

非

线性动力学与混沌基础

□ 刘秉正 编著 (修订本)

东北师范大学

文库



FEIXIANXING DONGLIXUE YU HUNDUN JICHU

东北师范大学出版社

313

450583

L63

(1.1)

东北师范大学文库

非线性动力学与混沌基础

(修订本)

刘秉正 编著



00450583

东北师范大学出版社

1994·长春

(吉) 新登字 12 号

DZ03/14

东北师范大学文库

非线性动力学与混沌基础

FEIXIANXING DONGLIXUE YU HUNDUN JICHU

刘秉正 编著

责任编辑：王忠山 封面设计：李冰彬 责任校对：方 军

东北师范大学出版社出版 东北师范大学出版社发行
(长春市斯大林大街 110 号) 东北师范大学出版社激光照排中心制版
(邮政编码：130024) 长春全安印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 1994 年 9 月第 1 版
印张：13.5 1995 年 9 月第 2 次印刷
字数：327 千 印数：1 001—4 000 册

ISBN 7 - 5602 - 1331 - 6 / O · 80 定价：15.00 元

本书系东北师范大学
图书出版基金项目

序 言

混沌是近 20 年来由于计算机的发展而新兴起来的学科。它一出现, 就很快在许多领域得到广泛应用, 开阔和加深了人们对许多自然现象的认识。由于混沌是非线性动力学方程解的一种类型, 混沌理论自然与非线性动力学理论紧密相关。因此在讲混沌时, 也应对非线性动力学基础知识有所了解, 以便使双方互相补充和促进。所以把非线性动力学和混沌放在一起, 应该说是顺理成章的事。

近年来作者曾为部分从事基础物理教学的教师组织了一个《非线性动力学与混沌》的讨论班, 学习讨论这方面的基础理论和一些应用。这一方面是想使参加的教师掌握混沌的基本知识和应用, 以丰富各自的教学内容; 另一方面, 也是想引导一些教师开展有关混沌理论应用的研究。作者还为部分物理专业的研究生讲授了这门课程。为了适应上述工作的需要, 作者编写了一本讲义, 本书就是在该讲义的基础上修改补充而成的。

本书主要是为物理学以及相关学科(力学、化学、生物学、控制论和系统科学等)工作者和学生而写的, 因此它着重介绍非线性动力学和混沌的基础知识、基础理论以及应用。对一些偏深偏专门的理论, 特别是一些较严格的数学论证, 一般都从简从略。在叙述上, 作者也比较注意物理概念的阐释, 并尽可能多地联系一些实例。作者相信, 这样做对于那些希

望较快掌握这方面的基本内容并尽早开展这方面工作的同志是有好处的。

作者感谢李国庆、常丽、杨慧、刘亦未等同志在本书作图和习题选择等方面所给予的帮助。

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

刘 秉 正

1994 年 1 月于长春

目 录

第一章 非线性动力学理论基础	(1)
§ 1 非线性系统举例	(1)
§ 2 非线性方程的解及其稳定性.....	(17)
§ 3 线性稳定性分析和奇点分类.....	(35)
§ 4 极 限 环.....	(52)
§ 5 化 学 振 荡	(64)
§ 6 分岔现象简介.....	(79)
§ 7 多重定态和突变理论简介	(100)
§ 8 受 迫 振 动	(113)
习 题	(132)
第二章 混 沌	(139)
§ 9 混 沌	(139)
§ 10 研究非线性振荡和混沌的某些方法.....	(153)
§ 11 离 散 映 象 (1)	(174)
§ 12 离 散 映 象 (2)	(192)
§ 13 间歇混沌和通向混沌的道路.....	(210)
§ 14 奇怪吸引子、分维和李雅普诺夫指数.....	(220)
§ 15 熵.....	(239)

§ 16	保守系统中的随机运动·····	(255)
§ 17	分形·····	(272)
习 题	·····	(298)
第三章	混沌的一些实例·····	(301)
§ 18	固体物理中的混沌·····	(301)
§ 19	光学双稳态和光学混沌·····	(322)
§ 20	化学反应中的混沌·····	(339)
§ 21	可兴奋细胞的振荡和混沌·····	(352)
§ 22	心脏的搏动·····	(365)
§ 23	生态系统的振荡和混沌·····	(379)
§ 24	流行病学中的混沌·····	(393)
习题解答	·····	(407)
参考文献	·····	(412)

第一章 非线性动力学理论基础

(广义的) 动力学研究的是系统如何随时间变化。所谓系统, 就是指由一些相互联系 (或相互作用) 的客体组成的集合。这些客体, 既可以是自然科学中的一些物质, 如气体、液体、固体、化合物、生物的各部分或其整体, 也可以是各种社会事物和组织, 如各种群体或财政经济结构以至生产力和知识等较抽象的事物。系统的性质或特征是由一些所谓状态变量所表征, 如粒子的坐标和动量、化合物的浓度和人口密度, 等等。动力学就是要研究这些状态变量随时间变化的规律。这种规律既可表为关于状态变量的微分方程, 也可用关于状态变量的离散方程表示。这些方程既可以是线性的, 也可以是非线性的, 但实际上多数都是非线性的, 线性方程大多只是非线性方程的近似。本章将讨论用非线性微分方程表示的动力学的一些基本规律。

§ 1 非线性系统举例

在物理学中, 过去人们比较熟悉的大都是用线性方程描述其动力学规律的所谓线性系统。线性方程很容易求解并且具有一些很简单的特性 (如叠加原理)。然而物理现象乃至其他一些自然现象或社会现象毕竟是很复杂的, 它们的动力学规律往往都须用非线性方程表示。这些非线性方程除极少数外, 一般都不存在解析解。但是它们却具有迥异于线性方程解的一些独特性质。因此对

非线性方程需进行专门的研究。

下面我们首先举出一些实际存在的比较简单的非线性系统，然后逐步研究它们的解及其特点。

1. 弹性系统

人们熟知的弹性系统中的胡克定律就是其弹性势能与位移(形变)的二次幂成正比的，即(为简单计，我们只讨论一维情形，并设振子的质量已约化为1)

$$U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad (1 \cdot 1)$$

式中 x 表示离开平衡点的位移， ω 为常数。也就是说，系统的恢复力 f 与位移成正比

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\omega^2 x \quad (1 \cdot 2)$$

由牛顿第二定律便得到系统的运动方程(变量上面的圆点都表示它们对时间的导数)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1 \cdot 3)$$

上式是线性的，即服从胡克定律的弹性系统是线性的。

但是实际上许多弹性系统(包括工程上的各种构件和桁架)并不服从式(1·1)这样简单的规律。一般说来，弹性势能取如下较普遍形式(仍只分析其一维运动)

$$U(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3 + \frac{1}{4}\mu x^4 + \dots \quad (1 \cdot 4)$$

式中 κ 、 λ 和 μ 等都是常系数。即系统的恢复力取如下形式

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \lambda x^2 - \mu x^3 + \dots \quad (1 \cdot 5)$$

由这样的 U 和 f 得到的运动方程自然是非线性的。至于在 U 的多项式表示式(1·4)应取哪些项，可根据具体问题来定。

例如人们发现，人的外耳与中耳之间的鼓膜振动具有非对称性：膜向外侧移动时，恢复力大一些。如果把鼓膜运动看作一维的，并用 x 表示鼓膜中心部位偏离平衡位置的位移（设向外为正），则鼓膜振动时它所受到的恢复力可近似地表为

$$f = -\kappa x - \lambda x^2 \quad (1 \cdot 6)$$

也就是

$$U = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad (1 \cdot 7)$$

即势能也是非对称的。设鼓膜振动时的有效质量已约化为 1，则鼓膜的的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = 0 \quad (1 \cdot 8)$$

显然，上式是非线性的。设进入外耳的声音可表为（包含基音和许多谐音）

$$F = \sum_{i=1} F_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (1 \cdot 9)$$

在此声音作用下鼓膜的的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \lambda x^2 = \sum_{i=1} F_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (1 \cdot 10)$$

由于上式的非线性，使得传入内耳使人感觉到的声音除原来的音外，还可能出现其他的音——分音和结合音。（参看 §8）。

不少弹性系统虽然是非线性的，但其弹性势能却具有对称性，它们的最简单形式是

$$U = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{4}\mu x^4 \quad (1 \cdot 11)$$

与 κ 比较，通常 μ 是一较小的系数。这种系统的恢复力为

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\kappa x - \mu x^3 \quad (1 \cdot 12)$$

对于一般弹性系统 $\kappa > 0$ ，又存在两种情形： $\mu > 0$ 的硬弹性系统，

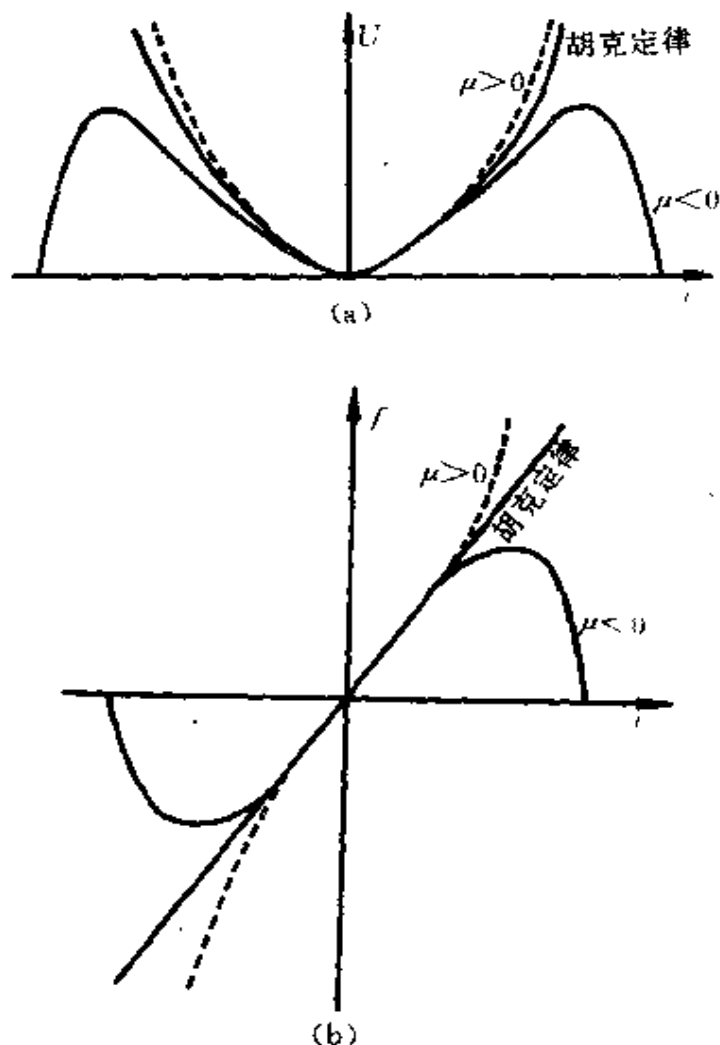


图 1-1 弹性势能和恢复力

此时恢复力大于胡克定律给出的值； $\mu < 0$ 的软弹性系统，此时恢复力小于胡克定律给出的值。以上情况如图 1-1 所示。

也存在 $\kappa < 0$ 的情形。其势能如图 1-2 所示（设 $\mu > 0$ ）。根据 $\frac{dU}{dx}$ 和 $\frac{d^2U}{dx^2}$ 变化情况很容易知道，此时有三个平衡点： $x=0$ 为不稳定平衡点； $x = \pm\sqrt{-\kappa/\mu}$ 为两个稳定平衡点。某些分子的势能就是如此。如氨 (NH_3) 由四个原子组成一个四面体结构，其中三个

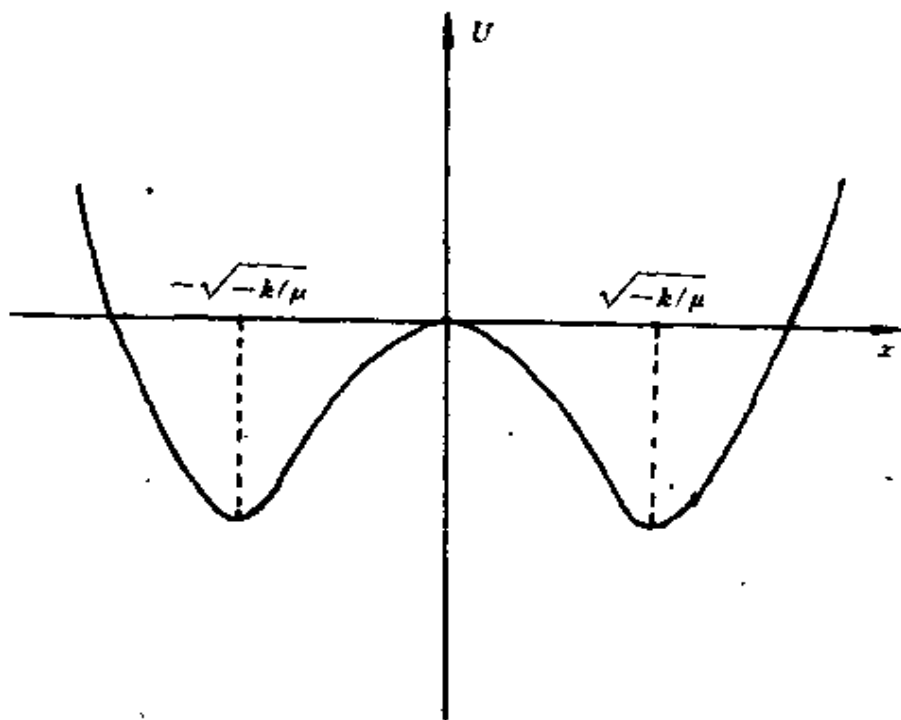


图 1-2 双稳态势阱

氢原子组成一平面，氮原子有两个稳定位置分别在此平面两侧（图 1-3）。氮原子在氢平面中心处也有一平衡位置，但是不稳定，故氮原子的势能取图 1-2 的形式。由于在氢平面 ($x=0$) 有势垒存在，氮原子不能在两个稳定状态之间运动。但量子力学中的隧道效应却允许这样的运动（振荡），振荡原率在微波范围，从而使氮分子可用子微波放大器。

考虑到上述非线性，弹性系统的运动方程为

$$\ddot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1 \cdot 13)$$

实际上系统运动总是要受到阻尼作用，阻尼力通常是与速度成比例，即 $\alpha \dot{x}$ 。考虑此阻尼作用，则上式变为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \quad (1 \cdot 14)$$

上式就是有名的杜芬 (Duffing) 方程。

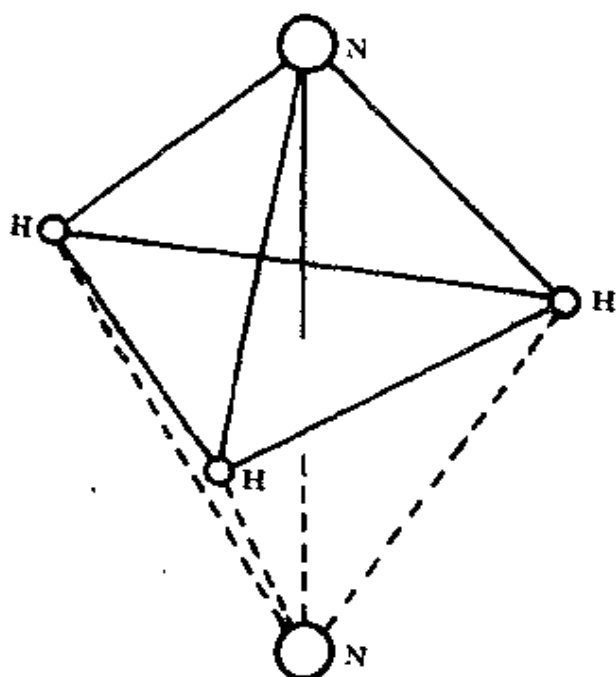


图 1-3 氨分子结构

在周期外力作用下，杜芬方程变为

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = F \cos \Omega t \quad (1 \cdot 15)$$

式中 F 和 Ω 分别为外力的幅值和(圆)频率。

杜芬方程对许多弹性系统的运动可以作较好描述。还可以看出，它也可以很好地描述单摆的运动，因为单摆的运动方程是

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1 \cdot 16)$$

式中 g 和 l 分别是重力加速度和单摆的摆长， θ 是摆偏离平衡位置的偏角。上式实际是非线性的。如果把 $\sin \theta$ 用级数展开并只取两项， $\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6} \theta^3$ ，代入式 (1·16) 就得到类似式 (1·13) 的运动方程。

2. 范德波尔 (Van der Pol) 方程

另一种常见的非线性是由于系统所受的非线性阻尼作用引起的, 其中最简单而又具典型意义的是所谓范德波尔方程。它是 20 年代由范德波尔在研究电子管振荡器的基础上首先提出的。我们现在就先分析电子管振荡电路来导出此方程。

图 1-4 是一类典型的电子管振荡电路。对与栅极 G 相联的

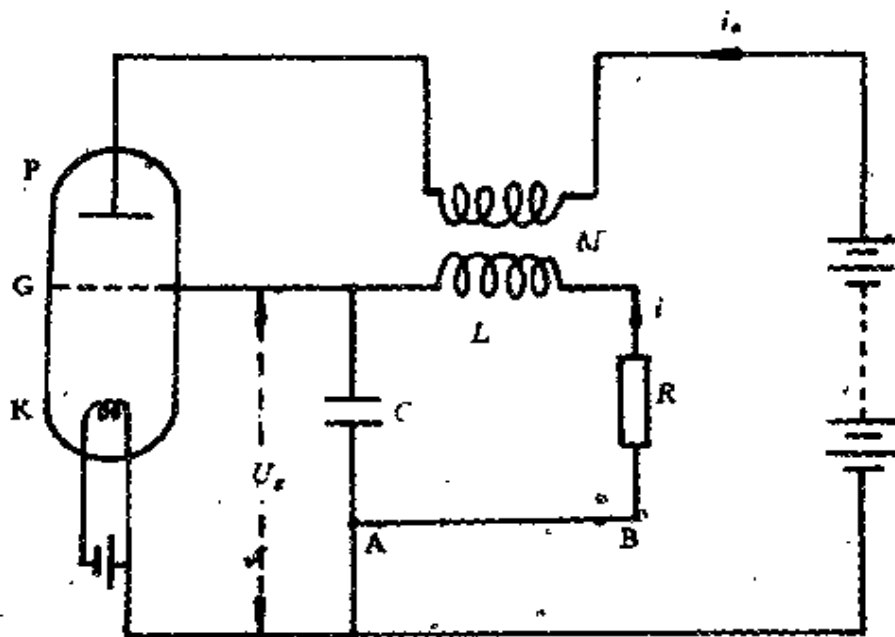


图 1-4 电子管振荡器

RLC 电路, 应用基尔霍夫定律得

$$Li + Ri + V_g - Mi_a = 0 \quad (1 \cdot 17)$$

电子管的阳极电流 i_a 受栅极电压 V_g 调控, 其关系为

$$i_a = SV_g \left(1 - \frac{V_g^2}{3K^2} \right) \quad (1 \cdot 18)$$

式中 S 为电子管互导, K 为常数, 又

$$C\dot{V}_s = i$$

于是式 (1·17) 变为

$$LC\ddot{V}_s + \left(\frac{MS}{K^2}V_s^2 + RC - MS\right)\dot{V}_s + V_s = 0 \quad (1 \cdot 19)$$

令

$$x = \frac{1}{K} \left(\frac{MS}{MS - RC} \right)^{1/2} V_s, \quad \alpha = \frac{MS - RC}{LC},$$

$$\omega^2 = 1/LC \quad (1 \cdot 20)$$

则上式变为

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1 \cdot 21)$$

上式就是有名的范德波尔方程。因为在此方程中, 非线性出现在 \dot{x} 的系数里, 因此它表示非线性阻尼。如果在图 1-4 中 A 和 B 两点间接入一讯号电源 $E_0 \cos \Omega t$, 则范德波尔方程变为

$$\left[\text{令 } F = \frac{E_0}{LCK} \left(\frac{MS}{MS - RC} \right)^{1/2} \right]$$

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = F \cos \omega t \quad (1 \cdot 22)$$

虽然电子管振荡器越来越少见 (大功率振荡器仍普遍用电子管), 但范德波尔方程的解却代表着一种典型的非正弦形式的振荡 (参考 § 2 图 2-3)。范德波尔称此类偏离正弦振荡很厉害的振荡为弛豫振荡, 并曾用此方程模拟心脏的振荡。

还可以用范德波尔方程表示各种含负阻元件的振荡电路。像单结管和隧道二极管等元件都具有负阻区, 图 1-5 所示为隧道二极管的 $i-V$ 曲线, 其中 ab 段即为负阻区。在负阻区, $i-V$ 关系可表为

$$i = -aV + bV^3 \quad (1 \cdot 23)$$

式中 a 和 b 为适当常数。试分析图 1-6 所示的含负阻元件 N 的电

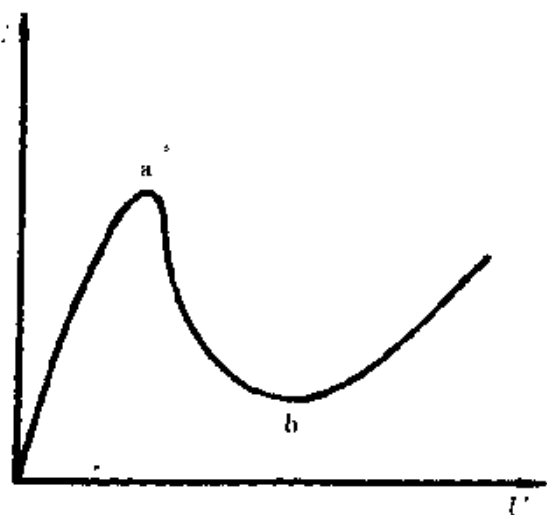


图 1-5 隧道二极管特性曲线

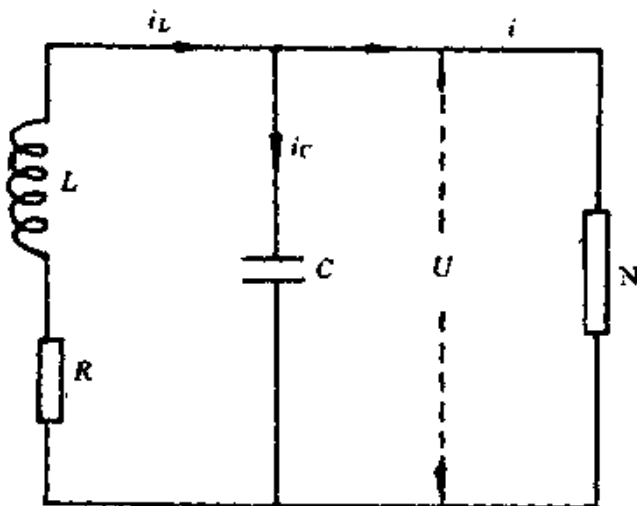


图 1-6 含负阻元件的振荡电路

路。很容易看出

$$i_C = C\dot{V}; \quad \dot{i}_C = C\ddot{V}$$

$$Li_L + Ri_L + V = 0$$

$$i_L = i_C + i$$

于是由 $\ddot{i} = \dot{i}_L - \dot{i}_C$ 得到

$$\begin{aligned} -a\dot{V} + 3bV^2\dot{V} &= (-V - Ri_L)/L - C\ddot{V} \\ &= [-V - R(i_C + i)]/L - C\ddot{V} \\ &= [-V - RC\dot{V} + R(aV - bV^3)]/L - C\ddot{V} \end{aligned}$$

