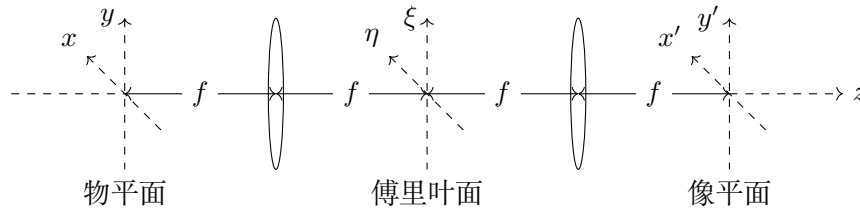


不卖，纯恶心人卷 4

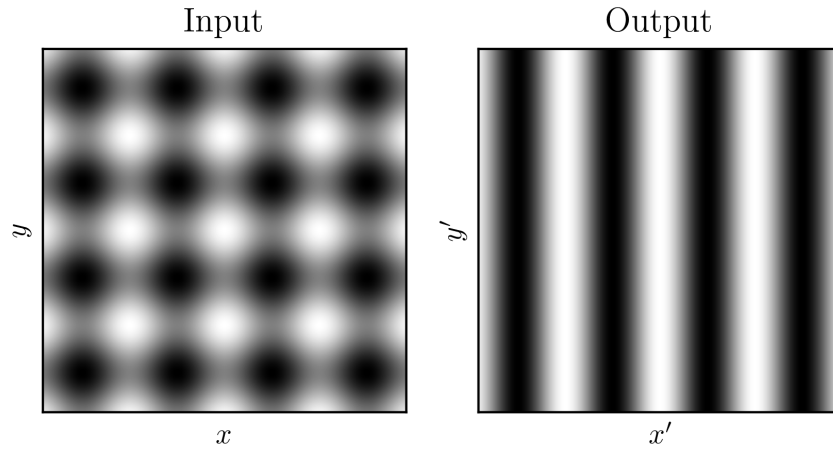
命题人：@ 一碗星空汤

一. (40 分) $4f$ 系统

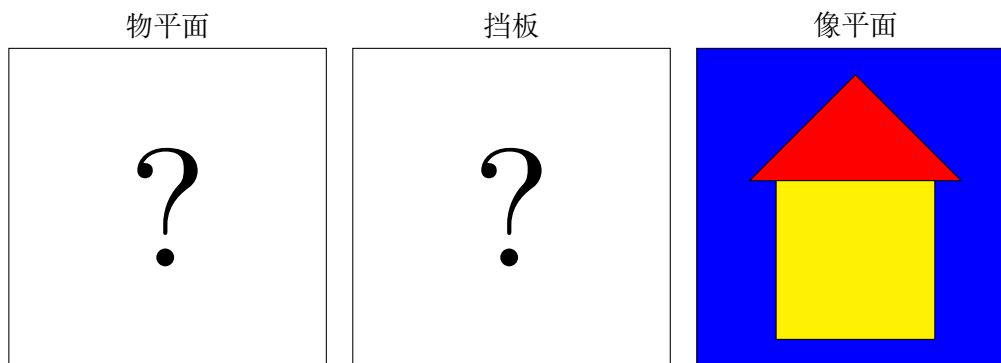
$4f$ 系统是光学中一个十分有用的工具，其能起到“空间滤波”的作用，对图像进行处理。在本题中，我们不妨来研究其“滤波”原理。 $4f$ 系统大致如下图所示。物体在经过第一个凸透镜成像后，像落在傅里叶面上。这一像再通过第二个凸透镜成像在像平面上。凸透镜的焦距为 f 。



1. 假设我们在物平面上有一束平行光打入，其与光轴夹角为小角 θ ，传播方向的单位矢量为 $\hat{\mathbf{k}} = (0, \sin \theta, \cos \theta)$ 。描述傅里叶面上与像平面上的成像情况。
2. 假设我们在物平面上有一透光片，其振幅透射率为 $\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos(kx)$ 。如果有波长为 λ ，振幅为 U_0 的单色平行光垂直照射透光片。如果 $k\lambda \ll 1$ ，试着描述傅里叶面与像平面上的成像情况。
提示： $\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2}$ ，平面波的定态光场为 $U(\mathbf{r}) = U_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ，其中 $\mathbf{k}$ 为波矢，其方向为波传播方向，大小为 $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。
3. 接上一问，假设我们的透光片改为振幅透射率为 $\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos(kx) + t_1 \cos(ky)$ (左图)。如果我只想要在像平面上看到纵向的条纹 (右图)，可以在傅里叶面上设计挡板，挡掉特定的光点。我们应该在什么位置 (η, ξ) 设置挡板？



4. $4f$ 系统不仅能够筛选特定的空间周期光场结构，还能筛选光的波长。这是因为不同波长的光在经过透光薄膜与第一个凸透镜后成像在傅里叶面的不同位置上。我想要通过此设计一个照射垂直物平面的平行白光，输出如图彩色小房子的系统。试着画出可能的物平面透光片与傅里叶面挡板示意图。



[解答]

1. (4 分)

如果物平面上有平行光打入，则其在傅里叶面上成像于 (2 分)

$$\eta = 0, \quad \xi = f \tan \theta \approx f\theta$$

这个光电通过凸透镜再次成像，在像平面上得到的是平行光，其方向为 (2 分)

$$\hat{\mathbf{k}}' = (0, -\sin \theta, \cos \theta) \approx (0, -\theta, 1)$$

【也可以表述为与光轴夹角为 θ ，斜向 $-y'$ 方向的平行光】

2. (25 分)

当振幅为 U_0 的单色光照射透光片时，其通过后的光场振幅为 (1 分)

$$\tilde{U}(x, y) = \tilde{t}(x, y)U_0 = t_0U_0 + t_1U_0 \cos(kx)$$

我们改写为如下形式，(2 分)

$$\tilde{U}(x, y) = t_0U_0 + \frac{t_1}{2}U_0 \exp(ikx) + \frac{t_1}{2}U_0 \exp(-ikx)$$

注意到这是三条平面波的叠加在物平面上的光场，而且我们能够通过上式计算出三条平行光的传播方向。对于 t_0U_0 一项，由于其在物平面上的相位都相同，因此其传播方向垂直于物平面，其波矢为 (2 分)

$$\mathbf{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}$$

对于 $\frac{t_1}{2}U_0 \exp(ikx)$ 项，如果与 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 进行对比，可以得到 (2 分)

$$k_{1x} = k$$

而根据 $|\mathbf{k}_1| = \frac{2\pi}{\lambda}$ 可知 (4 分)

$$k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2}$$

$$\mathbf{k}_1 = \left(k, 0, \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2} \right)$$

对于 $\frac{t_1}{2} U_0 \exp(-ikx)$ 项，如果与 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 进行对比，可以得到 (2 分)

$$k_{2x} = -k$$

而根据 $|\mathbf{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda}$ 可知 (4 分)

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \left(-k, 0, \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2} \right)$$

三束平行光的传播方向都在 xz 平面内，与光轴夹角为 (1 分)

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \arcsin \frac{k\lambda}{2\pi} \approx \frac{k\lambda}{2\pi}, \quad \theta_2 = -\arcsin \frac{k\lambda}{2\pi} \approx -\frac{k\lambda}{2\pi}$$

这三束平行光在傅里叶面上会聚为三个光点，分别位于 (2 分)

$$(\eta_1, \xi_1) = (0, 0)$$

$$(\eta_2, \xi_2) = \left(\frac{k\lambda f}{2\pi}, 0 \right)$$

$$(\eta_3, \xi_3) = \left(-\frac{k\lambda f}{2\pi}, 0 \right)$$

三个光点通过第二个凸透镜后重新变为三束平行光，它们的波矢分别为 (2 分)

$$\mathbf{k}'_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{k}'_1 = \left(-k, 0, \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2} \right)$$

