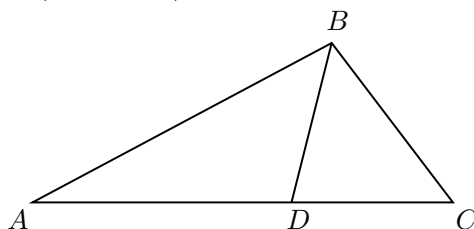


不卖，纯恶心人卷 1

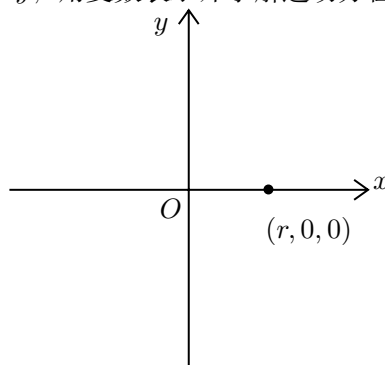
命题人：@ 一碗星空汤

一. (40 分) 电荷的有趣运动

1. 在三角形 ABC 中，边 AC 上有一点 D ，满足 $AD = a, CD = b, BD = c, (a > b)$ ， BD 与 AC 的夹角是可以改变的，试着讨论 $AB + BC$ 的最大值与 $|AB - BC|$ 的最小值。



2. 在空间中，存在 $\mathbf{E} = -a(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}), \mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ 的电磁场。在 xy 平面内，带电量为 q 的电荷在 $(r, 0, 0)$ 处以速率 v_0 向任意方向在 xy 平面内发射，试着计算这些电荷运动时能达到的范围。这里我们假设这些电荷不会形成闭合轨道，并且 a 为正数。（提示，令 $z = x + iy$ ，用复数表示并求解运动方程。）



[解答]

1. (24 分)

不妨设 $\angle ADB = \theta$, 则 (2 分)

$$AB = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}, \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta}$$

因此有 (2 分)

$$\frac{d(AB)}{d\theta} = \frac{2ac \sin \theta}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}}, \quad \frac{d(BC)}{d\theta} = -\frac{2bc \sin \theta}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta}}$$

i. 对于 $AB + BC$, 有 (2 分)

$$\frac{d(AB + BC)}{d\theta} = \left(\frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}} - \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta}} \right) \sin \theta$$

当取到极值时，有 $d(AB + BC)/d\theta = 0$ ，解得 **(2 分)**

$$\theta = 0 \text{ 或 } \pi \text{ 或 } \arccos\left(\frac{c}{2ab}(b-a)\right)$$

代入可以得到极值 **(2 分)**

$$|a-c| + |b+c| \text{ 或 } |a+c| + |b-c| \text{ 或 } (a+b)\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}}$$

分类讨论各种情况：**(2 分)**

当 $c < b$ 时，显然 $(a+b)\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}}$ 更大；

当 $c \geq b$ 时，比较 $|a+c| + |b-c| = a-b+2c$ 与 $(a+b)\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}}$

$$a-b+2c = (a+b)\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}} \Rightarrow c = \frac{2ab}{a-b} > b$$

因此有 **(4 分)**

$$(AB + BC)_{\max} = \begin{cases} (a+b)\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}} & c \leq \frac{2ab}{a-b} \\ a-b+2c & c > \frac{2ab}{a-b} \end{cases}$$

ii. 对于 $|AB - BC|$ ，有 **(2 分)**

$$\frac{d(AB - BC)}{d\theta} = \left(\frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}} + \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta}} \right) \sin \theta = 0$$

解得 **(2 分)**

$$\theta = 0 \text{ 或 } \pi$$

值得注意的是，如果 $c \geq \frac{a-b}{2}$ ，则 $|AB - BC|$ 可以取到 0，因此有 **(4 分)**

$$|AB - BC|_{\min} = \begin{cases} 0 & c \geq \frac{a-b}{2} \\ 2c - a + b & c < \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

2. **(16 分)**

设 $z = x + iy$ ，可以列出运动方程 **(2 分)**

$$m\ddot{z} = -qaz - iq\dot{z}B_0$$

设 $z = e^{\lambda t}$ ，有 $m\lambda^2 + iqB_0\lambda + qa = 0$ ，可以解得 **(4 分)**

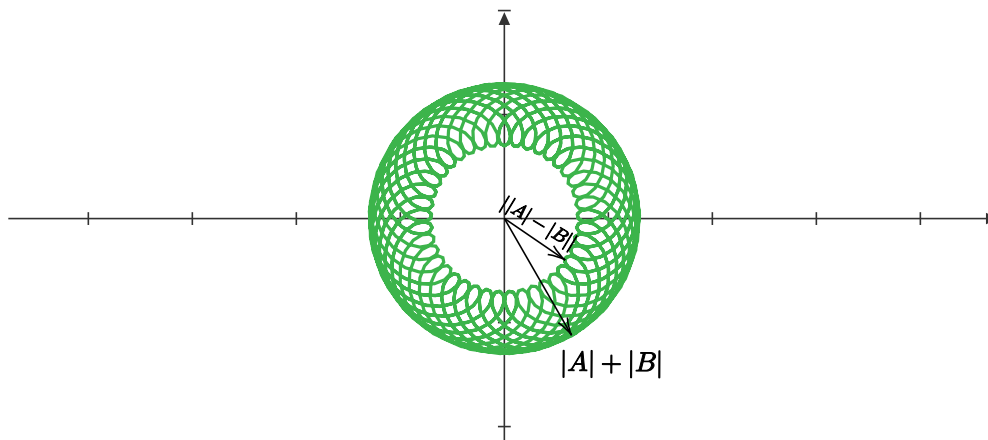
$$\lambda_{\pm} = \frac{-iqB_0 \pm \sqrt{-(qB_0)^2 - 4qam}}{2m} = i\frac{qB_0}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4am}{qB_0^2}} \right)$$

因此可以设 **(2 分)**

$$z = Ae^{i\frac{qB_0}{2m}\left(1+\sqrt{1+\frac{4am}{qB_0^2}}\right)t} + Be^{i\frac{qB_0}{2m}\left(1-\sqrt{1+\frac{4am}{qB_0^2}}\right)t}$$

