

不卖，纯恶心人卷 2

命题人：@ 一碗星空汤

一. (40 分) 一个弹硬币的简单模型

一个硬币静止地放在光滑桌面的桌边, 只有右侧一点露出桌面, 已知硬币可视为匀质圆盘, 质量为 m , 半径为 r , 重力加速度为 g , 现在在硬币右侧施加一竖直冲量 I .

1. 求施加冲量后一瞬间硬币的质心速度 v_0 与角速度 ω_0 ;
2. 受冲击之后, 硬币有可能飞离桌面. 求出使硬币飞离桌面的最小初速度 $v_{0,\min}$ 以及在 $v_0 > v_{0,\min}$ 时硬币脱离时与水平方向夹角 θ ;
3. 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 试通过计算说明硬币落地时的向上面是否与抛出时的向上面不同, 已知硬币与地面发生完全非弹性碰撞.



[解答]

1. (6 分)

硬币关于转轴的转动惯量为 (1 分)

$$J = \frac{1}{4}mr^2$$

有冲量与冲量矩定理, 关于质心有 (2 分)

$$I + I_N = mv_0, Ir - I_N r = J\omega_0$$

同时有速度关联 (1 分)

$$v_0 = \omega_0 r$$

因此有 (2 分)

$$v_0 = \frac{8I}{5m}, \omega_0 = \frac{8I}{5mr}$$

2. (20 分)

在受到冲击之后, 设硬币与水平方向夹角为 ϕ , 由于桌面光滑, 因此质心横坐标不变, 有 (1 分)

$$\vec{r}_c = (0, r \sin \phi)$$

于是我们有 (2 分)

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}mr^2 \left(\cos^2 \phi + \frac{1}{4} \right) \dot{\phi}^2$$

$$E_p = mgy_c = mgr \sin \phi$$

因此有机械能守恒 (2 分)

$$\frac{1}{8}mr^2(4\cos^2 \phi + 1)\dot{\phi}^2 + mgr \sin \phi = \frac{8I^2}{5m}$$

可以得到 (2 分)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{64I^2 - 40m^2gr \sin \phi}{5m^2r^2(4\cos^2 \phi + 1)}$$

由于 $\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = 2\ddot{\phi}$, 则有 (2 分)

$$\ddot{\phi} = \frac{4\cos \phi}{5r^2(4\cos^2 \phi + 1)^2} \left(64\frac{I^2}{m^2} \sin \phi - 5gr(5 + 4\sin^2 \phi) \right)$$

因此可以得到 (2 分)

$$\ddot{y}_c = r(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi)$$

$$= \frac{4\cos^2 \phi}{5r(4\cos^2 \phi + 1)^2} \left(64\frac{I^2}{m^2} \sin \phi - 5gr(5 + 4\sin^2 \phi) \right) - \frac{(64I^2 - 40m^2gr \sin \phi) \sin \phi}{5m^2r(4\cos^2 \phi + 1)}$$

当地面无支持力时, 硬币脱离桌面, 此时有 (1 分)

$$m\ddot{y}_c = -mg$$

此时 $\phi = \theta$, (3 分)

$$20\sin^2 \theta - 64\frac{I^2}{m^2gr} \sin \theta + 25 = 0$$

可以看到, $\sin \theta$ 的解可以取遍 $(0, 1]$, 也就是若要能够跳起, 有 (2 分)

$$I = m\sqrt{gr} \left(\sqrt{\frac{20\sin^2 \theta + 25}{64\sin \theta}} \right)_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{8}m\sqrt{gr}$$

于是有 (1 分)

$$v_{0,\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\sqrt{gr}$$

当 $v > v_{0,\min}$ 时, 有 (2 分)

$$\theta = \arcsin \left(\frac{8I^2}{5m^2gr} - \sqrt{\frac{64I^4}{25m^4g^2r^2} - \frac{5}{4}} \right)$$

3. (14 分)

当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 有 (1 分)

$$I = \frac{\sqrt{15}}{4}m\sqrt{gr}$$

因此有当脱离时, 有 (1 分)

$$\dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{r}$$

因此有此时质心速度为 (1 分)

$$v_c = r \cos \theta \dot{\phi} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{gr}$$

于是在之后的运动过程中，有 (2 分)

$$y_c = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{gr}t + \frac{1}{2}r$$

因此有左右两端 (2 分)

$$y_a = y_c - r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{2\frac{g}{r}}t\right), y_b = y_c + r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{2\frac{g}{r}}t\right)$$

当落地时，有 (1 分)

$$t_a = 3.2943\sqrt{\frac{r}{g}}, t_b = 2.3357\sqrt{\frac{r}{g}}$$

因此在落地时，右端点先落地，此时硬币反转的角度为 (1 分)

$$\phi' = \frac{\pi}{6} + \sqrt{2\frac{r}{g}}t = 3.8268\text{rad} = 219^\circ$$

此时硬币成功翻面落地，在与地面碰撞时，有关于接触点角动量守恒，因此有 (2 分)

$$\frac{1}{4}mr^2\sqrt{2\frac{g}{r}} + mr\dot{y}_c \cos(\phi' - \pi) = \frac{1}{4}mr^2\omega' + mr^2\omega' \cos^2(\phi' - \pi)$$

其中 (1 分)

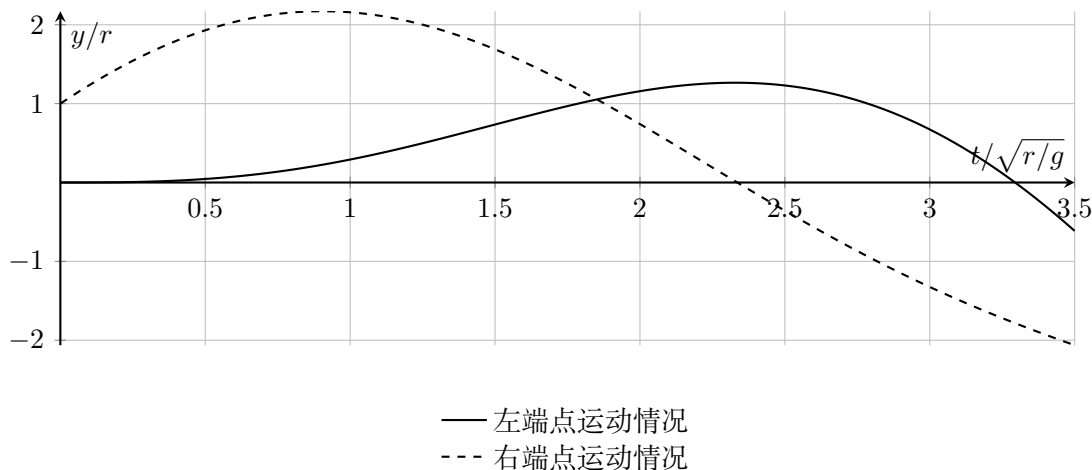
$$\dot{y}_c = \sqrt{v_c^2 + 2gr\left(\frac{1}{2} - \sin(\phi' - \pi)\right)} = -1.1110\sqrt{gr}$$