也就是

$$\ddot{V} + \left(\frac{3b}{C}V^2 + \frac{R}{L} - \frac{a}{C}\right)\dot{V} + \left(\frac{1-aR}{LC}\right)V + \frac{Rb}{LC}V^3 = 0 \quad (1 \cdot 24)$$

令

$$\begin{aligned} x &= \beta V; \quad \beta = \left(\frac{3bL}{aL - RC}\right)^{1/2}; \\ a &= \frac{aL - RC}{CL}; \quad \omega^2 = \frac{1 - aR}{LC}; \\ \mu &= \frac{aRL - R^2C}{3L^2C} \end{aligned} \quad (1 \cdot 25)$$

则式 (1·24) 化简为

$$\ddot{x} + a(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (1 \cdot 26)$$

上式与范德波尔方程相似。通常电阻 R 很小, 如果 R 小到使得 μx^3 项可忽略, 则上式便与范德波尔方程完全一致了。

3. 其他的非线性现象

除了物理学中存在许多非线性系统外, 在其他自然科学领域以至社会现象中也存在大量非线性动力学过程。我们可就这些方面举几个简单的例子。

(1) 化学反应

为简单计,我们讨论由两种组分 A 和 B 化合生成另两种组分 C 和 D 的反应:



式中 a 、 b 、 c 和 d 是各组分的化学计量系数, k 和 k' 是反应的速率系数。根据质量作用定律,上述反应的速率方程是(设大写字母表示组分的浓度)

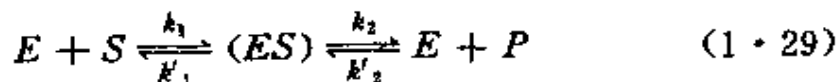
$$\frac{1}{c} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{d} \frac{dD}{dt} = kA^a B^b - k' C^c D^d \quad (1 \cdot 28)$$

很明显,只要各化学计量系数有一个不等于1,速率方程就是非线性的。对于大多数化学反应来说,情况就是这样的。

(2) 酶促反应中的米谢利斯-门顿 (Michaelis-Menten) 定律

各式各样的酶是各式各样生物化学反应中的催化剂。绝大多数生物体中进行的生物化学反应都是在酶参与下进行的。因此研究酶促反应的规律对生物化学具有极重要的意义。

我们研究一个最简单的酶促反应:底物 S 在酶 E 的催化下转变为产物 P 。此反应可表为



上式表示在反应过程中,首先是底物与游离酶 E 结合成复合物 (ES) ,然后复合物 (ES) 再分解为产物 P 和游离酶 E 。根据质量作用定律,在反应中底物 S 、产物 P 和复合物 (ES) 的浓度变化率分别为

$$\dot{S} = k'_1(ES) - k_1ES \quad (1 \cdot 30a)$$

$$\dot{P} = k_2(ES) - k'_2EP \quad (1 \cdot 30b)$$

$$\dot{(ES)} = k_1ES + k'_2EP - (k'_1 + k_2)(ES) \quad (1 \cdot 30c)$$

在实际反应进行的同时,总是还存在输运过程,使得底物浓度 S

和产物浓度 P 大体上维持恒定。

由式 (1.30c) 可知, 当反应刚开始进行时, $(ES) \approx 0$, $(ES) > 0$, (ES) 将随时间增长, 从而 (ES) 又将随时间而变小。因此时间足够长 ($t \rightarrow \infty$) 时, 反应将达到稳定状态, 即 $(ES) = 0$, (ES) 达到一稳定值而不再随时间变化。也就是说, 反应 (1.29) 前后两步的速率相等。于是由式 (1.30) 得到在稳定状态下

$$-\dot{S} = \dot{P}, \quad (ES) = 0 \quad (1.31)$$

$$(ES) = \frac{k_1 S + k'_2 P}{k'_1 + k_2} E \quad (1.32)$$

又, 结合态酶浓度与游离酶浓度之和应等于一常数

$$(ES) + E = E_0 \quad (1.33)$$

E_0 表示酶的总浓度。由式 (1.30) ~ 式 (1.33) 得到

$$\dot{P} = -\dot{S} = \frac{k_1 k_2 S - k'_1 k'_2 P}{k'_1 + k_2 + k_1 S + k'_2 P} E_0 \quad (1.34)$$

由于酶的作用具有专一性 (一种酶只对一种底物起作用), 它与产物 P 结合的可能性极小, 因此通常 $k'_2 \approx 0$ 。令

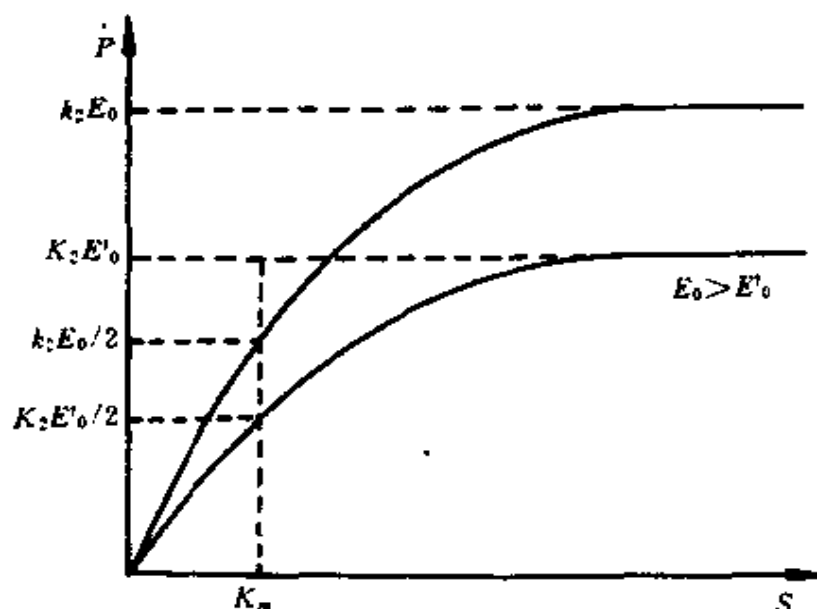
$$K_m = \frac{k'_1 + k_2}{k_1} \quad (1.35)$$

K_m 称为米氏 (Michaelis) 常数。于是式 (1.34) 简化为

$$\dot{P} = -\dot{S} = \frac{k_1 k_2 S E_0}{k'_1 + k_2 + k_1 S} = \frac{k_2 E_0 S}{K_m + S} \quad (1.36)$$

上式就是有名的米谢利斯-门顿定律。它表示底物或产物的变化率是底物 S 的非线性函数。开始时, 速率随底物 S 的增加而较快地增加, 但以后逐渐变缓而趋于饱和 (图1-7)。这是可以理解的, 因为酶的总浓度 E_0 一定, 当所有底物都与酶结合了, 速率 P 便不能再随酶的增加而增加了。

当然, 式 (1.29) 只是酶促反应中最简单的形式, 实际的酶

图 1-7 酶促反应中反应速率 P 与底物 S 的关系

促反应要比这复杂多了。因此反应的速率方程比式 (1·36) 复杂得多。即米谢利斯-门顿定律还有许多推广的形式。

(3) 人(虫)口增长的简单模型

一个最简单的关于人(虫)口增长的模型是：人(虫)口的增长率与现有人(虫)口数 x 成正比，即

$$\dot{x} = \alpha x \quad (1 \cdot 37)$$

α 为比例常数。上述线性方程有很简单形式的解

$$x = x_0 e^{\alpha t} \quad (1 \cdot 38)$$

式中 x_0 表示 $t=0$ 时的人(虫)口数。这就是所谓人(虫)口按指数(几何级数)增长的马尔萨斯人口论。这样的规律当然是过分简单了。比如它没有考虑诸如由于人(虫)口过分密集资源不足、不同区域人(虫)口之间的相互作用(迁徙和战争等)和科技进步引起的生产力发展以及人口寿命的变化等等因素。

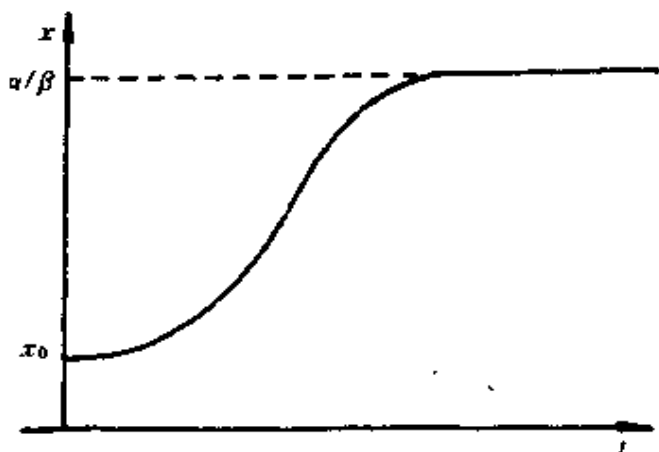
如果考虑到在一定区域内由于人(虫)赖以生存的资源有限

性, 可以认为, 人(虫)口过密时人(虫)之间为争夺资源的竞争是限制人(虫)口增长的主要因素, 则式 (1·37) 应改为

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 = x(\alpha - \beta x) \quad (1 \cdot 39)$$

上式是非线性方程, 它具有很简单形式的解

$$x = \frac{\alpha}{\beta + ce^{-\alpha t}} \quad (1 \cdot 40)$$



式中常数 $c > 0$, 它由 $t=0$ 时的人(虫)口数 $x_0 = \alpha/(\beta + c)$ 决定。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow \alpha/\beta$, 这表示在资源有限的区域内, 人(虫)口不能像式 (1·38) 那样无限制地增长, 而要趋于一饱和值 (α/β)。此饱和值即代表该区域的资源所能供养的最大人(虫)口数。图 1-8 表示式 (1·40) 的 $x-t$

图 1-8 人(虫)口增长的逻辑斯谛曲线

曲线, 它呈 S 形。人们有时称式 (1·39) 或式 (1·40) 为逻辑斯谛 (logistic) 模型 [方程 (1·39) 也称 Verhulst-Pearl 方程], 相应的 S 形 $x-t$ 曲线为逻辑斯谛曲线。

这种具有饱和值的逻辑斯谛模型自然要比简单的马尔萨斯人口论合理得多。对于远比昆虫复杂的人类群体, 由于影响人口增长的因素较多, 逻辑斯谛模型自然就显得还是太简单了。但是对于在一定范围内繁殖的昆虫或细菌之类种群, 逻辑斯谛模型还是能够给出比较接近实际情况的描述。

(4) 产品产量增长的模型

逻辑斯谛模型不仅如上所述可较好地描述单一种群的繁殖,

而且还可用于描述某些其他社会现象。我们再举一个例子。

一种工业产品刚问世时，其产量 x 的增长率 \dot{x} 自然与产量 x 自身成正比。但产品的销售毕竟有一最大（饱和）限度。设 N 代表此最大销售量，增长率 \dot{x} 还受 N 的制约： \dot{x} 还与 $N-x$ 成正比； $x=N$ 时， $\dot{x}=0$ 。因此产量增长率满足下面的微分方程：

$$\dot{x} = kx(N-x) \quad (1.41a)$$

或

$$\dot{x} = kNx - kx^2 \quad (1.41b)$$

上式与式(1.39)一致，即产品产量增长也服从逻辑斯谛模型。

当然，用逻辑斯谛模型描述产量增长也还是过于简单。如实际上对许多产品还应考虑它们的使用寿命问题：使用寿命越短，就需要更多的产品用于更新，以补偿损耗掉的产品。计入这一因素，则式(1.41)应改为

$$\dot{x} = kx(N-x) - \lambda x \quad (1.42)$$

$-\lambda x$ 代表产品自身的损耗， λ^{-1} 表示产品的平均使用寿命 ($\ln 2/\lambda$ 表示半寿命，与放射性元素半衰期相似)。计入使用寿命，饱和产量（最大销售量）就不是 N 了。由式(1.42)令 $\dot{x}=0$ 得此时的饱和产量为

$$x_m = N - \lambda/k \quad (1.43)$$

(5) 捕食者——猎物系统的洛特卡-伏尔泰拉 (Lotka-Volterra) 模型

早就有人注意到，在一定区域内的某些动物的微量有起伏或周期性变化，如加拿大猞猁数量就是历年起伏变化（参考 § 23）。又如亚德里亚海中有两种鱼类，其中一种以另一种为食，它们的微量常常是交替增加和减少。美国生态学家洛特卡 (Lotka, 1910—) 和意大利数学家伏尔泰拉 (Volterra, 1931—) 为解释如上述捕食者和猎物组成的生态系统中两种群数量交替变化的

规律，提出了一个数学模型，人们称之为洛特卡-伏尔泰拉模型。

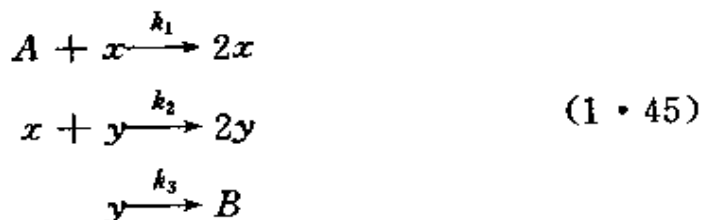
设 x 和 y 分别表示某地区猎物和捕食者两种群的数量，它们随时间的变化都包括两部分：生育和死亡。猎物 x 的增长率（即生育率减去其自身病老引起的死亡率），与其现有数量 x 成正比，其消亡是由于捕食者 y 的捕食〔即比较起来，忽略掉前面式（1·39）和式（1·40）所表示的由于资源有限的影响〕，因此其消亡速率既与 x 成正比又应与 y 成正比。捕食者 y 的繁殖速率也应与其自身数量和猎物数量成正比，即与 xy 成正比，其消亡（病老死亡）速率则与其数量 y 成正比。根据以上分析，即可写出此生态系统变化的动力学方程

$$\dot{x} = k_1x - k_2xy \quad (1 \cdot 44a)$$

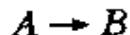
$$\dot{y} = k_3xy - k_4y \quad (1 \cdot 44b)$$

式中 k_1 、 k_2 、 k_3 和 k_4 都是常数。此非线性方程组就称为洛特卡-伏尔泰拉方程。

洛特卡-伏尔泰拉方程也可表示下列有两个中间产物的化学反应



上述反应总的反应效果是



故 A 和 B 分别是反应的底物和产物，中间产物 x 和 y 都因自催化（自触媒）而增殖。将 A 和 B 的浓度设法维持一定，则中间产物浓度变化率为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1Ax - k_2xy \\ \dot{y} &= k_2xy - k_3y \end{aligned} \quad (1 \cdot 46)$$

显然, 上式与洛特卡-伏尔泰拉方程相同。

从以上这些比较简单的例子可以看出, 大量的自然现象和社会现象都遵从非线性规律。当然, 我们在这里举出的非线性规律都是用连续形式的微分方程表述的。除此之外, 也有许多现象则是用离散的差分方程表示的。如生物的世代之间的关系本来就应该是离散的。关于差分方程及其与微分方程之间的联系, 我们将在 § 11 和 § 12 略加介绍, 下面集中分析讨论微分方程所表述的非线性系统及其性质。

除了极少数〔如式 (1·39)〕外, 绝大多数非线性微分方程都不存在解析解。但由于非线性系统的实际重要性, 特别是由于近三四十年来近似计算方法的进展, 更由于计算机的发展, 使得求非线性方程的数值解变得十分简易快速, 非线性方程解与线性方程解的巨大差异更明确地显露出来。我们将在以后各节中陆续介绍非线性方程 (包括上面一些例子) 解的形式和性质。

§ 2 非线性方程的解及其稳定性

我们来研究非线性方程解的各种形式及解的稳定性问题。

1. 常微分方程的一般形式

一般常微分方程有各种不同形式: 有一元高阶的, 其中又有自治的 (方程中不显含时间) 和非自治的 (方程中显含时间) 之分, 又有多元的常微分方程组。但是所有常见的非线性常微分方程都可以化为自治的一阶常微分方程组。因为对于高阶自治方程, 只要把各阶导数当作新的变量即可。如对于二阶常微分方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (2 \cdot 1)$$

令 $y = \dot{x}$, 则上式便化为一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y)\end{aligned}\quad (2 \cdot 2)$$

对于非自治方程，只要把方程中显含的时间 t 当成新的变量

$$z = t \quad (2 \cdot 3)$$

并引入一新的方程

$$\dot{z} = 1 \quad (2 \cdot 4)$$

这样，原来的 n 个变量非自治方程就变成 $n+1$ 个变量的自治微分方程组了。

如果非自治方程中所显含的时间 t 是以某些特殊函数的形式出现，我们还可以根据函数的特点进一步简化。以上节的受迫范德波尔方程 (1·22) 为例，由于其中的含时因子 $\cos \Omega t$ 是方程

$$\ddot{z} = -\Omega^2 z \quad (2 \cdot 5)$$

的解，我们可以引入新的二变量一阶方程组

$$\begin{aligned}\dot{z} &= u \\ \dot{u} &= -\Omega^2 z\end{aligned}\quad (2 \cdot 6)$$

表示此余（正）弦因子。因此受迫范德波尔方程 (1·22) 可化为下述自治的一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - \alpha(x^2 - 1)y + Fz \\ \dot{z} &= u \\ \dot{u} &= -\Omega^2 z\end{aligned}\quad (2 \cdot 7)$$

根据以上分析，今后我们就以如下的一阶自治方程组作为分析讨论的对象（ n 为变量个数）：

$$\dot{x}_i = f_i(x_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2 \cdot 8)$$

方程 (2·8) 或 f_i 就代表所要分析讨论的动力学系统。

在非线性系统研究中，常常采用由变量 x_1, x_2, \dots, x_n 张成的相空间（或状态空间），此时每一时刻的状态（方程解 x_i 的取值）

用相空间的一点表示，态随时间的变化则是一曲线，此相轨线也就是积分曲线。

在只有两个变量的情形，方程 (2·8) 简化为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (2 \cdot 9)$$

对上式消去 t 得到相平面中解的轨线的斜率

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2 \cdot 10)$$

因为我们讨论的是自治方程，对于相平面中的给定点 (x_1, x_2) ， f_1 和 f_2 的值都是唯一的，从而轨线的斜率 dx_2/dx_1 也是一定的，这表明在相平面上解的轨线不能相交。必须注意，如果方程是非自治的， f_1 和 f_2 还是时间的函数，对于给定的相平面上的点 (x_1, x_2) ，不同时刻的 f_1 和 f_2 的值不同，从而轨线是可以相交的。

2. 解的各种形式

如前所述，除少数情形外，大多数非线性方程都不存在解析解，但是应用近似计算方法和计算机，很容易求得方程的数值解或用图形把解表示出来。与线性方程相似，非线性方程的解在经过初始阶段的暂态过程（与初始条件有关）后，即达到一稳定形式。通常（除了要研究暂态过程的作用外）人们着重研究的就是稳定形式的解。

一般说来，非线性方程的解大体有以下几种形式（它们的细致情况以后将陆续讨论）：

(1) 稳定定态解

在方程 (2·8) 中，当

$$f_i(x_j) = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2 \cdot 11a)$$

即

$$\dot{x}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2 \cdot 11b)$$

时, 系统的状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 不随时间变化。我们称满足式 (2·11a) 的状态为定态。通常物理学或化学中所说的平衡态都是定态。但是定态不一定是平衡态, 如稳恒的物质流或热流以及稳定进行的化学反应 (如一些连续流程的化工生产) 等都是在定态下进行的, 但不一定是平衡态, 这就是所谓非平衡定态。

与力学中的平衡态有稳定与否之分类似, 一般动力学系统的定态也有稳定与否之分 (参考本节末及下一节)。所谓稳定 (严格说, 应该是渐近稳定, 见下面) 定态, 是指方程的解经过初始阶段的暂态过程后 (或者说, $t \rightarrow \infty$) 各变量都将趋于稳定不变的数值。

举一简单例子, 试考虑单摆受阻尼作用。这时单摆运动方程由式 (1·16) 变为 (θ 改为 x)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (2 \cdot 12)$$

式中 α 为阻尼系数。

方程 (2·12) 的解如图 2-1 所示。所以, 只要 α 不等于零, $x=0$ 就是方程 (2·12) 的稳定态解。单摆有稳定的平衡点这是大家熟知的事。其他的方程的稳定定态附近的解大体也是这样 [参考图 3-2 (a) 和图 3-2 (b)]。即稳定定态解的 x_i-t 曲线最后都是平行于 t 轴的直线, 它在相空间 (或相平面) 是用一不动点表示。

由式 (2·10) 和式 (2·11) 可知, 相空间中的轨线在定态的代表点处的斜率不定, 这种斜率不定的点称为奇点。即定态对应着相空间的奇点。

还可以看出, 一般的方程组 (2·8) 或 (2·9) 总会有满足式 (2·11) 的定态解。当定态解不是 (渐近) 稳定时, 结果又怎样呢?

