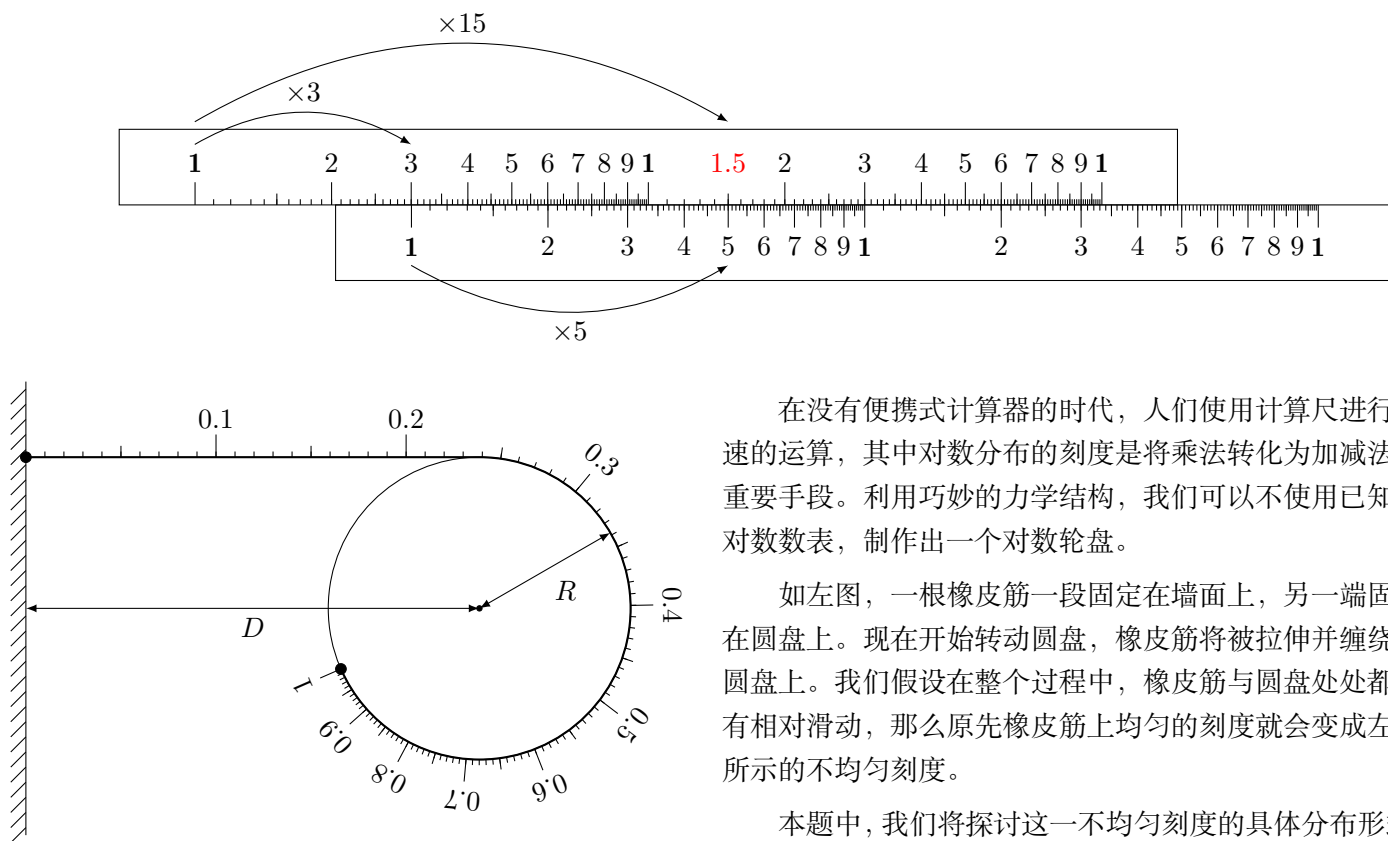
综上可以得到,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r} & r \geq R \\ \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^3}{4R^3} \right) & 0 < r < R \end{cases}$$

我们可以作出以下两图 (4 分)



三. (40 分) 对数轮



在没有便携式计算器的时代，人们使用计算尺进行快速的运算，其中对数分布的刻度是将乘法转化为加减法的重要手段。利用巧妙的力学结构，我们可以不使用已知的对数数表，制作出一个对数轮盘。

如左图，一根橡皮筋一段固定在墙面上，另一端固定在圆盘上。现在开始转动圆盘，橡皮筋将被拉伸并缠绕在圆盘上。我们假设在整个过程中，橡皮筋与圆盘处处都没有相对滑动，那么原先橡皮筋上均匀的刻度就会变成左图所示的不均匀刻度。

本题中，我们将探讨这一不均匀刻度的具体分布形式。

1. 设圆盘半径为 R ，圆心到墙面距离为 D 。若初始时刻橡皮筋上的刻度均匀排开，左端为最小值 0，右端位最大值 1。求在缠绕后，刻度 x 与刻度 1 和圆心形成的夹角 θ （此时刻度 x 已经缠绕在了圆盘上）。
2. 继上一问，我们设橡皮筋劲度系数为 k ，原长为 D ，橡皮筋与圆盘之间的静摩擦因数为 μ 。计算不滑动的情况下，缠绕部分张力的分布 $T(\theta)$ 。如要不滑动，给出静摩擦因数需要满足的条件。
3. 继上一问，若在圆盘转动 θ 后，松开圆盘，让橡皮筋自由回弹，给出全部橡皮筋解旋后圆盘的角速度 ω 。设圆盘质量均匀分布，质量为 M ，橡皮筋质量为 0。

[解答]

1. (8 分)