解得 (1 分)

$$\omega' = -0.5964\sqrt{\frac{g}{r}} < 0$$

因此其不可能再次翻面，以反面朝上。(1 分)

[补充内容]



当大风吹过一狭长的湖面时，我们会发现湖两端的水面出现了明显的、周期性的高度变化。在本题中，我们将这一问题转化为水在一个 2 维长方体缸中的运动。

我们以如下形式描述液体的运动。我们认为液体的运动相对于缸子的尺寸是微小的。对于静止时位置为 $\mathbf{r} = (x, y)$ 的液体质点，其在 t 时刻的位移为 $\psi(\mathbf{r}, t)$ ，这被称为液体运动的拉格朗日描述法。现在假设缸子的水平长度为 L ，水的深度为 h 。

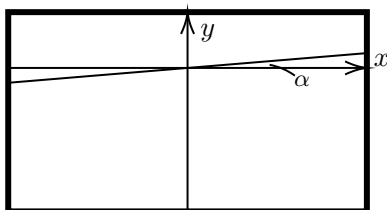
1. 不妨先进行经典模型的计算，在这一模型中，我们类比弹簧振子的能量 $E = \frac{1}{2}m_{\text{eff}}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_{\text{eff}}q^2$ 。我们在计算动能时，直接考虑质心动能，不考察相对质心动能。同时水面为一直线。计算湖振角频率。
2. 现在我们来详细计算流体的运动。坐标系以湖面中心为原点，向上为 y 正方向，向右为 x 正方向，这意味着缸子的边界为 $x = \pm \frac{L}{2}, y = h$ 。
 - i. 我们假设液体的密度不变，满足质量守恒；同时液体在流动时不产生漩涡。试着写出 ψ 在空间上需要满足的两个方程（方程中不得含有与时间有关的偏导数）。
 - ii. 现在我们猜测行波解 $\psi_y = f(y)\sin(kx)\cos(\omega t + \phi)$ ，试着表示出 ψ_x 的表达式（选择合适的条件，绕开 $f(y)$ 的求解）。
 - iii. 得到 $f(y)$ 的表达式。请特别注意问题中隐含的边界条件！可以保留一个待定参数。
 - iv. 考察位于液体表面的一个液体质点，液体质点会受到重力与垂直液体表面的支持力，列出其运动方程，并且求解 ω ，与第 1 小问结果进行对比。

[解答]

1. (9 分)

假设水面的倾角为 α ，并且 $\alpha \ll 1$ 。因此水面表达式为 (1 分)

$$y = x \tan \alpha \approx \alpha x$$



因此其质心的位置 (2 分)

$$x_c = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} x(h + \alpha x) dx}{Lh} = \frac{\alpha L^2}{12h}$$

$$y_c = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2}(h + \alpha x)^2 dx}{Lh} = -\frac{1}{2}h + \frac{L^2 \alpha^2}{24h}$$

因此有 (2 分)

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}_c^2 + \mathcal{O}(\alpha^4) \approx \frac{mL^4}{288h^2}\dot{\alpha}^2$$

$$E_p = mgy_c = -\frac{1}{2}mgh + \frac{mgL^2\alpha^2}{24h}$$

因此可以得到 (2 分)

$$m_{\text{eff}} = \frac{mL^4}{144h^2}, k_{\text{eff}} = \frac{mgL^2}{12h}$$

因此有 (2 分)

$$\omega_{\text{approx}} = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}} = \sqrt{12 \frac{gh}{L^2}}$$

2. (31 分)

i. (2 分) 显然有 (2 分)

$$\nabla \cdot \psi = 0, \quad \nabla \times \psi = 0$$

ii. (2 分) 利用质量守恒, 有 (1 分)

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y} = -\frac{df}{dy} \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$$

两边同时积分可以得到 (1 分)

$$\psi_x = \frac{1}{k} \frac{df}{dy} \cos(kx) \cos(\omega t + \phi)$$

iii. (13 分) 利用无旋条件, 有 (1 分)

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial y} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$$

因此有 (2 分)

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dy^2} \cos(kx) = kf(x) \cos(kx) \Rightarrow \frac{d^2 f}{dy^2} = k^2 f(x)$$

其通解为 (2 分)

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$$

值得注意的是 $y = h$ 时, 有 $\psi_y = 0$, 也就是 $f(h) = 0$, 因此可以得到 (3 分)

$$f(y) = A \sinh(k(h-y))$$

同时, 当 $x = \pm L/2$ 时, 有 $\psi_x = 0$, 也就是 (1 分)

$$\cos\left(k \frac{L}{2}\right) = 0$$

。值得注意的是, 水面在湖振时不存在多个最高点, 应是一条单调的曲线。所以 (2 分)

$$k \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{\pi}{L}$$

因此有 (2 分)

$$f(y) = A \sinh\left(\frac{\pi}{L}(h-y)\right)$$

iv. (14 分) 考察表面处两个相邻的质点 $(x, 0), (x + dx, 0)$, 因此此处液面的斜率为 (2 分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi_y(x+dx) - \psi_y(x)}{dx + \psi_x(x+dx) - \psi_x(x)} = \frac{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial \psi_x}{\partial x}} \approx \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$$

因此其在表面所受支持力分量为 (2 分)

$$N_x = -N \frac{\frac{\partial \psi_y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}^2}} \approx -N \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \mathcal{O}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x}^2\right)$$

$$N_y = N \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \psi_y^2}{\partial x}}} \approx N + \mathcal{O}\left(\frac{\partial \psi_y^2}{\partial x}\right)$$

于是有 (2 分)

$$m\ddot{\psi}_x = -N \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, m\ddot{\psi}_y = -mg + N$$

因此有 (2 分)

$$\ddot{\psi}_x \approx -g \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \Big|_{y=0}$$

于是有代入 (1 分) ψ_x, ψ_y 表达式得到

$$-A\omega^2 \cosh(kh) \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) = -gk \sin(kx) \sinh(kh) \cos(\omega t + \phi)$$

因此解得 (3 分)

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}$$

当 $h \ll L$ 时有 (1 分)

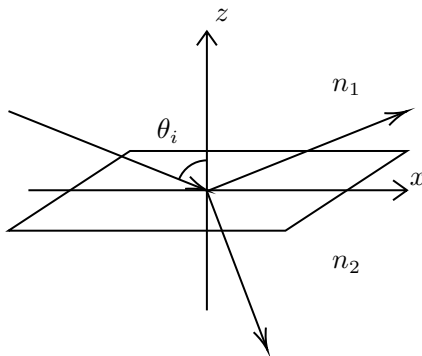
$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 gh}{L^2}} \approx \sqrt{9.87 \frac{gh}{L^2}}$$

第一问中的形式在 $h \ll L$ 的条件下相同，只有在系数上有差别。实际的频率比估算得到的更小。 (1 分)

三. (55 分) 你真的会隐失波吗?