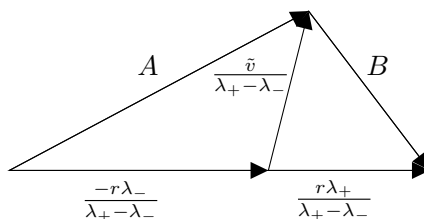
其运动相当于两个匀速圆周运动的叠加，因此其运动范围为 **(2 分)**

$$||A| - |B|| \leq r \leq |A| + |B|$$



代入初始条件 $z = r, \dot{z} = v_0 e^{i\theta}$, 可以解得 (2 分)

$$A = \frac{\tilde{v} - r\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}, B = \frac{-\tilde{v} + r\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}$$



此时我们需要考察 $||A| - |B||, |A| + |B|$ 的极值, 利用 1 中的结论可以得到 (4 分)

$$r_{\min} = \begin{cases} 0 & v_0 \geq \frac{qB_0 r}{2m} \\ \frac{\frac{qB_0 r}{2m} - v_0}{\frac{qB_0}{2m} \sqrt{1 + \frac{4am}{qB_0^2}}} & v_0 < \frac{qB_0 r}{2m} \end{cases}$$

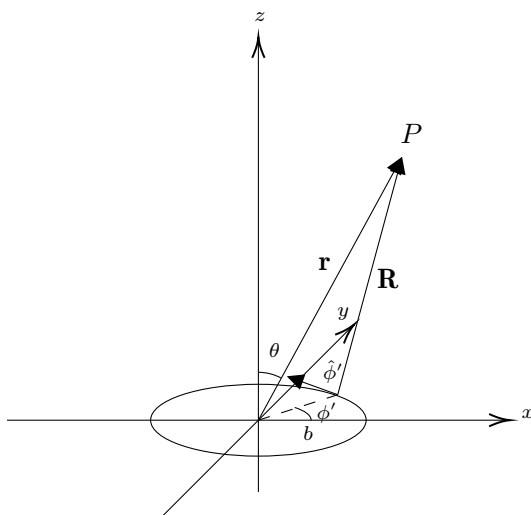
$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{v_0 + \frac{qB_0 r}{2m}}{\frac{qB_0}{2m} \sqrt{1 + \frac{4am}{qB_0^2}}} & v_0 \geq \frac{qB_0 r}{2m} \\ \sqrt{r^2 + \frac{mv_0^2}{qa}} & v_0 < \frac{qB_0 r}{2m} \end{cases}$$

因此运动范围为 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ 。

二. (60 分) 旋转磁矩的辐射

1. 简谐振动的磁矩

- i. 考察电流为 $I(t) = I_0 \cos \omega t$, 半径为 b 的电流环。如图, 求解 $P(r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$ 处的磁矢势 $\mathbf{A}$ (其中 $b \ll r, c/\omega$), 并且使用 $m = \pi b^2 I_0$ 代换。而后分别给出 $r \ll c/\omega$ 与 $r \gg c/\omega$ 时的近似结果, 并说明其物理意义。



提示：对于振荡变化的电流，磁矢势的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t - R/c)}{R} d\mathbf{l}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_0 \cos(\omega(t - \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta}))}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta}} b \hat{\phi}' d\phi'\end{aligned}$$

使用小量近似对其计算。（请注意 $\hat{\phi}'$ 的表达式）

- ii. 续前问，在 $r \gg c/\omega$ 的近似下，计算空间中的磁场、感生电场与坡印廷矢量（均保留至最低阶）。试问辐射强度最大的方向是什么？

提示：

- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- 坡印廷矢量： $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

- iii. 续前问，计算偶极子辐射的平均功率 $\langle P \rangle = \oint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a}$ 。

2. 匀速转动的磁矩

- 考察在 xy 平面内以角速度 ω ，大小为 m ，绕自身中心逆时针匀速转动的磁矩，试着计算其平均辐射功率。（提示：可以将匀速转动的磁矩分解为在两个方向上作简谐振动的磁矩）
- 考察在三维空间中与 z 轴夹角为 α 的磁矩 m ，关于 z 轴匀速逆时针转动，试计算其平均辐射功率。
- 中子星以其高转速与强磁场而著称。设现有一半径为 10km 的中子星，其以 $\omega = 2.0 \times 10^2 \text{ rad/s}$ 旋转，南北极与自转轴夹角为 $\alpha = \frac{\pi}{10}$ 。在其表面磁场最强处，磁感应强度为 $B = 10^{11} \text{ T}$ ，合理估算其向外辐射的功率大小。

[解答]

1. (39 分)

- i. (22 分) 由图，代入 $\hat{\phi}' = (-\sin \phi', \cos \phi', 0)$ ，注意到 $\sin \phi'$ 为奇函数，因此积分之后只有 $\cos \phi'$ 留下，故 (2 分)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\omega(t - R/c))}{R} \cos \phi' d\phi' \hat{\mathbf{y}}$$

由于 $b \ll r$ ，有 ((2+6) 分)

$$\begin{aligned} R^{-1} &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \\ \cos \left(\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right) &\approx \cos \left(\omega t - \omega \frac{r}{c} \left(1 - \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \right) \\ &= \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \omega \frac{b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) \\ &\approx \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) - \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \omega \frac{b}{c} \sin \theta \cos \phi' \end{aligned}$$

代入积分式并且近似可以得到 (4 分)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\approx \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\omega}{c} \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] b \sin \theta \cos^2 \phi' d\phi' \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 b^2}{4r} \left[\frac{1}{r} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\omega}{c} \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r} \left[\frac{1}{r} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\omega}{c} \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

当 $r \ll c/\omega$ 时，有 (2 分)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$$

这是普通磁矩的磁矢势；(2 分)

当 $r \gg c/\omega$ 时，有 (2 分)

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 \omega m}{4\pi c r} \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$$

这是磁矩产生的电磁辐射项。(2 分)

ii. (11 分) 当 $r \gg c/\omega$ 时，利用体系旋转对称性，替换 $\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\phi}$ (2 分)

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 \omega m}{4\pi c r} \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \sin \theta \hat{\phi}$$

则有 (略去 $\frac{1}{r^2}$ 项) (6 分)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\theta} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