我们设圆盘转过 θ ，刻度缠到 x 处。若圆盘再转动 $d\theta$ 时，缠上了 dx 的刻度。此过程中，其缠上的橡皮筋长度为 $Rd\theta$ 。由于整个缠绕过程中，橡皮筋没有滑动，所以此时缠上部分的橡皮筋拉伸了 $1/x$ 倍（初始未缠绕的刻度范围是 $[0, 1]$ ，转动后变为 $[0, x]$ ，故拉伸倍数是 $1/x$ ）。由此可知，此时 dx 的刻度对应长度为 $(-Ldx)/x$ ，（注意：后缠绕上的刻度比先缠绕上的刻度小，因此 $dx < 0$ ，需要加上一个负号才能表示长度）有 (3 分)

$$Rd\theta = -\frac{Ddx}{x}$$

两边同时积分可以得到 (2 分)

$$R\theta = -L \ln x + C$$

当 $\theta = 0$ 时，有 $x = 1$ ，所以得到 (2 分)

$$C = 0, \quad \theta = -\frac{D}{R} \ln x$$

可见刻度的确以对数的形式分布。

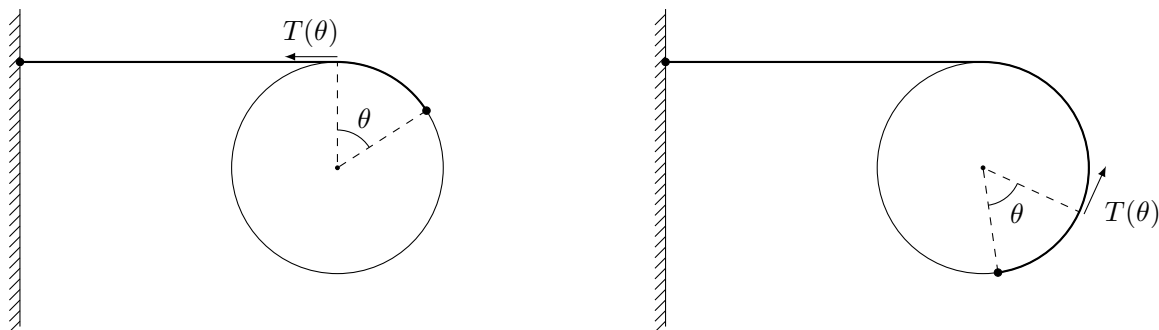
值得注意的是，由于橡皮筋在转动过程中都不会滑动，刻度 x 与刻度 1 的夹角 θ 就一定等于将刻度 x 刚好缠绕在圆盘上所需要的转角 θ ，即本题中我们所设 θ 与题设 θ 等价。

2. (16 分)

我们先来求解 $T(\theta)$ 。

【法一】

由于旋转过程中，橡皮筋的拉伸程度不变，故橡皮筋上某处的张力不因转动而改变，因此 θ 处张力等于圆盘转过 θ 角刚刚绕上去时的张力。



当圆盘转过 θ 时，未缠绕部分橡皮筋由原先的 xD 长度变为 D ，其等效劲度系数为 (2 分)

$$k_{\text{eff}} = k \frac{D}{xD} = \frac{k}{x}$$

因此张力为 (2 分)

$$T(\theta) = k_{\text{eff}} \cdot (D - Dx) = kD \cdot \frac{1-x}{x}$$

代入 $x = e^{-\theta R/D}$ 可以得到 (3 分)

$$T(\theta) = kD (e^{\theta R/D} - 1)$$

【法二】

对于橡皮筋上 $[x, x + dx]$ 的一小段，其等效劲度系数为 (2 分)

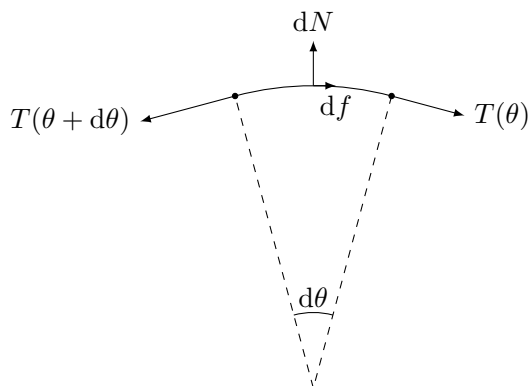
$$k_{\text{eff}} = k \frac{D}{dx D} = \frac{k}{dx}$$

因此张力为 (2 分)

$$T(\theta) = \frac{k}{dx} \cdot \underbrace{(R(-d\theta) - Ddx)}_{\text{形变量}}$$

代入 $x = e^{-\theta R/D}$ 可以得到 (3 分)

$$T(\theta) = kD (e^{\theta R/D} - 1)$$



我们对橡皮筋上 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的小段进行受力分析，有 (2 分)

$$\begin{cases} T(\theta + d\theta) \cos \frac{d\theta}{2} = df + T(\theta) \cos \frac{d\theta}{2} \\ dN = T(\theta + d\theta) \sin \frac{d\theta}{2} + T(\theta) \sin \frac{d\theta}{2} \end{cases}$$

近似到一阶可以得到，(2 分)

$$df = \frac{dT}{d\theta} d\theta, \quad dN = T(\theta) d\theta$$

如果要保证处处不滑动，则要求 (2 分)

$$\mu \geq \left| \frac{df}{dN} \right| = \frac{R}{D} (1 - e^{-\theta R/D})^{-1}$$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时，不等式右侧趋向于 ∞ ，因此要满足不滑动的条件，我们需要 $\mu \rightarrow \infty$ 。(2 分)

3. (16 分)

【法一】弹性势能法

对于橡皮筋上 $[x, x + dx]$ 的一小段，其等效劲度系数为 $k_{\text{eff}} = \frac{k}{dx}$ ，缠绕部分储存的弹性势能为 (2 分)

$$dE_p = \frac{1}{2} k_{\text{eff}} (R(-d\theta) - Ddx)^2 = \frac{1}{2} k D^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 dx$$

对其从 x 到 1 积分可以得到 (3 分)

$$E_{p,1} = \frac{1}{2} k D^2 \int_x^1 (x^{-2} - 2x^{-1} + 1) dx = \frac{1}{2} k D^2 (x^{-1} - x + 2 \ln x)$$

非缠绕部分储存的弹性势能为 (3 分)

$$E_{p,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{x} \cdot (D - Dx)^2 = \frac{1}{2} k D^2 (x^{-1} - 2 + x)$$

总弹性势能为 (2 分)

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} = k D^2 (x^{-1} + \ln x - 1)$$

由机械能守恒，可以得到 (6 分)

$$\frac{1}{4} M R^2 \omega^2 = E_p$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4E_p}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4kD^2}{MR^2} \left(e^{\theta R/D} - \frac{\theta R}{D} - 1 \right)}$$

【法二】做功法

我们可以计算转动过程中的做功，进而得到橡皮筋解旋后的动能。当转动 $d\theta$ 时，外力矩做功为 (5 分)

$$dW = RT(\theta)d\theta = kDR(e^{\theta R/D} - 1)d\theta$$

积分可以得到 (5 分)

$$W = \int_0^\theta kDR(e^{\theta R/D} - 1)d\theta = kDR \left(\frac{D}{R} e^{\theta R/D} - \theta - \frac{D}{R} \right)$$