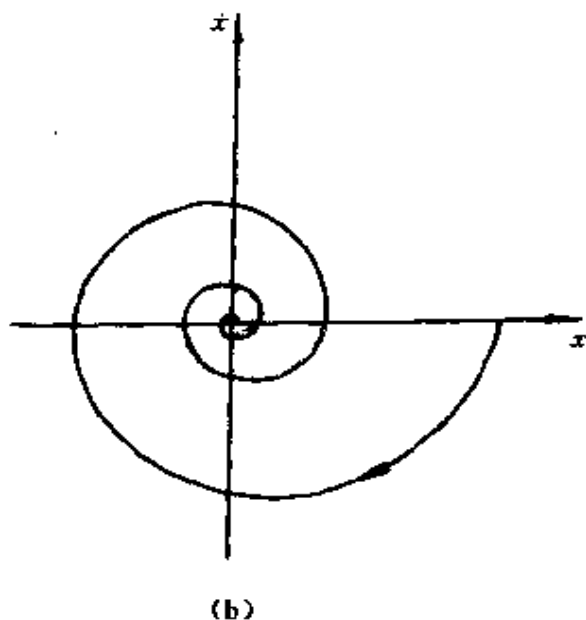
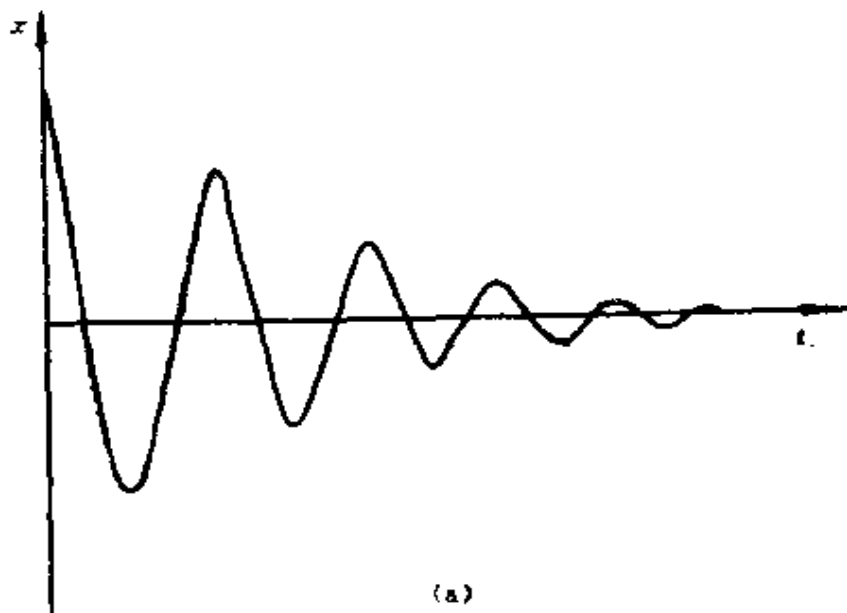


图 2-1 阻尼单摆的运动

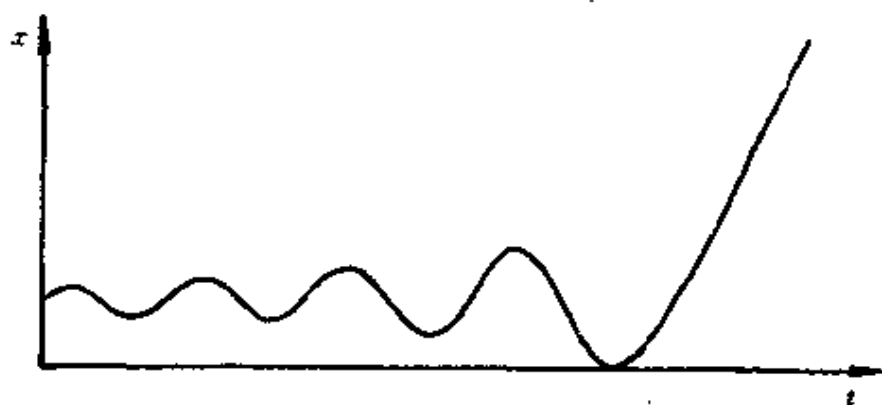
这时就会出现下面几种形式的解。

(2) 发散解

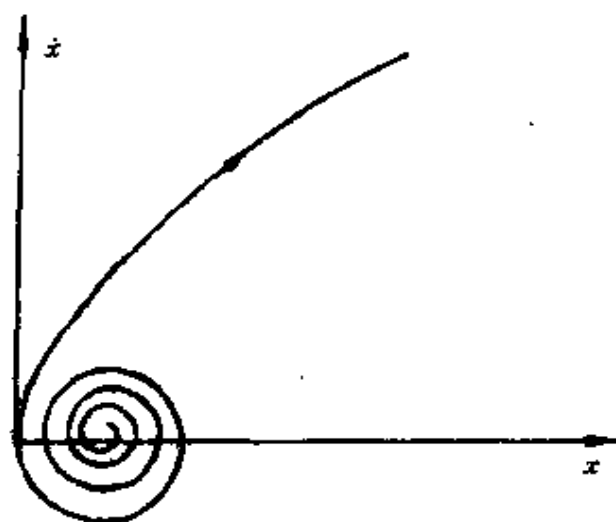
当定态是不稳时，方程 (2·8) 的解可能是发散的。即赋予 x_i 以有限的初值， x_i (或其中之一) 将随时间无限制地偏离有限值 (图 2-2)。如粒子的被散射或爆炸之类现象即属于此情形。对于大多数问题，这类发散解不具有实际意义，因此今后我们将不考虑这类解。

(3) 振荡解

对于许多实际问题，方程 (2·8) 既没有稳定的定态，解又



(a)



(b)

图 2-2 发 散 解

不发散，而是随时间振荡，即解总是在一定的数值范围内不停地变化。这大体上又分两种情形（还有所谓准周期运动，见 § 10）。

(i) 周期振荡 这时状态变化总是周而复始重复地进行，即振荡具有确定的周期，方程的解在相空间（相平面）的轨迹为闭曲线。除少数情形（各种保守的线性振荡系统，如无阻尼单摆，或像 § 3 所述非线性洛特卡-伏尔泰拉方程的解那样的守恒振荡）外，多数非线性方程的周期解都与初始条件无关，而只由方程本身及其

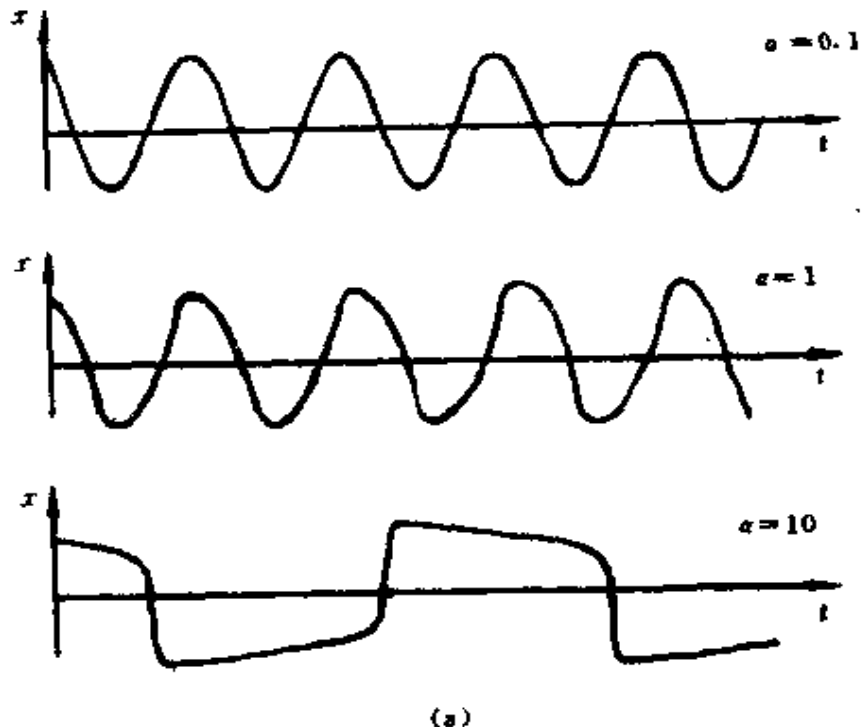
中的参数值决定。如图 2-3 是用计算机求得的下述范德波尔方程的解〔方程 (1·21) 中, $\omega=1$ 〕

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2 \cdot 13)$$

可以看出, 此时振荡在相平面上是用孤立的 (邻近无其他闭曲线) 闭曲线 (图中粗线) 表示, 不同初始条件的解的轨线经过一段暂态过程最后都落在此闭曲线上。相平面上这种孤立的闭曲线称为极限环。我们将在 § 4 进一步分析研究它的一些性质和规律。

(ii) 混沌 这种振荡没有确定的波形, 从面没有一定的周期。图 2-4 是用计算机求解下述杜芬方程的结果:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.4\cos 1.2t \quad (2 \cdot 14)$$



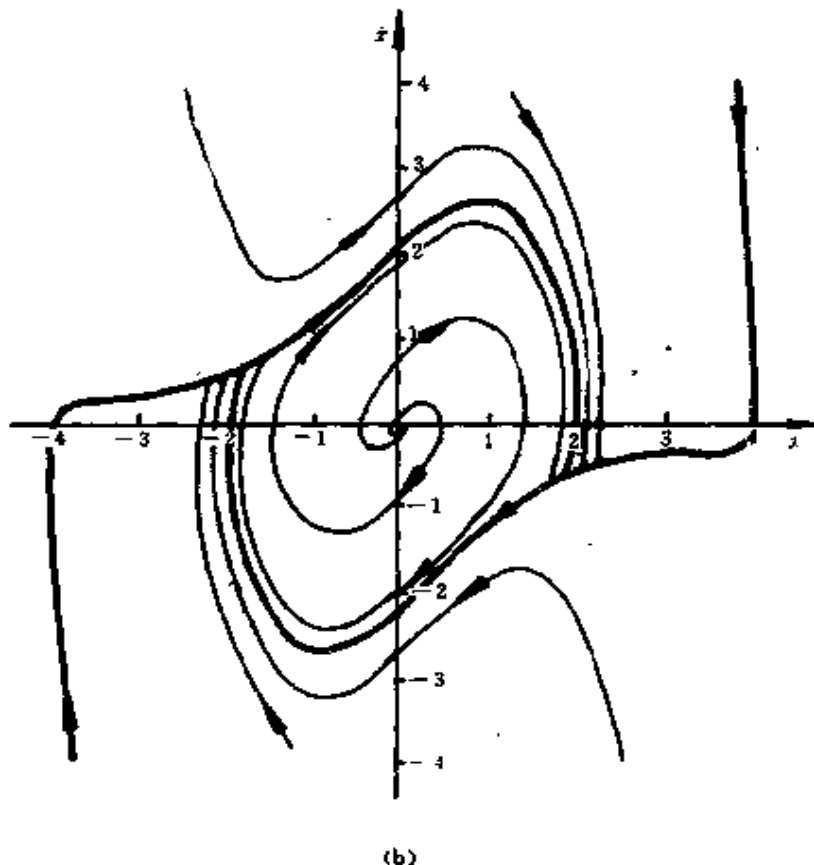


图 2-3 范德波尔方程 $\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ 的解

(a) $x-t$ 曲线;

(b) $\dot{x}-x$ 相平面上的轨迹 ($\alpha=\omega=1$), 原点 ($\dot{x}=x=0$) 是不稳定奇点。

这种非周期的随机性解就是所谓混沌。关于混沌的分析讨论我们将在第二章进行。

以上我们指出了非线性方程解的几种可能形式。但是往往还会有这样的情形出现：一个非线性方程组不止一个定态，这些定态的稳定性也不一样，这时解将取什么样的形式呢？试考查下述杜芬方程的解：

$$\ddot{x} - \dot{x} + 15x - 0.1x^3 = 0 \quad (2 \cdot 15)$$

此方程对应图 1-2 的情形。它有三个平衡点（定态），即（求法参看 § 3）： $x=0$ ； $x=\pm\sqrt{15/0.1}=\pm\sqrt{150}$ ，其中 $x=0$ 是不稳的，

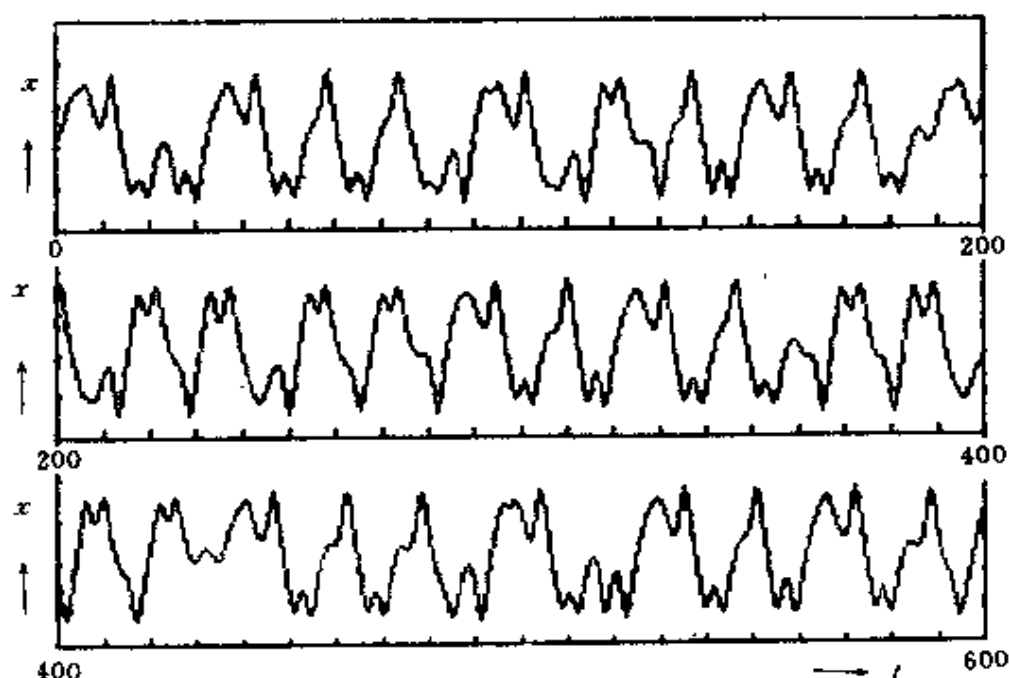


图 2-4 方程 (2·14) 的解

另两个是稳定的。计算机计算结果表明, 这时在 (x, \dot{x}) 相平面上解的轨线如图2-5所示。不同的初始条件的轨线被通过不稳定态 $S (x=0)$ 的轨线 (称为分界线) 分隔为两个区域: 初始条件在图中阴影区的轨线最终趋于左侧的定态 $F_1 (x=-\sqrt{150})$; 其余的初始条件的轨线则趋于右侧的定态 $F_2 (x=\sqrt{150})$ 。这个例子的结果具有普遍意义: 当方程的解有不止一个定态时, 整个相空间 (或相平面) 可能被划分为不同流域 (basin) 或吸引区, 不同流域中的轨线将趋于不同的稳定定态或振荡状态, 当然有的也可能趋于无穷远。如果对这种系统加上含时 (如周期外力) 作用, 系统相空间的维数被扩大了, 定态性质也可能发生变化。这时, 系统可能在原来那些定态之间作周期运动或混沌运动。式 (2·14) 所示混沌运动就是如此。

当系统处于不稳定态时, 自然也会趋于上述各状态。

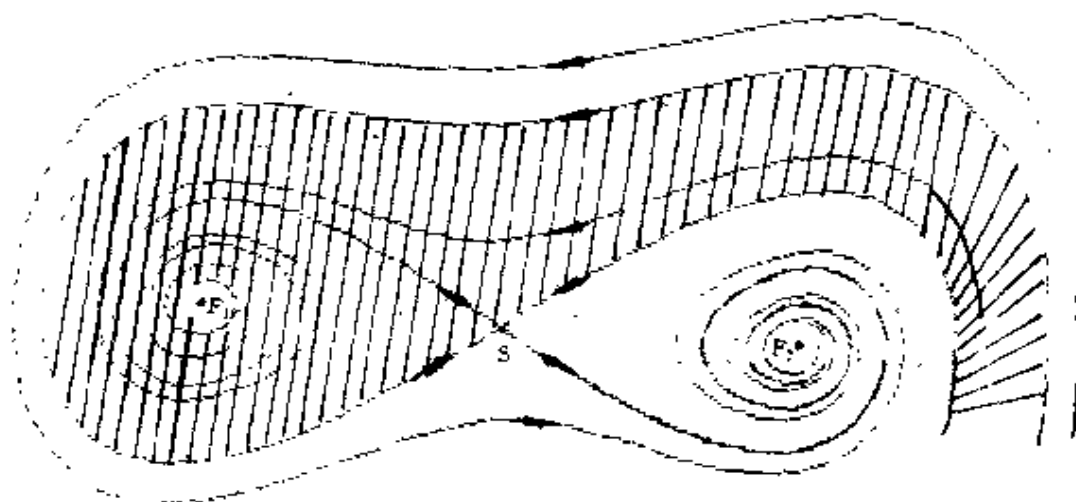


图 2-5 多个奇点和不同流域

F_1, F_2 : 稳定焦点; S : 鞍点。画斜线部分是 F_1 的流域, 未画部分是 F_2 的流域。

3. 解的稳定性

由上面的讨论可以看出, 非线性方程解的形式或性质与其定态解是否稳定有重要关系。从实际情况也可以看出, 解特别是定态解的稳定性有着十分重要的意义。因为一个系统, 无论是力学的、物理的、化学的, 还是生物的或是社会现象的, 在任何时候总是不可避免地要受到各种扰动作用。这些扰动可以是周围环境不可避免的微小变化, 如气流、温度或电磁场等的起伏, 也可以是系统内在的起伏。所谓描述系统运动的方程的解是稳定的, 是指系统即使在这些不可避免的扰动下偏离此解所表征的状态, 它仍将自动返回此状态, 即系统可以长期稳定地处于此状态, 或至少不会偏离此状态太远。反之, 我们说方程的解是不稳定的, 是指在不可避免的扰动下系统一旦稍许偏离此状态, 它将不能返回此

状态, 而是更加偏离此状态。这表示系统即使某一时刻处于此状态, 它也会立刻自动地偏离此状态而达到其他状态, 此状态自然是不稳定的。显然, 这种不稳定的解不能代表实际存在的状态。

如前所述, 周期解或混沌解存在与否跟定态解的稳定性有关, 因此判断定态解的稳定性更有着突出重要意义。

为了精确地表述稳定性概念, 特引入以下定义:

(1) 设 $t=t_0$ 时方程 (2·8) 的解为 $x_0(t_0)$ (为简单计, 我们用矢量 x 表示 $x_i, i=1, 2, \dots, n$), 另一受扰动偏离它的解为 $x(t_0)$ 。如果对于任意小的数 $\varepsilon > 0$, 总有一小数 $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ 存在, 使得当

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \eta \quad (2 \cdot 16)$$

必有

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \quad t_0 < t < \infty \quad (2 \cdot 17)$$

则称解 $x(t)$ 是在李雅普诺夫 (Ляпунов, Ляпунов, 俄罗斯数学家) 意义下稳定的, 简称李雅普诺夫稳定的或稳定的。

(2) 如果解 $x_0(t)$ 是稳定的, 且

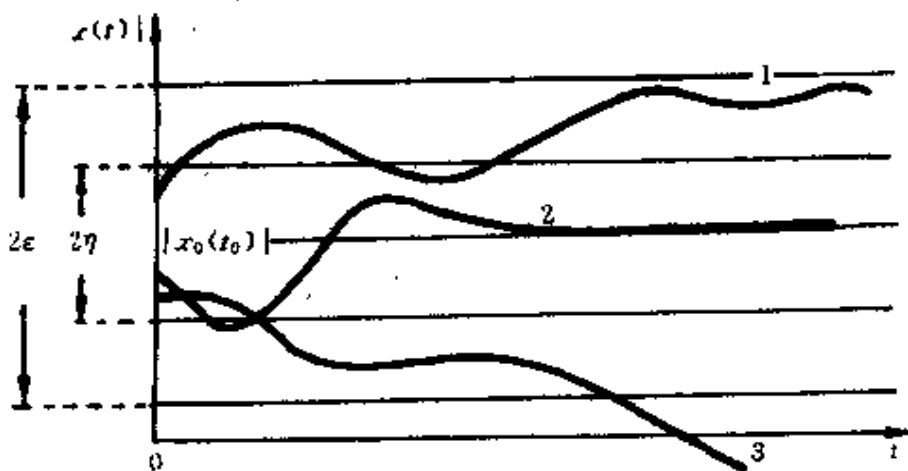
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0 \quad (2 \cdot 18)$$

则称此解是渐近稳定的。

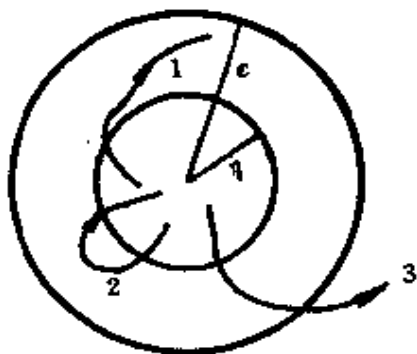
(3) 不满足李雅普诺夫稳定的解称为不稳定解。

李雅普诺夫稳定性表示在扰动或初始条件发生小的 ($< \eta$) 变化时, 解不致发生太大 ($< \varepsilon$) 的偏离。在渐近稳定条件下, 即使受到扰动, 系统最终仍将回到无扰动时的解。在不稳定情形下, 初始条件的适当改变 (如大于 η), 就足以使解的偏离超出任意给定的范围 (如 ε)。图 2-6(a) 和 (b) 分别用 $|x| - t$ 曲线和相平面形象地表示这三种情形。

可以看出, 前面讲的稳定定态就是渐近稳定的, 振荡解不是渐近稳定的, 但是 (李雅普诺夫) 稳定的, 因为解 $|x(t)|$ 始终是限定



(a)



(b)

图 2-6 三种不同稳定性

(a) $|x(t)|-t$ 曲线

(b) 相平面

1: 李雅普诺夫稳定, 2: 渐近稳定, 3: 不稳定

在一定范围内; 发散解自然是不稳定的。

例 1: 判断下述方程在给定的初始条件下解的稳定性:

(1) $\dot{x} = 2 + t, \quad x_0(0) = 1$

(2) $\dot{x} = x/3(t-1), \quad x_0(0) = 0$

(3) $\dot{x} = t - x, \quad x_0(0) = 1$

解:

(1) 很容易求得方程解的一般形式:

$$x(t) = 2t + \frac{t^2}{2} + c$$

式中 c 是任意常数。

对于给定的初始条件, 则有

$$x_0(0) = 2 \times 0 + \frac{1}{2} \times 0^2 + c = 1$$

因此 $c=1$, 即

$$x_0(t) = 2t + \frac{t^2}{2} + 1$$

于是得到

$$|x(0) - x_0(0)| = |c - 1|$$

$$|x(t) - x_0(t)| = |c - 1|$$

可见只要把扰动解 $x(t)$ 中的 c 取得极接近 1, 就可以使 $|x(0) - x_0(0)|$ 和 $|x(t) - x_0(t)|$ 都任意小。如取 $c = 1 + 10^{-5}$, 即可取 $\eta = \epsilon = 2 \times 10^{-5}$ 。因此 $x_0(t)$ 是稳定的。但式 (2.18) 不满足, 所以它不是渐近稳定的。