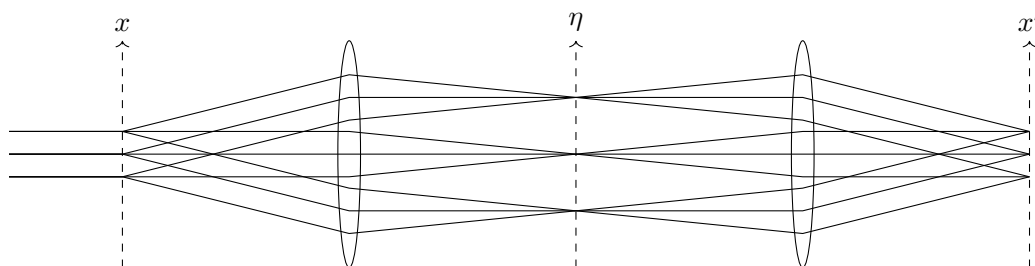
$$\mathbf{k}'_2 = \left(k, 0, \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k^2} \right)$$

因此在像平面上，我们得到的光场为 (2 分)

$$\tilde{U}'(x', y') = t_0 U_0 + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(-ikx) + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(ikx) = t_0 U_0 + t_1 U_0 \cos(kx)$$

得到的是纵向的条纹。(1 分)

【注】光路图：



3. (6 分)

仿照前问思路，我们会发现，平行光照射透光片得到的光场为 (2 分)

$$\tilde{U}(x, y) = t_0 U_0 + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(ikx) + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(-ikx) + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(iky) + \frac{t_1}{2} U_0 \exp(-iky)$$

可以等效成五个平面波的叠加。因此我们在傅里叶面上可以得到五个光点，分别位于：(2 分)

$$(\eta_1, \xi_1) = (0, 0)$$

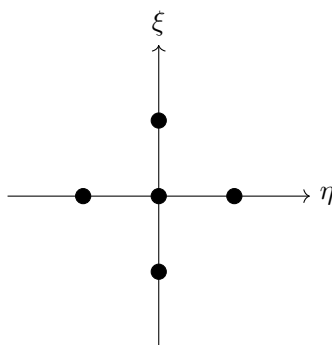
$$(\eta_2, \xi_2) = \left(\frac{k\lambda f}{2\pi}, 0 \right)$$

$$(\eta_3, \xi_3) = \left(-\frac{k\lambda f}{2\pi}, 0 \right)$$

$$(\eta_4, \xi_4) = \left(0, \frac{k\lambda f}{2\pi} \right)$$

$$(\eta_5, \xi_5) = \left(0, -\frac{k\lambda f}{2\pi} \right)$$

如下图所示：



如果要产生纵向条纹，只需要把 $\exp(iky)$ 和 $\exp(-iky)$ 两项对应的光点挡去即可，即在 (2 分)

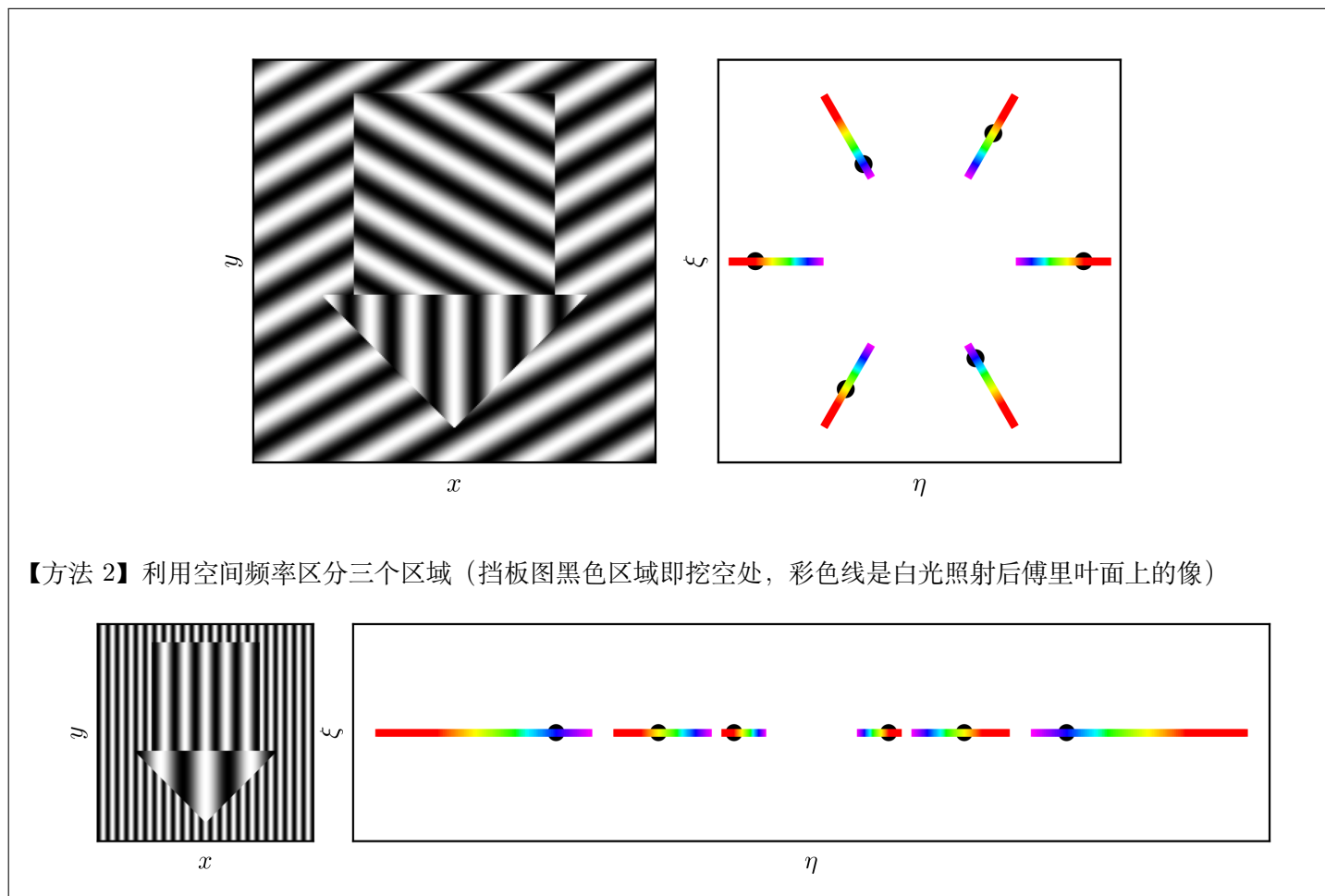
$$(\eta, \xi) = \left(0, \frac{k\lambda f}{2\pi} \right)$$

$$(\eta, \xi) = \left(0, -\frac{k\lambda f}{2\pi} \right)$$

两处设置挡板即可（如果在 $(\eta, \xi) = (0, 0)$ 处再放置一个也可以）。

4. (5 分)

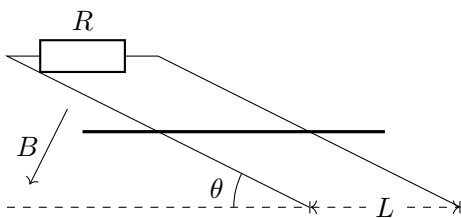
【方法 1】利用角度区分三个区域（挡板图黑色区域即挖空处，彩色线是白光照射后傅里叶面上的像）



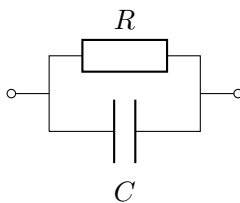
二. (40 分) 动能回收

本题中，我们将通过简单的模型，探讨电动汽车中的动能回收。本题中重力加速度为 g 。

- 不妨先考察不回收动能的电路。如图，有一置于倾角为 θ 斜面上的电路。两金属导轨光滑且平行放置，间距为 L 。在金属导轨上有一质量为 m 的金属棒，能在导轨上自由滑动。在垂直于导轨方向上，存在磁感应强度大小为 B 且斜向下的磁场。忽略所有摩擦和除电阻 R 之外的电阻。若初始时刻速度为 0，给出 $v(t)$ 的表达式。并且计算终端速度 $v(\infty)$ 。