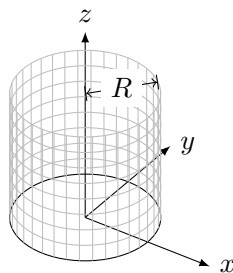
因此由动能定理可得 (6 分)

$$\frac{1}{4}MR^2\omega^2 = W$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4W}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4kD^2}{MR^2} \left(e^{\theta R/D} - \frac{\theta R}{D} - 1 \right)}$$

四. (30 分) 有趣的光晕

将马克杯放在光照下，会看到杯子内部出现一个美丽的“心形线”，本题中，我们将对不同光照条件下的马克杯焦散曲线进行探究。



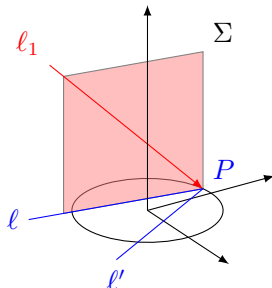
我们将马克杯建模为一个内半径为 R 的圆柱，外来的光线通过在马克杯内壁上的单次反射与杯底相碰。为了简便起见，我们假设光线在马克杯底发生漫反射。同时，我们不考虑马克杯外壁对光线入射的遮挡。在接下来的内容中，我们将考虑点光源与平行光的情况，并以圆柱底面圆心作为原点建立坐标系。

1. 为了将这个三维问题简化，我们先将证明其与如下二维问题等价：考察垂直于 xy 平面的平面 Σ ，其与 xy 平面的交线为 ℓ 。对于 Σ 内的光线，其通过反射照亮的马克杯底部区域为 ℓ' 。若记马克杯底面圆的边界为 C ，证明 ℓ' 所在直线是 ℓ 通过圆 C 的反射光线。
2. 当两个不同平面的照亮区域 ℓ' 交叠时，这个区域会格外的亮。考察一个点光源位于 $(-R, 0, z)$ 的位置，计算其在马克杯底产生的焦散曲线参数方程。
3. 平行光以 $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$ 的方向入射马克杯，计算其在马克杯底产生的焦散曲线参数方程。

[解答]

1. (8 分)

首先，在平面 Σ 上，一定存在一条与 C 相交于 P 的光线 ℓ_1 。由于 P 点正好在底面上，因此其是 ℓ_1 照亮的点。因此我们可以知道 $P \in \ell'$ 。而 ℓ 与 C 的交点正好为 P ，因此 ℓ 与圆的交点在 ℓ' 上。(3 分)



设平面 Σ 内一条入射光线的方向为 $\hat{\mathbf{r}}_1$ ，曲面此处法向量为 $\mathbf{n}$ ，反射光线的方向为 $\hat{\mathbf{r}}_2$ ，其中 $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ 。根据反射定律，我们可以给出

$$\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1 = 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_1)\hat{\mathbf{n}}$$

展开为分量式可以看到

$$(r_{2x}, r_{2y}, r_{2z}) - (r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}) = 2(n_x r_{1x} + n_y r_{1y}) \cdot (n_x, n_y, 0)$$

等式右边的 z 分量是 0，因此有 $r_{1z} = r_{2z}$ 。若设 $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2$ 在 xy 平面上的投影为 $\hat{\mathbf{r}}_{1\parallel}, \hat{\mathbf{r}}_{2\parallel}$ ，所以上式可以变形为

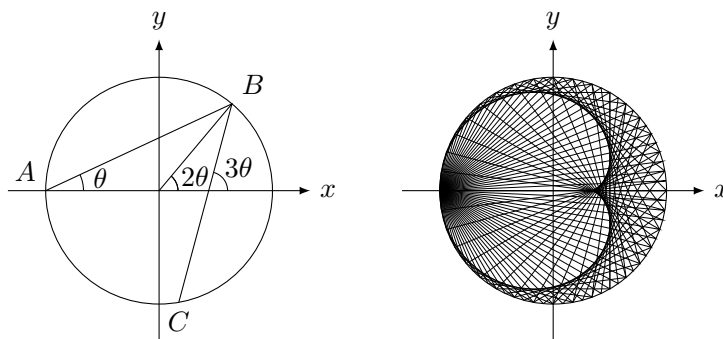
$$\hat{\mathbf{r}}_{1\parallel} - \hat{\mathbf{r}}_{2\parallel} = 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{1\parallel})\hat{\mathbf{n}}$$

同时注意到 $\ell \parallel \hat{\mathbf{r}}_{1\parallel}, \ell' \parallel \hat{\mathbf{r}}_{2\parallel}$ ，因此 ℓ' 的方向正好是 ℓ 的反射光线方向。(5 分)

由上述两条结论，可知 ℓ' 是 ℓ 的反射光线。

2. (11 分)

我们可以将整个体系投影到平面上，即一个位于 $(-R, 0)$ 处的光源通过圆 C 反射形成光晕的问题。若初始发射的光线与 x 轴夹角为 θ ，则反射光线在圆上的交点为 $B(R \cos 2\theta, R \sin 2\theta)$ ，斜率为 $k = \tan 3\theta$ 。



所以我们可以得到 (3 分)

$$\ell_{BC} : y = (x - R \cos 2\theta) \tan 3\theta + R \sin 2\theta$$

对于相邻两条反射光线，我们可以联立方程 (3 分)

$$\begin{cases} y = (x - R \cos 2\theta) \tan 3\theta + R \sin 2\theta \\ y = (x - R \cos 2(\theta + d\theta)) \tan 3(\theta + d\theta) + R \sin 2(\theta + d\theta) \end{cases}$$

线性化近似后，我们可以得到 (2 分)

$$y = (x - R \cos 2\theta) \tan 3\theta + R \sin 2\theta + \left(\frac{3x}{\cos^2 3\theta} + R \left(2 \sin 2\theta \tan 3\theta + 2 \cos 2\theta - 3 \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 3\theta} \right) \right) d\theta$$

因此我们可以解得 (3 分)

$$\begin{cases} x = \frac{R}{3}(2 \cos 2\theta - \cos 4\theta) \\ y = \frac{R}{3}(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \end{cases} \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