(2) 方程的一般解为

$$x(t) = c(t - 1)^{1/3}$$

由于给定的初始条件

$$x_0(0) = c(t - 1)^{1/3} = c(-1)^{1/3} = 0$$

因此 $c = 0$, 即

$$x_0(t) = 0$$

所以有

$$|x(0) - x_0(0)| = |c(-1)^{1/3} - 0| = |c|$$

$$|x(t) - x_0(t)| = |c(t - 1)^{1/3} - 0| = |c(t - 1)^{1/3}|$$

很明显, 即使初始时 $|x(0) - x_0(0)| = |c|$ 小于某一小数 η (如令 $\eta = |c| + 10^{-5}$), 但 $|x(t) - x_0(t)| = |c(t - 1)^{1/3}|$ 将随着时间演化后增大, 即它不可能小于任意小量 ϵ 。也就是说, 扰动解 $x(t)$ 不能趋于解 $x_0(t)$ 。因此解 $x_0(t)$ 是不稳的。

(3) 方程的一般解为

$$x(t) = t - 1 + ce^{-t}$$

由于给定的初始条件

$$x_0(0) = 0 - 1 + ce^{-0} = 1$$

所以 $c=2$, 即

$$x_0(t) = t - 1 + 2e^{-t}$$

因此

$$|x(0) - x_0(0)| = |-1 + c + 1 - 2| = |c - 2|$$

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0(t)| &= |t - 1 + ce^{-t} - t + 1 - 2e^{-t}| \\ &= |c - 2|e^{-t} < \epsilon \end{aligned}$$

可见只要 $|c-2|$ 是小数 (c 极接近 2), $|x(t) - x_0(t)|$ 就可以极小 (ϵ 可取得任意小), 而且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$

因此 $x_0(t)$ 是渐近稳定的。

4. 李雅普诺夫定理

李雅普诺夫对方程解的稳定性研究的贡献突出表现在他提出了判断稳定性的两种方法。李雅普诺夫第一法 (又称李雅普诺夫间接法) 是先把非线性方程在奇点 (定态) 附近线性化, 然后利用线性方程来判断定态的稳定性。李雅普诺夫第二法又称李雅普诺夫直接法, 它是仿照力学中用能量判断平衡态的稳定性那样, 不用求解方程, 而是用类似力学中能量的函数直接作出判断。我们先介绍直接法, 下节再介绍间接法。

为了用李雅普诺夫直接法判断定态解 x_0 的稳定性, 在相空间 (或经过坐标变换) 取定态 x_0 为原点并引入定义:

定义 1: 设 $V(x)$ 为在相空间坐标原点的邻域 D ($D: |x_i| < \eta$, η 为大于零的常数) 中的连续函数, 而且 V 是正定的, 即除在原点 $V(0)=0$ 外, 对所有 D 中别的点 $V(x) > 0$ 。我们称这样的

$V(x)$ 为李雅普诺夫函数。

定义 2: V 沿方程 (2·8) 的解 $x(t)$ 的全导数为

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \quad (2 \cdot 19)$$

李雅普诺夫直接法判断定态解的稳定性三定理:

定理 1: 如果对于微分方程组 (2·8) 存在一李雅普诺夫函数 $V(x)$, 其全导数 \dot{V} 是负半定的 (即对于 D 中所有点 $\dot{V} \leq 0$), 则方程的定态解是稳定的。

定理 2: 如果对于方程组存在一李雅普诺夫函数 V , 其全导数 \dot{V} 是负定的 (即除 $\dot{V}(0)=0$ 外, 对 D 中所有其他点 $\dot{V} < 0$), 也就是说, 如果除原点外, $\dot{V} < 0$, 则方程的定态解是渐近稳定的。

定理 3: 如果对于方程组存在一李雅普诺夫函数 V , 其全导数 \dot{V} 也是正定的 (即除原点外, $\dot{V} > 0$), 则方程的定态解是不稳定的。

可以用下面简单的几何方法证明李雅普诺夫定理。为形象计, 我们设只有两个变量, 分析结果自然可以推广到多个变量。让两变量 x_1 和 x_2 构成相平面, 取定态的代表点为原点, 作垂直于此相平面的 Z 轴, 令

$$Z = V(x_1, x_2)$$

则李雅普诺夫函数 $V(x_1, x_2)$ 组成一曲面。根据 V 的定义, 此曲面在原点 $(0, 0)$ 的邻域 D 具有杯子形状并于原点与相平面相切, 如图 2-7 所示。任何解在相平面上的轨线 $K[x_1(t), x_2(t)]$ 都在 V 曲面上有相应的曲线 C , 即系统状态随时间变化时, 曲面 V 上相应的曲线 C 在相平面上的投影 K 就是解的轨线。

当 \dot{V} 是负半定时, $\dot{V} \leq 0$, 这表示 V 表面上的曲线 (图中曲线

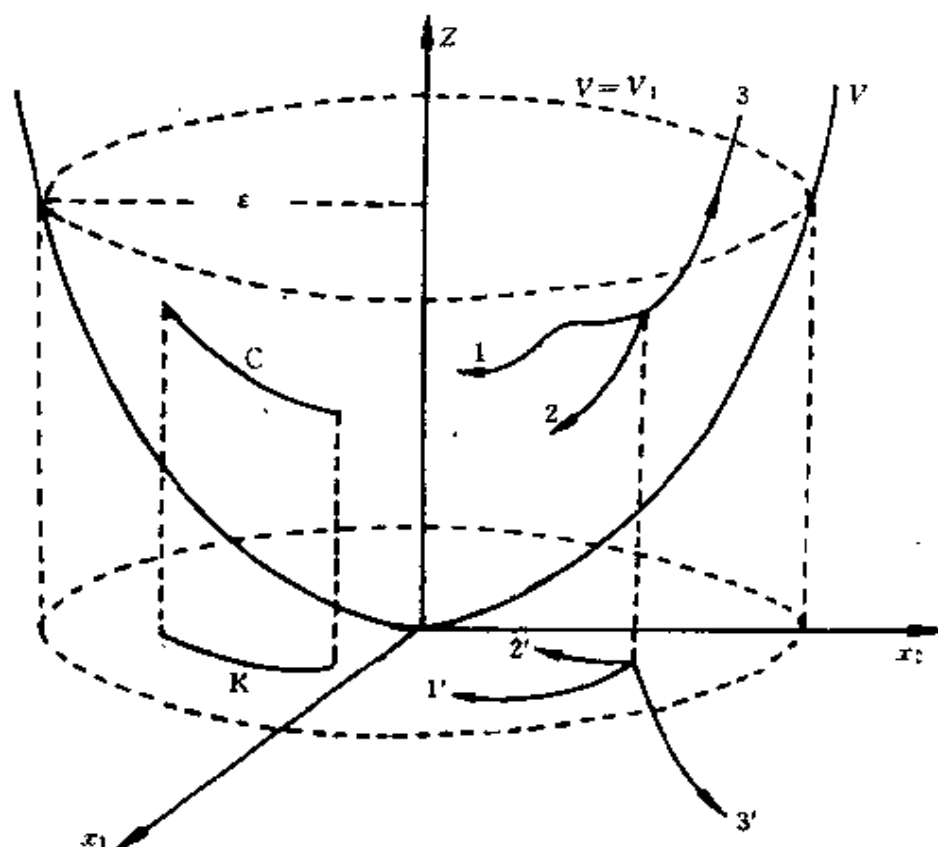


图 2-7 李雅普诺夫定理的几何证明

1; $V \leq 0$ 情形; 2; $V < 0$ 情形; 3; $V > 0$ 情形

1) 永不能向上而总是限制在 V 的某一水平面 $V=V_1$ 以下, 从而此曲线在相平面上的投影 (图中曲线 $1'$) 也总是限于某一半径为 ϵ 的区域内, 因此原点所表示的定态是李雅普诺夫稳定的。这就是定理 1。

当 \dot{V} 是负定的, $\dot{V} < 0$, 这时曲面 V 上的曲线 (图中曲线 2) 只能向下, 最后它将指向原点, 相应的相平面上的轨线 (图中曲线 $2'$) 自然也要指向原点, 因此原点 (定态) 是渐近稳定的。这就是定理 2。

如果 \dot{V} 是正定的, $\dot{V} > 0$, 即 V 值只能随时间增大, 曲面 V 上的曲线 (图中曲线 3) 总是斜向上, 它在相平面上的投影 (图中曲线 3') 终将越出有限大小的半径, 从而原点所表示的定态是不稳定的。这就是定理 3。

在上述定义和定理中, 自然可以将正负两字做相应的对换, 定理仍然成立。

虽然对某些简单的或特殊的系统 (方程组) 有求李雅普诺夫函数的方法, 但至今还没有什么普适求李雅普诺夫函数的方法。

对于保守的力学系统, 动能 T 总是正定的, 如果势能 U 在平衡点处取极小值, 则它在平衡点的邻域 D 也是正定的。于是就可以在广义坐标和广义动量所张成的相空间中取总能 $E (=T+U)$ 为李雅普诺夫函数。令 q_i 和 p_i 分别表广义坐标和广义动量, 则有哈密顿方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2 \cdot 19)$$

式中 H 为系统的哈密顿函数。对于保守系, $H=E$, 于是得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{E} &= \sum \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \\ &= \sum \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} = 0 \end{aligned}$$

即 \dot{V} 是负半定的, 从而定理 1 成立。因此势能在平衡点处取极小值的保守系的平衡态是稳定的, 但不是渐近稳定的, 因此系统可能在一定范围内振荡。

对于非保守 (有阻尼) 的力学系, 通常总能仍可取为李雅普诺夫函数。

例 1: 分析单摆运动时平衡点的稳定性。将单摆的运动方程 (2·12) 改写成一阶方程组 (令 $x_1 = x = \theta$, $\dot{x}_1 = x_2$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \alpha x_2\end{aligned}\quad (2 \cdot 20)$$

单摆的势能为

$$U = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \quad (2 \cdot 21)$$

U 在平衡点处 ($x_1 = \theta = 0$) 取极小值, 取李雅普诺夫函数 V 等于单摆的总能量得

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \quad (2 \cdot 22)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin x_1 \cdot x_2 + x_2 \left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - \alpha x_2 \right) \\ &= -\alpha x_2^2 < 0\end{aligned}\quad (2 \cdot 23)$$

即 V 是正定的而 \dot{V} 是负定的。于是李雅普诺夫定理 2 成立, 即平衡点是渐近稳定的, 单摆的阻尼振荡最后要停止在平衡点处不动。这与图 2-1 的结果一致。

如果忽略单摆所受阻尼作用, $\alpha = 0$, $\dot{V} = 0$, V 是负半定的, 定理 1 成立, 平衡态是稳定的但不是渐近稳定的。这时单摆便作无阻尼振荡了。

例 2: 分析范德波尔方程定态的稳定性。

把范德波尔方程 (1·21) 写成一阶方程组形式为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 + \alpha(1 - x_1^2)x_2\end{aligned}\quad (2 \cdot 24)$$

很明显, 原点 ($x_1 = x_2 = 0$) 就是定态。取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0 \quad (2 \cdot 25)$$

则

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \alpha(1 - x_1^2)x_2^2 \quad (2 \cdot 26)$$

根据 α 取值不同, 分两种情形讨论:

(1) $\alpha < 0$

这时如果把原点 (定态) 的邻域 D 取作 $|x_1| < 1$, 则

$$\dot{V} < 0$$

因为 \dot{V} 是负定的, 李雅普诺夫定理 2 成立, 故原点是渐近稳定的。

(2) $\alpha > 0$

这时在原点的邻域 $|x_1| < 1$ 中

$$\dot{V} > 0$$

因为 \dot{V} 是正定的, 李雅普诺夫定理 3 成立, 即原点是不稳的: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 所有原点附近的轨线都要跑出邻域 $|x_1| < 1$ 以外。

如果把原点的邻域取得比 $|x_1| = 1$ 还大一些, 结果将如何呢?

在这样比较大的邻域内, \dot{V} 的符号便不定了。这时便不能用式 (2·25) 那样的李雅普诺夫函数判断 $|x_1| = 1$ 以外区域的稳定性了。事实上, 如图 2-3 所示的, $\alpha > 0$ 存在周期解。当然, 这样的周期解只能在邻域 $|x_1| = 1$ 以外 [参考图 2-3 (b)]。

§ 3 线性稳定性分析和奇点分类

因为线性方程容易求解也容易分析其解的性质, 故此可以利用线性方程的解来分析非线性方程在定态附近解的表现。

1. 线性稳定性分析

设 $x_{i0}(t)$ 为非线性方程 (2·8) 的一个解 ($i=1, \dots, n$, n 表示状态变量个数, 以后写方程和解时, 略去 “ $i=1, \dots, n$ ”), 为

研究此解的稳定性, 令 $x_i(t)$ 为在此解附近的另一解:

$$x_i(t) = x_{i0}(t) + \xi_i(t) \quad (3 \cdot 1)$$

$x_{i0}(t)$ 称为参考解, 相应的态称为参考态, $\xi_i(t)$ 就是态 $x_i(t)$ 对参考态的偏离。为了分析定态的稳定性及定态的邻域解的表现, 通常都是取定态作为参考态。

将式(3·1)代入方程(2·8)得

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i0}(t) + \dot{\xi}_i(t) &= f_i(x_j) = f_i(x_{j0} + \xi_j) \\ &= f_i(x_{j0}) + \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j \end{aligned}$$

由此得 (下标“0”表示在参考态处取值)

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j \quad (3 \cdot 2)$$

上式就是非线性方程(2·8)在参考态附近的线性化方程。显然, 原点($\xi_i=0$)是线性化方程的平凡解, 此平凡解就代表原来的非线性方程的参考态。线性方程是很容易求解并分析其稳定性(见下面)。由线性化方程原点(平凡解)的稳定性可以分析原来非线性方程参考态的稳定性(李雅普诺夫第一法或李雅普诺夫间接法), 这是根据下面的定理:

线性稳定性定理: 如果非线性方程(2·8)的线性化方程(3·2)的原点(平衡点)是渐近稳定的, 则参考态(x_{i0})是非线性方程(2·8)的渐近稳定解; 如果线性化方程的原点是不稳定的, 则参考态也是非线性方程的不稳定解*。

上述定理表示可以根据线性化方程解的渐近稳定和不稳定分别判断原非线性方程解(参考态)的渐近稳定和不稳定, 但是对于

* 定理的证明可以参考某些关于微分方程方面的专著, 如陆启韶编著:《常微分方程的定性方法和分叉》, §4·4, 北京航空航天大学出版社, 1989年。

线性化方程解只是稳定而不是渐近稳定的情形, 上述定理不能给非线性方程解的性质作出判断。事实上, 在这种临界情形下, 微小的扰动或方程中某些参数值的微小变化可以使解发生变化, 甚至是根本的(拓扑性质的)变化。这就是出现所谓结构不稳定或分岔现象, 我们将在 §6 研究。

2. 线性方程组的解及其稳定性

为求解线性方程 (3·2) 并分析其解的稳定性, 我们就两个变量的情形进行研究, 其结果不难推广到多变量的情形。当只有两个变量时, 式 (3·2) 取如下简单形式:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2\end{aligned}\quad (3 \cdot 3)$$

式中

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad i, j = 1, 2 \quad (3 \cdot 4)$$

通常方程 (3·3) 具有如下形式的解:

$$\xi_1 = \xi_{10} e^{\lambda}; \quad \xi_2 = \xi_{20} e^{\lambda} \quad (3 \cdot 5)$$

将上式代入 (3·3) 得到关于 ξ_{10} 和 ξ_{20} 的齐次代数方程

$$\lambda \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 6)$$

上式有非平凡解的条件为 λ 是下述特征方程的解:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3 \cdot 7)$$

或

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0 \quad (3 \cdot 8)$$

其中 Δ 和 T 分别是 (3·3) 系数矩阵的行列式及其迹:

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0\end{aligned}\quad (3 \cdot 9)$$

$$T = a_{11} + a_{22} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 \quad (3 \cdot 10)$$

方程(3·7)或(3·8)的两个特征根是

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2} \quad (3 \cdot 11)$$

从而线性方程组(3·3)有两组线性无关的解

$$\xi_1 = A_1 e^{\lambda_1 t}; \quad \xi_2 = B_1 e^{\lambda_1 t} \quad (3 \cdot 12)$$

和

$$\xi_1 = A_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \xi_2 = B_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3 \cdot 13)$$

$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ 分别是系数矩阵对应于特征根 λ_1 和 λ_2 的特征矢。因

此线性方程(3·3)的解的一般形式为

$$\begin{aligned}\xi_1 &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ \xi_2 &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\quad (3 \cdot 14)$$

式中系数 c_1 和 c_2 由初始条件决定。

由式(3·14)可以立即得到关于线性方程(3·3)的解 ξ_i 和非线性方程(2·8)($n=2$ 的情形)的解(它的参考态或定态 x_{i0})的稳定性的三种情形:

(1) 如果 λ_1 和 λ_2 的实部都是负的, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i| = 0$$

即解 ξ_i 是渐近稳定的, 根据上面的线性稳定性定理, 非线性方程(2·8)的参考态(或定态) x_{i0} 也是渐近稳定的。

(2) 如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个的实部是正的, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i| = \infty$$

即 ξ_i 是不稳定的, 从而非线性方程的解 x_{i0} 也是不稳定的。

(3) 如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个的实部等于零, 另一实部也是负的, 则 ξ_i 是稳定的, 但不是渐近稳定的, 从而这时的非线性方程的参考态 x_{i0} 处于临界情形, 必须另行讨论 (§ 6)。

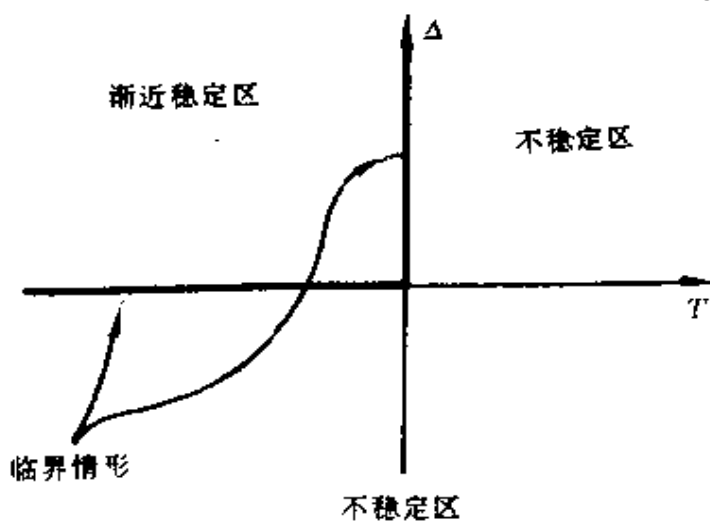


图 3-1

由式 (3·11) 可知, 方程的解到底取这三种情形的哪一种得由方程 (3·3) 的系数矩阵的行列式 Δ 和迹 T 决定。这可以用图 3-1 表示, 其中 $\Delta=0$, $T<0$ 和 $T=0$, $\Delta>0$ 两部分对应于上述第三种情形, 即线性方程的解是 (李雅普诺夫) 稳定的, 但不是渐近稳定的, 相应的非线性方程的解处于临界情形。

3. 罗斯-霍维茨判据

把上而关于两个变量的分析推广到多变量情形, 可以得到一个关于渐近稳定性的判据。

n 个变量在参考态 x_{i0} 附近的线性化方程为 (3·2)。类似式 (3·5), 设其解具有如下形式:

$$\xi_i = \xi_{i0} e^{\lambda t} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3 \cdot 15)$$

将上式代入(3·2)可得类似(3·6)的方程:

$$\lambda \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{n0} \end{bmatrix} \quad (3 \cdot 16)$$

上式有非平凡解的条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3 \cdot 17)$$

上式是关于 λ 的 n 次代数方程,通常可以把它写成下面的形式:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3 \cdot 18)$$

为了使参考态是渐近稳定的,要求所有 λ 的根都是负的。但是高次方程一般是不易求解的。罗斯(Routh)和霍维茨(Hurwitz)提出了一个不用解方程(3·18)就可以判断 λ 的根是否都是负的判据。为此,设 $a_0 > 0$ [如果情况正好相反,只要对(3·18)乘以-1即可],构造一组行列式:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix} \quad (3 \cdot 19)$$

由此得罗斯-霍维茨判据：式(3·18)的所有根都是负的(即方程的解是渐近稳定的)的充分和必要条件是所有行列式(3·19)都是正的，即

$$\Delta_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3 \cdot 20)$$

由此可见，为了判断非线性方程的解是否渐近稳定，只要将方程线性化，然后根据式(3·17)~(3·20)即可作出判断。

例：判断下列方程组的零解是否是稳定的：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - z + x^2 \sin x \\ \dot{y} &= x - y + (x^2 y + z^2) e^x \\ \dot{z} &= x + y - z - (y^2 + z^2) \cos x \end{aligned} \quad (3 \cdot 21)$$

解：此非线性方程组在零点附近的线性化方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - z \\ \dot{y} &= x - y \\ \dot{z} &= x + y - z \end{aligned}$$

上式的特征值方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

由此得 $a_0=1$, $a_1=4$, $a_2=5$, $a_3=3$, 从而

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17 > 0$$

因此根据罗斯-霍维茨判据, 方程组(3·21)的零解是渐近稳定的。

4. 奇点的分类

根据线性方程(3·3)的特征根(3·11)取值不同, 解和奇点(平衡点)的性质也不同, 它们可以分为以下几类:

(1) $\Delta > 0$, $T^2 - 4\Delta \geq 0$ 情形

这时两个特征根 λ_1 和 λ_2 都是实的, 而且符号相同。由式(3·14)可知, 解按指数形式发展($T > 0$ 时)而远离奇点或衰减而趋于奇点($T < 0$ 时)。这样的奇点称为结点, 它们分别是不稳定的和渐近稳定的, 如图 3-2 所示。

(2) $\Delta > 0$, $T^2 - 4\Delta < 0$, 但 $T \neq 0$ 情形

这时两个特征根 λ_1 和 λ_2 都是复数, 由(3·14)可知, 解 ξ_1 和 ξ_2 都是振荡的, 但振幅按指数方式增长(当 $T > 0$ 时)或按指数形式衰减(当 $T < 0$ 时)。这样的奇点(平衡点)称为焦点或螺线点, 它们分别是不稳定的和渐近稳定的, 其周围解的轨线为螺线, 如图 3-3 所示。显然, 这种螺线型的解分别相当于增幅或阻尼振荡。