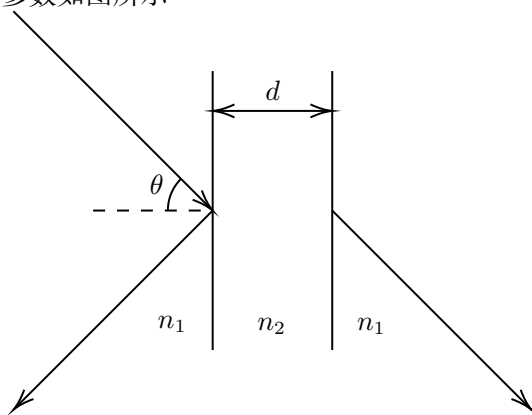
光线在全反射时，在几何光学中我们认为透射光是不存在的。然而，在波动光学中，透射光以一种独特的形式存在。本题中将会考察有关隐失波的具体计算。(本题中所有光场计算的最后表达式可以忽略时间项 $e^{-i\omega t}$)

1. 三维空间中充满两种均匀介质。在 $z > 0$ 的区域，折射率为 n_1 ，其余区域折射率为 n_2 ，并且有 $n_2 < n_1$ 。现在有一电磁波平面波从 $z > 0$ 的区域入射，入射角为 θ_i ，其在真空中的波长为 λ 。



- i. 若入射光为 s 光，振幅为 $\tilde{E}_{is}$ ，求反射光与透射光表达式。
 - ii. 若入射光为 p 光，振幅为 $\tilde{E}_{ip}$ ，求反射光与透射光表达式。
 - iii. 当 $\sin \theta_i > \frac{n_2}{n_1}$ 时，分别对 s 光与 p 光给出透射光表达式，并且适当用文字描述这一特殊的光场。
 - iv. 我们知道全反射时，光线全被反射，如何解释这一透射光场的能量来源？试着使用坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ 解释这一问题。
2. 隐失波显微镜。当我们将另一片介质片靠近透射光场时，介质平面开始有能量流出。这一能量流出与两介质界面距离十分敏感，因此我们可以利用这一物理原理制作显微镜。

- i. 我们可以将这种显微镜类比为法布里珀罗干涉仪。若入射光为 s 光，入射角为 θ ，振幅为 $\tilde{E}_i$ 。计算其透射光场振幅 $\tilde{E}_t$ 与入射角 θ 的关系。参数如图所示：



- ii. 当 $\sin \theta > \frac{n_2}{n_1}$ 时，重新给出透射光场 $\tilde{E}_t$ 的表达式。

- iii. 若透射能量与反射能量各占一半，且 $\theta = \frac{\pi}{4}, n_1 = 1.5, n_2 = 1$ ，给出 d/λ 的值。

提示：s 与 p 光分别取自德文中 senkrecht（垂直）与 parallel（平行）两个单词，即与入射面垂直或平行。

[解答]

1. (37 分)

- i. (21 分) 由麦克斯韦方程组 (1 分)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

而在平面波中 $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ ，因此有振幅大小 (1 分)

$$H_s = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_s \propto n E_s$$

设入射、反射、透射光为 (3 分)

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \tilde{E}_{is} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{E}}_r = \tilde{E}_{rs} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{E}}_t = \tilde{E}_{ts} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{y}}$$

对应 (3 分)

$$\tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{E}_{is} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \frac{\mathbf{k}_i \times \hat{\mathbf{y}}}{\mu_0 \omega}, \tilde{\mathbf{H}}_r = \tilde{E}_{rs} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \frac{\mathbf{k}_r \times \hat{\mathbf{y}}}{\mu_0 \omega}, \tilde{\mathbf{H}}_t = \tilde{E}_{ts} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \frac{\mathbf{k}_t \times \hat{\mathbf{y}}}{\mu_0 \omega}$$

其中 (3 分)

$$k_i = k_r = \frac{2\pi n_1}{\lambda}, k_t = \frac{2\pi n_2}{\lambda}$$

我们知道 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 切向连续，因此有 (2 分)

$$\begin{cases} \tilde{E}_{is} + \tilde{E}_{rs} = \tilde{E}_{ts} \\ n_1 \tilde{E}_{is} \cos \theta_i - n_1 \tilde{E}_{rs} \cos \theta_r = n_2 \tilde{E}_{ts} \cos \theta_t \end{cases}$$

代入 (2 分)

$$\theta_r = \theta_i, \cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2} \right)^2}$$

有 (2 分)

$$\tilde{E}_{rs} = \tilde{E}_{is} \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}, \quad \tilde{E}_{ts} = \tilde{E}_{is} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

同时有 (2 分)

$$\mathbf{k}_r = \frac{2\pi n_1}{\lambda} (\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i), \quad \mathbf{k}_t = \frac{2\pi n_2}{\lambda} (\sin \theta_t, 0, -\cos \theta_t)$$

因此有 (2 分)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_r &= \tilde{E}_{is} \frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} e^{i \frac{2\pi n_1}{\lambda} (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_t &= \tilde{E}_{is} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 x \sin \theta_i - z \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i})} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

ii. (6 分) 同理可以得到 (2 分)

$$\begin{cases} \tilde{E}_{ip} \cos \theta_i - \tilde{E}_{rp} \cos \theta_r = \tilde{E}_{tp} \cos \theta_t \\ n_1 \tilde{E}_{ip} + n_1 \tilde{E}_{sp} = n_2 \tilde{E}_{tp} \end{cases}$$

因此可以得到 (2 分)

$$\tilde{E}_{rp} = \tilde{E}_{ip} \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}}, \quad \tilde{E}_{tp} = \tilde{E}_{ip} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}}$$