(

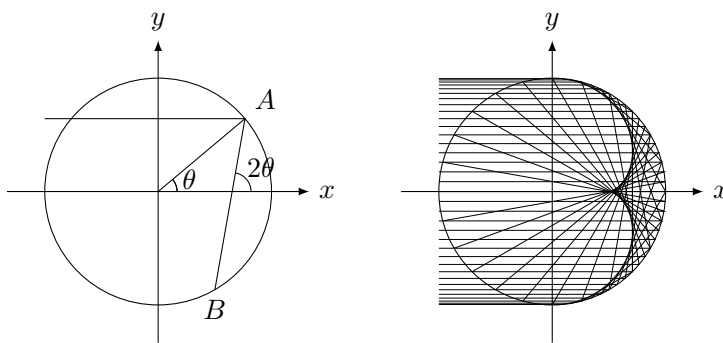
我们还可以使用代换 $\alpha = 2\theta$ ，则可以得到

$$\begin{cases} x = \frac{R}{3}(2 \cos \alpha - \cos 2\alpha) \\ y = \frac{R}{3}(2 \sin \alpha - \sin 2\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [-\pi, \pi]$$

)

3. (11 分)

我们可以将整个体系投影到平面上，即方向为 $(1, 0)$ 的平行光通过圆 C 反射形成光晕的问题。若初始与圆的交点位于 $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ ，则反射光线的斜率为 $\tan 2\theta$ 。



所以我们可以得到 (3 分)

$$\ell_{AB} : y = (x - R \cos \theta) \tan 2\theta + R \sin \theta$$

对于相邻两条反射光线，我们可以联立方程 (3 分)

$$\begin{cases} y = (x - R \cos \theta) \tan 2\theta + R \sin \theta \\ y = (x - R \cos(\theta + d\theta)) \tan 2(\theta + d\theta) + R \sin(\theta + d\theta) \end{cases}$$

线性近似后，我们可以得到 (2 分)

$$y = (x - R \cos \theta) \tan 2\theta + R \sin \theta + \left(\frac{2x}{\cos^2 2\theta} + R \left(\cos \theta + \sin \theta \tan 2\theta - \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 2\theta} \right) \right) d\theta$$

因此我们可以解得 (3 分)

$$\begin{cases} x = \frac{R}{4}(3 \cos \theta - \cos 3\theta) \\ y = \frac{R}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta) \end{cases} \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

五. (80 分) 开尔文勋爵的 18 岁

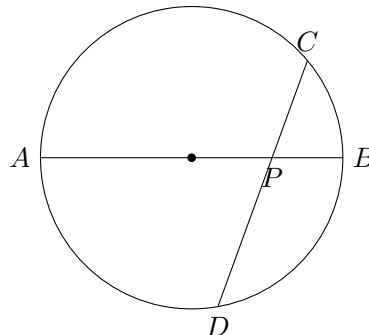
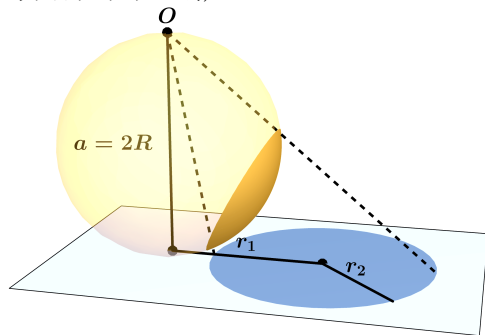
在 1872 年，开尔文勋爵发表了“静电学与几何物体”一书，其中包含了他发表的许多静电学论文。接下来所有求解面电荷密度的问题都要求对于导体的上/下（内/外）两面分别给出。

- 论文集的第一篇，是他在 18 岁时求解的椭球表面的电荷分布。在论文中，他注意到若考察两个**相似**的同心椭球围成的薄壳区域，在薄壳内均匀填充上电荷，那么薄壳内部的电场为 0。
 - 证明开尔文的注意力是正确的。（提示：椭球可以由球拉伸而来。）
 - 求出带电量为 Q 的导体椭球表面的电荷密度分布 $\sigma(x, y, z)$ ，其中椭球的半轴分别为 a, b, c 。
 - 将椭球压扁得到一个圆盘，若圆盘的半径为 R ，给出圆盘上的面电荷分布，证明其表达式满足 $\sigma(r) \propto \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ 。
 - 改用圆盘电势 V_0 表示其面电荷分布。
- 利用圆盘上的电荷分布，开尔文得以实现了如下问题的求解：一个导体碗在外加 V_0 电势的情况下的电荷分布。他使用的技巧是“反演变换”。具体而言，如果你知道了某一个体系的电势分布在球坐标系下的表达式 $V(r, \theta, \phi)$ ，那么利用变换 $r \rightarrow \frac{a^2}{r}$ ，我们可以轻松得到另一个体系的电势分布 $V'(r, \theta, \phi)$ 。在这一变换下，电荷与电势满足如下变换

$$\begin{aligned} V'(r, \theta, \phi) &= \frac{a}{r} V\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \\ q' &= \frac{r}{a} q \\ \sigma'(r, \theta, \phi) &= \frac{a^3}{r^3} \sigma\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \\ \rho'(r, \theta, \phi) &= \frac{a^5}{r^5} \rho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \end{aligned}$$

值得注意的是，如果在无穷远处电势不是 0，而是 V_∞ ，那么在变换后原点处凭空产生一个电荷。

- 当无穷远处电势为 V_∞ 时，给出变换后这个“凭空产生”的电荷的电荷量。（注意 $V'(r)$ 在 $r \rightarrow 0$ 的表达式）
- 取 $a = 2R$ ，考察距离原点 $2R$ 的平面上的一个圆盘，证明在经过反演变换 $r \rightarrow a^2/r$ 后圆盘变成一个偏心的碗（平面截取球面得到的区域）。

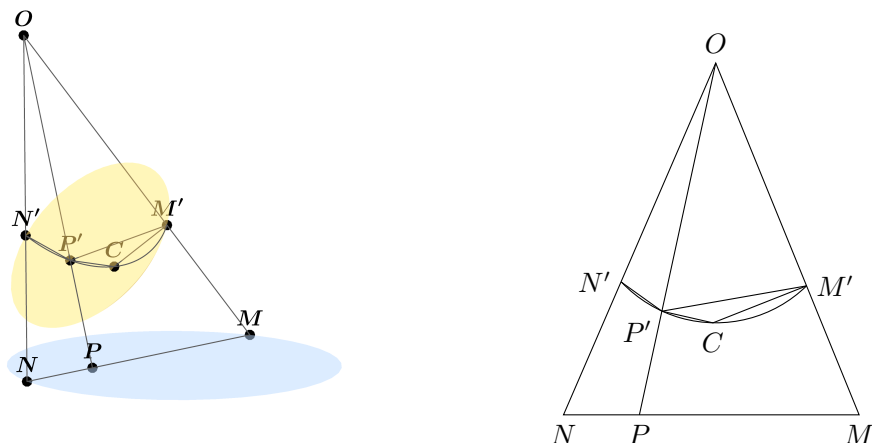


iii. 知道了这个之后，开尔文开始展示他的超绝平面几何能力。根据相交弦定理，在上图的圆中有

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$

现在对于 (1.iv) 圆盘上任意一点 P ，过 P 点的一条弦被分为 ℓ_1, ℓ_2 两段。利用 ℓ_1, ℓ_2 表示 P 点处的面电荷密度。利用平面几何能够大幅化简接下来解析计算的内容。