因此有，(3 分)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right]^2 \hat{\mathbf{r}}$$

iii. (6 分) 利用 $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ ，有 (2 分)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

则有 (4 分)

$$\langle P \rangle = \oint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

2. (21 分)

i. (12 分) 在 xy 平面上匀速转动的磁矩可以表示为 (2 分)

$$\mathbf{m} = m(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$$

因此我们可以将其分解为 $\mathbf{m}_1 = m \cos \omega t \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{m}_2 = m \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}$, 因此可以将外界的辐射场分解为 $\mathbf{m}_1$ 与 $\mathbf{m}_2$ 的贡献, 由于他们都是谐振场, 因此有 (4 分)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{10}(\mathbf{r}) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), & \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_{10}(\mathbf{r}) \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}) \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), & \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_{20}(\mathbf{r}) \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\end{aligned}$$

因此有 (2 分)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2)$$

由于相位不同步, 因此 $\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 \rangle = \langle \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \mathbf{0}$ (1 分), 所以有 (1 分)

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0}(\langle \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2 \rangle) = \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle$$

因此有 (2 分)

$$\langle P \rangle = \oint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \oint \langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot d\mathbf{a} + \oint \langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot d\mathbf{a} = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{6\pi c^3}$$

ii. (4 分) 可以将旋转的磁矩表示为 (2 分)

$$\mathbf{m} = m(\sin \alpha \cos \omega t, \sin \alpha \sin \omega t, \cos \alpha)$$

因此可以分解为在 xy 平面上以 ω 匀速转动的 $m \sin \alpha$ 与沿 z 轴的 $m \cos \alpha$, 故其辐射功率为 (2 分)

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4 \sin^2 \alpha}{6\pi c^3}$$

iii. (5 分) 在星球表面, 有 $c/\omega = 1.5 \times 10^6 \text{ m} \gg R = 1.0 \times 10^4 \text{ m}$ (1 分), 所以在星球表面可以直接认为磁场表达式与静态磁矩近似相等。所以在表面有 (2 分)

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ B &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \leq \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}\end{aligned}$$

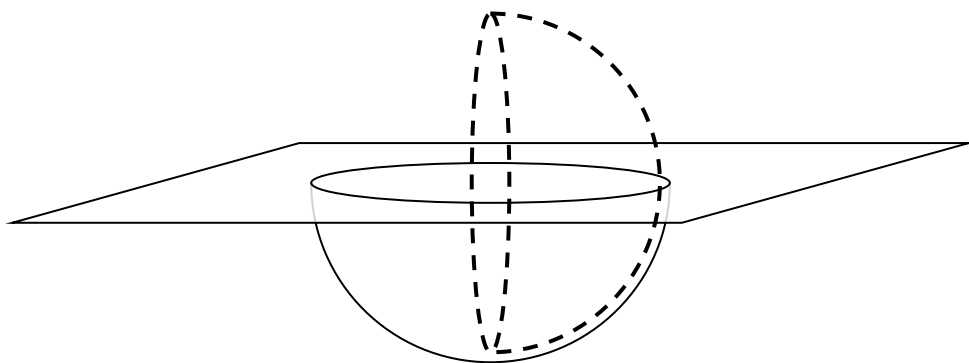
因此有 (2 分)

$$\begin{aligned}m &= \frac{2\pi R^3 B_{\max}}{\mu_0} = 5 \times 10^{29} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \\ \langle P \rangle &= \frac{\mu_0 m^2 \omega^4 \sin^2 \alpha}{6\pi c^3} = 9.451 \times 10^{34} \text{ W}\end{aligned}$$

三. (40 分) 小心地滑!

小孩洗澡时, 一不小心在澡盆里滑倒了, 接下来我们将要探讨澡盆中的小孩的可能运动。如图, 我们将澡盆建模

为一个光滑半圆槽，半径为 R 。我们将小孩也建模成一个质量为 m ，半径为 R ，且质量分布均匀的半球（忽略图示中两者半径的差别）。现在我们假设半球在运动的过程中不会离开澡盆。



1. 小孩由竖直站立开始滑倒，当小孩滑倒到最低点的位置时，求出小孩的角速度大小。
2. 求出小孩泡澡过程中做小振动的角频率。
3. 小孩现在绕着过球心的竖直轴做定轴转动，背部位于角度 α 的位置（即半圆切面法向量与竖直方向夹角为 α ）。请问小孩能否在不受其余外力的情况下做稳定的定轴转动？如果能，求出定轴转动角速度的大小；如果不能，求出半球角速度的最小值与其方向。

[解答]

1. 小孩的质心位置在 (3 分)

$$r_c = \frac{\int_0^R z \pi \sqrt{R^2 - z^2} dz}{\int_0^R \pi \sqrt{R^2 - z^2} dz} = \frac{3}{8}R$$

小孩关于任意过球心的转轴的转动惯量为 (2 分)

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

在下摆的过程中，有动能定理 (4 分)

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mgr_c$$

因此有 (4 分)

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgr_c}{I}} = \frac{\sqrt{30}}{4}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

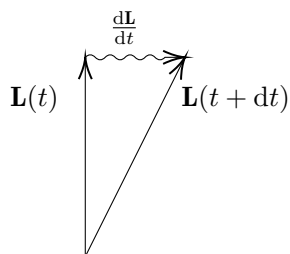
2. 小孩在发生小振动时，有若其转角为 θ ($\theta \ll 1$)，可以列出转动定理 (2 分)

$$I\ddot{\theta} = -mgr_c \sin \theta \approx -mgr_c \theta$$

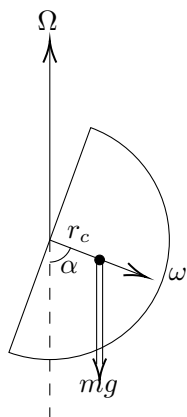
可以计算得到振动角频率为 (4 分)

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{mgr_c}{I}} = \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

3. 如果小孩能够做稳定的运动，由于半球关于任意过球心的转轴的转动惯量都相同，那么其角动量的方向竖直向上。而小孩收到质心的和力矩方向水平，因此角动量的方向与大小一定会改变，小孩不再能够稳定运动。因此这是不可能的。 (8 分)