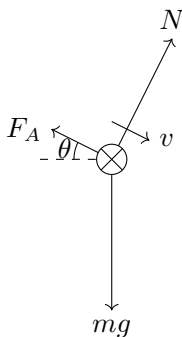
- 接上一问，将电阻 R 改为电容 C ，重复上问。请问 $v(\infty)$ 存在吗？
- 接上一问，如果改为并联的电阻 R 与电容 C ，重复上问。请问 $v(\infty)$ 存在吗？



[解答]

1. (14 分)

我们可以画出受力分析图



可以列出牛二方程, (2 分)

$$m\dot{v} = mg \sin \theta - F_A$$

金属棒的动生电动势为 (1 分)

$$\mathcal{E} = BLv$$

因此回路中的电流为 (1 分)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

因此安培力大小为 (2 分)

$$F_A = BIL = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

代入可以得到 (1 分)

$$m\dot{v} = mg \sin \theta - \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

分离变量得到 (1 分)

$$\frac{mdv}{mg \sin \theta - \frac{B^2 L^2 v}{R}} = dt$$

两边积分得到 (1 分)

$$-\frac{mR}{B^2 L^2} \ln \left(mg \sin \theta - \frac{B^2 L^2 v}{R} \right) = t + C$$

当 $t = 0$ 时, 有 $v = 0$, 代入可得 (1 分)

$$C = -\frac{mR}{B^2 L^2} \ln(mg \sin \theta)$$

代入整理可得 (2 分)

$$v(t) = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{B^2 L^2 t}{mR} \right) \right)$$

所以 (2 分)

$$v(\infty) = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2}$$

2. (10 分)

当电阻 R 改成电容 C 时，此时由于电路中没有电阻，所以电容两端电压即为电动势。有 (1 分)

$$U = \mathcal{E} = BLv$$

所以电容中的电荷量为 (1 分)

$$Q = CU = BLCv$$

因此电路中的电流为 (2 分)

$$I = \frac{dQ}{dt} = BLC\dot{v}$$

由此得到牛二方程 (1 分)

$$m\dot{v} = mg \sin \theta - B^2 L^2 C \dot{v}$$

即 (2 分)

$$\dot{v} = \frac{mg \sin \theta}{m + B^2 L^2 C}$$

可以发现此时金属棒做匀加速直线运动，加速度为 $\frac{mg \sin \theta}{m + B^2 L^2 C}$ ，所以 (2 分)

$$v(t) = \frac{mgt \sin \theta}{m + B^2 L^2 C}$$

不存在 $v(\infty)$ 。(1 分)

3. (16 分)

当电阻 R 改为并联的电阻与电容时，对于金属杆与电容组成的回路，使用基尔霍夫电压定律可以得到 (2 分)

$$U_C = \mathcal{E} = BLv, Q = CU_C = BLCv$$

所以通过电容的电流为 (1 分)

$$I_C = \frac{dQ_c}{dt} = BLC\dot{v}$$

而对于电阻与金属杆组成的回路，使用基尔霍夫电压定理可以得到 (2 分)

$$U_R = \mathcal{E} = BLv, I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{BLv}{R}$$

因此通过金属杆的总电流为 (2 分)

$$I = I_C + I_R = BLC\dot{v} + \frac{BLv}{R}$$

所以可以得到牛二方程 (2 分)

$$m\dot{v} = mg \sin \theta - B^2 L^2 C \dot{v} - \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

分离变量得到 (1 分)

$$\frac{(m + B^2 L^2 C) dv}{mg \sin \theta - \frac{B^2 L^2 v}{R}} = dt$$

两边积分得到 (1 分)

$$-\frac{(m + B^2 L^2 C)R}{B^2 L^2} \ln \left(mg \sin \theta - \frac{B^2 L^2 v}{R} \right) = t + A$$

当 $t = 0$ 时, 有 $v = 0$, 代入可得 (1 分)

$$A = -\frac{(m + B^2 L^2 C)R}{B^2 L^2} \ln(mg \sin \theta)$$

代入整理可得 (2 分)

$$v(t) = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{B^2 L^2 t}{(m + B^2 L^2 C)R} \right) \right)$$

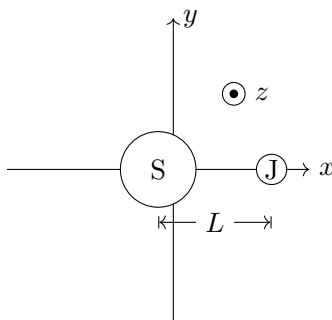
所以 (2 分)

$$v(\infty) = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2}$$

三. (60 分) 星际通道

为什么地球能够免受大量来自外太空小行星的侵扰? 其中很大的功劳来源于木星。其所充当的角色, 可以视为内太阳系的守门神。

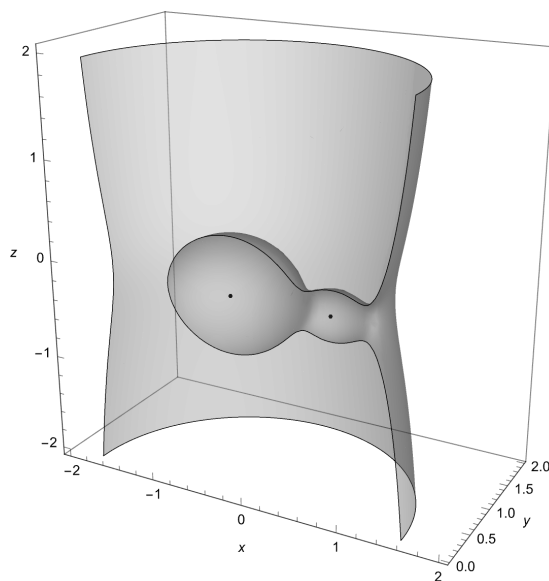
本题中, 我们将要探讨木星是如何取得如此作用的。在本问题中, 我们假设木星与太阳绕着共同的质心转动, 两者之间距离恒定为 L 。我们将要考察的是, 以两者质心为转轴, 木星公转角速度为角速度的**旋转参考系**。如下图所示:



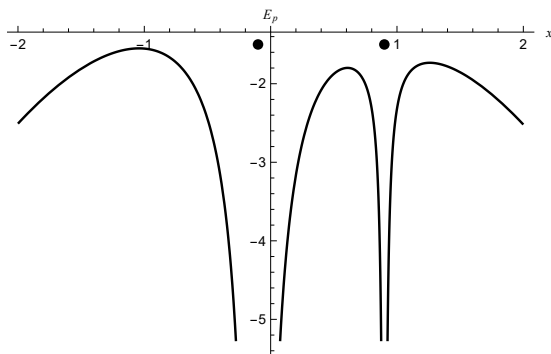
本题中, 我们使用无量纲参数计算, 约定如下: 万有引力常数为 $G = 1$, 质量单位为 $M_J + M_\odot$, 长度单位为 L , 时间单位为周期的 $1/(2\pi)$, 我们使用参数 $\mu = \frac{M_J}{M_\odot + M_J}$ 描述系统。所以在这样的参数下, 木星位于 $(1 - \mu, 0, 0)$, 而太阳位于 $(-\mu, 0, 0)$ 。

1. 写出该参考系下, 一个质量为 1 的物体的势能与受力的精确表达式, 使用 x, y, z 坐标与其关于时间的导数表示。为了让计算结果简便, 势能的表达式最后加上常数: $-\frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$ 。

当 $\mu = 0.1$ 时, 可以绘制势能等值面 $E_p = -1.7$ 得到



2. 观察 $E_p = -1.7$ 等值面你会注意到，只有大于特定能量的天体才有机会进入内太阳系。由于木星周围为势能低洼处，比这一最低限度高一点点能量的天体必须要从木星的入口进入，好似一个“通道”。