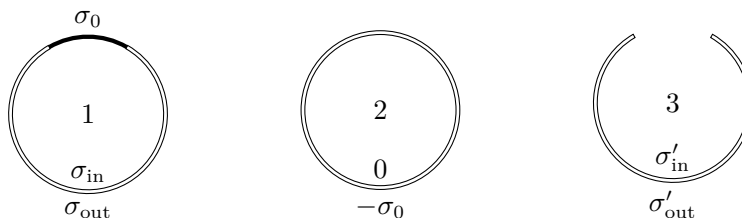
iv. 继上一问，将整个体系的电势分布整体加上 $-V_0$ ，此处无穷远处电势变为 $-V_0$ ，圆盘电势变为 0。利用 (2.ii) 中的反演变换，可以得到一个电势为 0 的半球碗在 O 处放有一个点电荷时的电荷分布。



如图，我们不妨考察盘上点 P' 处的面电荷密度。设圆盘上的点 P 通过反演对应的是碗上的点 P' ，碗的中心为点 C 。我们考察平面 OPC ，其与圆盘交于线段 MN ， MN 通过反演得到的是圆弧 $M'CP'N'$ 。值得注意的是 M, N 在圆周的边缘上， M', N' 为 M, N 的反演点。用 $\overline{OP'}, \overline{CP'}, \overline{OC}, \overline{CM'}$ 四条线段的长度，以及反演在原点处产生的点电荷电荷量 q 表示 P' 处的电荷密度，证明其满足 $\sigma \propto \frac{1}{OP'^2} \sqrt{\frac{OC^2 - CM'^2}{CM'^2 - CP'^2}}$ 。

(提示：你首先需要注意到两对相似三角形 $\triangle ONP \sim \triangle ON'P', \triangle OMP \sim \triangle OM'P'$ ，将 $\overline{MP}, \overline{NP}$ 转化为 $\overline{M'P'}, \overline{N'P'}, \overline{OM'}, \overline{ON'}, \overline{OP'}, R$ 。然后你需要使用 $\overline{M'P'} \cdot \overline{N'P'} = \overline{CM'}^2 - \overline{CP'}^2, \overline{OM'} \cdot \overline{ON'} = \overline{OC}^2 - \overline{CM'}^2$ ，别忘了在适时的时候要使用反演变换带来的线段长度关系。)

v. 然而，这离我们所要求解的问题还有些距离，接下来，开尔文继续展示他的神来一笔，他将碗摆正（即旋转对称轴与 z 轴重合）。利用 (2.iv) 的结论，他得以将问题转化为如下问题：



- 问题 1：一个半径为 R 的金属导体碗接地，在碗口处均匀涂有一层面密度为 σ_0 的面电荷。
- 问题 2：一个半径为 R 的金属导体球壳，球壳外表面均匀带有 $-\sigma_0$ 的面电荷，内表面不带电。
- 问题 3：一个半径为 R 的金属导体碗电势为 V ，求 $\sigma'_{in}, \sigma'_{out}$ 。

上述三个问题在无穷远处的电势都是 0。观察问题 1、问题 2、问题 3 之间的联系，求解问题 3。在求解时，我们使用如下参数：我们用 α 表示碗的边缘一点与碗底所夹的圆心角，用 η 表示考察点与碗底所夹的圆心角。

你可能需要的积分：

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{A + B \cos x} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} & -A < B < A \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} & A < B < -A \\ \text{不收敛} & \text{其他} \end{cases}$$

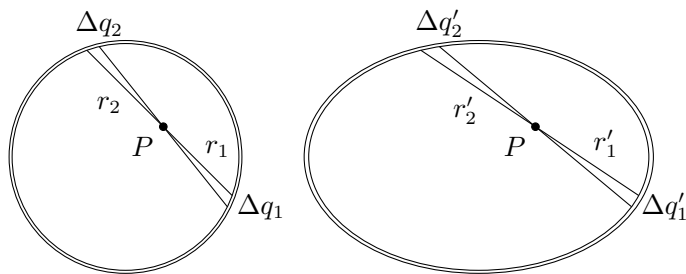
$$\int \frac{\sqrt{A+x}}{B+x} dx = 2\sqrt{A+x} - 2\sqrt{B-A} \arctan \sqrt{\frac{A+x}{B-A}} + C$$

[解答]

1. (30 分)

i. (8 分) 我们可以从一个球壳缩放得到同心相似椭球壳，不妨考察半径为 R 的同心球壳内部的一点 P ，在 P 两端的 $\Delta\Omega$ 立体角内，包含的电荷量 $\Delta q \propto \Delta\Omega r^2 / \cos\theta$ 。其中 θ 为法线方向与到 P 点方向的夹角。对于 $\Delta q_1, \Delta q_2$ 而言，两者法线与到 P 点方向夹角相等，因此有 (2 分)

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$



在拉伸之后，体积放大的倍数为 $\frac{abc}{R^3}$ ，由于电荷分布均匀，两者被放大相同比例，因此 (2 分)

$$\frac{\Delta q'_1}{\Delta q'_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

注意到 r_1, r_2 所在线段是平行的，因此两者比例也不变，有 (2 分)

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

所以两小块电荷在 P 点出的电场贡献为 (2 分)

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\Delta q_1}{r_1^2} - \frac{\Delta q_2}{r_2^2} \right) = 0$$

由此我们证明椭球内部的电场一定为 0。

ii. (13 分) 设椭球壳内外椭球的半轴分别为 a, b, c 与 $a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c$ ，用 p 表示椭球表面上一点的切平面到中心的距离，内外椭球平行切平面的距离为 δp 。根据相似的条件，有 (2 分)

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c} = \frac{\delta p}{p} = \theta$$

则壳层的体积为 (2 分)

$$V = \frac{4}{3}\pi(a + \delta a)(b + \delta b)(c + \delta c) - \frac{4}{3}\pi abc = 4\pi abc\theta$$

因此薄层内电荷体密度为 (1 分)