现在设小孩有自转角速度 ω 与公转角速度 Ω ，可以列出角动量定理 (5 分)



$$mgr_c \sin \alpha = L_{\parallel} \Omega = I \omega \Omega \sin \alpha$$

$$\omega \Omega = \frac{15}{16} \frac{g}{R}$$

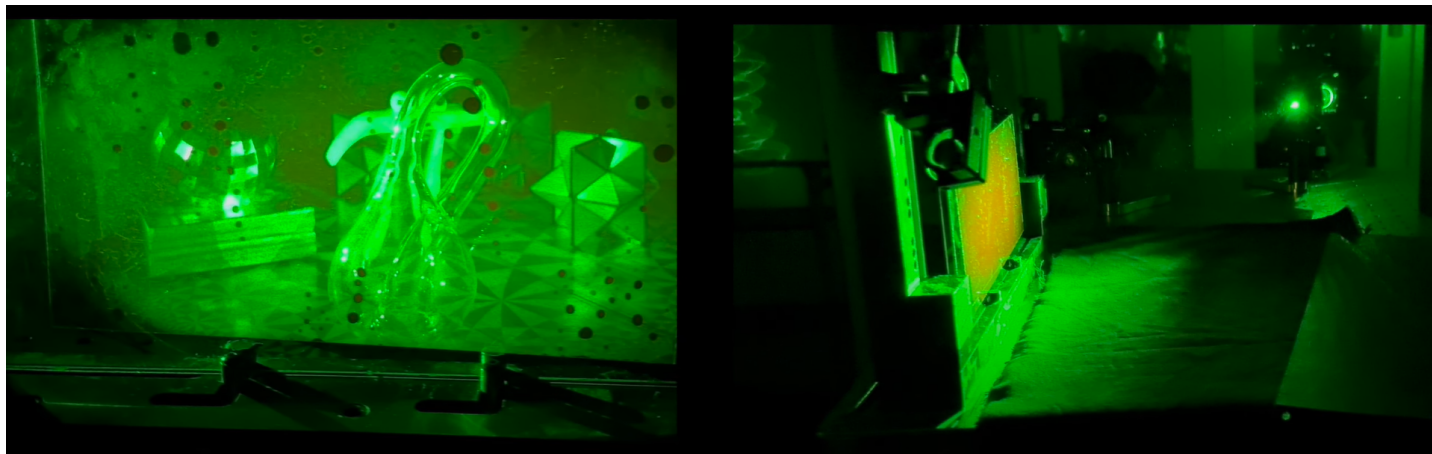
小孩的和角速度大小为 (4 分)

$$\omega_{\text{tot}} = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2 - 2\omega\Omega \cos \alpha} \geq \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \sqrt{\omega\Omega} = \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

当且仅当 $\omega = \Omega = \frac{\sqrt{15}}{4} \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时取等，因此小孩角速度最小为 $\frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \frac{\alpha}{2}$ ，与竖直方向的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ 。(4 分)

四. (40 分) 全息照片

下图为一透射式全息照片，当使用特定波长的激光以特定角度照射全息照片时，即使其背后没有物体，你将会看到照片后似乎放置着不同的东西。本题中将会探讨全息照片背后的物理成因。



全息照片是一片涂有特殊涂层的玻璃，当被光照射时，涂层会与电磁波的电场互动。在一定的照射时间后，我们会得到一片振幅透射率 $\tilde{t}$ 随位置变化的玻璃板。具体而言，我们将会得到振幅透射率 $\tilde{t}$ 正比于光强 $|\tilde{E}|^2$ 的一片玻璃板，比例系数为 α 。

当我们要拍摄全息照片时，我们需要两相干光源 O_1 与 O_2 ，光源 O_1 直接照射在底片之上，而光源 O_2 照射在物体上，物体的反射光照射在底片上。而当我们观察全息照片时，我们只需要将 O_2 关闭，并拿走物体，当 O_1 照射全息照片时，我们可以直接看到其背后的物体。

1. 我们先来考察一个玩具模型。我们设物体是一个到玻璃板平面距离为 d 的点， O_1 是由无穷远发来的平面波， O_2 照射在点上使其向外反射球面波。描述玻璃板平面上得到的干涉图像，并且计算出到中心距离为 r 处的条纹间距 Δr ($\Delta r \ll r$)。
2. 继上一问，若我们将 r 处高频变化的透射率视为一光栅，求出其 ± 1 级衍射角。你发现了什么巧合？试着根据这一发现描述在只有 O_1 的照射下我们将会看到怎样的光场。
3. 现在不妨从更一般的角度考察全息照片的实现原理。我们不妨设光源 O_1 照射在玻璃板上的光场为 $\tilde{O}$ ，由物体反射的光场为 $\tilde{R}$ 。试着表示振幅透射率 $\tilde{t}$ ，与移去物体后投射的光场。证明我们能仍从全息照片中看到物体原先的位置。

(提示：与静电场中的泊松方程 $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ 相同，定态光场满足亥姆霍兹方程 $(\nabla^2 + k^2)U = 0$ 。当给定方程在某一个边界上的值时，光场在全空间中的形式就能够被唯一确定。同时， $|\tilde{O}|^2$ 与 $|\tilde{R}|^2$ 在全息照片处可以认为是缓变的，因此光源离平面有一定距离，光强的衰减可以认为很小。)

[解答]

1. (12 分)

对于玻璃平板到中心距离为 r 处有光程差 (2 分)

$$\Delta = \sqrt{d^2 + r^2} - d$$

对于亮纹，有 (2 分)

$$\Delta = k\lambda$$

得到 r 为定值，所以干涉条纹为同心亮环。对于相邻两条亮纹，有 (4 分)

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = \sqrt{d^2 + r_{k+1}^2} - \sqrt{d^2 + r_k^2} = \lambda$$

$$\frac{r\Delta r}{\sqrt{d^2 + r^2}} = \lambda$$

因此有 (4 分)

$$\Delta r = \frac{\sqrt{d^2 + r^2}}{r} \lambda$$

2. (12 分)