计算这一最低能量值 E_{enter} 。精确到 μ^1 量级。(提示：在解方程时，可以使用 $\gamma = x - (1 - \mu)$, $r_h = (\frac{\mu}{3})^{1/3}$ ，先精确地化简到关于 γ 的 5 次多项式方程，然后丢弃 μ^2 以及以上的小量，使用微扰法解带有小量的方程的近似解。)

3. 为了研究木星入口附近（右侧）处物体的运动轨迹，我们可以在平衡点处列出运动方程。将体系原点设在上一问平衡点处，列出此处 xy 平面上的线性化的运动方程。使用 x_e 代指 $\gamma + 1 - \mu$ 即可，不需要带入 γ 的具体表达式。(可以使用代换 $a = 2\bar{\mu} + 1 > 0, b = \bar{\mu} - 1 > 0, \bar{\mu} = \mu|x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu)|x_e + \mu|^{-3}$ 。)
4. 求解上述方程对应的四个特解，并且给出 $x(t)$ 的通解。考察 $t \rightarrow \infty$ 与 $t \rightarrow -\infty$ 的极限行为，由此讨论不同系数取值情况下，物体能否越过这个入口进入或离开内太阳系。(实际上只需要讨论 $e^{\pm \lambda t}$ 项的系数。)
- 5.

知识卡片：微扰法

使用微扰法求解方程时，我们逐步设出阶次递增的参量，代入方程运算，反复迭代得到最终答案。

例如求解方程 $\epsilon x^3 + x - 1 = 0$ ，其中 ϵ 是小量。我们可以先忽略 ϵ 得到**零级解** $x_0 = 1$ 。然后我们设 $x = 1 + \epsilon x_1$ ，代入并且展开到最低阶可以得到¹ $\epsilon(x_1 + 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0$ ，解得**一阶项系数** $x_1 = -1$ 。然后我们设 $x = 1 - \epsilon + \epsilon^2 x_2$ ，代入并且展开到最低阶可以得到 $\epsilon^2(x_2 - 3) + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0$ ，解得**二阶项系数** $x_2 = 3$ 。然后我们设 $x = 1 - \epsilon + 3\epsilon^2 + \epsilon^3 x_3$ ，

¹这里的 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 表示的是含有 ϵ^2 的项与更高阶的项，为了计算方便就直接不写了，使用 $\mathcal{O}$ 来表示。

代入并且展开到最低阶可以得到 $\epsilon^3(x_3 + 13) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0$ ，解得**三次项系数** $x_3 = -12$ 。于是我们得到方程的解为 $x = 1 - \epsilon + 3\epsilon^2 - 12\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ 。在本题中，我们的设法则有所不同，大致如下： $\gamma = \gamma_0 + r_h\gamma_1 + r_h^2\gamma_2 + r_h^3\gamma_3$ 。

[解答]

1. **(14 分)**

旋转参考系的转动角速度为 **(2 分)**

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

太阳与木星在旋转坐标系中的坐标为 **(2 分)**

$$\mathbf{r}_{\odot} = -\mu\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_J = (1 - \mu)\hat{\mathbf{x}}$$

因此势能为 **(2 分)**

$$E_p = -\frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x - (1 - \mu))^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$$

而在旋转参考系下，物体受到的作用力可以分为三个部分：

引力：**(2 分)**

$$\mathbf{F}_g = -\frac{(1 - \mu)}{[(x + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x + \mu \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\mu}{[(x - (1 - \mu))^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x - (1 - \mu) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

离心力：**(2 分)**

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

科里奥利力：**(2 分)**

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

现在我们可以得到合力 **(2 分)**

$$\mathbf{F} = -\frac{(1 - \mu)}{[(x + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x + \mu \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\mu}{[(x - (1 - \mu))^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x - (1 - \mu) \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **(22 分)**

当恰好有一个入口时，入口的开口处位于 x 轴上木星附近，所以我们需要考虑 x 轴上的能量极值。能量最高点在木星右侧 $x > 1 - \mu$ 处，此处受力平衡。设 $\gamma = x - (1 - \mu)$ ，有 **(2 分)**

$$\frac{1 - \mu}{(\gamma + 1)^2} + \frac{\mu}{\gamma^2} = \gamma + 1 - \mu$$

方程化简为: (2 分)

$$\gamma^5 + \gamma^4(3 - \mu) + \gamma^3(3 - 2\mu) - \gamma^2\mu - 2\gamma\mu - \mu = 0$$

我们忽略 μ , 可以得到零级解 (1 分)

$$\gamma = 0$$

设 $\gamma = r_h \gamma_1$, 代入并且保留到 μ 的最低阶可以得到 (2 分)

$$(\gamma_1^3 - 1)\mu + \mathcal{O}(\mu^{4/3}) = 0$$

所以解得 (2 分)

$$\gamma_1 = 1$$

设 $\gamma = r_h + r_h^2 \gamma_2$, 代入并且保留到 μ 的最低阶可以得到 (2 分)

$$\left(-\frac{1}{3^{1/3}} + 3^{2/3} \gamma_2\right) \mu^{4/3} + \mathcal{O}(\mu^{5/3}) = 0$$

所以解得 (2 分)

$$\gamma_2 = \frac{1}{3}$$

设 $\gamma = r_h + \frac{r_h^2}{3} + r_h^3 \gamma_3$, 代入并且保留到 μ 的最低阶可以得到 (2 分)

$$\left(\frac{3^{1/3}}{9} + 3^{1/3} \gamma_3\right) \mu^{5/3} + \mathcal{O}(\mu^2) = 0$$

所以解得 (2 分)

$$\gamma_3 = -\frac{1}{9}$$

得到 (2 分)

$$\gamma = r_h + \frac{1}{3} r_h^2 - \frac{1}{9} r_h^3 + \dots$$

代入势能 (3 分)

$$E_P = -\frac{1-\mu}{1+\gamma} - \frac{\mu}{\gamma} - \frac{1}{2}(\gamma + 1 - \mu)^2 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{3} \mu^{2/3} + \frac{17}{6} \mu$$

3. (7 分)

在平衡位点处, 我们需要线性化力, 有 (4 分)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right|_{x=x_e, y=0, z=0} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1-\mu}{|x+\mu|^2} - \frac{\mu}{|x-(1-\mu)|^2} + x \right) \hat{\mathbf{x}} = (2\bar{\mu} + 1) \hat{\mathbf{x}} = a \hat{\mathbf{x}}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right|_{x=x_e, y=0, z=0} = \frac{d}{dy} \left(-\frac{(1-\mu)y}{[(x_e + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x_e - (1-\mu))^2 + y^2]^{3/2}} + y \right) \hat{\mathbf{y}} = -(\bar{\mu} - 1) \hat{\mathbf{y}} = -b \hat{\mathbf{y}}$$

所以在移动原点后运动方程 (3 分)

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + ax, \ddot{y} = -2\dot{x} - by$$

4. (17 分)

设特解 (2 分)

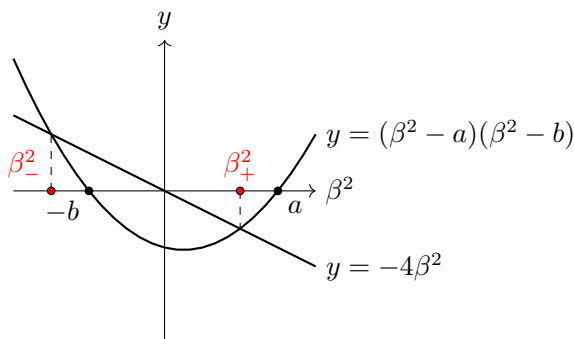
$$x(t) = x_0 e^{\beta t}, y(t) = y_0 e^{\beta t}$$

代入运动方程可以得到 (2 分)

$$\begin{cases} (\beta^2 - a)x_0 - 2\beta y_0 = 0 \\ 2\beta x_0 + (\beta^2 + b)y_0 = 0 \end{cases}$$