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi abc\theta}$$

所以面电荷密度为 (1 分)

$$\sigma = \rho\delta p = \frac{Qp}{4\pi abc}$$

接下来我们来求解 p ，我们可以先计算椭球表面的法向量，有 (1 分)

$$\mathbf{n} = \nabla \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$$

对应的单位法向量为 (1 分)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

所以我们可以得到 (3 分)

$$p = (x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

综上，我们得到了 (2 分)

$$\sigma(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{Q}{4\pi abc \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

iii. (5 分) 代入 $z^2 = c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$ ，可以得到 (2 分)

$$\sigma(x, y) = \frac{Q}{4\pi ab \sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^4} x^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y^2}}$$

令 $c = 0, a = b = R$ 可以得到 (3 分)

$$\sigma(r) = \frac{Q}{4\pi R \sqrt{R^2 - r^2}}$$

值得注意的是，上述表达式是上下表面单面的面电荷密度，上下两面的表达式相同。

iv. (4 分) 我们可以计算圆盘中心的电势，(2 分)

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r \cdot 2\sigma(r)}{r} dr = \frac{Q}{8\epsilon_0 R}$$

因此有 (2 分)

$$\sigma(r) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{R^2 - r^2}}$$

2. (50 分)

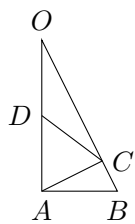
i. (4 分) 当 $r \rightarrow 0^+$ 时， $a^2/r \rightarrow +\infty$ ，因此有 (2 分)

$$V'(r) \approx \frac{a}{r} V_\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

因此有 (2 分)

$$q = 4\pi\epsilon_0 a V_\infty$$

ii. (9 分)



首先我们证明反演变换后，圆盘变为球面的一部分，如左图， OA 为反演中心到考察平面的垂线段， B 为平面上一点， C 为 B 经过反演得到的点， D 为 OA 的中点。图中 $\overline{OA} = a = 2R$ ，根据反演变换，我们可以知道 $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}}$ 。因此我们有 $\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OA} : \overline{OC}$ ，所以 $\triangle OAB \sim \triangle OCA$ 。

故可以得到 $\angle OCA = \angle OAB = \frac{\pi}{2}$ 。由于 D 为 OA 中点，所以 $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{OA} = R$ 为定值， C 在一球面上。(3 分)

接着我们证明碗的边缘在一个平面上。盘边缘可以用参数方程表示 (2 分)

$$\mathbf{r} = (r_1 + r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta, -2R)$$

因此通过反演后，得到的位矢为 (2 分)

$$\mathbf{r}' = 4R^2 \frac{(r_1 + r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta, -2R)}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta + 4R^2}$$

注意到 (2 分)

$$2r_1 x' + \frac{-r_1^2 + r_2^2 + 4R^2}{-2R} z' = 4R^2 = \text{const}$$

所以 $\mathbf{r}'$ 在一个平面内。

iii. (4 分) 注意到，若 P 点到中心距离为 r ，则 (2 分)

$$\overline{AP} = R + r, \overline{BP} = R - r$$

所以有 (2 分)

$$\sigma_P = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{(R-r)(R+r)}} = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}} = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{\ell_1 \ell_2}}$$

其表示的是上下表面单面的电荷密度。

iv. (16 分) 首先，在反演变换之后， O 点出现了一个新的点电荷，电荷量为 (1 分)

$$q = -8\pi\epsilon_0 R V_0$$

对于盘面上 P 点处的电荷密度，代入 $\ell_1 = \overline{MP}$, $\ell_2 = \overline{NP}$ 可以得到 (1 分)

$$\sigma_P = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{\overline{MP} \cdot \overline{NP}}}$$

所以在 P' 处的电荷密度为 (2 分)

$$\sigma_{P'} = \left(\frac{2R}{\overline{OP'}} \right)^3 \sigma_P = \frac{8R^3}{\overline{OP'}^3} \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{\overline{MP} \cdot \overline{NP}}}$$

注意到相似三角形 $\triangle ONP \sim \triangle ON'P'$ ，我们可以得到 $\overline{NP} : \overline{N'P'} = \overline{ON} : \overline{OP'} = \overline{OP} : \overline{ON'}$ ，所以有 (2 分)

$$\overline{NP} = \overline{N'P'} \sqrt{\frac{\overline{ON} \cdot \overline{OP}}{\overline{ON'} \cdot \overline{OP'}}}$$

又由反演变换，我们可以进一步得到 (2 分)

$$\overline{ON} = \frac{4R^2}{\overline{ON'}}, \quad \overline{OP} = \frac{4R^2}{\overline{OP'}}$$

所以有 (2 分)

$$\overline{NP} = \overline{N'P'} \cdot \frac{4R^2}{\overline{ON'} \cdot \overline{OP'}}$$

同理可以得到 (2 分)

$$\overline{MP} = \overline{M'P'} \cdot \frac{4R^2}{\overline{OM'} \cdot \overline{OP'}}$$

所以电荷密度的表达式为 (2 分)

$$\sigma'_{P'} = \frac{2R}{\overline{OP'}^2} \cdot \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \sqrt{\frac{\overline{OM'} \cdot \overline{ON'}}{\overline{M'P'} \cdot \overline{N'P'}}} = \frac{-q}{2\pi^2 \overline{OP'}^2} \sqrt{\frac{\overline{OM'} \cdot \overline{ON'}}{\overline{M'P'} \cdot \overline{N'P'}}}$$

代入 $\overline{M'P'} \cdot \overline{N'P'} = \overline{CM'}^2 - \overline{CP'}^2$, $\overline{OM'} \cdot \overline{ON'} = \overline{OC}^2 - \overline{CM'}^2$ 可以得到 (2 分)

$$\sigma'_{P'} = \frac{-q}{2\pi^2 \overline{OP'}^2} \sqrt{\frac{\overline{OC}^2 - \overline{CM'}^2}{\overline{CM'}^2 - \overline{CP'}^2}}$$

至此，我们以及把碗上的面电荷密度完全由碗相关的几何参数表示出。

v. (17 分) 能够很显然看出的是，问题 1 的电荷分布加上问题 2 的电荷分布得到的就是问题 3 的电荷分布，而问题 3 就是我们要解决的终极问题。我们首先来计算问题 1。我们用球坐标 (R, θ, ϕ) 描述电荷 O 的位置，不过我们定义竖直向下为 $\theta = 0$ ，因此线段的长度为 (4 分)

$$\begin{aligned}\overline{CP'}^2 &= 2R^2(1 - \cos \eta) \\ \overline{CM'}^2 &= 2R^2(1 - \cos \alpha) \\ \overline{OC}^2 &= 2R^2(1 - \cos \theta) \\ \overline{OP'}^2 &= 2R^2(1 - \sin \eta \sin \theta \cos \phi - \cos \eta \cos \theta)\end{aligned}$$