仿照前问可以得到 (2 分)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_r &= \tilde{E}_{ip} \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}} e^{i \frac{2\pi n_1}{\lambda} (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} (-\cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \\ \tilde{\mathbf{E}}_t &= \tilde{E}_{ip} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 x \sin \theta_i - z \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i})} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{aligned}$$

iii. (4 分) 当 (2 分) $\sin \theta_i > \frac{n_2}{n_1}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{ts} &= \tilde{E}_{is} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} n_1 x \sin \theta_i} e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_{tp} &= \tilde{E}_{ip} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + i n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2 - 1}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} n_1 x \sin \theta_i} e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} \left(i \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)^2 - 1} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{aligned}$$

可以看到光场在 $-z$ 方向上指数衰减, 必须值得注意向下是 z 的负方向! 由于这个区间只有波长量级, 因此我们在几何光学中不需要考察这一部分。(2 分) 由于其随着 z 向下增加而消失, 故得名隐失波。

iv. (6 分) 由 i 问可知, (1 分)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\mu_0 \omega}$$

因此有（值得注意 $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ ）（2 分）

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{k} = \frac{|\text{Re } \tilde{\mathbf{E}}|^2}{\mu_0 \omega} \text{Re } \tilde{\mathbf{k}}$$

对于隐失波，有（1 分）

$$\text{Re } \tilde{\mathbf{k}} = \left(\frac{2\pi n_1}{\lambda}, 0, 0 \right)$$

可以看到坡印廷矢量平行于界面，因此全反射时确实没有能量向下流动，能量来源实际上是界面左侧的无穷远处。（2 分）

2.（18 分）

i.（11 分）设介质振幅反射、透射率为 r, t, r', t' （前者为 $n_1 \rightarrow n_2$ ，后者为 $n_2 \rightarrow n_1$ ）。可以使用在介质层中方反复反射的光线计算。折射光线角度为（1 分）

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \phi$$

容易计算得到两条相邻反射光的相位差为（2 分）

$$\delta = \frac{4n_1\pi}{\lambda} d \cos \phi = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}$$

因此透射光为（2 分）

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= tt' e^{i\delta/2} \tilde{E}_i \\ \tilde{E}_1 &= tt' r'^2 e^{(1+1/2)i\delta} \tilde{E}_i \\ \tilde{E}_2 &= tt' r'^4 e^{(2+1/2)i\delta} \tilde{E}_i \\ &\dots \\ \tilde{E}_n &= tt' r'^{2n} e^{(n+1/2)i\delta} \tilde{E}_i \end{aligned}$$

求和可以得到（2 分）

$$\tilde{E}_t = tt' e^{i\delta/2} \tilde{E}_i \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}}$$

因此有（2 分）

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \right)^2 \\ tt' &= 1 - r^2 = \frac{4n_1 \cos \theta \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{\left(n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)^2} \end{aligned}$$

代入得到（2 分）

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= \frac{4n_1 \cos \theta \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} e^{i\delta/2}}{\left(n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)^2 - \left(n_1 \cos \theta - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)^2 e^{i\delta}} \tilde{E}_i \\ &= \frac{2n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \cos \theta}{2n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right) - i(n_2^2 + n_1^2 \sin^2 2\theta) \sin \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)} \end{aligned}$$

ii. (2 分) 利用 $\cos(i\theta) = \cosh(\theta)$, $\sin(i\theta) = i \sinh(\theta)$ 可以得到 (2 分)

$$\tilde{E}_t = \frac{2n_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2} \cos \theta}{2n_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2} \cosh\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}\right) - i(n_2^2 + n_1^2 \sin 2\theta) \sinh\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}\right)} \tilde{E}_i$$

iii. (5 分) 代入数值有 (2 分)

$$\tilde{E}_t = \frac{(0.72 + 0.96i)e^{-\frac{\sqrt{2}\pi d}{2\lambda}}}{1 - (0.28 - 0.96i)e^{-\frac{\sqrt{2}\pi d}{\lambda}}} \tilde{E}_i$$

于是由 (1 分)

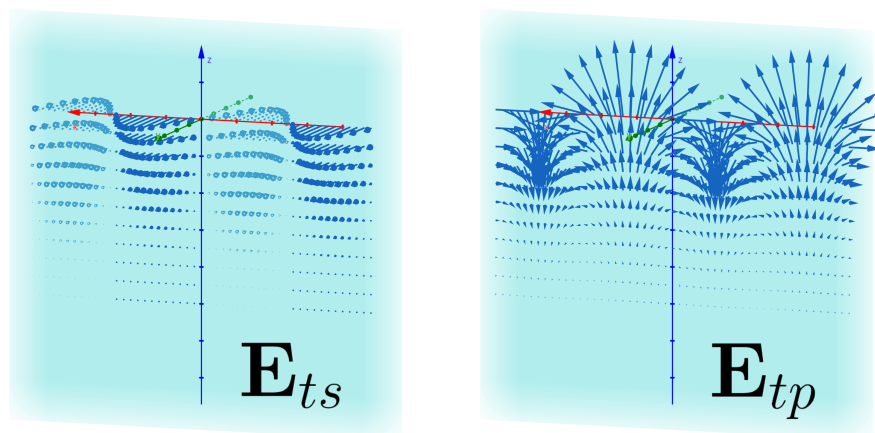
$$|\tilde{E}_t| = \frac{\sqrt{2}}{2} |\tilde{E}_i|$$

解得 (2 分)

$$d = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tanh^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \lambda \approx 0.25606\lambda$$

[补充内容]

隐失波图像



四. (40 分) 电阻杂质小球

向电导率为 σ_1 的介质中掺入电导率为 σ_2 的杂质小球。杂质小球的数量密度为 n ，半径为 R 。问掺杂后的介质的等效电导率为多大？（精确到 n 的一阶影响）

[解答]

设导体在外场 E_0 下。在掺杂后的导体中，考察一个掺杂小球，其表面处电流法向分量连续。因此有 (4 分)

$$\sigma_1 E_{n,\text{out}} = \sigma_2 E_{n,\text{in}}$$

可以看到与介质球中的电场连续性条件相似，不妨设球体表面电荷密度为 (4 分)

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

考察 $\theta = 0$ 的点，此处电场方向就是法向，于是 (4 分)

$$E_{n,\text{out}} = E_0 + \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}, \quad E_{n,\text{in}} = E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$

代入解得 (4 分)

$$\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2}$$

对应的偶极矩大小为 (4 分)

$$p = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} E_0$$

由于 n 很小，我们可以认为两个导体球之间没有影响，偶极矩大小与单个的偶极矩无异。因此导体极化率为 (4 分)

$$P = np = 4\pi R^3 \varepsilon_0 n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} E_0$$

因此可以得到相对介电常数 (4 分)

$$\varepsilon_r = \frac{P}{\varepsilon_0 E_0} + 1 = 1 + 4\pi R^3 \varepsilon_0 n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2}$$