关于 x_0, y_0 的方程要有非零解，所以 (2 分)

$$(\beta^2 - a)(\beta^2 + b) + 4\beta^2 = 0$$



可以注意到， β^2 有一个正根，有一个负根。分别为 (2 分)

$$\beta_+^2 = \frac{1}{2} \left(a - b - 4 + \sqrt{(-a + b + 4)^2 + 4ab} \right) = \frac{\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}$$

$$\beta_-^2 = \frac{1}{2} \left(a - b - 4 - \sqrt{(-a + b + 4)^2 + 4ab} \right) = \frac{\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}$$

所以 β 有四个根，分别记为 $\pm\lambda, \pm i\nu$ ，其中 (2 分)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}}, \quad \nu = \sqrt{-\frac{\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}}$$

所以 $x(t)$ 的特解为 (2 分)

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, x_2(t) = e^{-\lambda t}, x_3(t) = e^{i\nu t}, x_4(t) = e^{-i\nu t}$$

线性叠加四个结果可以得到 (2 分)

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{-\lambda t} + \beta_1 \cos(\nu t) + \beta_2 \sin(\nu t)$$

由于 $e^{\pm\lambda t}$ 是主导项，所以我们只需要对其进行讨论

- 如果 $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ ，那么在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时， $x(t)$ 同号，也就意味着沿着这个轨道运动的天体无法越过这个入口。(1 分)
- 如果 $\alpha_1 = 0$ ，物体从内/外运动到平衡点后，在平衡点附近形成椭圆轨道，不再移动，无法越过入口。(0.5 分)
- 如果 $\alpha_2 = 0$ ，物体从平衡点附近开始运动，最后落入内太阳系或外太阳系，不能称为“越过”入口。(0.5 分)
- 如果 $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ ，那么在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时， $x(t)$ 异号，也就意味着沿着这个轨道运动的天体越过了入口。(1 分)

四. (60 分) CHSH 游戏

Alice 和 Bob 在玩一个游戏，大致如下所示。Charlie 是游戏的主持人，每一轮游戏中，Charlie 会给 Alice 和 Bob 每人各一个比特 x, y ，即每个人会分配到一个数字，0 或 1。在得到比特之后，Alice 和 Bob 会向 Charlie 各回复一个比特 a, b 。要取胜，则要求² $x \text{ and } y = a \text{ xor } b$ 。Alice 和 Bob 在比赛前可以提前构思策略，但是在比赛过程中不能交流。本题中，我们会探讨这个策略游戏的一个出乎意料的解法，以及其背后的深刻物理意义。

1. 我们不妨来考察一个十分简单的策略：重复。即 Alice 和 Bob 接收到什么比特，就返回什么比特。试着计算这种策略下，游戏的胜率。
2. 为了找到经典策略中的最优解，不妨考察如下混合策略：

如果 Alice 接收到比特 0	则有 p_1 的概率返回 0，有 $1 - p_1$ 的概率返回 1
如果 Alice 接收到比特 1	则有 p_2 的概率返回 0，有 $1 - p_2$ 的概率返回 1
如果 Bob 接受到比特 0	则有 p_3 的概率返回 0，有 $1 - p_3$ 的概率返回 1
如果 Bob 接受到比特 1	则有 p_4 的概率返回 0，有 $1 - p_4$ 的概率返回 1

计算混合策略的胜率与其最大值。

3. 可以看到，经典策略存在一个无法逾越的极大值。然而我们有一个巧妙的避开这个上限的方法：使用一对纠缠的量子。假设我们有一个量子比特，其具有两个本征态： $|0\rangle, |1\rangle$ ，对于一个量子比特 $|\psi\rangle$ ，其通式可以写成 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 的线性组合，即

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 。如果我们使用一个测量器对 $|\psi\rangle$ 进行测量，这个测量器有两个可能输出 $|0\rangle, |1\rangle$ （以下简称使用 $|0\rangle, |1\rangle$ 测量）。在测量过后， $|\psi\rangle$ 会坍缩到两态中的一个。那么得到 $|0\rangle$ 的概率为 $|\alpha|^2$ ，得到 $|1\rangle$ 的概率为 $|\beta|^2$ 。所以 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。如果我使用 $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ 测量 $|\psi\rangle$ ，得到 $|+\rangle$ 与 $|-\rangle$ 的概率是什么？（提示：将 $|\psi\rangle$ 变形为 $\alpha'|+\rangle + \beta'|-\rangle$ 的形式）

4. 现在我们考察一对纠缠的量子比特，它们整体可以描述为

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

这里 $|mn\rangle$ 指的是两个量子比特组成体系的态，指的是 Alice 手中的量子比特处于态 $|m\rangle$ ，Bob 手中的量子比特处于态 $|n\rangle$ 的体系量子态。所以 $|\phi\rangle$ 指的是 Alice 和 Bob 手中的量子比特有一半的概率都为 $|0\rangle$ ，有一半的概率都为 $|1\rangle$ ，

对于这对纠缠量子对，其意义即为 Alice 手中的量子比特坍缩时，Bob 手中的量子比特也会同时坍缩：如果 Alice 使用 $|0\rangle, |1\rangle$ 测量 $|\phi\rangle$ ，得到 $|0\rangle$ 。Bob 也使用 $|0\rangle, |1\rangle$ 测量自己手中的量子比特，那么一定会得到 $|0\rangle$ ，不可能得到 $|1\rangle$ 。这是因为整个量子体系中，一方经过测量后，得到的要么是 $|00\rangle$ ，要么是 $|11\rangle$ 。

不妨定义如下几个态

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle & |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ |a_0\rangle &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle & |a_1\rangle &= -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle \\ |b_0\rangle &= \cos\theta|0\rangle - \sin\theta|1\rangle & |b_1\rangle &= \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle \end{aligned}$$

其中 $\theta = \pi/8$ 。游戏的流程大致如下：现在我们给出如下策略

²and 指的是逻辑运算符“和”，只有当 $x = y = 1$ 时，才有 $x \text{ and } y = 1$ ，其他情况下结果是 0；xor 指的是逻辑运算符“异或”，只有当 $a = b$ 时，才有 $a \text{ xor } b = 0$ ，而当 $a \neq b$ 时，有 $a \text{ xor } b = 1$ 。

态 $\rightarrow$	$ 1\rangle$	$ b_1\rangle$	$ +\rangle$	$ a_0\rangle$	$ 0\rangle$	$ b_0\rangle$	$ -\rangle$	$ a_1\rangle$
当 x 为多少时, Alice 需要使用这个态测量?	0		1		0		1	
当 y 为多少时, Bob 需要使用这个态测量?		1		0		1		0
如果 Alice 得到了这个态, 应该发送的值是多少?	1		0		0		1	
如果 Bob 得到了这个态, 应该发送的值是多少?		1		0		0		1

给出这一策略的胜率。(提示: $|\phi\rangle$ 还可以等价表示为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$ 。)

5. 量子力学具有内禀的不确定性, 这种不确定性使得许多上世纪的大科学家们无法接受量子力学 (比如爱因斯坦)。他们提出了一个理论: 隐变量理论。他们认为粒子上存在一些未知的变量, 决定了其坍缩的结果。这就好比 Alice 和 Bob 事先确定好了一个列表, 保证每次游戏时两个人测到的态 $|0\rangle$ 与态 $|1\rangle$ 都是相同的。这个列表是确定的, 而非随机。由此, 评述如何使用 CHSH 游戏证明/证伪隐变量的存在。

[解答]

1. (6 分)