(3) $T = 0$, $\Delta > 0$ 情形

这时两个特征根都是虚的, 从而解是振荡的, 它们在相平面

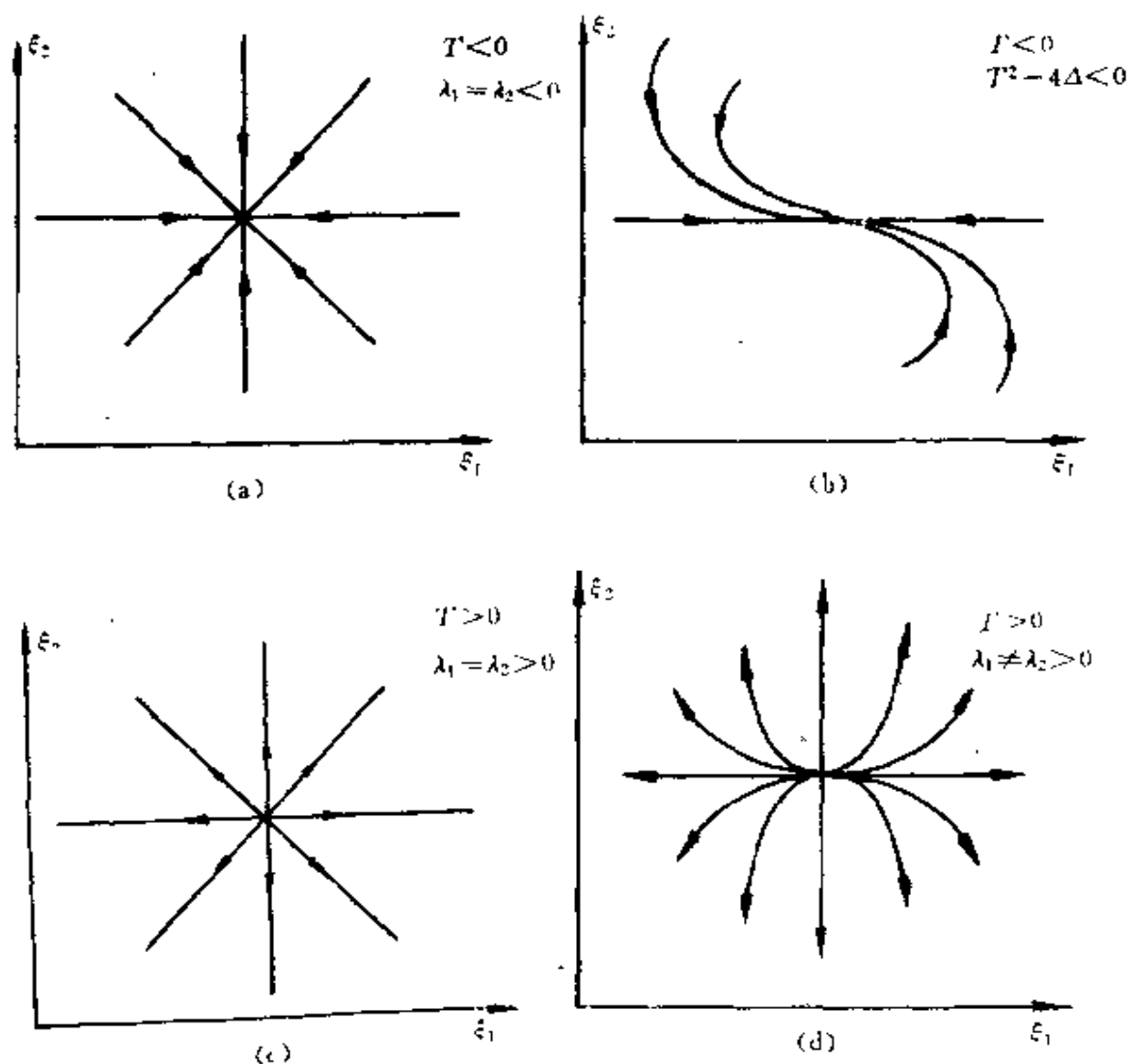


图 3-2 各种结点

(a) 稳定结点 (b) 稳定切结点 (c) 不稳切结点 (d) 不稳结点

上的轨迹是一些封闭曲线 (图 3-4)。这时的奇点称为中心。由于中心附近的解的封闭曲线并不趋于中心, 因此如前节所述, 中心点是李雅普诺夫稳定而不是渐近稳定。

(4) $\Delta < 0$ 情形

这时两个特征根 λ_1 和 λ_2 都是实的, 但其中之一是正的, 另一是负的。因此奇点一定是不稳的, 这样的奇点称为鞍点。由 (3·

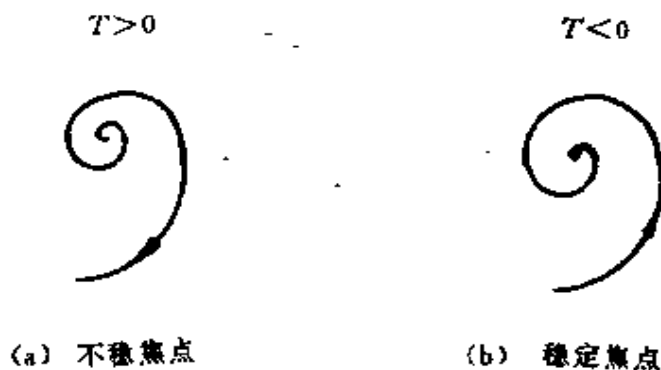


图 3-3 焦 点

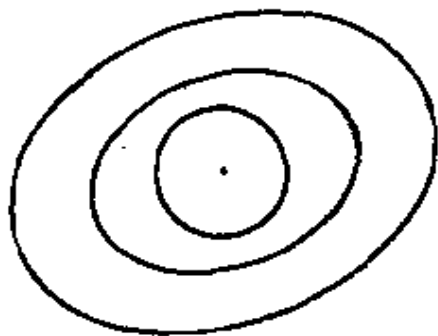


图 3-4 中 心

14) 有

$$\begin{aligned}
 e^{\omega_1 t} &= \frac{A_2 \xi_2 - B_2 \xi_1}{c_1 A_2 B_1 - c_1 A_1 B_2} \\
 e^{\omega_2 t} &= \frac{A_1 \xi_2 - B_1 \xi_1}{c_2 A_1 B_2 - c_2 A_2 B_1}
 \end{aligned}
 \quad (3 \cdot 21)$$

设 $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$, 于是得到奇点附近解的轨迹:

$$\left(\frac{A_2 \xi_2 - B_2 \xi_1}{c_1 A_2 B_1 - c_1 A_1 B_2} \right)^{|\omega_2/\omega_1|} = \frac{A_1 \xi_2 - B_1 \xi_1}{c_2 A_1 B_1 - c_2 A_2 B_1} \quad (3 \cdot 22)$$

这是一些由初始条件 (c_1 和 c_2 的不同取值) 决定的双曲线族, 如图 3-5 所示。其两条渐近线分别为

$$A_1 \xi_2 - B_1 \xi_1 = 0$$

$$A_2 \xi_2 - B_2 \xi_1 = 0$$

由图可以看出, 渐近线往往把相平面中的轨线分属不同流域, 因此渐近线又称分界线。

以上四种情形分属 $\Delta-T$ 平面中不同区域, 如图 3-6 所示。

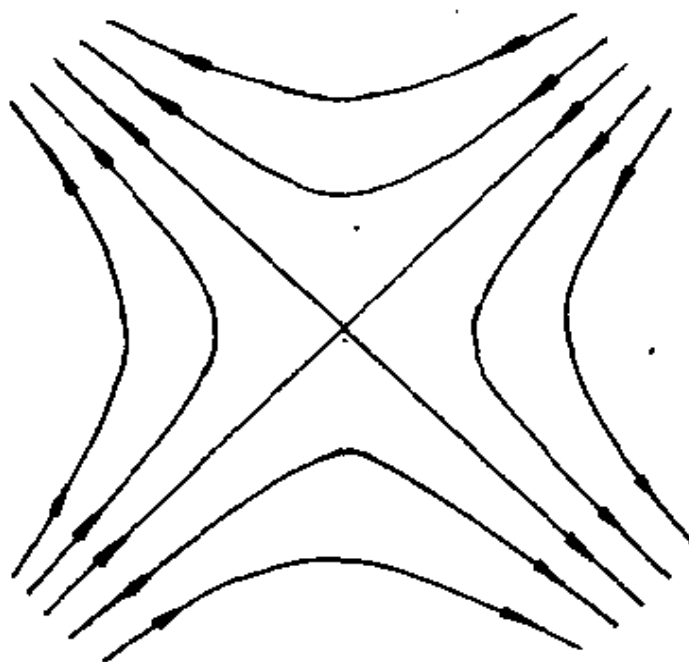


图 3-5 鞍 点

5. 实 例

现在利用本节的方法分析几个动力学系统解的稳定性。

(1) 阻尼单摆

先分析早已谈到过的阻尼单摆。它的运动方程是(3·12)或(3·20)。很容易知道,方程(3·20)有两个奇点(即平衡点或定态),这就是 $(0,0)$ 和 $(\pm\pi,0)$ 。

根据式(3·4),在点 $(0,0)$ 附近的线性化方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\omega^2 \xi_1 - \alpha \xi_2\end{aligned}\tag{3·24}$$

式中 $\omega^2 = g/l$ 。由式(3·9)和(3·10)得到

$$\Delta = \omega^2; \quad T = -\alpha$$

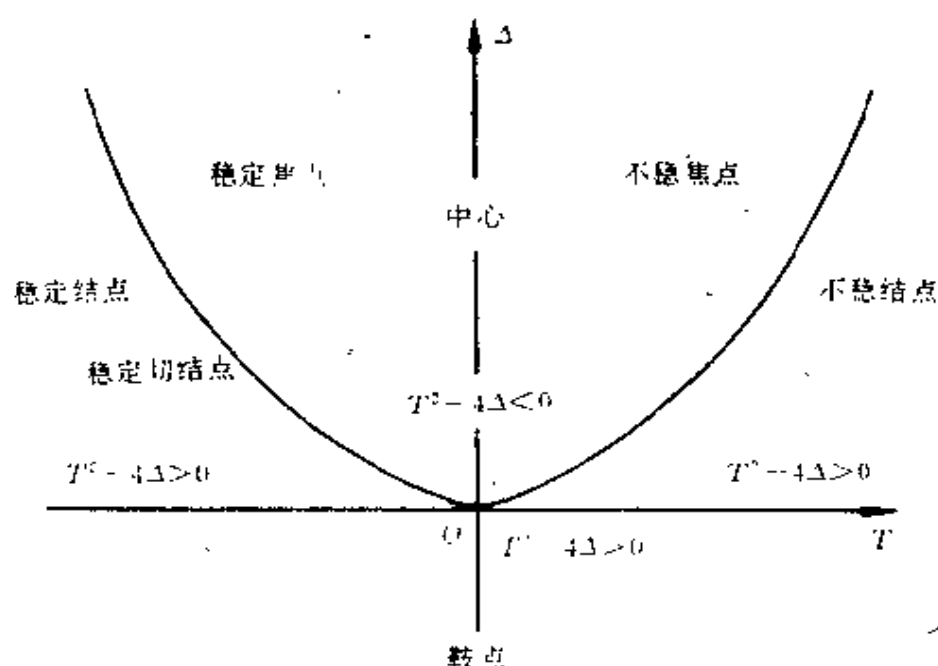


图 3-6 奇点的分区

$$T^2 - 4\Delta = \alpha^2 - 4\omega^2$$

由此可见：

- i. 如果 $\alpha \geq 2\omega$ ，平衡点 $(0, 0)$ 是稳定结点（过阻尼）；
- ii. 如果 $\alpha < 2\omega$ ，平衡点 $(0, 0)$ 是稳定焦点，单摆作阻尼振荡。图 2-1 (b) 所示就是这种情形。

这两种情形都表示平衡点 $(0, 0)$ 总是渐近稳定的，这是大家熟知的事并且在 § 2 已经讨论了的。

当阻尼可忽略时， $\alpha = 0$ ，于是 $T = 0$ ，从而奇点 $(0, 0)$ 变成中心，即单摆将不停地围绕平衡点 $(0, 0)$ 作等幅振荡，振幅大小由初始条件（偏离平衡点的程度）决定，这与 § 2 所说此时平衡点是李雅普诺夫稳定，但不是渐近稳定的结论一致。

在另一奇点 $(\pi, 0)$ 附近，式 (3·3) 和 (3·4) 给出此时的线性

化方程是

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \omega^2 \xi_1 - \alpha \xi_2\end{aligned}\quad (3 \cdot 25)$$

由此得

$$\Delta = -\omega^2 < 0, \quad T = -\alpha$$

因此平衡点 $(\pi, 0)$ 是鞍点, 即此平衡点是不稳定的, 这也是大家所熟知的。

对于简谐振子, 上面各式中的 $\sin x_1$ 变为 x_1 , 从而不存在上面所说的第二平衡点 $(\pi, 0)$, 对第一平衡点 $(0, 0)$ 的分析和结果仍不变。

(2) 范德波尔方程

我们讨论没有强迫项的情形。这时范德波尔方程 (1·21) 可写成下面的方程组:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 + \alpha(1 - x_1^2)x_2\end{aligned}\quad (3 \cdot 26)$$

显然, 奇点是 $(0, 0)$, 在奇点附近的线性化方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\omega^2 \xi_1 + \alpha \xi_2\end{aligned}\quad (3 \cdot 27)$$

从而

$$T = \alpha; \quad \Delta = \omega^2; \quad T^2 - 4\Delta = \alpha^2 - 4\omega^2 \quad (3 \cdot 28)$$

于是我们得到关于奇点 $(0, 0)$ 的以下几种情形:

- i. $\alpha \leq -2\omega$: 两特征根都是负实数, 平衡点 $(0, 0)$ 是稳定结点;
- ii. $-2\omega < \alpha < 0$: 两特征根都是复数并都具有负实部, 平衡点是稳定焦点;
- iii. $\alpha = 0$: 两特征根都是虚数, 平衡点是中心;

iv. $0 < \alpha < 2\omega$: 两特征根都是复数且都具有正实部, 平衡点是不稳焦点;

v. $\alpha \geq 2\omega$: 两特征根都是正实数, 平衡点为不稳结点。

在不稳焦点和不稳结点 ($\alpha > 0$ 时) 附近, 范德波尔方程存在振荡解, 我们将在下节进一步分析讨论。

(3) 洛特卡-伏尔泰拉模型

方程 (1·44) 有两个奇点:

原点 O : $x_{10} = 0, x_{20} = 0$

C 点: $x_{1c} = k_4/k_3, x_{2c} = k_1/k_2$

(i) 奇点为原点 $(0, 0)$ 时。令

$$\xi_1 = x_1 - x_{10} = x_1$$

$$\xi_2 = x_2 - x_{20} = x_2$$

于是线性化方程为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= k_1 \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= -k_4 \xi_2 \end{aligned} \quad (3 \cdot 29)$$

从而

$$\begin{aligned} T &= k_1 - k_4 \\ \Delta &= -k_1 k_4 < 0 \end{aligned}$$

即原点 $(0, 0)$ 是鞍点, 它总是不稳定的。

(ii) 奇点为 C $(k_4/k_3, k_1/k_2)$ 时。令

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - k_4/k_3 \\ \xi_2 &= x_2 - k_1/k_2 \end{aligned} \quad (3 \cdot 30)$$

由式 (3·4) 得

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0; & a_{12} &= -k_2 k_4 / k_3 \\ a_{21} &= k_1 k_3 / k_2; & a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

于是这时的线性化方程是

§ 3 线性稳定性分析和奇点分类

49

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -(k_2 k_4 / k_3) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -(k_1 k_3 / k_2) \xi_1\end{aligned}\quad (3 \cdot 31)$$

从而

$$\begin{aligned}T &= 0 \\ \Delta &= k_1 k_4 > 0\end{aligned}$$

可见奇点 C 是中心, 即在 C 附近方程具有周期解。因为

$$\dot{\xi}_1 = -(k_2 k_4 / k_3) \dot{\xi}_2 = -k_1 k_4 \xi_1 \quad (3 \cdot 32)$$

故振荡圆频率和周期分别为

$$\omega = (k_1 k_4)^{1/2} \quad (3 \cdot 33)$$

$$\tau = 2\pi / \omega = 2\pi (k_1 k_4)^{-1/2} \quad (3 \cdot 34)$$

这表明在奇点 C 附近, 猎物和捕食者的数量都是周期变化的。

我们不难求出洛特卡-伏尔泰拉方程在相平面上的闭轨线。为此, 令

$$u = \ln x_1; \quad v = \ln x_2 \quad (3 \cdot 35)$$

由式 (1 · 44) 得到关于 u 和 v 的变化方程:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= k_1 - k_2 e^v \\ \dot{v} &= k_3 e^u - k_4\end{aligned}\quad (3 \cdot 36)$$

分别用 $(k_3 e^u - k_4)$ 和 $(k_2 e^v - k_1)$ 乘上两式然后相加得

$$k_3 e^u \dot{u} + k_2 e^v \dot{v} - k_4 \dot{u} - k_1 \dot{v} = 0$$

显然上式有一运动积分:

$$\begin{aligned}V &= k_3 e^u + k_2 e^v - k_4 u - k_1 v \\ &= k_3 x_1 + k_2 x_2 - k_4 \ln x_1 - k_1 \ln x_2 \\ &= K(\text{常数})\end{aligned}\quad (3 \cdot 37)$$

不同的初始条件有不同的 K 值, 从而有围绕平衡点 C 的不同闭曲线 (图 3-7)。

因为在 x_1 和 x_2 周期变化过程中, V 为一守恒量, 我们称这种

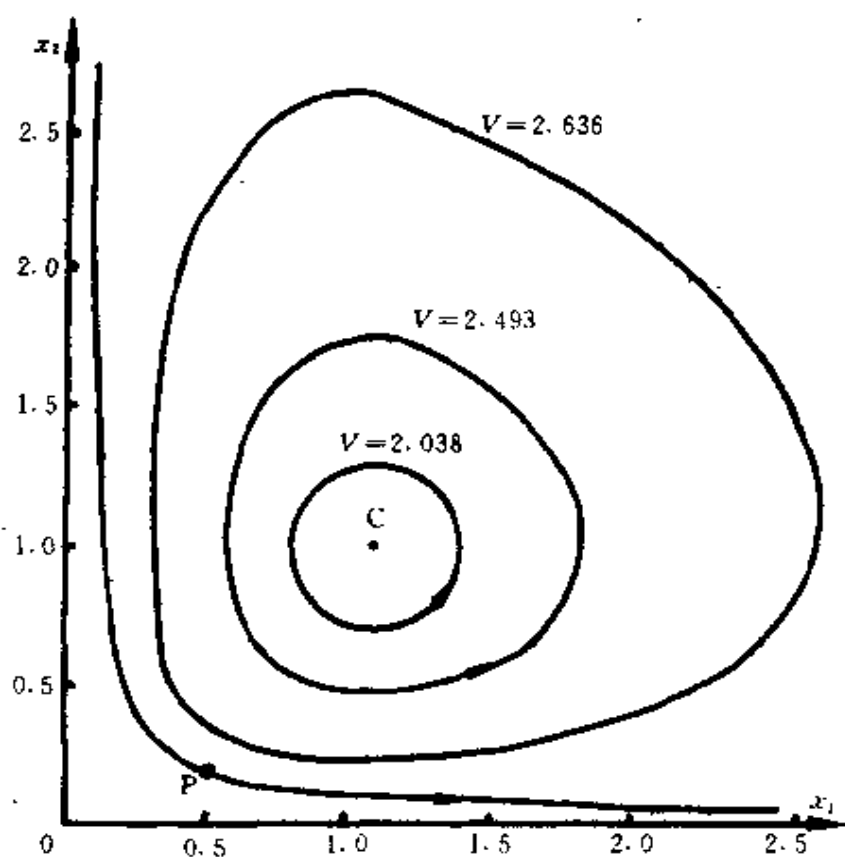


图 3-7 洛特卡-伏尔泰拉模型的轨线

存在守恒量的振荡为守恒振荡，以别于耗散系统中最典型的振荡——极限环型振荡 (§ 4)。

必须注意，在这种非线性的守恒振荡中，其周期不是像线性情形那样〔式(3·34)]是一常数，而是与初始条件〔式(3·37)中的 K 值]有关，式(3·34)仅适用于奇点的邻近。

上述结果的实际意义是十分明显的。原点(0, 0)所代表的定态是猎物 and 捕食者都不存在的状态。作为鞍点它是不稳定的，这表示只要稍有偏离 (x_1 和 x_2 取极小值，如图 3-7 中的 P 点)，捕食者

由于得不到足够食物(x_1 太小)要逐渐消亡($x_2 \rightarrow 0$),但猎物(x_1)却由于捕食者极少而可以迅速繁衍(图 3-7 中通过 P 点的轨线靠近 x_1 轴使 x_1 无限增大)。当然,我们要注意,洛特卡-伏尔泰拉模型只考虑了捕食者的存在使猎物减员,事实上在有限范围内,由于食物有限引起猎物之间相互作用(如争食)也要引起减员(§ 1)。当猎物数量很大时,我们就不能忽略这种自身的减员。因此靠近 x_1 轴(渐近线)的猎物数量 x_1 不可能像模型所预言那样趋于无穷大。

中心 C 表示猎物和捕食者的数量处于平衡。但是这种生态平衡不是(渐近)稳定的。一旦稍受扰动有些偏离,猎物和捕食者的数量就将分别围绕各自的平衡值 k_4/k_3 和 k_1/k_2 周期地变化,变化幅度由偏离的程度决定,这就是图 3-7 中围绕 C 点的不同闭曲线。这种周期过程便从理论上说明了观察到的猎物与捕食者共存的系统中,两者数量交替变化的现象。图 3-8 是尤提达(Utida)1957 年在实验室用培养皿饲养豆象(猎物)和寄生蜂(捕食者)时观察到的结果。可以看出,它们的数量是交替变化的。