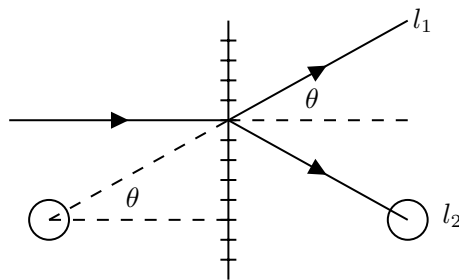
± 1 级衍射角为 (2 分)

$$\Delta r \sin \theta = \lambda$$

因此有 (4 分)

$$\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{d^2 + r^2}}$$

有趣的是，物体所在位置到 r 处连线的角度也为 $\arcsin \frac{r}{\sqrt{d^2+r^2}}$ ，其中一条衍射光线 l_1 的反向延长线一定过物体点。同时另一条衍射光线 l_2 也会过一定点，(2 分) 入下图所示：



所以我们能够看到在距离玻璃板两侧中心 d 处会各有一亮点，分别为一实像与虚像。(4 分) 因此即使原先的物体不存在时，平行光照射在全息照片上后，我们仍能在原先的位置看到亮点。

3. (16 分)

在玻璃表面有 (2 分)

$$\tilde{U} = \tilde{O} + \tilde{R}$$

因此 (3 分)

$$\tilde{t} = \alpha |\tilde{U}|^2 = \alpha |\tilde{O} + \tilde{R}|^2$$

或表示为

$$\tilde{t} = \alpha (\tilde{O} + \tilde{R})(\tilde{O}^* + \tilde{R}^*)$$

因此出射光场为 (3 分)

$$\tilde{U}' = \underbrace{\alpha(|\tilde{O}|^2 + |\tilde{R}|^2)\tilde{O}}_{\text{照明光源}} + \underbrace{\alpha|\tilde{O}|^2\tilde{R}}_{\text{物体反射光}} + \underbrace{\alpha\tilde{O}^2\tilde{R}^*}_{\text{反射光的共轭光场}}$$

可以看到的是，我们将出射光场分为三个部分：

- 照明光源部分为 $\tilde{O}$ 乘以一缓变系数，可以认为对透射光场改变很小，故我们可以看到照明光源（可能会亮度有所变化）；(2 分)
- 物体的反射光部分为 $\tilde{R}$ 乘以一缓变系数，于是通过 $\tilde{O}$ 的照射，我们可以直接看到物体的反射光，也就是物体的形象；(2 分)
- 反射光的共轭光场为 $\tilde{R}^*$ 乘以一振幅缓变的系数，相当于第 2 小问中的实像通过一个透镜之后成的像。(2 分)

在这三者其中，第二部分能够让我们看到物体原先的位置。(2 分)

五. (60 分) 统计力学基础

在研究含有大量粒子体系的各种宏观物理量时，我们往往需要统计力学的帮助，通过统计力学的手段快速得到一些物理量。

1. 我们不妨考察含有 N 个粒子的体系，分布在能级 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 上 ($N \gg n$)，每一个能级 ω_l 都有 ω_l 种不同的状

态，此时单个粒子的能量满足玻尔兹曼分布 $f(\varepsilon_l) \propto \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l}$ ，其中 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 。本题中不考虑玻色（费米）系统带来的额外量子效应。

- i. 设 $f(\varepsilon_l) = Z^{-1} \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l}$ ，求出归一化系数 Z 。
 - ii. 计算体系的总能量 U ，使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ 表示。（提示： $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ ）
 - iii. 设每一个能级的能量 ε_l 与某一个环境参量 y 有关（可以理解为外界环境中的位置、面积等物理量），此时可以认为单个粒子上受到的力大小为 $\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y}$ ，计算体系受到的总的合力 Y （即所有粒子受力之和），使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial y}$ 表示。
 - iv. 由热力学第一定律， $dQ = dU - Y dy$ ，由此计算体系熵 $S = \int dQ/T$ 的表达式，使用 Z 与 $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ 表示。（本题需要你强大的凑全微分能力）
2. 我们可以用这一理论解释固体热容在低温处的异常现象。晶体中有 N 个原子，每一个原子有三个振动自由度，每一个自由度可以看成是一个一维简谐振子态。根据量子力学的理论，简谐振子的能量是分立的，具体为：

$$\varepsilon_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

且每一个能级只有一种状态。

- i. 写出并计算归一化系数 Z 。
- ii. 计算固体定容热容 $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ ，给出其高温与低温近似，表达式请使用 $\theta_E = \hbar \omega / k_B$ 代换。

[解答]

1. (42 分)

i. (4 分) 使用归一化条件有 (2 分)

$$Z^{-1} \sum_{l=1}^n \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l} = 1$$

因此有 (2 分)

$$Z = \sum_{l=1}^n \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l}$$

ii. (10 分) 对于能级 l ，粒子数为 (2 分)

$$a_l = N \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l} / Z$$

因此总能量 (4 分)

$$U = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l a_l = \sum_{l=1}^n \frac{N}{Z} \omega_l \varepsilon_l e^{-\beta \varepsilon_l}$$

注意到 $\frac{\partial e^{-\beta \varepsilon_l}}{\partial \beta} = -\varepsilon_l e^{-\beta \varepsilon_l}$ ，因此有 (4 分)

$$U = - \sum_{l=1}^n \frac{N}{Z} \omega_l \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta \varepsilon_l} = - \frac{N}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{l=1}^n \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l} = - \frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

iii. (10 分) 单个粒子上受到的力为 (2 分)

$$Y_l = \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y}$$

则所有粒子受到的合力大小为 (4 分)

$$Y = \sum_{l=1}^n a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} = \sum_{l=1}^n \frac{N}{Z} \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y}$$

注意到 $\frac{\partial e^{-\beta \varepsilon_l}}{\partial y} = -\beta e^{-\beta \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y}$, 可以带入得到 (4 分)

$$Y = \sum_{l=1}^n \frac{N}{Z} \omega_l \frac{-1}{\beta} \frac{\partial e^{-\beta \varepsilon_l}}{\partial y} = -\frac{N}{Z\beta} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{l=1}^n \omega_l e^{-\beta \varepsilon_l} = -\frac{N}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial y}$$

iv. (18 分) 由热力学第一定律, (2 分)

$$dQ = dU - Y dy$$

代入 $dU = N d \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ 可以得到 (2 分)

$$dQ = -N d \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{N}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial y} dy$$