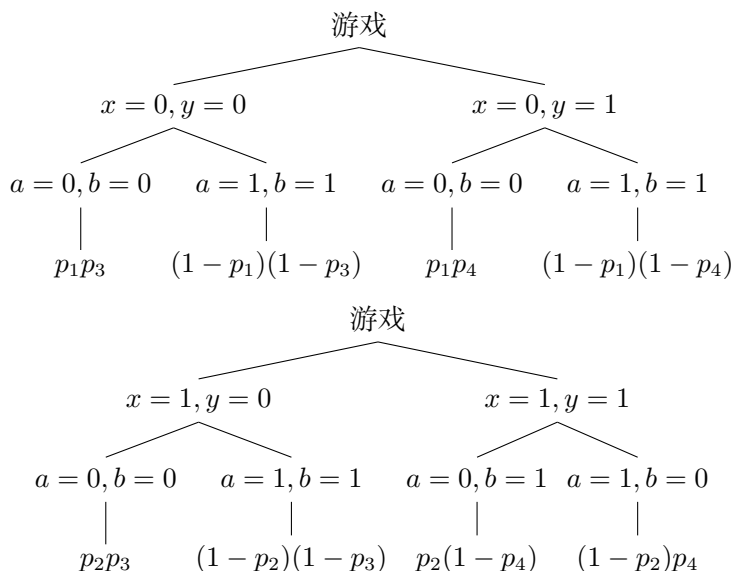
我们可以使用列表法解决这个问题 (4 分)

x	y	a	b	x and y	a xor b
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

可以看到胜率是 25%。(2 分)

2. (14 分)

我们可以使用树状图解决这一问题 (4 分)



因此可以得到胜率为 (2 分)

$$P = \frac{1}{4}[(1 - p_1)(1 - p_3) + (1 - p_2)(1 - p_3) + p_1p_3 + p_2p_3 + (1 - p_1)(1 - p_4) + p_2(1 - p_4) + p_1p_4 + (1 - p_2)p_4]$$

化简得到 (2 分)

$$P = \frac{1}{4}[2p_3p_1 + 2p_4p_1 - 2p_1 + 2p_2p_3 - 2p_3 - 2p_2p_4 + 3]$$

注意到 (2 分)

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = 2p_3 + 2p_4 - 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_2} = 2p_3 - 2p_4$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_3} = 2p_1 + 2p_2 - 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_4} = 2p_1 - 2p_2$$

因为偏导数 $\frac{\partial P}{\partial p_i}$ 与自身 p_i 无关，极大值一定在边界处取得，即 $p_i = 0$ 或 1 时，一定能找到最大值，因此代入有 (2 分)

p_1	p_2	p_3	p_4	P
0	0	0	0	75%
0	0	0	1	75%
0	0	1	0	25%
0	0	1	1	25%
0	1	0	0	75%
0	1	0	1	25%
0	1	1	0	75%
0	1	1	1	25%
1	0	0	0	25%
1	0	0	1	75%
1	0	1	0	25%
1	0	1	1	75%
1	1	0	0	25%
1	1	0	1	25%
1	1	1	0	75%
1	1	1	1	75%

因此混合策略胜率的最大值为 75%。(2 分)

3. (8 分)

设 (2 分)

$$|\psi\rangle = \alpha' |+\rangle + \beta' |-\rangle$$

则有 (1 分)

$$\frac{\alpha' + \beta'}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{2}} |1\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

即 (1 分)

$$\begin{cases} \alpha' + \beta' = \sqrt{2}\alpha \\ \alpha' - \beta' = \sqrt{2}\beta \end{cases}$$

解得 (2 分)

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \\ \beta' = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

所以有 $\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2$ 的概率得到 $|+\rangle$ 有 $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2$ 的概率得到 $|-\rangle$ 。(2 分)

4. (28 分)

分别计算即可,

对于 $x=0, y=0$ 的情况下, 如果要得到 $a=0, b=0$, 则 Alice 测到 $|0\rangle$, Bob 测到 $|a_0\rangle$; 如果要得到 $a=1, b=1$, 则 Alice 测到 $|1\rangle$, Bob 测到 $|a_1\rangle$:

Alice 测量后, 如果坍缩到 $|00\rangle$, 有 (2 分)

$$|0\rangle = \cos\theta |a_0\rangle - \sin\theta |a_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos\theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

如果坍缩到 $|11\rangle$, 有 (2 分)

$$|1\rangle = \sin\theta |a_0\rangle + \cos\theta |a_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos\theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

对于 $x=0, y=1$ 的情况下, 如果要得到 $a=0, b=0$, 则 Alice 测到 $|0\rangle$, Bob 测到 $|b_0\rangle$; 如果要得到 $a=1, b=1$, 则 Alice 测到 $|1\rangle$, Bob 测到 $|b_1\rangle$:

Alice 测量后, 如果坍缩到 $|00\rangle$, 有 (2 分)

$$|0\rangle = \cos\theta |b_0\rangle - \sin\theta |b_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos\theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

如果坍缩到 $|11\rangle$, 有 (2 分)

$$|1\rangle = -\sin\theta |b_0\rangle + \cos\theta |b_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos\theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

对于 $x=1, y=0$ 的情况下, 如果要得到 $a=0, b=0$, 则 Alice 测到 $|+\rangle$, Bob 测到 $|a_0\rangle$; 如果要得到 $a=1, b=1$, 则 Alice 测到 $|-\rangle$, Bob 测到 $|a_1\rangle$:

Alice 测量后, 如果坍缩到 $|++\rangle$, 有 (2 分)

$$|+\rangle = \cos\theta |a_0\rangle + \sin\theta |a_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos\theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

如果坍缩到 $|--\rangle$ ，有 (2 分)

$$|--\rangle = \sin \theta |a_0\rangle - \cos \theta |a_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|-\cos \theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

对于 $x = 1, y = 1$ 的情况下，如果要得到 $a = 0, b = 1$ ，则 Alice 测到 $|+\rangle$ ，Bob 测到 $|b_1\rangle$ ；如果要得到 $a = 1, b = 0$ ，则 Alice 测到 $|-\rangle$ ，Bob 测到 $|b_0\rangle$ ；

Alice 测量后，如果坍缩到 $|++\rangle$ ，有 (2 分)

$$|+\rangle = \sin \theta |b_0\rangle + \cos \theta |b_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos \theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

如果坍缩到 $|--\rangle$ ，有 (2 分)

$$|--\rangle = \cos \theta |b_0\rangle - \sin \theta |b_1\rangle$$

所以这种情况下获胜的概率为 (1 分)

$$|\cos \theta|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

综合以上四种情况下的结果，在最佳量子策略下，每一种情况下获胜的概率均为 (2 分)

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

因此，加权平均得到 CHSH 游戏的总体获胜概率为 (2 分)

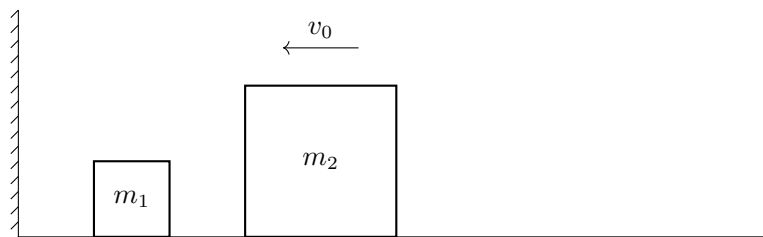
$$P_{\text{win}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85.4\%.$$

5. (4 分)

如果隐变量的确存在，那么 CHSH 游戏得到的胜率不会超过经典策略，因为此时量子系统内禀的自身不确定性就不复存在了。我们可以使用量子策略对 CHSH 游戏进行试验，如果得到的最大胜率不超过 75%，那么隐变量存在，反之不存在。

五. (80 分) 撞出个 π

物理学中，有一个奇特的方法计算 π 。考虑完全光滑的地面上放着两块物块，质量为 m_1, m_2 。我们给 m_2 一个向左的初始速度，大小为 v_0 ，让其与静止的 m_1 碰撞，我们要做的就是数出总共可能的撞击次数。本题中以水平向右为正方向。