所以此时有导体内部的电场 (E_0 与退极化场之和) (4 分)

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \approx E_0 \left(1 - 4\pi R^3 \varepsilon_0 n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

因此有 (4 分)

$$J = \sigma_1 E = \sigma_1 \left(1 - 4\pi R^3 \varepsilon_0 n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) E_0$$

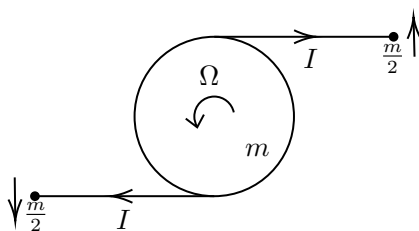
所以得到 (4 分)

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_1 \left(1 - 4\pi R^3 \varepsilon_0 n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

五. (40 分) Yo-Yo 消旋

航天器姿态控制技术中的 Yo-Yo 消旋法是在运载火箭与人造卫星二体分离之后甩出对称缠绕在星体上的链绳尾端安装的配重，从而使星体的转动惯量快速增大，由于角动量守恒，星体转速下降。Yo-Yo 消旋法优势在于不需要消耗燃料能量。

已知星体是一个半径为 R ，质量为 m 的薄壁圆柱，而两颗配重的质量为 $m/2$ 。现在提出一个利用地磁场导致的额外安培力矩节省链绳的方案：一束电流 I 由切点流向配重，它的大小正比于链绳中点在垂直与链绳方向的速度，比例系数为 ε 。已知地磁场的磁感应强度为 B ，垂直纸面向里，星体初始转动角速度为 Ω_0 。



1. 如果没有地磁场，求出绳子展开的速度（即单位时间离开圆柱的绳子长度）。并且给出星体停止转动时，展开的绳

子长度。

2. 现在有一极弱的地磁场，试问此时为了让星体静止，绳子展开的长度减少了多少？（近似到 B 的一阶）

提示：

$$\int \frac{x^3}{a^2 + x^2} dx = -\frac{a^2 \ln(a^2 + x^2)}{2} + \frac{x^2}{2} + C, \quad \int \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{a^2}{2a^2 + 2x^2} + \frac{\ln(a^2 + x^2)}{2} + C$$

[解答]

1. (17 分)

设绳子展开部分的长度为 l ，则展开速度为 $\frac{dl}{dt}$ 。在展开的过程中，角动量、动能守恒，因此有，质点的位置与速度为：(2 分)

$$\mathbf{r} = (l, R)$$

$$\mathbf{v} = \left(-R\Omega, l\Omega + l\frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)$$

这里 x 轴平行于绳， y 轴垂直于绳。因此体系的能量与角动量为：(4 分)

$$E = \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 + \frac{1}{2}m \left(R^2\Omega^2 + l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)^2 \right) = m \left(R^2\Omega^2 + \frac{1}{2}l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)^2 \right)$$

$$L = mR^2\Omega + m \left(l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right) + R^2\Omega \right) = m \left(l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right) + 2R^2\Omega \right)$$

利用能量与角动量守恒，可以得到：(4 分)

$$R^2\Omega^2 + \frac{1}{2}l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)^2 = R^2\Omega_0^2$$

$$l^2 \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right) + 2R^2\Omega = 2R^2\Omega_0$$

解得 (4 分)

$$\frac{dl}{dt} = \Omega_0 R, \quad \Omega = \frac{2R^2 - l^2}{2R^2 + l^2} \Omega_0$$

因此当 $\Omega = 0$ 时，有 (3 分)

$$l = \sqrt{2}R$$

2. (23 分)

绳中点法向速度为 (2 分)

$$v' = \frac{l}{2} \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)$$

因此有 (2 分)

$$I = \frac{\varepsilon l}{2} \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right)$$

对应安培力大小为 (2 分)

$$\mathbf{F}_A = \left(0, \frac{B\varepsilon l^2}{2} \left(\Omega + \frac{1}{R}\frac{dl}{dt} \right) \right)$$

安培力对体系的力矩为 (2 分)

$$\Gamma = \int \mathbf{r} \times B I \hat{\mathbf{y}} dx = \frac{B\varepsilon l^3}{4} \left(\Omega + \frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right)$$

因此有 (2 分)

$$\frac{dL}{dt} = 2 \cdot \frac{B\varepsilon l^3}{4} \left(\Omega + \frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = 2 \cdot \frac{B\varepsilon l^3}{4} \left(\Omega + \frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right)^2$$

在对 $\frac{dl}{dt}$ 的一阶计算下，括号内部的内容可以直接用零阶近似，也就是前问算出的结果。(6 分)

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{B\varepsilon}{2} \int l^3 \left(\Omega + \frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right) dt \\ &= \frac{B\varepsilon}{2} \int \frac{4R^2 l^3}{2R^2 + l^2} \Omega_0 dt \\ &\stackrel{\underline{dl=\Omega_0 R dt}}{=} 2B\varepsilon R \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{l^3}{2R^2 + l^2} dl \\ &= 2B\varepsilon R^3 (1 - \ln 2) \\ \Delta E &= \frac{B\varepsilon}{2} \int l^3 \left(\Omega + \frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right)^2 dt \\ &= \frac{B\varepsilon}{2} \int \left(\frac{4R^2 \Omega_0}{2R^2 + l^2} \right)^2 l^3 dt \\ &= 8B\varepsilon R^3 \Omega_0 \int_0^{\sqrt{2}R} \frac{l^3}{(2R^2 + l^2)^2} dl \\ &= 4B\varepsilon R^3 \Omega_0 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

因此在 $\omega = 0$ 时: (4 分)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{1}{R} \frac{dl}{dt} \right)^2 &= R^2 \Omega_0^2 + \frac{4B\varepsilon R^3 \Omega_0}{m} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{l^2}{R} \frac{dl}{dt} &= 2R^2 \Omega_0 + \frac{2B\varepsilon R^3}{m} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

因此解得 (2 分)

$$l = R \frac{\sqrt{2} \left(1 + \frac{B\varepsilon R}{m\Omega_0} (1 - \ln 2) \right)}{\sqrt{1 + \frac{4B\varepsilon R}{m\Omega_0} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)}} \approx \sqrt{2} R \left(1 + \frac{B\varepsilon R}{m\Omega_0} (2 - 3 \ln 2) \right)$$