根据 (2 分)

$$dS = \frac{dQ}{T} = k_B \beta dQ$$

可以得到 (4 分)

$$dS = N k_B \left(-\beta d \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{\partial \ln Z}{\partial y} dy \right)$$

可以看到, 第二项有形似全微分的表达式, 使用全微分公式 $d \ln Z = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \ln Z}{\partial y} dy$ (由于 $\ln Z$ 是关于 y, β 的函数) 可以得到 (6 分)

$$\begin{aligned} dS &= N k_B \left(-\beta d \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + d \ln Z - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} d\beta \right) \\ &\stackrel{d(uv)=u dv + v du}{=} N k_B \left(d \ln Z - d \left(\beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) \right) \\ &= d \left(N k_B \left(\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) \right) \end{aligned}$$

两边同时积分可以计算得到 (务必加上积分常数 S_0) (2 分)

$$S = N k_B \left(\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) + S_0$$

2. (18 分)

i. (6 分) 对于晶格中振动的 N 个原子, 其相当于 $3N$ 个简谐振子。对于体系, 其能级为 (2 分)

$$\varepsilon_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

而每一个能级只有一个振动状态, 因此归一化系数为 (4 分)

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

ii. (12 分) 代入内能表达式有 (4 分)

$$\begin{aligned}
 U &= -3N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\
 &= -3N \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln e^{-\beta \hbar \omega / 2} - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega})) \\
 &= 3N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\hbar \omega}{2} + \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \\
 &= 3N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right)
 \end{aligned}$$

因此可以得到定容热容的表达式为 (4 分)

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_V \cdot \frac{d\beta}{dT} = 3 \frac{N \hbar^2 \omega^2 e^{\beta \hbar \omega}}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2} \cdot \frac{1}{k_B T^2} = 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2}$$

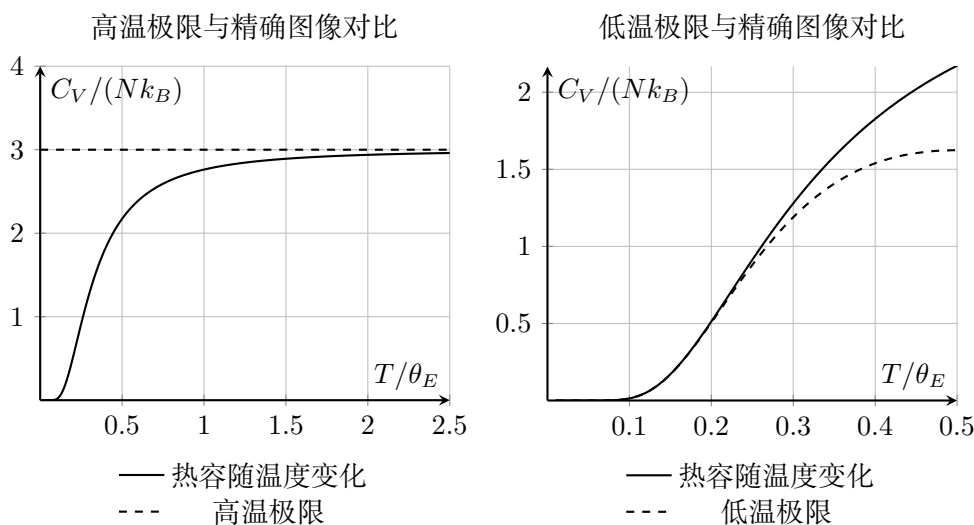
在高温极限时 (即 $T \gg \theta_E$) 可以求极限得到 (4 分)

$$C_V = 3Nk_B \lim_{\theta_E/T \rightarrow 0} \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2} = 3Nk_B$$

在低温极限时 (即 $T \ll \theta_E$)，通过等价变换可以发现 (4 分)

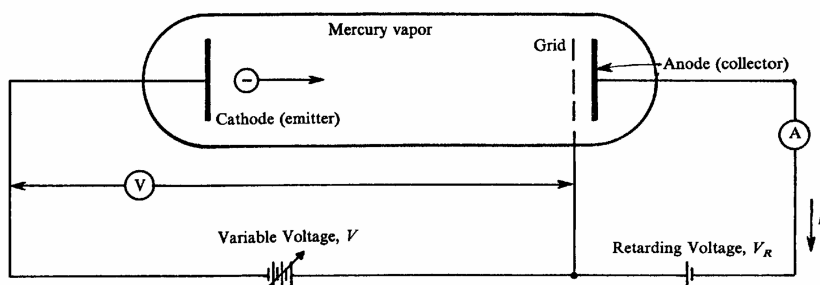
$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{-\theta_E/T}}{(1 - e^{-\theta_E/T})^2} \approx 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \cdot e^{-\theta_E/T}$$

[补充内容]