1. 我们不妨先假设所有碰撞都是完全弹性碰撞，即恢复系数为 1。
 - i. 为了计算碰撞总次数，我们可以使用如下研究方式。我们使用 m_1, m_2 的速度 v_1, v_2 描述系统的状态。具体而言，平面直角坐标系中的点 $(x, y) = (\sqrt{m_1}v_1, \sqrt{m_2}v_2)$ 对应了系统的状态。在碰撞时 (x, y) 的坐标会随之改变。试着给出 m_1, m_2 碰撞时 (x, y) 的改变方式与 m_1 撞墙时 (x, y) 的改变方式。（改变方式指的是碰撞前后 (x, y) 与 (x', y') 之间的关系式，最好使用矩阵的形式给出）
 - ii. 试着给出最后停止碰撞 (x, y) 需要满足的条件。
 - iii. 我们记 m_1, m_2 相互碰撞对应矩阵 $\mathbf{A}$ ， m_1 撞墙对应矩阵 $\mathbf{B}$ ，计算 $\mathbf{BA}$ 两者相乘（即先物块碰撞，再撞墙），其形式有什么特别之处？提示：对比旋转矩阵 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 。
 - iv. 由此观察，计算 N 次碰撞后系统对应的状态点 (x, y) 。（你可能需要对 N 的奇偶性分类）
 - v. 将结果代入 (ii.) 中条件，得到碰撞次数 N 。如果 $m_2 = 100^q m_1, q \in \mathbb{N}$ ，会发生什么？
2. 在实际生活中，碰撞并非都是完全弹性碰撞，这时我们可以设物块之间的恢复系数为 e ，不过为了计算简便，设墙与 m_1 的碰撞为完全弹性碰撞。
 - i. 重新计算 m_1, m_2 相互碰撞对应矩阵 $\mathbf{A}$ ， m_1 撞墙对应矩阵 $\mathbf{B}$ 。并且给出两者之积 $\mathbf{BA}$ 。
 - ii. 计算 N 次碰撞后系统对应的状态点 (x, y) 。
 - iii. 给出碰撞次数 N 的表达式，用 θ, e 来表示结果。（当 N 为奇数时，化简到形如 $2[\cdots] - 1$ 的形式，当 N 为偶数时，化简到形如 $2[\cdots] - 2$ 的形式，对两个结果求最小值即可得到最后表达式。）当 $m_2 = 1000m_1, e = 0.9$ 时， N 的值是多少？
 - iv. 值得注意的是，在某些条件下，碰撞无法结束，给出条件表达式。
（最后结果都保留 $\theta = \arccos \frac{(e+1)(m_2-m_1)}{2\sqrt{e}(m_1+m_2)}$ 。）

你可能需要的数学公式：

切比雪夫恒等式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} \frac{A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta}{\sin \theta} & \frac{B \sin N\theta}{\sin \theta} \\ \frac{C \sin N\theta}{\sin \theta} & \frac{D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta}{\sin \theta} \end{pmatrix}, \quad \theta = \arccos \frac{A+D}{2}$$

当且仅当 $AD - BC = \pm 1$ 时成立。

[解答]

1. (37 分)

i. (7 分) 当 m_1, m_2 相互撞击时，设两者速度碰撞前后为 v_1, v_2, v'_1, v'_2 有动量守恒与能量守恒，可以列出 (2 分)

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

求解得到 (2 分)

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \end{cases}$$

转化为 (x, y) 关系可以得到 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

撞墙的时刻，有 $v'_1 = -v_1$ ，所以 (1 分)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

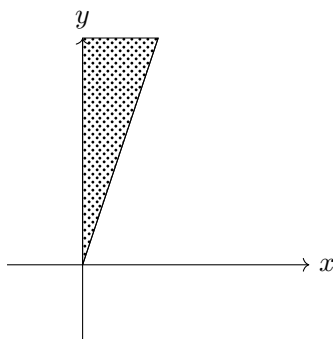
ii. (2 分) 当停止碰撞时， m_1, m_2 都向右运动，且 m_2 运动快于 m_1 ，所以有 (1 分)

$$0 \leq v_1 \leq v_2$$

使用 x, y 表示就是 (1 分)

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} y$$

【注】这对应平面上的区域为



iii. (5 分) 由 (i) 问，我们得到了

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此可以计算 (2 分)

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} & -\frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}$$

此时注意到 (1 分)

$$\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \right)^2 = 1$$

所以， $\mathbf{BA}$ 就是一个旋转矩阵，对应的旋转角为 (2 分)

$$\theta = \arctan \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 - m_2} = 2 \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

iv. (9 分) 初始时刻的状态点为 $(x_0, y_0) = (0, -\sqrt{m_2} v_0)$ ，若 N 为偶数，则有 (1 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = (\mathbf{BA})^{N/2} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

而 $\mathbf{BA}$ 对应 θ 的转动，所以 $(\mathbf{BA})^{N/2}$ 对应 $\frac{N\theta}{2}$ 的转动。所以有 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) & -\sin \left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \\ \sin \left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) & \cos \left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{m_2} v_0 \end{pmatrix}$$

所以我们得到当 N 为偶数时 (2 分)

$$\begin{cases} x_N = \sqrt{m_2}v_0 \sin\left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \\ y_N = -\sqrt{m_2}v_0 \cos\left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \end{cases}$$

当 N 为奇数时, 有 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ y_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ y_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{N+1} \\ y_{N+1} \end{pmatrix}$$

所以有当 N 为奇数时 (2 分)

$$\begin{cases} x_N = -\sqrt{m_2}v_0 \sin\left((N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \\ y_N = -\sqrt{m_2}v_0 \cos\left((N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \end{cases}$$

v. (14 分) 当 N 为偶数时, 有 (1 分)

$$0 \leq \sin\left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \leq -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cos\left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)$$

因此有

$$-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \leq \tan\left(N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \leq 0$$

所以 (2 分)

$$(2q-1)\pi - \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \leq N \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \leq (2q-1)\pi, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

满足条件的最小偶数 N 为 (2 分)

$$N = 2 \left\lceil \frac{\pi}{2 \arctan \sqrt{m_1/m_2}} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

当 N 为奇数时, 有 (1 分)

$$0 \leq -\sin\left((N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \leq -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cos\left((N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)$$

因此有

$$0 \leq \tan\left((N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

所以 (2 分)

$$(2q-1)\pi \leq (N+1) \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \leq (2q-1)\pi + \arctan \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

满足条件的最小奇数 N 为 (2 分)

$$N = 2 \left\lceil \frac{\pi}{2 \arctan \sqrt{m_1/m_2}} \right\rceil - 1$$

取较小值合并可以得到, (2 分)

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan \sqrt{m_1/m_2}} \right\rceil - 1$$

如果 $m_2 = 100^q m_1$ ，代入可以得到 (1 分)

$$N = \lceil \pi / \arctan 10^{-q} \rceil - 1 \approx \lceil 10^q \pi \rceil - 1$$

得到的是 π 的整数部分加上小数部分的前 q 位组成的整数。(1 分)

2. (43 分)

i. (11 分) 当两个物体发生碰撞时，设碰撞前后的速度分别为 v_1, v_2, v'_1, v'_2 由动量守恒与恢复系数的定义，可以得到 (2 分)

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ e(v_2 - v_1) = v'_1 - v'_2 \end{cases}$$

解得 (2 分)

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v'_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

转换为 (x, y) 关系可以得到 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} & \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

所以 (2 分)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} & \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}$$

对于撞墙的情况，与前文相同，即为 (1 分)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此我们可以计算 (2 分)

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \frac{em_2 - m_1}{m_1 + m_2} & -\frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}$$

ii. (9 分) 当 N 为偶数时，我们可以写出 (1 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = (\mathbf{BA})^{N/2} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