即减少了 (1 分) $\sqrt{2} \frac{B\varepsilon R^2}{m\Omega_0} (3 \ln 2 - 2)$ 。

六. (40 分) 大气缸的绝热过程

我们考察一个绝热大柱形气缸，竖直放置在重力场（重力加速度为 g ）中，其高度为 h ，截面积为 S 。在气缸中，我们放入 N 个氦气原子，氦原子的质量为 m 。

1. 当气缸中气体处于 T 的温度时，求出高度 x 处气体分子的数密度。
2. 接前问，计算气体分子的总内能。

3. 现在我们将大气缸的上端修改为一可移动的活塞，并将气缸放在完全真空的环境中，试问活塞的质量应为多少才能保持气柱的高度不变？如果我们在活塞上倒沙子，应该倒多少才能使活塞下降到 $h/2$ 的位置？

提示：解方程前作代换 $\xi = \frac{mgh}{k_B T}$ ，最后结果可以包含一个只含 ξ 与未知量的超越方程。

$$\int \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} dx = -\frac{xe^x}{e^x - 1} + \ln(e^x - 1) + C$$

4. 接上问，若 $\xi = 1$ ，则求出沙子质量为多少。

[解答]

1. (14 分)

对于高度在 $x \sim x + dx$ 的薄层，有受力平衡：(2 分)

$$p(x)A = p(x + dx)A + n(x)Adxmg$$

因此有 (2 分)

$$\frac{dp}{dx} = -nmg$$

代入 (2 分)

$$p = nk_B T$$

可以得到 (2 分)

$$\frac{dn}{dx} = -n \frac{mg}{k_B T}$$

解得 (2 分)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgx}{k_B T}\right)$$

归一化系数为 (2 分)

$$Z = \int_0^h \exp\left(-\frac{mgx}{k_B T}\right) S dx = \frac{k_B T S}{mg} \left[1 - \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right)\right]$$

因此有 (2 分)

$$n(x) = \frac{Nmg}{k_B T S} \frac{\exp\left(-\frac{mgx}{k_B T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right)}$$

2. (6 分)

我们可以将内能分为动能与势能，总动能的计算是容易的，为 (2 分)

$$E_k = \frac{3}{2} N k_B T$$

接下来计算总势能，

[方法一] 使用积分计算总势能 (2 分)

$$E_p = \int_0^h mgx \cdot n(x) S dx = N k_B T - N \frac{mgh}{\exp\left(\frac{mgh}{k_B T}\right) - 1}$$

[方法二] 使用配分函数计算总势能 (2 分)

$$E_p = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta mgh)] \right) = Nk_B T - N \frac{mgh}{\exp\left(\frac{mgh}{k_B T}\right) - 1}$$

因此有 (2 分)

$$U = \frac{5}{2} Nk_B T - N \frac{mgh}{\exp\left(\frac{mgh}{k_B T}\right) - 1}$$

3. (18 分)

对于高度为 h 处, 有 (2 分)

$$n(h) = \frac{Nmg}{k_B T S \left[\exp\left(\frac{mgh}{k_B T}\right) - 1 \right]}$$

因此对于活塞有 (2 分)

$$Mg = n(h)k_B T S$$

$$M = \frac{nk_B T S}{g} = \frac{Nm}{\exp\left(\frac{mgh}{k_B T}\right) - 1}$$

当活塞下降 dx 时, 我们有热力学第一定律: (2 分)

$$dQ = p(h)dV + dU = 0$$

为了求解这个微分方程, 我们可以将较为复杂的内能表达式改写为 (2 分)

$$U = \frac{5}{2} Nk_B T - p(h)Sh$$

因此有 (2 分)

$$\frac{5}{2} Nk_B dT - Sh d(p(h)) = 0$$

令 $\xi = \frac{mgh}{k_B T}$, 有 $T = \frac{mgh}{k_B \xi}$, $p(h) = \frac{Nmg}{S(e^\xi - 1)}$, 代入可以得到 (2 分)

$$\frac{5}{2} d\left(\frac{h}{\xi}\right) - h d\left(\frac{1}{e^\xi - 1}\right) = 0$$

分离变量可以得到 (2 分)

$$\frac{dh}{h} = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{2}{5} \frac{\xi e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} \right) d\xi$$

两边积分可以得到 (2 分)

$$\ln \frac{1}{2} = \ln \frac{\xi'}{\xi} + \frac{2}{5} \left(\frac{\xi' e^{\xi'}}{e^{\xi'} - 1} - \ln(e^{\xi'} - 1) \right) - \frac{2}{5} \left(\frac{\xi e^\xi}{e^\xi - 1} - \ln(e^\xi - 1) \right)$$

于是可以得到沙子的质量为 (2 分)

$$M_{\text{sand}} = Nm \left(\frac{1}{e^{\xi'} - 1} - \frac{1}{e^\xi - 1} \right)$$

4. (2 分)

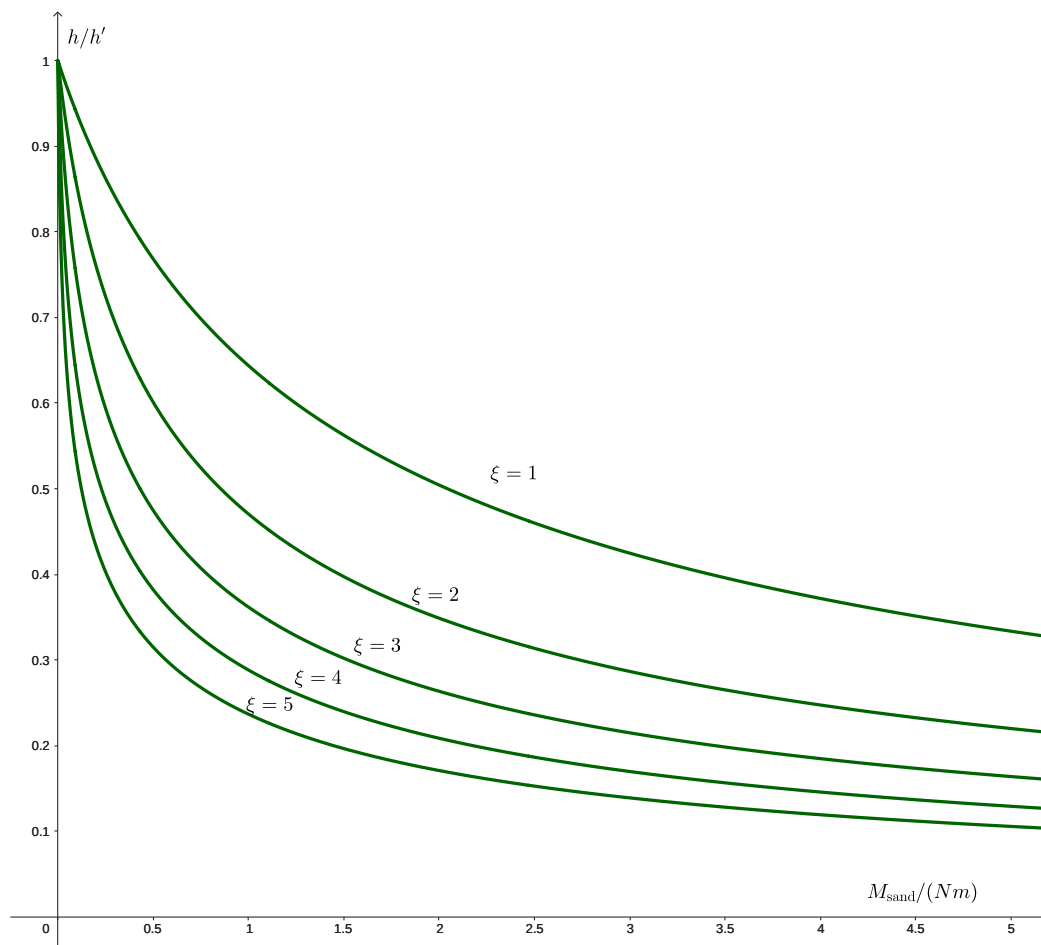
代入 $\xi = 1$ 可以得到 (1 分)