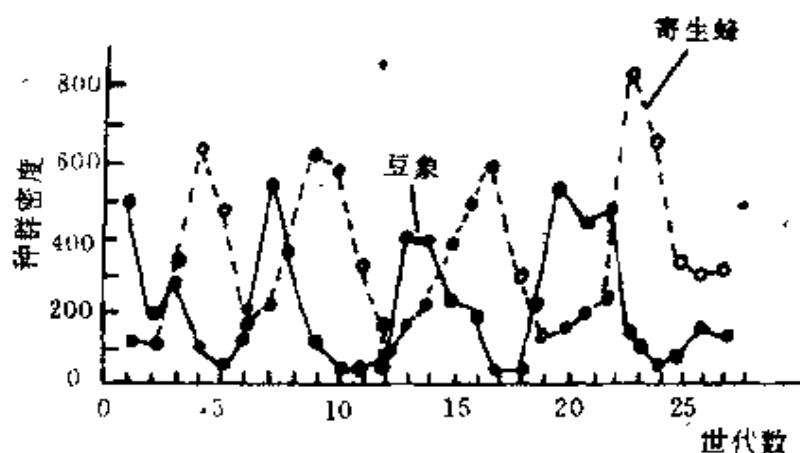


图 3-8 豆象和寄生蜂实验

当然,仔细分析可以看出,洛特卡-伏尔泰拉模型仍嫌简单:

(1) 大量实际的周期过程的一些特性往往都是与初始条件无关的, 因此它们都是极限环型的振荡(参考 § 4)。一般的捕食者-猎物系统的数量变化是否与初始条件无关, 尚待探讨。(2) 如上所述, 此模型忽略了猎物(以及捕食者)数量很大时它们内部相互之间影响引起的减员。已有一些人提出了对洛特卡-伏尔泰拉模型的改进以及推广, 还有的提出了新的模型(参考 § 23)。

在结束本节前我们还要着重指出: 以上是从线性化方程分析奇点(定态)及其附近非线性方程解的性质。越远离奇点, 线性化的误差自然越大。因此不能轻易根据线性化方程的结果推断远离奇点处非线性方程解的行为。特别是线性化方程无法给出在($\Delta=0$, $T<0$)和($T=0$, $\Delta>0$)两情形下非线性方程中的参数的微小变化可能引起解的突变(参考 § 4 和 § 6)。

§ 4 极 限 环

非线性系统的周期过程除了极少数可能是上节所述的与初始条件有关的守恒振荡外, 大多数都应该是极限环型的。即极限环可以认为是最典型的非线性周期过程。本节讨论有关极限环的一些基本规律。

1. 极限环型振荡和轨道稳定性

我们仍以范德波尔方程(1·21)为典型例子开始对极限环的讨论。

在 § 2 中我们已经讲到, 范德波尔方程(2·13)在 $\alpha=1$ 时的周期解是极限环。极限环的特点是它附近的轨线都趋向此环(当环不稳定时, 也可能远离此环, 见下面), 正因为这样, 极限环才可能是孤立的, 即它不像线性方程的中心附近可以有连续无穷多

的闭曲线。

从§3的分析可知, $\alpha < 0$ 时范德波尔方程的奇点 $(0, 0)$ 是稳定结点或稳定焦点, 此时范德波尔解的轨线都要趋于此奇点, 从而不可能形成闭曲线(极限环)。只有当 $\alpha > 0$ 时, 奇点不稳定, 于是才有可能出现振荡解。我们现在就从物理概念来分析为什么范德波尔方程中阻尼系数 $\alpha > 0$ 时会出现极限环型振荡(关于存在极限环的数学证明见本节末)。

为便于分析, 我们重新写出范德波尔方程:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1 \cdot 21)$$

上式表示有阻尼作用(第二项)的振子的运动。当位移 x 很小时, 正的阻尼作用项 $\alpha x^2 \dot{x}$ 可以忽略, 而 $-\alpha \dot{x}$ 项起着负的阻尼作用, 因此系统的运动将使 x 逐渐增大, 从而奇点 $x=0$ 不稳定。但当 x 很大时, 阻尼项 $\alpha x^2 \dot{x}$ 越来越起支配作用, 它要使 x 减小从而使运动限制在一定范围(大小由参数 α 决定)内。又由于方程除原点外别无其他奇点(定态)可供停留, 所以系统只可能在一定范围内振荡, 其在相平面 (\dot{x}, x) 的轨线只能是闭曲线, 从而系统的运动是极限环型的周期振荡(图2-3)。

除了像范德波尔方程这样可在不稳奇点周围形成极限环型的振动外, 也可能存在相反的情况: 在稳定焦点(或结点)附近, 非线性方程也有封闭曲线形式的解。但系统处于此封闭曲线上的振动状态时, 它最终要离开此振动状态而落在此奇点所表示的稳定定态(或平衡态)上, 或者由振动状态飞向远处。这后一种封闭曲线也称作极限环, 不过是不稳的极限环。

在§2, 我们定义了状态(或奇点)的稳定性, 与之类似, 我们也可以定义轨道的稳定性:

轨道稳定性: 一个轨道 T 是轨道稳定的, 如果给定一 ϵ , 必有一 $\eta(\epsilon)$ 存在, 使得在另一轨道上的点 $x(t_0)$ 在 t_0 时刻与 T 距离小

于 η 时, 在 $t > t_0$ 时 $x(t)$ 与 T 距离小于 ϵ 。如果轨道 T 不满足此轨道稳定性条件, 则称 T 是轨道不稳定的。如果轨道 T 满足轨道稳定性条件, 而且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t)$ 与 T 的距离趋于零, 则称 T 是渐近轨道稳定的。

形象地说, 如果随着时间的消逝, 轨道 T 附近的所有其他轨道始终保持在与 T 有限距离内, 则 T 是轨道稳定的, 如果 T 附近的轨道最终趋于 T , 则 T 还是渐近轨道稳定的。如果 T 附近的轨道最终都要远离 T , 则 T 是轨道不稳定的。

可以看出, 上面讲的稳定极限环是渐近轨道稳定的, 而不稳定极限环则是轨道不稳定的。§3 所说中心附近的闭曲线是轨道稳定的, 但不是渐近轨道稳定的, 因中心周围每一闭曲线的附近还存在其他闭曲线, 相邻两闭曲线始终保持在有限距离内。

从上面的例子和分析可以看出, 极限环至少有以下一些特点:

(1) 一个极限环的邻域不可能有另外的极限环。这表示在相平面中, 极限环所表示的振动状态是孤立的 (与中心附近的振动状态比较)。

(2) 极限环的一些特征 (形状、大小、周期等) 由系统运动规律 (或方程) 和面有性质 (参数) 决定, 与初始状态或扰动无关。

(3) 包围不稳定点的极限环一定是 (轨道) 稳定的, 而包围稳定奇点的极限环总是 (轨道) 不稳定的。

另外, 一个极限环也可以是半稳定的 (图 4-2)。

还可以有这样的的情形: 稳定 (不稳定) 奇点之外是不稳定 (稳定) 极限环, 不稳定 (稳定) 极限环之外又是稳定 (不稳定) 极限环 (图 4-1), 如此等等, 即稳定极限环与不稳定极限环可以交替地互相包围。

极限环的振动周期可以用下面的公式算得到。由式 (2·9) 得

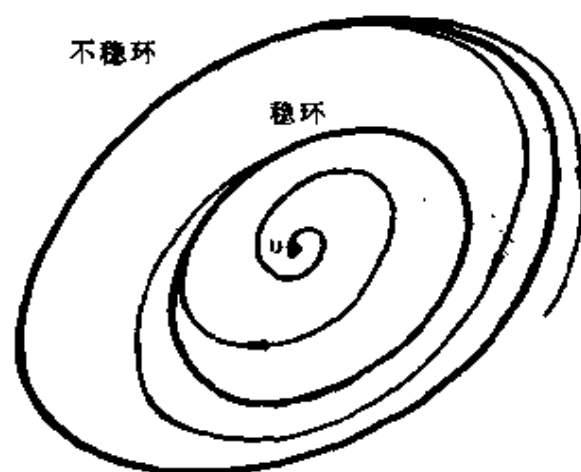


图 4-1 包围奇点的多个极限环

$$dt = dx_i / f_i(x_1, x_2) \quad i = 1 \text{ 或 } 2$$

从而极限环振动的周期为

$$\tau = \oint \frac{dx_i}{f_i(x_1, x_2)} \quad i = 1 \text{ 或 } 2 \quad (4 \cdot 1)$$

许多自然界固有的持续周期过程（所谓时间耗散结构）都具有一定的固有周期，此周期不与什么初始条件有关，也不由于外界条件的变化而变化（除非外界条件能改变其内部性质）。这样的振荡自然不能用周期或（和）振幅与初始条件有关的线性振子或中心附近的非线性振荡表示。因此自然界中大量的周期过程（如生物节律）大都是非线性的极限环型振荡。

大量的物理的和工程上的振荡都是非线性的，这些振荡也是由系统的固有性质决定而与初始条件无关。因此它们通常也都要用极限环表示，而不会是中心附近的闭曲线。上述范德波尔振子、许多种电子振荡器、一些工程系统的振动等等，都是如此。因为这些振荡的周期只由系统的动力学参数决定，而与初始状态和扰动无关。在这些振荡系统中，有的具有自激性质，如机械手表和

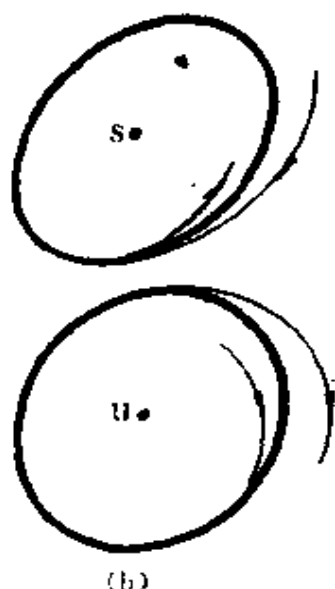


图 4-2 半稳极限环

S: 稳定奇点; u: 不稳奇点

和稳定环 (图 4-1), 只有当系统获得足够的激发能量时, 它才可能由稳定奇点所表示的静止状态越过不稳环跃迁到稳定环所代表的振荡状态。

2. 一些关于极限环存在与否的判据

既然大量的非线性振动都是用极限环表征, 因此分析方程是否有极限环的解往往就是判断振动是否存在的关键。目前还没有一种普适的关于极限环存在的判据。下面是一些判断极限环存在与否的有用判据。

(1) 如果方程只有一个奇点, 则存在极限环时, 该奇点一定不会是鞍点, 即极限环至少要求其线性化方程的系数矩阵的行列式大于零 (即 $\Delta > 0$)。

从鞍点附近的轨线 (图 3-5) 即可看出它不可能被极限环所包围。另外, 从前面的讨论也可看出, 极限环只可能包围焦点或结

许多电子学振荡电路, 它们的静止状态虽然是定态, 但是不稳定的, 它们都能自动地进入一固定的振荡状态。这种现象称为软激发, 其数学描述就是围绕不稳奇点的稳定极限环。另有一些系统, 它们通常可以处于静止状态, 但一旦受到超过某一定阈值的扰动, 就会进入振荡状态。如摆钟和某些振荡电路就是这样。这种现象称为硬激发, 其相应的数学描述就是围绕稳定奇点外的不稳环

点。

(2) 班狄克生 (Bendixson) 负判据

对于二元非线性方程组 (2·9), 如果 $\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ 在相平面的某一区域内不改变符号, 则在此区域内不可能存在极限环。

此结论可简单证明如下: 试考虑在区域 D 中为某一闭曲线 C 所包围的区域 R, 根据格林 (Green) 公式有

$$\iint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1)$$

因为 $\nabla \cdot f$ 有确定符号, 上式积分结果也应有确定符号。但如果 C 是 (2·9) 的解的一条闭轨线, 则

$$\begin{aligned} \oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) &= \oint_C \left(f_1 \frac{dx_2}{dt} - f_2 \frac{dx_1}{dt} \right) dt \\ &= \oint_C (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0 \end{aligned}$$

这显然与 $\nabla \cdot f$ 有确定符号是矛盾的, 即闭曲线 C 不可能是方程 (2·9) 的解。

从班狄克生负判据很容易看出, 线性方程组不可能有极限环型的解。因为对于线性方程组 [如式 (3·3)], $\nabla \cdot f = T = a_{11} + a_{22}$, 它是一常数, 从而在整个相平面内都有确定的符号。可见, 极限环只能由非线性方程产生。

(3) 庞卡莱-班狄克生 (Poincaré-Bendixson) 定理

如果方程组 (2·9) 有一解的轨迹总是局限于相平面中不包含任何奇点的有限区域 D 内, 则此轨迹或者是一极限环, 或者趋于一极限环。

此定理是很容易直觉地理解的, 因为如果此轨迹既不会终止

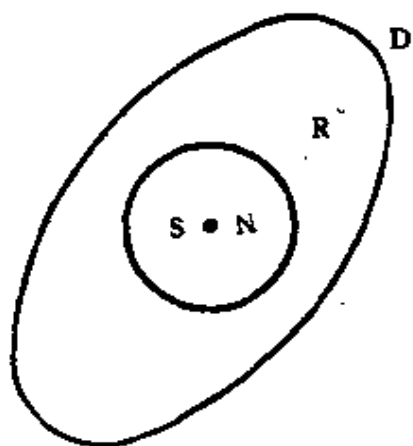


图 4-3

于某一奇点,又不会趋于无限远,它只
有可能最后趋于一闭曲线。

如果某有限区域 D 包含有奇点 S ,可以在 D 内取一 S 的邻域 N (图 4-3), 则对 D 中其余区域 $R (=D-N)$ 仍可适用本定理。

例: 证明方程组

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - (x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2)x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - (x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2)x_2$$

(4·2)

有一极限环型的解。

由此方程组的线性化方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (4 \cdot 3)$$

很易知道原点是不稳焦点,但我们并不能肯定其周围是否有极限环型解存在。为应用庞卡莱-班狄克生定理,我们以原点为圆心作圆,设 (4·2) 解的轨线与圆交于 P 点 (图 4-4)。令 $n = (x_1, x_2)$ 表在 P 点圆周的外法线, \dot{x} 表沿轨线的坐标变化率, \dot{x} 的方向

自然是沿轨线的切线方向。因 $\cos\varphi = n\dot{x}/|n||\dot{x}|$, 可见

当 $n \cdot \dot{x} > 0$, $\varphi < \frac{\pi}{2}$, 轨线指向圆外;

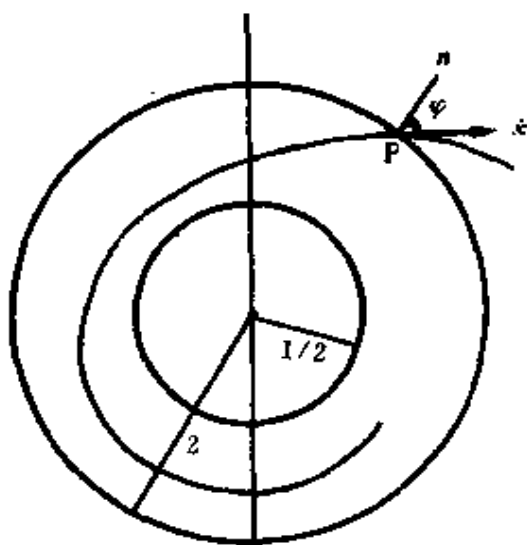


图 4-4

当 $n \cdot \dot{x} < 0$, $\varphi > \frac{\pi}{2}$, 轨线指向圆内。

由式 (4·2) 得

$$\begin{aligned} n \cdot \dot{x} &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^4 - \frac{5}{2}x_1^2x_2^2 \\ &= r^2 - r^4 + \frac{1}{2}x_2^2(x_2^2 - x_1^2) \\ &= r^2 - r^4(1 + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos^2 2\theta) \end{aligned} \quad (4 \cdot 4)$$

式中 r 和 θ 是极坐标。可见如果取两个同心圆 $r = \frac{1}{2}$ 和 $r = 2$, 就会有

对于圆 $r = 2$, $n \cdot \dot{x} < 0$, 轨线指向此圆内;

对于圆 $r = \frac{1}{2}$, $n \cdot \dot{x} > 0$, 轨线指向此圆外。

即轨线进入 $1/2 < r < 2$ 区域以后, 它就总是限制在此区域内。因此在 $1/2 < r < 2$ 区域内, 式 (4·2) 必有一极限环型解。

3. 列娜 (Lienard) 方程

许多常见的一维运动系统的运动方程都具有下面的形式:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4 \cdot 5)$$

上式称为列娜方程*。显然, 杜芬方程和范德玻尔方程都是列娜方程。把列娜方程写成一阶方程组形式就是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x, y)y \end{aligned} \quad (4 \cdot 6)$$

与线性谐振子的运动方程比较, 可以认为, $g(x)$ 表示恢复力, $f(x, \dot{x})$ 表示阻尼力 (当 $f > 0$ 时)。如果恢复力是保守力, 则

* 常见的列娜方程中, f 只是 x 的函数而不是 \dot{x} 的函数, 即 $f(x, \dot{x}) = f(x)$ 。为普遍计, 我们现在取其推广了的形式。

$$U(x) = \int_0^x g(u) du$$

表示系统的势能, 而 $K = \dot{x}^2/2$ 是动能 (都假设系统的质量为 1), 于是总能为

$$E = K + U = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x g(u) du \quad (4 \cdot 7)$$

由式 (4·5) 得总能的变化率为

$$\dot{E} = \dot{K} + \dot{U} = -f(x, \dot{x}) \dot{x}^2 \quad (4 \cdot 8)$$

可见, 能量的变化只由阻尼力决定。当阻尼作用不存在时, $f=0$, 系统的能量守恒。由式 (4·6) 可知这时其线性化方程的系数矩阵的阵迹 $T=0$, 相平面上运动的轨线是绕中心的闭曲线, 所以绕中心的闭曲线所代表的振荡是守恒运动。§3 讨论洛特卡-伏尔泰拉方程时我们已提到过。

设阻尼力不为零且设为正阻尼时, $f>0$, 系数矩阵的阵迹 $T=-f<0$, 若 $g(x)$ 恒大于零 (如 g 是 x 的偶函数), 则系数矩阵的行列式恒大于零。由图 3-6 可知, 系统具有稳定定态。这就是常见的耗散系统 (非保守系统) 最终要趋于一稳定平衡点的情形。

但是也有一些耗散系统的阻尼项 f 并没有确定的符号。如前述范德波尔方程, 其阻尼项 $f=\alpha(x^2-1)\dot{x}$ 有时候 ($\alpha>0, |x|>1$) 是正的, 有时候 ($\alpha>0, |x|<1$) 又是负的。对于这样的系统, 其总能有时候 ($f>0$ 时) 减小, 但另一些时候 ($f<0$ 时) 又将增加, 从而使系统可能进入振荡状态, 这就是极限环型振荡。

判断列娜方程有无极限环型解存在, 自然具有重要的实际意义。许多人对此进行了研究。下面我们介绍这方面的一个定理。

定理: 在列娜方程 (4·5) 或 (4·6) 中, 如果 $f(x, \dot{x})$ 和 $g(x)$ 都是连续可微函数, 且

- (i) 存在一个数 $a>0$, 当 $(x^2+y^2)^{1/2}>a$ 时, $f(x, y)>0$;
- (ii) $f(0,0)<0$, 从而在原点 $(0,0)$ 的邻域也有 $f(x, y)<0$;

(iii) 对所有 $x > 0$, $g(x)$ 是 x 的奇函数, 而且 $g(x) > 0$;

(iv) $U(x) = \int_0^x g(u) du \rightarrow \infty$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时

则方程存在极限环型解。

证明: 由 (iii) 和 (iv) 可知

$$\begin{aligned} U(0) &= 0 \\ U(x) &> 0, \quad \text{当 } x \neq 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 9)$$

而且 $U(x)$ 是 x 的单调递增函数。由式 (4·7) 可知

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 0 \\ E(x, \dot{x}) &> 0, \quad \text{当 } x \neq 0, \quad \dot{x} \neq 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 10)$$

即总能 E 是正定的, 而且是随向径 $r = (x^2 + \dot{x}^2)^{1/2}$ 单调递增。于是对任一正数 c , 下述等能曲线

$$E(x, \dot{x}) = c \quad (4 \cdot 11)$$

是一围绕原点 $(0, 0)$ 的闭曲线。当 $c \rightarrow 0$, 此闭曲线退化为原点; 当 $c \rightarrow \infty$, 此闭曲线也趋向于无穷远处。

取 c 为充分小的值 c_1 , 使得等能线在条件 (ii) 给定的邻域 N 内 (图 4-5)。考查由 c_1 上某一点 P 出发的轨线 H 。因为在 H 上, 式 (4·8) 应可满足, 于是只要 P 不在 \dot{x} 轴上, 则在原点邻域 N 内应有

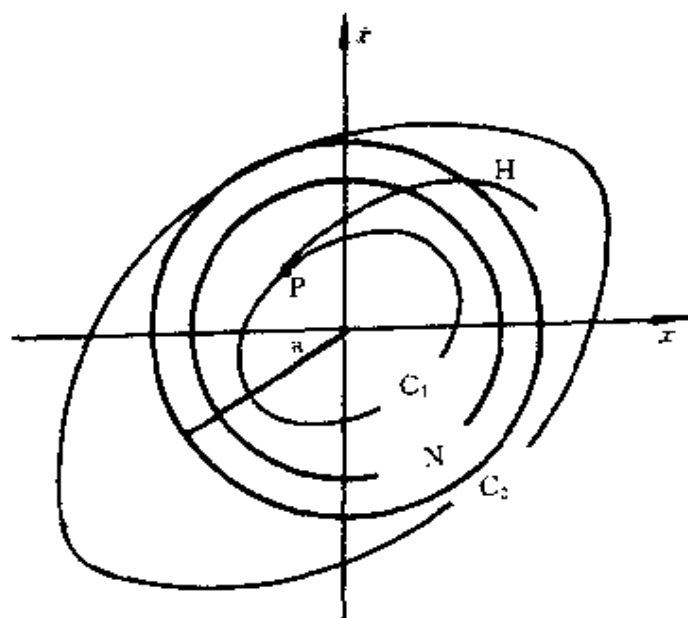


图 4-5

$$\dot{E} = -\dot{x}^2 f > 0$$

即 H 只能是由 c_1 向外使向径 $r = (x^2 + \dot{x}^2)^{1/2}$ 增大。

再考虑式 (4·11) 中 c 取另一充分大的值 c_2 使得等能线在原点邻域 N 和条件 (i) 给定的圆 $a^2 = x^2 + \dot{x}^2$ 以外。根据条件 (i) 和式 (4·8), 在 $r > a$ 时

$$\dot{E} = -\dot{x}^2 f \leq 0$$

上式等号只在 \dot{x} 轴上才成立。于是在圆 $r = a$ 以外所有轨线都要向内使 r 减小, 所以所有轨线都不会走出等能线 c_2 。因此所有轨线最后都只能限于等能线 c_1 以外和等能线 c_2 以内。根据前述庞卡莱-班狄克生定理, c_1 和 c_2 之间必定存在一极限环。