代入可以得到在 (R, θ, ϕ) 小块区域 $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ 产生的面电荷密度为 (2 分)

$$d\sigma' = \frac{-\sigma_0 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi^2(1 - \sin \eta \sin \theta \cos \phi - \cos \eta \cos \theta)} \sqrt{\frac{\cos \alpha - \cos \theta}{\cos \eta - \cos \alpha}}$$

对 θ 从 α 到 π 积分，对 ϕ 从 0 到 2π 积分，(2 分)

$$\sigma'(\eta) = \frac{-\sigma_0}{4\pi^2 \sqrt{\cos \eta - \cos \alpha}} \int_{\alpha}^{\pi} d\theta \sin \theta \sqrt{\cos \alpha - \cos \theta} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - \cos \eta \cos \theta - \sin \eta \sin \theta \cos \phi}$$

注意到 $1 - \cos \eta \cos \theta - \sin \eta \sin \theta = 1 + \cos(\eta - \theta) > 0$, $1 - \cos \eta \cos \theta + \sin \eta \sin \theta = 1 - \cos(\eta + \theta) > 0$ ，因此有

$$-(1 - \cos \eta \cos \theta) < -\sin \eta \sin \theta < 1 - \cos \eta \cos \theta$$

因此我们可以套用公式，并注意 $0 < \eta < \theta < \pi$ ，可以得到

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - \cos \eta \cos \theta - \sin \eta \sin \theta \cos \phi} = \frac{2\pi}{\cos \eta - \cos \theta},$$

因此

$$\sigma'(\eta) = \frac{-\sigma_0}{2\pi \sqrt{\cos \eta - \cos \alpha}} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta \sqrt{\cos \alpha - \cos \theta}}{\cos \eta - \cos \theta}$$

最后，将 $-\cos \theta = u$ 代入，我们发现

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta \sqrt{\cos \alpha - \cos \theta}}{\cos \eta - \cos \theta} &= \int_{-\cos \alpha}^1 \frac{du \sqrt{\cos \alpha + u}}{\cos \eta + u} \\&= 2 \left[\sqrt{\cos \alpha + u} - \sqrt{\cos \eta - \cos \alpha} \arctan \sqrt{\frac{\cos \alpha + u}{\cos \eta - \cos \alpha}} \right]_{-\cos \alpha}^1 \\&= 2 \left[\sqrt{\cos \alpha + 1} - \sqrt{\cos \eta - \cos \alpha} \arctan \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} \right]\end{aligned}$$

因此，我们得出结论，(4 分)

$$\sigma'(\eta) = -\frac{\sigma_0}{\pi} \left[\sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} \right]$$

对于问题 1，有 $\sigma_{\text{in}} = \sigma_{\text{out}} = \sigma'(\eta)$ 若要使问题 3 的电势为 V ，那么我们要让问题 2 的电势为 V ，有 (2 分)

$$V = \frac{-\sigma_0 \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$$

解得 (1 分)

$$\sigma_0 = -\frac{\epsilon_0 V}{R}$$

因此由叠加原理，我们可以得到 (4 分)

$$\begin{aligned}\sigma'_{\text{in}} = \sigma_{\text{in}} &= \frac{\epsilon_0 V}{\pi R} \left[\sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} \right] \\ \sigma'_{\text{out}} = \sigma_{\text{out}} - \sigma_0 &= \frac{\epsilon_0 V}{\pi R} \left[\sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \eta - \cos \alpha}} + \pi \right]\end{aligned}$$

六. (30 分) 快速真空

根据低温下稀薄气体的容器壁上可以吸附分子的现象，人们发明了可以提高真空度的“低温泵”。考虑一个半径为 0.2 m 的球形容器，除对其壁上面积为 1.0 cm^2 的区域冷却到 77 K 外，其余部分及其内部保持温度 300 K。假设初始时刻容器中水蒸气的压强为 1.33 Pa ，每一个水分子碰撞到上述被冷却的区域即被吸附或凝结到上面。

1. 试问需要多少时间可以使容器内的压强降低到 $1.33 \times 10^{-6} \text{ Pa}$?
2. 在前问基础上，我们还可以问一个有趣的问题，在水蒸气不断吸附压强下降的过程中，冰是否会因为压强过低而升华，你认为这个数值是否有意义？查阅文献，我们可以给出冰升华压强 p_{subl} 满足的经验公式：

$$\ln \left(\frac{p_{\text{subl}}}{611.657 \text{ Pa}} \right) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^3 a_i \theta^{b_i}, \quad \text{其中 } \theta = \frac{T}{273.16 \text{ K}}$$

i	a_i	b_i
1	-0.212144006×10^2	$0.333333333 \times 10^{-2}$
2	0.273203819×10^2	0.120666667×10^1
3	-0.610598130×10^1	0.170333333×10^1

[解答]

1.

分子的单位面积单位时间碰壁数为, (3 分)

$$\Gamma = \frac{1}{4}n \langle v \rangle$$

因此单位时间被吸附的分子数为, (3 分)

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}n \langle v \rangle S$$

代入 (3 分)

$$n = N/V = \frac{3N}{4\pi r^3}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

可以得到 (3 分)

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{3N}{4\pi r^3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} S$$

解上述微分方程可以得到 (3 分)

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{3S}{16\pi r^3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} t\right)$$

若要从 1.33Pa 降低至 1.33×10^{-6} Pa, 则要求 $N = 10^{-6} N_0$, 解得 (3 分)

$$t = -\frac{16\pi r^3}{3S} \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \ln \frac{N}{N_0} = 31.2 \text{ s}$$

2.