$$\xi' = 0.3227$$

代入可以得到 (1 分)

$$M_{\text{sand}} = 2.044 Nm$$

[补充内容]



七. (65 分) 奇妙的算符运算

量子力学中，处处可见算符的计算，本题中我们将会考察其在一个特例中的运用——简谐振子。

1. 算符小练习

首先，让我们通过几个例子了解什么是算符。算符，可以认为是一个机器，对一个函数进行操作之后会吐出来一个新的函数，例如求导的过程就可以使用算符描述：

$$\hat{D} \equiv \frac{d}{dx}, \quad \hat{D}f(x) = \frac{df}{dx}$$

如果我们有二个算符 $\hat{A}, \hat{B}$ ，那么我们可以有

$$\hat{A}f(x) + \hat{B}f(x) = (\hat{A} + \hat{B})f(x)$$

如果我们想要对一个函数反复操作多个函数，则可以在函数前不断叠放算符，如 n 阶导：

$$\underbrace{\hat{D}(\cdots(\hat{D}(\hat{D}(\hat{D}f(x))))\cdots)}_{n\uparrow} = \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \text{也可以表示为 } \hat{D}^n f(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

我们可以将函数前的算符与函数自身分离开来，将算符看成一个整体，就如数学中的复合函数。必须要注意的是，算符在进行复合计算时，应从右向左算，且对于一般的不同的算符，不存在交换律，不过存在结合律与分配律。

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}, \quad \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}, \quad \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$$

i. 考察微分算符 $\hat{D} \equiv \frac{d}{dx}$ ，试着计算 $e^{\hat{D}}f(x)$ 。

提示：

$$e^{\hat{D}} \equiv 1 + \hat{D} + \frac{\hat{D}^2}{2!} + \frac{\hat{D}^3}{3!} + \frac{\hat{D}^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

ii. 考察算符 $\hat{D} \equiv \frac{d}{dx}$ 与 $\hat{x} \equiv x$ (如果你不知道 $\hat{x}$ 对 $f(x)$ 的作用是什么，写下 “ $\hat{x}f(x)$ ”，并将 $\hat{x}$ 修改为 x ，继而一目了然得到 $\hat{x}f(x) = xf(x)$)，计算 $\hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D}$ 。

提示：算符的计算化简很容易出错，推荐方法是将其作用在一个函数上，最后再将函数拿走。

2. 算符量子力学

通常，我们在研究量子力学时，需要求解薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$$

通过分离变量 $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$ ，我们可以轻松得到定态薛定谔方程（划线公式）

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad \varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

其中 E 即为粒子的能量。通过对方程求解之后，我们可以得到一系列可能的 ψ_n ，这些对应的分离的能量 E_n ，这也就是我们常说的能级。我们能够使用算符表示这一方程：

$$\hat{x} \equiv x, \quad \hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

我们现在需要理解波函数 Ψ 告诉我们了什么，实际上 $|\Psi|^2$ 表征了粒子在 x 轴上位置的概率分布，即在 $x \sim x + dx$ 处找到粒子的概率为 $|\Psi(x)|^2 dx$ ，因此我们可以知道波函数应当满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = 1$$

于是我们可以计算粒子的平均位置与动量（在这里就不再推导了，直接给出结论）：

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{x} \Psi dx, \quad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{p} \Psi dx$$

对于任意物理量 $\hat{Q}$ ，如果我们想要得到其平均值，则有

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{Q} \Psi dx$$

值得注意的是，由于上式中 $|\varphi(t)|^2 = 1$ ，则上述所有表达式将 Ψ 换为 ψ 都仍然是成立的¹。

- i. 对于角频率 ω ，振子质量为 m 的简谐振子，平衡位置为 0，写出势能函数 $V(x)$ 。
- ii. 现在我们定义升降算符

$$\hat{a}_{\pm} = \mp i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x}$$

试着计算 $\hat{a}_+\hat{a}_-, \hat{a}_-\hat{a}_+$ ，并使用 $\hat{H}$ 代换。

- iii. 考察满足 $\hat{H}\psi = E\psi$ 的态 ψ ，试着计算 $\hat{H}(\hat{a}_+\psi)$ 与 $\hat{H}(\hat{a}_-\psi)$ ，你发现了什么？由此对“升降”算符名字进行评价。
(提示：结果要往薛定谔方程形式上凑。)
- iv. 我们考察体系的最低能级 E_0 ，其对应波函数为 ψ_0 。作为基态波函数，其下方没有可能的波函数，也就是 $\hat{a}_-\psi_0 = 0$ ，求解 ψ_0 的能量，由此得到能级 E_n 的表达式。
(提示：使用定态薛定谔方程，不允许求解微分方程！)
- v. 证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* \hat{a}_{\pm} g dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_{\mp} f)^* g dx$$

对于波函数，为了满足平方可积的性质，一般都有，

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

(提示：使用分部积分法： $\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = fg|_a^b - \int_a^b g \frac{df}{dx} dx$ 。)

- vi. 计算 $\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n, \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n$ 。由此，计算 $\hat{a}_+\psi_n = c_n\psi_{n+1}, \hat{a}_-\psi_n = d_n\psi_{n-1}$ 中的 c_n, d_n 。
(提示：试着计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_{\pm}\psi_n)^* (\hat{a}_{\pm}\psi_n) dx$ 。)
- vii. 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(提示：计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* (\hat{a}_+\hat{a}_-)\psi_n dx$ 与利用 (v.) 得到的等价形式。)