也可以按本节初所述从物理概念分析来理解此定理。在靠近原点处, 根据条件 (ii), “阻尼系数” f 是负的, 由式 (4·8) 可知, $\dot{E} > 0$, 即能量要增加, r 随之要增大。当 r 足够大 ($r > a$) 时, $f > 0$, $\dot{E} < 0$, 能量要减小, r 也随之减少, 因此轨线最后要限制在一定范围内并构成闭曲线 (周期运动)。

例 1: 证明范德波尔方程在 $\alpha > 0$ 时存在极限环型解。

解: 对于范德波尔方程

$$f(x, \dot{x}) = \alpha(x^2 - 1)$$

$$g(x) = \omega^2 x$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 > 0$$

当 $\alpha > 0$ 时, 只要取 $a = 1$, 定理中条件 (i) 即可满足, 另三个条件显然都可满足。因此根据定理, 范德波尔方程必有极限环型解。由于等能线方程为

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = c$$

如果取 $c_1 = 1/2$, $c_2 = \omega^2/2$, 则 $a = 1$ 的原点邻域圆即与等能线 c_1 和

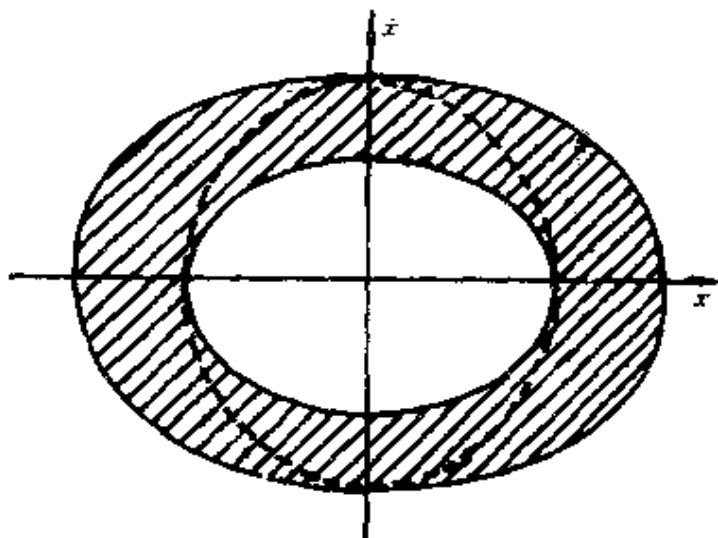


图 4-6 范德玻尔振子周期解存在的区域 (图中阴影部分)

$$x^2 + \dot{x}^2 = 1$$

c_2 相切 (图 4-6)。也就是说, 极限环是在 c_1 和 c_2 之间。

例 2: 证明方程

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0 \quad (4 \cdot 12)$$

在 $\alpha > 0$ 时存在极限环型解。

解: 对于本题

$$f(x, \dot{x}) = \alpha(x^2 + \dot{x}^2 - 1)$$

$$g(x) = x^3$$

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4$$

同上题一样, 在 $\alpha > 0$ 时, 只要取 $\alpha = 1$, 定理中的条件 (i) 即得到满足, 另外三个条件显然也是满足的。因此方程 (4 · 12) 存在极限环型解。方程的等能线方程为

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}x^4 = c$$

只要取 c 的两值为 $c_1 = 1/4$ 和 $c_2 = 1/2$, 则邻域圆 $\alpha = 1$ 就与等能线

c_1 和 c_2 相切, 即极限环是在 c_1 和 c_2 两等能线之间, 其图形大体上与图 4-6 一样。

§ 5 化学振荡

1. 引言

作为极限环型振荡的具体例子, 我们研究化学反应中的振荡现象。如 § 1 所述, 许多化学反应的速率方程是非线性的, 因此可

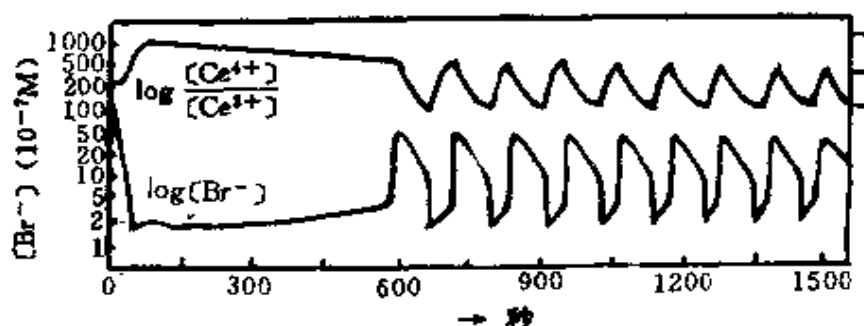


图 5-1 B-Z 反应中的振荡现象

$\log [\text{Br}^-]$ 和 $\log [\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}]$ 随时间变化的电势 (25℃时)。[丙二酸] = 0.032M, $[\text{KBrO}_3] = 0.063\text{M}$, $[\text{H}_2\text{SO}_4] = 0.8\text{M}$, $[\text{Ce}(\text{NH}_4)_2(\text{NO}_3)_6]_0 = 0.01\text{M}$, $[\text{KBr}]_0 = 1.5 \times 10^{-5}\text{M}$ (引自 R. J. Field (1972), J. Chem. Educ., 49, 308)。

以想象, 某些化学反应可能出现振荡。事实上, 早在 1921 年布雷 (Bray) 就已发现, H_2O_2 被 I_2-HIO_3 催化分解的反应 (布雷反应) 中出现振荡。1958 年贝洛索夫 (Belousov, Белоусов 苏联化学家) 发现, 在金属铈离子催化下丙二酸 (或柠檬酸) 被溴酸 (溴酸盐加硫酸) 氧化时也观察到振荡现象 (图 5-1)。其后 (1964 年) 查玻津斯基 (Zhabotinski, 苏联化学家 Жаботинский) 发现,

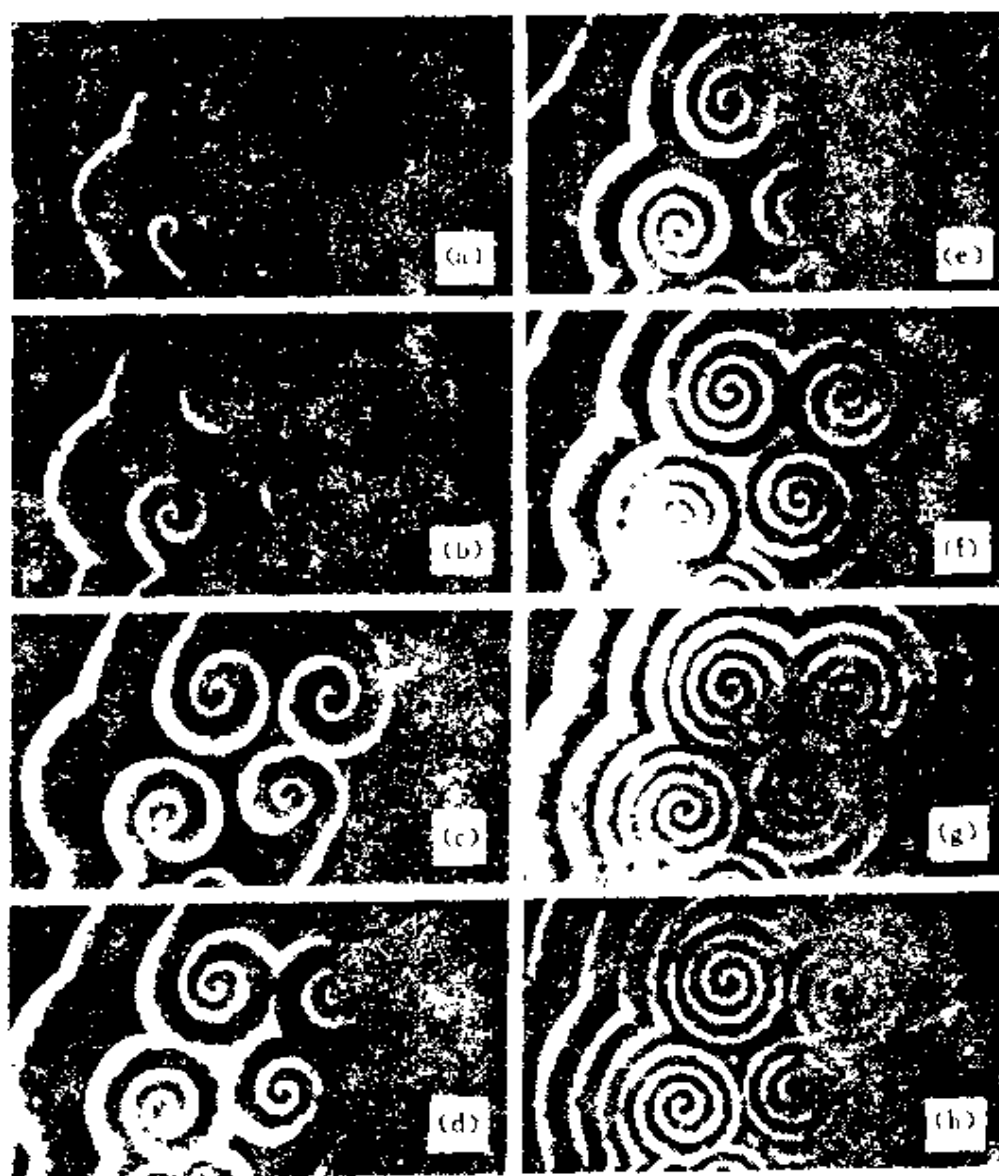


图 5-2 在陪替氏培养皿中进行的 $B-Z$ 反应的螺旋波状活性

在此反应中铈催化剂可用锰或试亚铁灵代替，而且振荡还呈现空间周期分布（空间有序结构，图 5-2 和图 5-3）。因此后一反应常被称为贝洛索夫-查波津斯基（Belousov-Zhabotinski）反应，简称



图 5-3 B-Z 反应中的水平带
淡条纹对应于以氧化为主的区域

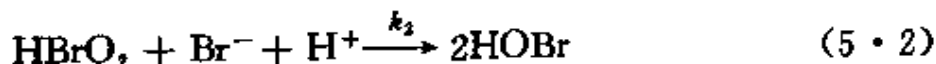
B-Z 反应。

近 20 多年来人们又在另一些化学反应中观察到振荡现象。但其中有的反应可能是由于与热效应耦合才引起振荡，有的可能是由于非均匀相变引起的，它们的动力学过程可能都十分复杂，至今还不很清楚。现在从实验和理论两方面都了解得较好的并被认为是完全由化学反应自身引起的振荡还是布雷反应和 B-Z 反应。我们现在着重介绍 B-Z 反应，然后简略介绍布鲁塞尔学派的三分子模型（布鲁塞尔振子）。

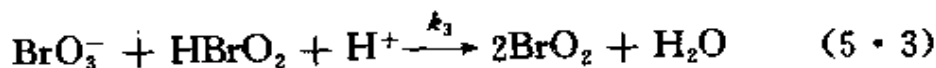
2. B-Z 反应分析

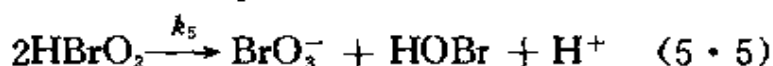
在铈离子催化下丙二酸被溴酸氧化的 B-Z 反应实际上是一很复杂的化学过程。诺意斯和费尔德（Noyes 和 Field）等（1974）在做了大量实验和理论分析后认为，B-Z 反应至少包含了 11 个反应步骤，其中引起振荡的关键步骤是以下 6 个：

当 Br^- 的浓度较大时，反应为

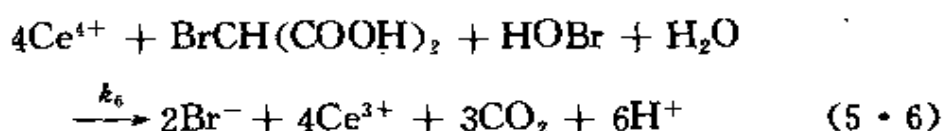


当 Br^- 的浓度较小时，反应为

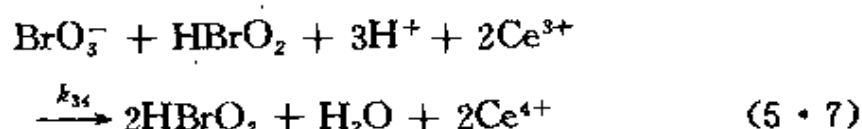




此外, 反应器中的 Br_2 与丙二酸结合生成溴化有机物, 如 $\text{BrCH}(\text{COOH})_2$ 。以上反应中生成的 HOBr 在 Ce^{4+} 催化氧化下与 $\text{BrCH}(\text{COOH})_2$ 结合生成 Br^- , 其反应式大致是



还可以看出, 反应 (5·3) 和 (5·4) 合并可看作是亚溴酸 HBrO_2 的自催化和 Ce^{3+} 的被氧化为 Ce^{4+} 过程:



下面我们先定性地分析一下为什么上述诸反应步骤可以引起振荡。对照 (5·2) 和 (5·3) 可知, Br^- 和 BrO_3^- 在对 HBrO_2 竞争: BrO_3^- 使 HBrO_2 自催化增殖, 而 Br^- 则使 HBrO_2 减少。到底哪一反应占优势, 取决于 Br^- 和 BrO_3^- 的浓度和两反应的速率系数 k_2 和 k_3 。当

$$k_2[\text{Br}^-] > k_3[\text{BrO}_3^-] \quad (5 \cdot 8)$$

时, 反应主要是 (5·1) 和 (5·2) 而不是 (5·3)~(5·5), 即 HBrO_2 不可能增殖。反之当

$$k_2[\text{Br}^-] < k_3[\text{BrO}_3^-] \quad (5 \cdot 9)$$

反应是 (5·3)~(5·5) 而不是 (5·1)~(5·2), HBrO_2 将增殖, 临界情形是

$$[\text{Br}^-]_c = \frac{k_3}{k_2}[\text{BrO}_3^-] \approx 5 \times 10^{-6}[\text{BrO}_3^-] \quad (5 \cdot 10)$$

设开始时 $[\text{Br}^-]_c$ 较大, 反应是 (5·1)~(5·2), $[\text{Br}^-]$ 逐渐变

小,最后将低于临界值 $[\text{Br}^-]_c$ 。这时反应由(5·1)~(5·2)切换为(5·3)~(5·5), $[\text{HBrO}_2]$ 和 $[\text{Ce}^{4+}]$ 都增大, $[\text{Ce}^{4+}]$ 的增大通过反应(5·6)又使 Br^- 再生。当 $[\text{Br}^-]$ 加大到超过 $[\text{Br}^-]_c$ 时,反应又从(5·3)~(5·5)切换到(5·1)~(5·2)。这样周而复始,使 $[\text{Br}^-]$ 、 $[\text{HBrO}_2]$ 和 $[\text{Ce}^{4+}]/[\text{Ce}^{3+}]$ 周期地变化,从而形成了振荡。

可见,引起振荡的关键组分是三种中间物: Br^- 、 HBrO_2 和 Ce^{4+} 。 Br^- 起着控制反应按什么方式进行, HBrO_2 起着切换作用, Ce^{4+} 起着使 Br^- 再生的作用。

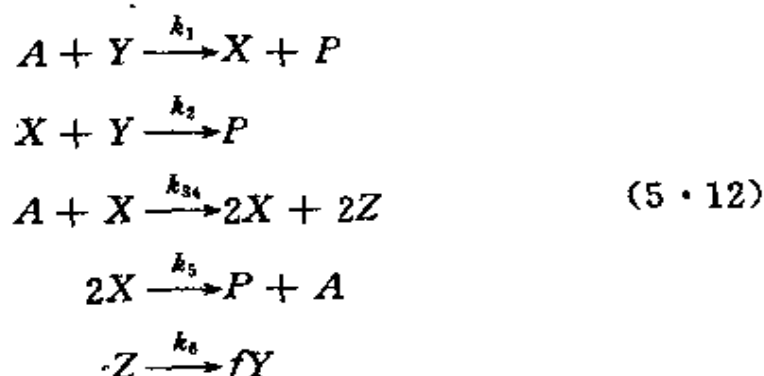
3. 俄勒岗振子 (Oregonator)

费尔德等人根据他们提出的上述模型同时对 B-Z 反应的振荡性质提出了定量表述。由于他们工作的地点,通常称此模型为俄勒岗振子。

令

$$\begin{aligned} X &= [\text{HBrO}_2] \\ Y &= [\text{Br}^-] \\ Z &= 2[\text{Ce}^{4+}] \\ A &= [\text{BrO}_3^-] \\ P &= [\text{HOBr}] \end{aligned} \quad (5 \cdot 11)$$

于是反应(5·1)~(5·7)可表为



此处 f 表示一个 Ce^{4+} 离子所能再生出的 Br^- 离子数。由于具体的反应细节还不明了, f 实际上还是一个待定的化学计量系数。在反应 (5·6) 中, f 已定为 0.5。

通常在反应进行过程中 (如数分钟内), BrO_3^- 、 $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ 和 H^+ 等组分因为量比较大, 可认为它们的浓度维持不变, $[\text{BrO}_3^-]$ 和 $[\text{H}^+]$ 的典型值分别是 0.06M 和 1M。由于假设所有反应都是不可逆的, 因此可以认为产物 P 不影响反应速率。又设反应是在恒温恒压和均匀情况下进行的, 因此也可忽略温度、压强和扩散的影响。于是根据质量作用定律可写出反应 (5·12) 的反应速率方程

$$\frac{dX}{dt} = k_1 AY - k_2 XY + k_{34} AX - 2k_5 X^2 \quad (5 \cdot 13a)$$

$$\frac{dY}{dt} = -k_1 AY - k_2 XY + k_6 fZ \quad (5 \cdot 13b)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 2k_{34} AX - k_6 Z \quad (5 \cdot 13c)$$

其中各速率系数的典型值如下:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\text{M}^{-1}\text{S}^{-1}; & k_2 &= 2 \times 10^9\text{M}^{-1}\text{S}^{-1} \\ k_{34} &= 10^4\text{M}^{-1}\text{S}^{-1}; & k_5 &= 4 \times 10^7\text{M}^{-1}\text{S}^{-1} \\ k_6 &= 0.4[\text{BrCH}(\text{COOH})_2]\text{M}^{-1}\text{S}^{-1} \end{aligned} \quad (5 \cdot 14)$$

为了简易, 最好把非线性方程组 (5·13) 无量纲化。为此引入一组新的变数和系数

$$x = \frac{k_2}{k_1 A} X \approx 1.6 \times 10^{10} \text{M}^{-1} X$$

$$y = \frac{k_2}{k_{34} A} Y \approx 3 \times 10^6 \text{M}^{-1} Y$$

$$z = \frac{k_2 k_6}{2k_1 k_{34} A} Z \approx 6 \times 10^{-3} \text{M}^{-1} Z$$

$$\begin{aligned}
 \tau &= k_1 A t \approx 0.1 \text{ s}^{-1} t \\
 \epsilon &= k_1 / k_{34} \approx 2 \times 10^{-4} \\
 p &= k_1 k_6^{-1} A \approx 3.1 \times 10^2 \\
 q &= 2k_1 k_5 / k_2 k_{34} \approx 8.4 \times 10^{-6}
 \end{aligned} \tag{5 \cdot 15}$$

于是方程组 (5 \cdot 23) 化为下面的无量纲方程组:

$$\epsilon \frac{dx}{d\tau} = x + y - xy - qx^2 \tag{5 \cdot 16a}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 2fz - y - xy \tag{5 \cdot 16b}$$

$$p \frac{dz}{dt} = x - z \tag{5 \cdot 16c}$$

利用 § 2 ~ § 4 的理论可以判断方程组 (5 \cdot 16) 存在极限环的解。

首先求出 (5 \cdot 16) 的定态解 (x_0, y_0, z_0) 。由 (5 \cdot 16) 可知在定态时

$$\begin{aligned}
 x_0 &= z_0 \\
 y_0 &= \frac{2fx_0}{1+x_0} = \frac{(q_0x_0-1)x_0}{1-x_0}
 \end{aligned}$$

由此得知定态时 (注意: $x_0 = z_0 < 0$ 没有意义)

$$\begin{aligned}
 x_0 = z_0 &= \frac{1}{2q} \{1 - 2f - q + [(1 - 2f - q)^2 + 4q(1 + 2f)]^{1/2}\} \\
 y_0 &= \frac{1}{2}(1 + 2f - qx_0)
 \end{aligned} \tag{5 \cdot 17b}$$

令

$$\begin{aligned}
 u &= x - x_0 \\
 v &= y - y_0 \\
 w &= z - z_0
 \end{aligned} \tag{5 \cdot 18}$$

得到线性化方程组:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\epsilon^{-1} & -b\epsilon^{-1} & 0 \\ -c & -d & 2f \\ p^{-1} & 0 & -p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5 \cdot 19)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= -1 + 2qx_0 + y_0 = qx_0 + y_0x_0^{-1} > 0 \\ b &= x_0 - 1 > 0 \quad (q < 1 \text{ 时}) \\ c &= y_0 > 0 \\ d &= x_0 + 1 > 0 \end{aligned} \quad (5 \cdot 20)$$

式 (5 · 19) 的本征值方程为 [对比式 (3 · 17)]

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \beta\lambda + r = 0 \quad (5 \cdot 21)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= a\epsilon^{-1} + d + p^{-1} = E + p^{-1} \\ \beta &= ad\epsilon^{-1} + dp^{-1} + ap^{-1}\epsilon^{-1} - bc\epsilon^{-1} \\ &= Ep^{-1} + \epsilon^{-1}[2qx_0^2 + (q-1)x_0 + 2f] \\ r &= \epsilon^{-1}p^{-1}(ad - bc + 2fb) = \epsilon^{-1}p^{-1}(2qx_0 + q + 2f - 1)x_0 \\ E &= \epsilon^{-1}y_0 + (1 + 2q\epsilon^{-1})x_0 + 1 - \epsilon^{-1} \\ &= q\epsilon^{-1}x_0 + \epsilon^{-1}y_0x_0^{-1} + x_0 + 1 > 0 \end{aligned} \quad (5 \cdot 22)$$