冻结的冰的温度为 77 K, 则有 (3 分)

$$\theta = \frac{77}{273.16} \approx 0.2819$$

代入题给表达式, 有 (3 分)

$$\ln\left(\frac{p_{\text{subl}}}{611.657}\right) \approx -56.42$$

因此可以计算得到升华压强为 (3 分)

$$p_{\text{subl}} = 1.925 \times 10^{-22} \text{ Pa}$$

此时在容器内的粒子数为 (3 分)

$$N = \frac{p_{\text{subl}} V}{k_B T} = 1.6 \times 10^{-3}$$

显然是不合理的数值, 我们可以放心认为冰不会因过低的压强而升华。

七. (40 分) 塞曼效应

当原子被置于磁场中时, 其能级会发生变化, 并且发生“分裂”。本题中, 我们将考察氢原子这一较为简单的体系, 对这一现象进行探讨与阐释。

1. 氢原子的电子绕着原子核高速转动, 可以认为形成了一个“电流环”, 即一个小磁矩。这一小磁矩和外加的磁场之间存在相互作用, 故会导致能级改变。假设磁场沿 z 方向向上, 为 $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, 电流环对应的 z 方向角动量为 $m_l \hbar$ 。若设电子的质量为 m_e , 轨道半径为 r_e , 给出外加磁场对应的能级变化量 ΔE 。

2. 然而使用上述计算仍然与实验有所偏差，原因在于我们忽略了电子自身的自旋。电子自身拥有 $\frac{1}{2}\hbar$ 的角动量，这一角动量会对体系贡献磁矩。为了计算其大小，你可以将电子假设为一半径为 r ，电荷均匀分布的小球，由此计算其磁矩大小。不过这样子计算出来的结果恰为实际磁矩的一半，这被称为 g 因子（对于电子而言 $g = 2$ ）。在补充上 g 因子的修正后，若电子在 z 方向上的角动量为 $m_s\hbar$ ，用 m_l 与 m_s 表示外加磁场对应的能级变化量 ΔE 。

3. 接下来，我们来探讨能级的分裂。电子轨道 z 方向可取的角动量有许多值，具体如下：

$$s \text{ 轨道 } (l = 0): m_l = 0$$

$$p \text{ 轨道 } (l = 1): m_l = 0, \pm 1$$

$$d \text{ 轨道 } (l = 2): m_l = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$f \text{ 轨道 } (l = 3): m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

电子自旋角动量 z 方向可取的值 $m_s = \pm\frac{1}{2}$ ，试问 H_α 谱线（氢原子 $n = 3 \rightarrow n = 2$ ）会分裂成几条谱线？在 1 T 的磁场下，波长的变化量分别为多少？（值得注意的是，并不是所有的轨道之间都能够相互跃迁，必须要满足选择定则 $\Delta l = \pm 1, \Delta m_l = 0, \pm 1, \Delta m_s = 0$ 。）

4. 在更精细的检视下，你会发现即使不存在外磁场，看似单色谱线也是由两条极为相近的谱线构成。其对应的两个能级由于过于相近，在其间跃迁会产生微波。由于微波的特性，其在宇宙中的传播范围极广，是我们探测星际物质中氢元素的重要手段。其本质原因是原子核磁矩与电子磁矩的耦合，若方向相反则能级下降，反之能级上升，两者之间跃迁发出如此微波。对于 1s 轨道中的电子，计算耦合产生的能级差，与对应的跃迁波长。

注：氢原子里德伯常数 $R_H = \frac{R_\infty}{1+m_e/m_p}$ ，其中 R_∞ 为理想化的里德伯常数（计算器中科学常数提供）， m_e 为电子质量， m_p 为质子质量。电子的 g 因子为 2，质子的 g 因子为 5.5857， g 因子的含义是实际测量的磁矩大小与上述粗糙模型计算的磁矩大小之比。电子、质子都是自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子。

[解答]

1. (12 分)

设电子运动的速度为 v ，则电子的轨道角动量为，(2 分)

$$L = m_e r_e v$$

电子轨道等效电流环的电流为，(2 分)

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r_e}$$

电子轨道对应的磁矩为，(2 分)

$$\mu_l = I\pi r_e^2 = \frac{e}{2}r_e v$$

可以看到磁矩正比于角动量，不过由于电子带负电，所以有，(2 分)

$$\mu_l = -\frac{e}{2m_e}L$$

代入 $L_z = m_l\hbar$ ，可以得到，(2 分)

$$\mu_{l,z} = -m_l \cdot \frac{e\hbar}{2m_e}$$

因此体系的能级变化量为，(2 分)

$$\Delta E = -\mu_{l,z}B = \frac{m_l e\hbar}{2m_e}B$$

2. (12 分)

对于一个电荷均匀分布的小球，其自身转动的角动量为 (2 分)

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm$$

体系的磁矩为 (2 分)

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dq$$

因此 (2 分)

$$\frac{\boldsymbol{\mu}}{S} = \frac{e}{2m_e} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{S}$$

考虑 g 因子修正之后，可以得到 (2 分)

$$\boldsymbol{\mu}_s = 2\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}$$

代入 $S_z = m_s \hbar$ ，可以得到，(2 分)

$$\mu_{s,z} = -m_s \cdot \frac{e\hbar}{m_e}$$

因此体系能级变化量为，(2 分)

$$\Delta E = -\mu_{l,z} B - \mu_{s,z} B = \frac{(m_l + 2m_s)e\hbar}{2m_e} B$$

3. (10 分)

当电子从 $n = 3$ 轨道下落到 $n = 2$ 轨道上时，由于能级在磁场下的分裂，能级差会存在多个不同的值。相比于原先的能级变化，多出来的值对应不同的 ΔE 的不同值。因此可能的能级差变化量为 (2 分)

$$\Delta(E_{n=3} - E_{n=2}) = \frac{\Delta m_l + 2\Delta m_s}{2m_e} e\hbar B$$

又有 $E_{n=3} - E_{n=2} = hc/\lambda$ ，则 (2 分)

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{\Delta m_l + 2\Delta m_s}{2m_e} e\hbar B$$

即可解得 (2 分)

$$\Delta\lambda = 0, \pm \frac{eB}{4\pi m_e c} \lambda^2$$

会分裂成三条谱线。代入具体数值有 (2 分)

$$\lambda_\alpha = \left[R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \right]^{-1} = 656.5 \text{ nm}$$

所以有 (2 分)

$$\Delta\lambda = 0, \pm 2.01 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

4. (6 分)

原子核，即质子，的磁矩大小为，(1 分)

$$\mu_p = \frac{1}{2} \cdot 5.5856 \frac{e\hbar}{2m_e} = 1.411 \times 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

原子核在电子处产生的磁场大小为，(2 分)

$$B = \frac{\mu_0 \mu_p}{4\pi a_0^3} = 9.519 \times 10^{-3} \text{ T}$$

因此对应的能级差为 (2 分)

$$\Delta E = 2\mu_s B = 1.768 \times 10^{-25} \text{ J}$$

对应的光波长为 (1 分)

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 1.12 \text{ m}$$

(实际上精确的计算会告诉我们这个波长应为 21cm，即著名的 21 厘米线)