六. (40 分) 弗兰克-赫兹实验

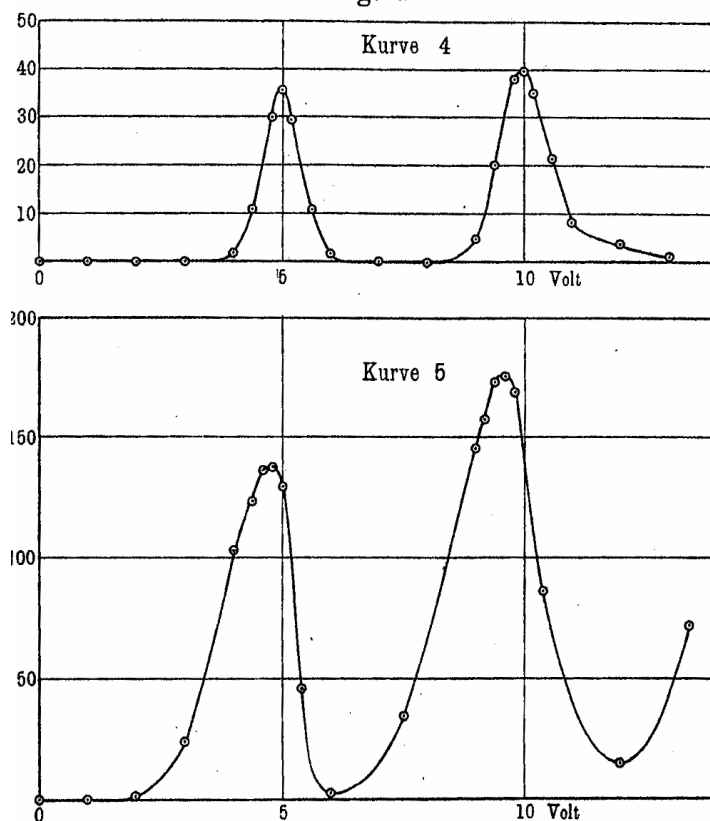
下图为弗兰克-赫兹实验的装置图像。在真空管的左侧为阴极 (Cathode)，在会向外发出自由电子，自由电子在阴极与栅极 (Grid) 之间会被外加的电场加速，最后越过栅极时若有一定的速度，则被阳极 (Anode) 收集，此时我们就测得了阳极接收到的电子形成的电流。在电子运动的过程中，会与管内存在的汞蒸气发生碰撞，使其损耗部分的动能。通过改变可变电源电压 (Variable Voltage)，测量阳极电流，我们可以得到一系列实验数据。



弗兰克与赫兹当年在做实验时，其中两次实验的图像如下¹。

1. 解释产生如下图像的原因，并且从中你能得到关于汞原子的什么物理信息？（提示：汞原子的核外价电子排布式为 $5d^{10}6s^2$ ）
2. 真空管内充满了温度为 160°C 的汞蒸气，计算阴极发射的自由电子在无外加电场的情况下与一个汞原子发生弹性碰撞之前的平均距离 λ （称为平均自由程）。汞蒸气压在 160°C 大小为 4.189mmHg ，汞原子的半径为 160pm ，汞原子的式量为 200.6 。阴极发出电子的温度为 2000K ，质量为质子的 $\frac{1}{1836}$ 倍。（绝对零度为 -273.15°C ）

Fig. 4.



[解答]

1. (15 分)

¹引自 J. Franck, G. Hertz, Phys. Z. 20, 132 (1919)

电子在由阴极向阳极的运动过程中，发生了如下几件事：

1. 电子由阴极出发后，在电场作用下加速，向栅极运动；
2. 在栅极与阳极之间有反向电压 (Retarding Voltage)，当电子通过 CG 空间，进入 GA 空间时，如果仍有较大能量，就能冲过反电场而到达阳极，并通过电流计；
3. 若电子在 CG 空间与汞原子碰撞，将自己一部分的能量传递给原子，使得原子被激发，电子的动能减小，电子与多个汞原子反复碰撞，动能不断减小；
4. 若在合适的外加电压下，电子所得到的动能接近原子激发所需要能量的整数倍，电子在碰撞原子后余下的动能很小，无法到达阳极，于是电流计中的电流就显著降低。

得分点: (2*3 分)

1. 由于反向电压的存在只有经过栅极还有足够大能量的电子才能达到阳极
2. 电子与原子碰撞，原子激发，电子动能减少
3. 电子从电场中获得总能为激发汞原子所需能量的整数倍时，电流极小

考察电子由阴极发射后运动到栅极的过程，有 (1 分)

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -NE + eV$$

因此当电流产生周期性变化时，有 (1 分)

$$\Delta V = E/e$$

由曲线 4 (Kurve 4) 与曲线 5 (Kurve 5)，观察其峰值可以得到 (1 分)

$$\Delta V_1 = 5.0V, \Delta V_2 = 4.8V$$

取平均可以得到 (结果在 $4.9 \pm 0.1V$ 皆可) (2 分)

$$\Delta V = 4.9V$$

因此汞原子由基态到第一激发态所需能量为 4.9eV (2 分)，也就是汞原子 6s 与 6p 轨道之间的能级差为 4.9eV。(2 分)

2. (25 分)

设电子与汞原子之间的平均相对速度为 $\bar{v}_r$ ，有考察电子相对于汞原子划出的轨迹。如果汞原子想要与电子碰撞，则其中心应距离电子轨迹中轴线距离小于汞原子半径 r 。这意味着，如果汞原子出现在电子轨迹为中轴线的圆柱中，则汞原子会与电子发生碰撞。在一个平均自由程中，我们期望这一圆柱中存在一个汞原子，则有 (2 分)

$$n\pi\lambda_r r^2 = 1$$

其中 n 为汞原子数密度。值得注意的是，我们应当在这里使用 λ_r 即汞原子系看到的平均自由程。有 (2 分)

$$\frac{\lambda_r}{\bar{v}_r} = \frac{\lambda}{\bar{v}_e}$$

对于汞蒸气有 (1 分)

$$p = nk_B T_{\text{Hg}}$$

代入可以得到 (2 分)

$$\lambda = \frac{\bar{v}_e k_B T_{\text{Hg}}}{\bar{v}_r p \pi r^2}$$

下面推导 $\bar{v}_r$ 。对于气体分子质量与温度为 m_1, T_1 与 m_2, T_2 的两种气体，其速度分布为 (3 分)

$$f(\mathbf{v}_1) = \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-m_1 \mathbf{v}_1^2}{2k_B T_1} \right)$$

$$f(\mathbf{v}_2) = \left(\frac{m_2}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-m_2 \mathbf{v}_2^2}{2k_B T_2} \right)$$

因此相对速度的分布为 (6 分)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) &= \int_{\text{全空间}} f \left(\mathbf{v}_0 + \frac{m_2/T_2}{m_1/T_1 + m_2/T_2} \mathbf{u} \right) f \left(\mathbf{v}_0 - \frac{m_1/T_1}{m_1/T_1 + m_2/T_2} \mathbf{u} \right) d^3 \mathbf{v}_0 \\ &= \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \left(\frac{m_2}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \int \exp \left(\left(-\frac{m_1}{2k_B T_1} - \frac{m_2}{2k_B T_2} \right) \mathbf{v}_0^2 - \frac{m_1 m_2}{k_B (m_1 T_2 + m_2 T_1)} \mathbf{u}^2 \right) d^3 \mathbf{v}_0 \\ &= \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \left(\frac{m_2}{2\pi k_B T_2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_1 m_2}{k_B (m_1 T_2 + m_2 T_1)} \mathbf{u}^2 \right) \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T_2} + \frac{m_2}{2\pi k_B T_2} \right)^{-3/2} \\ &= \left(\frac{m_1 m_2}{2\pi k_B (m_1 T_2 + m_2 T_1)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_1 m_2}{k_B (m_1 T_2 + m_2 T_1)} \mathbf{u}^2 \right) \end{aligned}$$