- viii. 我们不妨来验证不确定性关系 $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ ，这里 $\sigma_Q = \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}$ ，即标准差。计算 ψ_n 对应的 σ_x, σ_p ，验证不确定性关系。
(提示：将 $\hat{x}, \hat{x}^2, \hat{p}, \hat{p}^2$ 用 $\hat{a}_{\pm}$ 表示，再利用前几问所得结果，不需要真正计算积分。)

[解答]

1.

i. 根据题意，有

$$e^{\hat{D}} f(x) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!} f''(x) + \frac{1}{3!} f'''(x) + \cdots$$

作替换 $1 \rightarrow x+1-x$,

$$e^{\hat{D}} f(x) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \frac{(x+1-x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(x+1-x)^3}{3!} f'''(x) + \cdots = f(x+1)$$

¹这只在 $\Psi(x, t)$ 中只包含单一能量 $\psi(x)$ 时成立，若有多个则替换不再正确，会出现交叉项。

因此我们发现 $e^{\hat{D}}$ 是一个位移算符。

ii. 计算是容易的

$$(\hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D})f(x) = \frac{d[xf(x)]}{dx} - x\frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot \frac{dx}{dx} + x\frac{df(x)}{dx} - x\frac{df(x)}{dx} = f(x)$$

因此

$$\hat{D}\hat{x} - \hat{x}\hat{D} = 1$$

2.

i. 弹簧的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

则有简谐振子的势能为

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ii. 根据 (1.ii.) 题我们可以得到

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

因此我们可以计算得到

$$\begin{aligned}\hat{a}_+\hat{a}_- &= \left(-i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}\right) \left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}\right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) + \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

同理有，

$$\begin{aligned}\hat{a}_-\hat{a}_+ &= \left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}\right) \left(-i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}\right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) - \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

代入 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ ，有

$$\hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}, \quad \hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}$$

iii. 利用 (2.ii.) 可以得到

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)$$

因此有

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(\hat{a}_+\psi) &= \hbar\omega \left(\hat{a}_+\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\hat{a}_+ \right) \psi \\
 &= \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\hat{a}_+ \right) \psi \\
 &= \hat{a}_+\hat{H}\psi + \hbar\omega\hat{a}_+\psi \\
 &= (E + \hbar\omega)(\hat{a}_+\psi)
 \end{aligned}$$

同理

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2} \right)$$

因此有

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(\hat{a}_-\psi) &= \hbar\omega \left(\hat{a}_-\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\hat{a}_- \right) \psi \\
 &= \hbar\omega \left(\hat{a}_- \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}\hat{a}_- \right) \psi \\
 &= \hat{a}_-\hat{H}\psi - \hbar\omega\hat{a}_-\psi \\
 &= (E - \hbar\omega)(\hat{a}_-\psi)
 \end{aligned}$$

可以看到当能量为 E 的态 ψ 在被作用升降算符之后，能量增加或减少了 $\hbar\omega$ ，故得“升降”之名。

iv. 我们直接使用定态薛定谔方程

$$\begin{aligned}
 \hat{H}\psi_0 &= \hbar\omega \left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) \psi_0 \\
 &= \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0
 \end{aligned}$$

因此直接可以得到

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

根据 (2.iii.) 我们可以得到，对 ψ_0 不断作用升算符可以得到更高的能级，每一个能级之间相差 $\hbar\omega$ ，所以有

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

v. 我们将 $\hat{a}_\pm$ 拆为 $\hat{p}$ 部分与 $\hat{x}$ 部分分开证明。 $\hat{x}$ 部分的证明是显然的，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* x g dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x f)^* g dx$$

因为 x 是实数， $x = x^*$ 。对于 $\hat{p}$ 的部分，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* \frac{dg}{dx} dx = f^* g \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df^*}{dx} g dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{df}{dx} \right)^* g dx$$

所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* \left(\mp \frac{\hbar \frac{d}{dx}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \right) g dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\pm \frac{\hbar \frac{d}{dx}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \right) f \right]^* g dx$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* \hat{a}_{\pm} g dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_{\mp} f)^* g dx$$

得证。

vi. 计算是容易的，只需要利用 $\hat{H}\psi_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\psi_n$

$$\hat{a}_+ \hat{a}_- \psi_n = \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \psi_n = n\psi_n$$

$$\hat{a}_- \hat{a}_+ \psi_n = \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = (n+1)\psi_n$$

所以我们可以得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_+ \psi_n)^* (\hat{a}_+ \psi_n) dx &= |c_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n+1}^* \psi_{n+1} dx = |c_n|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \hat{a}_- \hat{a}_+ \psi_n = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_n dx = n+1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_- \psi_n)^* (\hat{a}_- \psi_n) dx &= |d_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n-1}^* \psi_{n-1} dx = |d_n|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \hat{a}_+ \hat{a}_- \psi_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_n dx = n \end{aligned}$$

因此有

$$c_n = \sqrt{n+1}, d_n = \sqrt{n}$$

vii. 根据 (2.vi.) 可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* (\hat{a}_+ \hat{a}_-) \psi_n dx = n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx$$

根据 (2.v.) 可以得到等价形式，并计算

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* (\hat{a}_+ \hat{a}_-) \psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_- \psi_m)^* (\hat{a}_- \psi_n) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_+ \hat{a}_- \psi_m)^* \psi_n dx = m \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx$$

由此可以得到

$$(n-m) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

如果 $n \neq m$ ，则有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = 0$ ，而若 $m = n$ ，则有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$ ，综上讨论可以得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

viii. 由定义，我们可以得到

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$$

因此有

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \psi_n dx = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n+1} dx + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n-1} dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\hat{a}_+ - \hat{a}_-) \psi_n = c_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n+1} dx + c_4 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n-1} dx = 0$$

又有

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_+^2 + \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+ + \hat{a}_-^2), \quad \hat{p}^2 = -\frac{\hbar m \omega}{2} (\hat{a}_+^2 - \hat{a}_+ \hat{a}_- - \hat{a}_- \hat{a}_+ + \hat{a}_-^2)$$

则

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_+^2 + \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+ + \hat{a}_-^2) \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+) \psi_n dx = \frac{\hbar(2n+1)}{2m\omega} \\ \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \frac{\hbar m \omega}{2} (-\hat{a}_+^2 + \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+ - \hat{a}_-^2) \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \frac{\hbar m \omega}{2\omega} (\hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+) \psi_n dx = \frac{\hbar m \omega (2n+1)}{2} \end{aligned}$$

因此我们可以得到

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{2n+1}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sqrt{2n+1}$$

所以有

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2} (2n+1) \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定性关系得以验证。