我们注意到 $\det \mathbf{BA} = e$ ，为了使用切比雪夫恒等式，我们需要提取 $\sqrt{e}$ 的因子，所以 (3 分)

$$\begin{aligned} (\mathbf{BA})^{N/2} &= \begin{pmatrix} \frac{em_2 - m_1}{m_1 + m_2} & -\frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \\ \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix}^{N/2} = e^{N/4} \begin{pmatrix} \frac{em_2 - m_1}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} & -\frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} \\ \frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} & \frac{m_2 - em_1}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} \end{pmatrix}^{N/2} \\ &= \frac{e^{N/4}}{\sin \theta} \begin{pmatrix} [\dots] & -\frac{(1+e)\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} \sin \frac{N}{2} \theta \\ [\dots] & \frac{m_2 - em_1}{\sqrt{e}(m_1 + m_2)} \sin \frac{N}{2} \theta - \sin \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以我们可以得到 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{m_2}v_0e^{N/4}}{\sin \theta} \begin{pmatrix} -\frac{(1+e)\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{e(m_1+m_2)}} \sin \frac{N}{2}\theta \\ \frac{m_2-em_1}{\sqrt{e(m_1+m_2)}} \sin \frac{N}{2}\theta - \sin \left(\frac{N}{2}-1\right)\theta \end{pmatrix}$$

而对于 N 为奇数的情况, 我们有 (1 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{N+1} \\ y_{N+1} \end{pmatrix}$$

所以 (2 分)

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \frac{-\sqrt{m_2}v_0e^{(N+1)/4}}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \frac{(1+e)\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{e(m_1+m_2)}} \sin \frac{N+1}{2}\theta \\ \frac{m_2-em_1}{\sqrt{e(m_1+m_2)}} \sin \frac{N+1}{2}\theta - \sin \frac{N-1}{2}\theta \end{pmatrix}$$

iii. (19 分) 当 N 为偶数时, 若停止碰撞, 则有 (1 分)

$$0 \leq x_N \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}y_N$$

则有 (2 分)

$$\begin{aligned} 0 \leq (1+e)m_2 \sin \frac{N}{2}\theta &\leq (em_1 - m_2) \sin \frac{N}{2}\theta + \sqrt{e}(m_1 + m_2) \sin \left(\frac{N}{2}-1\right)\theta \\ \begin{cases} 2q\pi \leq \frac{N}{2}\theta \leq (2q+1)\pi, & q \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{e}(m_1 + m_2) \cos \frac{N}{2}\theta \sin \theta \leq ((e + \sqrt{e} \cos \theta)m_1 - (2 + e - \sqrt{e} \cos \theta)m_2) \sin \frac{N}{2}\theta \end{cases} \end{aligned}$$

注意到, 由于 $\sin \frac{N}{2}\theta \geq 0, \sin \theta > 0$, 所以移项可以得到

$$\cot \frac{N}{2}\theta \leq \frac{(e + \sqrt{e} \cos \theta)m_1 - (2 + e - \sqrt{e} \cos \theta)m_2}{\sqrt{e}(m_1 + m_2) \sin \theta} \quad \text{或} \quad \sin \frac{N}{2}\theta = 0, \cos \frac{N}{2}\theta \leq 0$$

解得 (2 分)

$$(2q-1)\pi + \operatorname{arccot} \frac{(e + \sqrt{e} \cos \theta)m_1 - (2 + e - \sqrt{e} \cos \theta)m_2}{\sqrt{e}(m_1 + m_2) \sin \theta} \leq \frac{N}{2}\theta \leq 2q\pi, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

因此有 $N/2$ 的最小值为

$$\frac{N}{2} = \left\lceil \frac{1}{\theta} \left(\pi + \operatorname{arccot} \frac{(e + \sqrt{e} \cos \theta)m_1 - (2 + e - \sqrt{e} \cos \theta)m_2}{\sqrt{e}(m_1 + m_2) \sin \theta} \right) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\theta} \left(\pi + \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right) \right\rceil - 1$$

所以有, (2 分)

$$N = 2 \left\lceil \frac{1}{\theta} \left(\pi + \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right) \right\rceil - 2$$

当 N 为奇数时, 我们有 (1 分)

$$0 \leq x_N \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}y_N$$

则有 (2 分)

$$0 \leq -(1+e)m_2 \sin \frac{N+1}{2}\theta \leq (em_1 - m_2) \sin \frac{N+1}{2}\theta + e(m_1 + m_2) \sin \frac{N-1}{2}\theta$$

化简得到

$$\begin{cases} (2q-1)\pi \leq \frac{N+1}{2}\theta \leq 2q\pi, & q \in \mathbb{N}^* \\ e(m_1 + m_2) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{N}{2}\theta \geq 0 \end{cases}$$

解得 (2 分)

$$(2q-1)\pi \leq \frac{N+1}{2}\theta \leq (2q-1)\pi + \theta, \quad q \in \mathbb{N}^*$$

因此有 $(N+1)/2$ 的最小值为

$$\frac{N+1}{2} = \left\lceil \frac{\pi}{\theta} \right\rceil$$

化简得到 (2 分)

$$N = 2 \left\lceil \frac{\pi}{\theta} \right\rceil - 1$$

我们应当取较小的 N ，所以有 (3 分)

$$N = \min \left\{ 2 \left\lceil \frac{1}{\theta} \left(\pi + \arctan \left(\frac{1-\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right) \right\rceil - 2, 2 \left\lceil \frac{\pi}{\theta} \right\rceil - 1 \right\}$$

代入 $m_2/m_1 = 1000, e = 0.9$ ，可以得到 (2 分)

$$N = 179$$

iv. (4 分) 如果碰撞无穷多次，则原式结果不存在，即 θ 不存在。对应条件为 (2 分)

$$\frac{(1+e)(m_2-m_1)}{2\sqrt{e}(m_1+m_2)} > 1$$

解得 (2 分)

$$\frac{m_2}{m_1} > \left(\frac{1+\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} \right)^2$$

此时，碰撞不会停下。

六. (40 分) 德布罗意波长

在学习物理的过程中，老师告诉我们，德布罗意波长的推导可以通过光子能动量公式推导：

$$\begin{cases} E = h\nu \\ E = pc \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

然后将光子与实物粒子类比，得到 $\lambda = h/p$ 。但是，这并不是德布罗意当年论文中的推导过程。在本题中，我们将回归历史本源，重新推导德布罗意波长。

1. 德布罗意考察一个静质量为 m_0 ，以 $v = \beta c$ 运动的粒子。德布罗意认为粒子自身具有一个内禀的“振动频率” ν_0 ，而粒子的能量由这个振动贡献。德布罗意而后考察地面系下看到的频率 ν 。分别使用能量视角与时间膨胀视角给出的 ν 表达式。
2. 可以看到这两种视角下， ν 的表达式不同，德布罗意认为这两者对应不同的物理实质。一者是粒子内部自身的“振动频率” ν_i ，一者是与粒子同向前进的“虚拟波”的频率 ν_f 。他认为这两者是同相共振的，即粒子所处位置的波相位与粒子自身相位相同，由此给出波速。
3. 给出“导波”波长。

[解答]

1. (15 分)

在能量视角下，粒子的能量可以写成 (3 分)

$$m_0 c^2 = h\nu_0$$

所以当粒子运动起来时，有 (3 分)

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h\nu$$

因此有 (3 分)

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

在时间膨胀视角下，粒子的本征时与地面时有关系 (3 分)

$$\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t$$

利用 $\nu = 1/\Delta t$ 因此有 (3 分)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

2. (15 分)

对于粒子自身，其相位随时间变化为 (3 分)

$$\phi_i = 2\pi\nu_i t$$

对于波，若其波速为 V ，则其相位为 (3 分)

$$\phi_f = 2\pi\nu_f \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

两者同相共振，所以代入 $x = vt$ ，可以得到 (3 分)

$$2\pi\nu_f t \left(1 - \frac{v}{V} \right) = 2\pi\nu_i t$$

值得注意的是，由于 $1 - v/V < 1$ ，所以 $\nu_i < \nu_f$ ，故我们可以得到 (3 分)

$$\nu_i = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \nu_f = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

代入解得 (3 分)

$$V = \frac{c}{\beta}$$

3. (10 分)

波长为 (3 分)

$$\lambda = \frac{V}{\nu_f} = \frac{c\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta\nu_0}$$

代入 (1 分)

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

可以得到 (3 分)

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 \beta c} = \frac{h}{p}$$