可以看到相对速度也满足麦克斯韦速度分布的形式，因此对比普通的麦克斯韦速度分布式，我们可以得到平均相对速率为 (3 分)

$$\bar{v}_r = \sqrt{\frac{8k_B (m_1 T_2 + m_2 T_1)}{\pi m_1 m_2}}$$

而对于电子自身，有 (2 分)

$$\bar{v}_e = \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}}$$

代入可以得到 (2 分)

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_{\text{Hg}} T_e}{m_e T_{\text{Hg}} + m_{\text{Hg}} T_e}} \cdot \frac{k_B T_{\text{Hg}}}{p \pi r^2}$$

代入数值可以得到 (2 分)

$$\lambda = 1.331 \times 10^{-4} \text{m}$$

[若直接设 Hg 原子静止，则只能最多得到 10 分]

七. (40 分) 艾诺拉·盖号轰炸机

1945 年的 8 月 6 日，美国飞机向日本广岛市扔下了原子弹，这是历史上核武器第一次用于战争。名为艾诺拉·盖 (Enola Gay) 的轰炸机于 1945 年 8 月 6 日凌晨两点左右起飞，机上有包括加肯巴赫在内的 10 名机组人员。

在《广岛倒计时》(Shockwave: Countdown to Hiroshima) 一书中，我们摘取了以下几个片段，其记录了小男孩原子弹在投放过程中的几个关键数据：

原子弹滚出弹舱，落入冰冷的空中。……蒂贝茨解除自动驾驶，抓住操纵杆，做出了那个长期练习的动作：猛地操纵飞机直接俯冲右转。巨大的轰炸机侧倾到 60° ，几乎竖了起来。……杰普森将护目镜套在眼睛上，开始倒数。离爆炸还有 44 秒。

在他们后方，“大师号”投下了那三只测量爆炸的铝罐……两架飞机加足油门，发动机尖叫着飞速向南驶离，空速达到每小时 350 英里。

……在距离相生桥 200 米的地方，在细工町岛馨医生诊所上方整 1903 英尺处，“小男孩”爆炸了。……

在战后，机上飞行员蒂贝茨写了一篇标题很直白的文章，叫《怎样投下一颗原子弹》(*How to Drop An Atom Bomb*)，其中写道：

数学计算与试飞已经给我们了一个最好的直截了当的选择：一个 150° 的转弯正正好好，而一个 60° 的侧倾能让我们在 28 秒内完成这个动作。

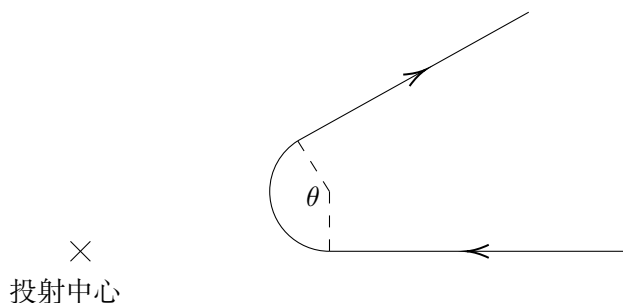
在本题中，我们假设：

- 不考虑空气阻力
- 飞机在等海拔高度匀速率飞行
- 飞机所受升力垂直于机翼

你可能需要的常数：

- 重力加速度大小为 $g = 9.8\text{m/s}^2$
- 声速为 340m/s
- 1英里 = 1.609344km
- 1英尺 = 0.3048m

1. 飞机飞行的高度是多少米？
2. 飞机急转弯时的半径是多少？
3. 使用计算验证在《怎样投下一颗原子弹》给出的训练数据的准确性，你算出来的真实投弹时的转弯的最优角度与转弯时间是多少？冲击波在 20km 外可以认为已经衰减到对轰炸机足够安全的程度，请问轰炸机能否安全执行任务？



[解答]

1. (8 分)

根据自由落体公式，从释放之后有 (4 分)

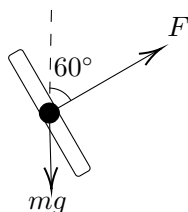
$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

因此释放高度为 (4 分)

$$h_0 = h + \frac{1}{2}gt^2 = 580.0344 + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 44^2 = 10066.4344\text{m} = 33026\text{ft}$$

2. (8 分)

飞机在急转弯时，有受力分析



因此有 (4 分)

$$\begin{cases} \frac{F}{2} = mg \\ \frac{\sqrt{3}}{2}F = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

因此有 (4 分)

$$R = \frac{v^2}{\sqrt{3}g} = \frac{(156.464)^2}{\sqrt{3} \cdot 9.8} = 1442\text{m}$$

3. (24 分)

飞机在投射原子弹之后，其向前飞行距离为 (4 分)

$$d = vt = 156.464 \cdot 44 = 6884.416\text{m}$$

如果飞机想要在一定时间内飞离投射中心最远的距离，则在转弯之后应当直接背离投射中心向前飞去，即 (4 分)

$$\theta = 180^\circ - 2 \arctan \frac{r}{d} = 156.3^\circ$$

与文中提到的 150° 较为接近。对应的飞行时间为 (4 分)

$$t_1 = \frac{\theta R}{v} = 25.15\text{s}$$

与文中提到的 28s 较为接近。设在完成转弯之后经过时间 t_2 被爆炸的冲击波击中，则有 (4 分)

$$v_s(t_1 + t_2 - t) = \sqrt{(d + vt_2)^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2}$$

数值计算得到 (8 分)

$$t = 84.04\text{s}, \quad l = v_s(t_1 + t_2 - t) = 22.17\text{km} > 20\text{km}$$

因此，艾诺拉·盖号轰炸机能够安全完成任务返回。