因为极限环型的周期解要求定态是不稳定的, 这就要求方程 (5 · 21) 的特征根至少有一个具有正实部。根据 §3 的罗斯-霍维茨判据, 方程 (5 · 21) 的所有根都具有负实部的充要条件是

$$a > 0 \quad (5 \cdot 23a)$$

$$a\beta - r > 0 \quad (5 \cdot 23b)$$

要定态不稳定, 至少上两式有一不成立, 由式 (5 · 22) 的第一式可知式 (5 · 23a) 自然是成立的, 因此必须要求不等式 (5 ·

23b) 反过来, 即

$$a\beta - r < 0 \quad (5 \cdot 24)$$

由此得不稳定的必要条件是

$$\begin{aligned} 0 < p^{-1} < & -\frac{1}{2E}[E^2 + 2f\epsilon^{-1}(1 - x_c)] \\ & + \frac{1}{2E}\{[E^2 + 2f\epsilon^{-1}(1 - x_0)]^2 \\ & - 4E^2\epsilon^{-1}[2qx_0^2 + (q - 1)x_0 + 2f]\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5 \cdot 25)$$

上式成立自然要求右边必须是正的, 即要求

$$2qx_0^2 + (q - 1)x_0 + 2f < 0 \quad (5 \cdot 26)$$

因此不稳定的临界条件是

$$2qx_0^2 + (q - 1)x_0 + 2f_c = 0 \quad (5 \cdot 27)$$

考虑到 (5 · 15) 中 q 和 ϵ 之值以及 A 值 (0.06M), 由式 (5 · 17a) 和 (5 · 27) 可求得 f 的两临界值 f_{c1} 和 f_{c2}

$$f_{c1} \approx 0.25; \quad f_{c2} \approx 1.206$$

故满足定态解不稳定条件 (5 · 26) 的 f 值必须是

$$0.25 < f < 1.206 \quad (5 \cdot 28)$$

如果再考虑到 $[\text{BrO}_3^-]$ 也可适当变化, 则 A 和 p 也可看作可调节的参数。这样, 由式 (5 · 25) 可得临界情形下 p 和 f 的关系

$$\begin{aligned} p^{-1} = & -\frac{1}{2E}[E^2 + 2f\epsilon^{-1}(1 - x_0)] \\ & + \frac{1}{2E}\{[E^2 + 2f\epsilon^{-1}(1 - x_0)]^2 \\ & - 4E^2\epsilon^{-1}[2qx_0^2 + (q - 1)x_0 + 2f]\} \end{aligned} \quad (5 \cdot 29)$$

在上式中代入 q 、 ϵ 、 x_0 和 E 的值后可求得 $p^{-1}-f$ 关系曲线, 如图 5-4 所示。此曲线表示定态的稳定区和不稳区的分界线。

只有在图 5-4 中曲线包围的不稳区内定态解才是不稳的。但

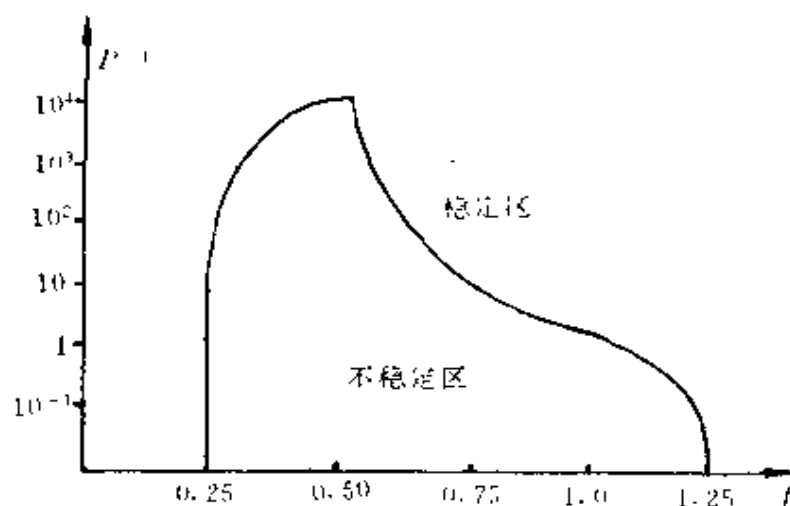


图 5-4

定态不稳定只是存在稳定极限环型振荡解的必要条件，还不是充分条件，因为解的轨迹还可能延伸至无穷远处而不形成极限环。所以还须进一步分析判断。

试取图 5-5 所示的立方体区域，其坐标由下式规定：

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq q^{-1}; \\ \frac{2fq}{1+q} &\leq y \leq fq^{-1}; \\ 1 &\leq z \leq q^{-1} \end{aligned} \quad (5 \cdot 30)$$

可以看出，定态 (x_0, y_0, z_0) 就在此区域内。为了利用庞卡莱-班狄克生定理对解作出判断，我们来考察解的轨迹在此区域的边界面上的行为。先看在 $x=1$ 的平面上的情形。由式 (5·16a) 得

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = 1 - q > 0 \quad (\text{当 } 0 < q < 1)$$

这表明解的轨线在此平面上将按 x 增加方向前进，即轨线在 $x=1$ 处只能进入立方体内。再考虑在 $x=q^{-1}$ 的平面上的情形。这时

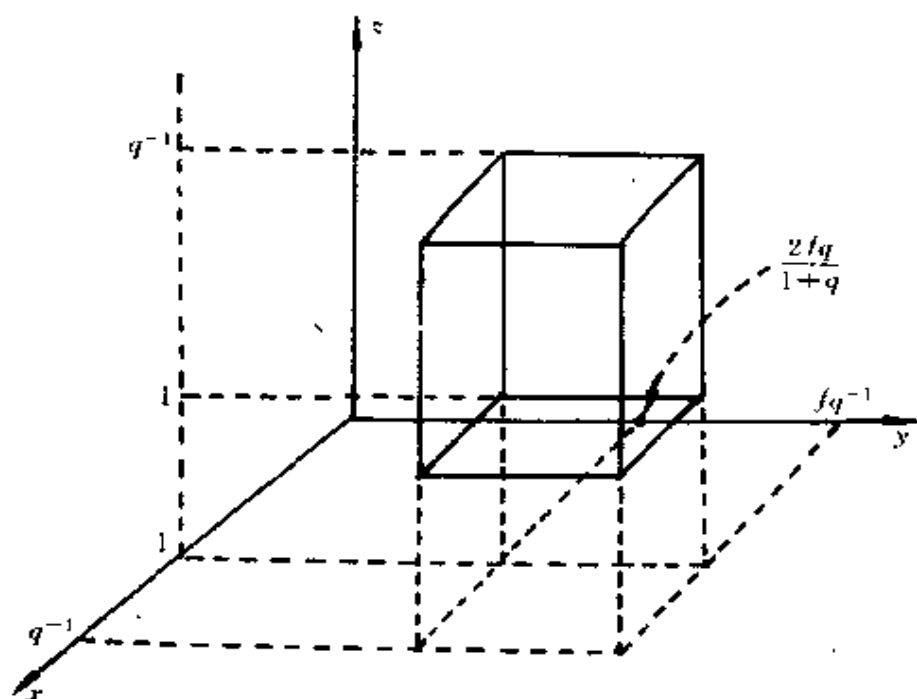


图 5-5

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = y(1 - q^{-1}) < 0 \quad (\text{当 } 0 < q < 1)$$

因此轨线将按 x 减少的方向前进, 这表示轨线在 $x=q^{-1}$ 处仍将进入立方体内。同样可知, 对另外四个包围立方体区域的平面都有相同的结果: 轨线到达边界面时总是指向边界面内, 即轨线总是限制在立方体内。因此根据 § 4 讲的庞卡莱-班狄克生定理可知, 非线性方程 (5·16) 的确具有极限环型的振荡解。事实上, 将 q 和 ε 的值以及在图 5-5 不稳区域中任选取的 p 和 f 值代入方程组 (5·16), 用计算机很易求解, 这样可直接证明此结论, 而且可求得各组分的振荡周期和振幅等, 如图 5-6 所示。图 5-7 是相空间中解的轨线在 $X-Y$ 平面上和在 $Z-Y$ 平面上的投影, 它们都是极限环。

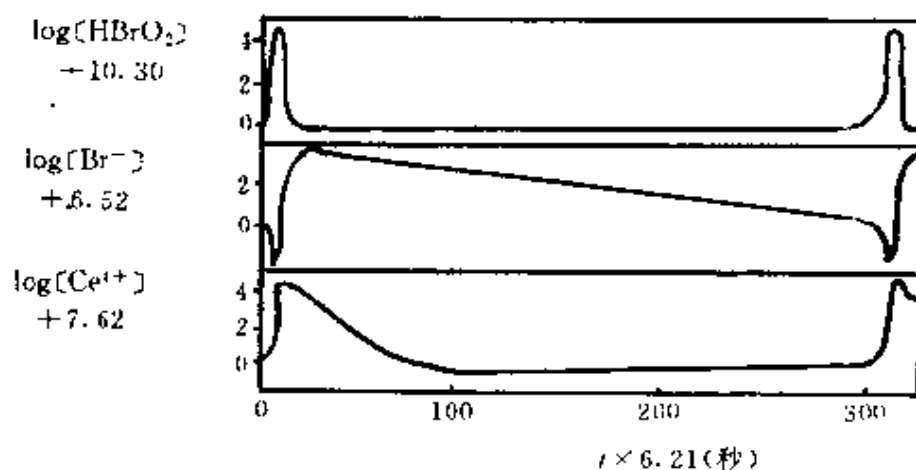


图 5-6 俄勒冈振子中各组分的振荡

以上理论结果（各组分的振荡形式和周期等）大体上都与实验相符。此外，当计及扩散作用时，理论也得到空间有序结构。这也是实验早已观察到的（图 5-2 和图 5-3）。

4. 布鲁塞尔振子 (Brusselator)

上面所讲的 B-Z 反应实际上包含有至今还不很清楚的复杂过程。俄勒冈振子只是其简单的理论。到底什么样的化学反应才可能出现振荡呢？可以证明^{*}，反应速率方程中仅包含有组分的一次项的单分子反应和含有二次项的双分子反应都不可能产生稳定的（极限环型）振荡。因此只有速率方程中含有组分三次项的三分子反应或更高阶反应才有可能（当然也不一定）出现振荡。普里戈京 (Prigogine) 等人为了说明作为他们的耗散结构（时间有序结构也就是振荡和空间有序结构）理论的典型例子，提出了一

* 参阅尼科利斯和普里戈京著，徐锡中等译：《非平衡系统的自组织》§7·1。

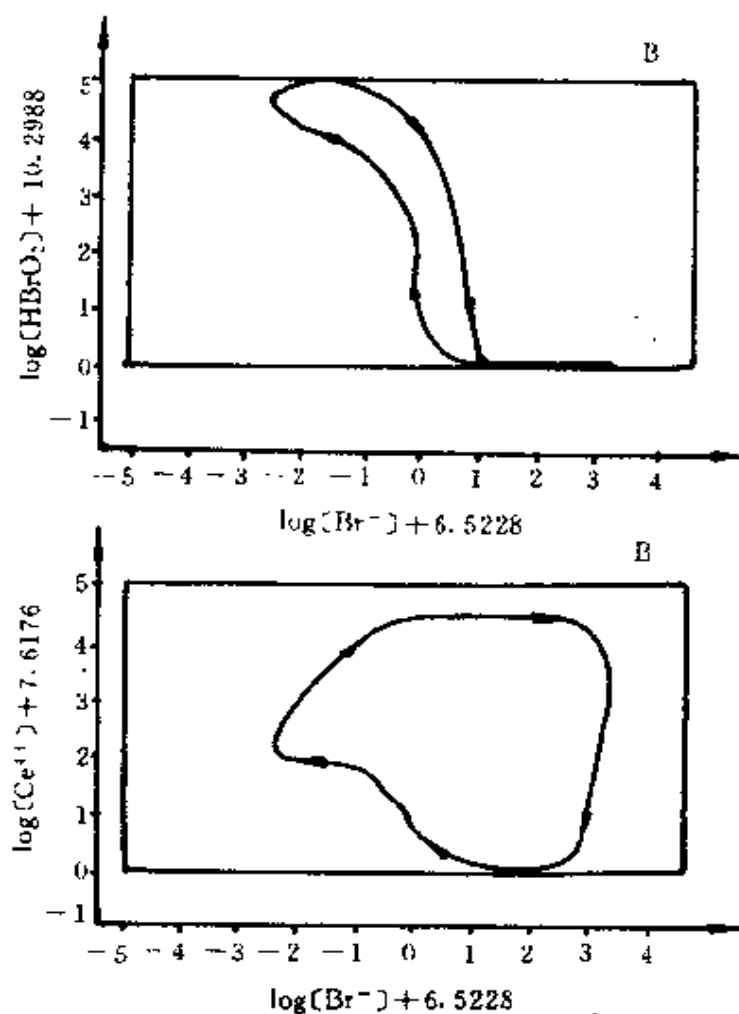
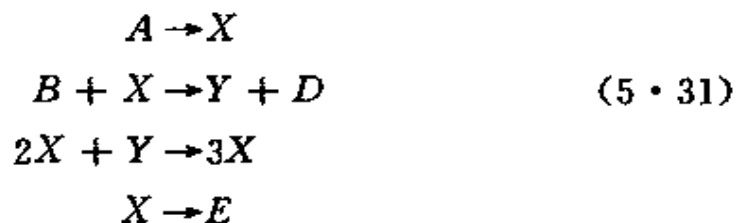


图 5-7 轨线在 X - Y 平面和 Z - Y 平面上的投影 ($f=0.5$)

个假想的三分子反应模型，这就是所谓布鲁塞尔振子，这是以普里戈京等人的工作地点得名，它是由以下反应组成：



以上反应的总效果是



因此在 (5·31) 中, A 和 B 是底物, D 和 E 是产物, 中间物 X 和 Y 可看作是催化剂 (或酶)。

为简单计, 设 (5·31) 中的反应都是不可逆的, 而且设各速率系数 k 都等于 1 (或者说, 速率方程都已无量纲化了)。又假设反应是在空间均匀进行的 (不计扩散效应)。于是得到反应 (5·31) 的速率方程

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A - (B + 1)X + X^2Y \\ \frac{dY}{dt} &= BX - X^2Y \end{aligned} \quad (5 \cdot 33)$$

因为在此速率方程中出现了组分的三次项 (X^2Y), 因此它是一个三分子反应。

我们用线性分析法来考察定态的稳定性和极限环存在的可能性。很易看出, 定态是

$$X_0 = A; \quad Y_0 = B/A \quad (5 \cdot 34)$$

令

$$\begin{aligned} x &= X - A \\ y &= Y - B/A \end{aligned} \quad (5 \cdot 35)$$

则 (5·33) 变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (B - 1)x + A^2y + (B/A)x^2 + 2Axy + x^2y \\ \dot{y} &= -Bx - A^2y - (B/A)x^2 - 2Axy - x^2y \end{aligned} \quad (5 \cdot 36)$$

线性化 (忽略 x 和 y 二次和二次以上项) 后上式变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (B - 1)x + A^2y \\ \dot{y} &= -Bx - A^2y \end{aligned} \quad (5 \cdot 37)$$

由此得特征方程

$$\lambda^2 - (B - 1 - A^2)\lambda + A^2 = 0 \quad (5 \cdot 38)$$

对比 §3 中的式 (3·9) 和 (3·10) 得

$$\begin{aligned} T &= B - 1 - A^2 \\ \Delta &= A^2 > 0 \end{aligned} \quad (5 \cdot 39)$$

由 §2~§4 的分析可知, 要得到不稳奇点 (定态) 使稳定极限环可能出现, 必须有 $T > 0$, 也就是

$$B > 1 + A^2 \quad (5 \cdot 40)$$

可以证明, 在条件 (5·40) 下, 方程确存在唯一的极限环型解*。因此如果把 B 看作可调节的参数, 则由于 B 值的不同将得到不同性质的解。由 $B=0$ 逐渐增大 B , 开始时定态是稳定的。当 B 增大到等于

$$B_c = 1 + A^2 \quad (5 \cdot 41)$$

时, 稳定性发生突变: 由稳定变为不稳。因此 B_c 是参数 B 的临界值 (或分岔点, 见 §6)。图 5-8 是用计算机解方程得到的相空相中两个不同 B 值的轨线, 当

$$B = 1.5 < B_c$$

时, 结果是稳定焦点 $(0, 0)$, 即反应是按通常方式稳定进行。当

$$B = 3.0 > B_c$$

时, 结果是极限环, 即反应确出现了周期振荡。

如果再考虑扩散效应, 也可以证明, 在一定的参数范围内, 中间物在空间也是周期分布的, 即形成了所谓空间有序结构。

* 证明可参看某些微分方程方面的专著, 如陆启韶编著:《常微分方程的定性方法和分叉》§3·9。关于, 布鲁塞尔振子方程 (5·33) 的详细求解过程和结果分析可参考尼科利斯和普里戈京书的第七章。

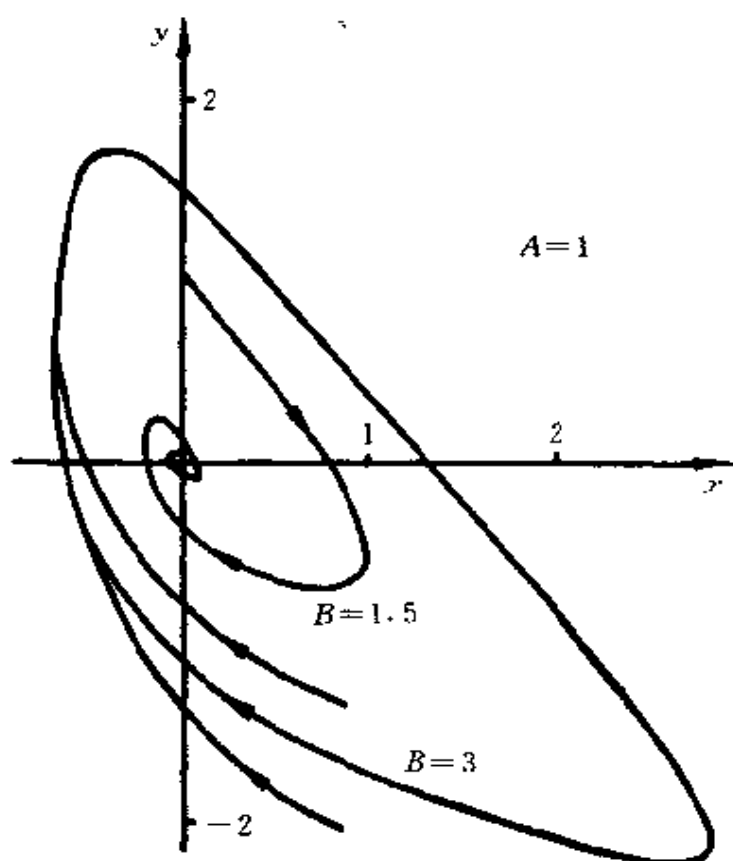


图 5-8 两个不同参数值时的布鲁塞尔振子

§ 6 分岔现象简介

我们现在来研究非线性方程求解中常出现的一种现象——分岔。

1. 分岔和结构稳定性

从上两节关于范德波尔方程的分析可以看出,非线性方程中

参数 α 取值不同,解的形式可以不同,特别是当 α 从负值经过零变为正的时,解的形式或性质发生了突变:相平面中的轨线由一些趋向原点的螺线($\alpha < 0$ 时原点为稳定焦点)变为绕原点($\alpha = 0$ 时原点为中心)的一些闭曲线,最后形成极限环($\alpha > 0$ 时原点为不稳焦点)。解的形式或性质依赖于方程中参数的取值这一事实在线性方程中也曾遇到过。如大家熟知的线性阻尼振子的阻尼系数在某一临界值附近由小变大时,振子的运动可以由减幅振动变为指数衰减。这对应于相平面中原点由稳定焦点变为稳定结点。在范德波尔方程中,这就是发生在 $\alpha = -2\omega$ 处的变化(§3)。但范德波尔方程发生在 $\alpha = 0$ 处的变化却是更突然更剧烈:定态(奇点)由稳定变为不稳定,并使轨线的拓扑结构发生突变。这往往只是非线性方程所特有的。

对于非线性方程组(式中 μ 是参数)

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, \mu) \quad (6 \cdot 1)$$

如果参数 μ 在其某一值 μ_c 附近微小变化将引起运动的性质(或相空间解的轨线的拓扑结构)发生突变,则此现象称为分岔(或分叉,分歧,分支, bifurcation),此时的参数值 μ_c 称为临界值或分岔值。在以参数 μ 为坐标的轴上, $\mu = \mu_c$ 的点称为分岔点(歧点),而不会引起解的拓扑结构发生变化的点($\mu \neq \mu_c$)则称为常点。如前述的范德波尔方程,它在 $\alpha = 0$ 处出现分岔, $\alpha = 0$ 就是分岔值或分岔点,所有 $\alpha < 0$ 和 $\alpha > 0$ 的点都是常点,分岔现象表示范德波尔振子在正阻尼($\alpha > 0$)和负阻尼($\alpha < 0$)之间运动有着本质差别。

方程(6·1)的解在常点附近不会发生本质变化,我们称这时的解具有结构稳定性。即结构稳定性表示在参数微小变化时,解的轨线仍维持在原轨线的某一邻域内。反之,在分岔点附近,参数值的微小变化足以引起解的本质变化,即解的轨线不可能维持在原轨线的某一邻域内,我们称这时的解是结构不稳定的。因此分岔现

象与结构不稳定是互相关联的。

对于两个变量的情形,从 § 3 的分析可知,引起解的性质发生突变和结构不稳定是出现在 $T=0$ 或 $\Delta=0$ 两情形(参考图 3-1 或图 3-6),即出现分岔的情形(分岔点的条件)是

$$T(x_0(\mu), y_0(\mu), \mu) = 0, \quad \Delta > 0 \quad (6 \cdot 2)$$

或

$$\Delta(x_0(\mu), y_0(\mu), \mu) = 0, \quad T < 0 \quad (6 \cdot 3)$$

式中 μ 代表方程中的参数, (x_0, y_0) 是定态。

分岔现象普遍存在于许多非线性问题中,我们再举一个形象的例子。一水平橡胶棒右端固定,从左端加一水平方向力 F [图 6-1(a)],考察棒的形状将如何变化。很显然,当力 F 是向左(拉力)时,棒仍处于水平位置,形状(除稍有伸长外)无变化。现在把力 F 改为向右(压力)。当 F 较小时,棒虽受压,但也不会偏离其水平位置。继续加大力 F ,当 F 达到某一值 F_c 时,棒将突然发生弯曲。设棒只能在铅直面内运动,则它既可向上弯曲,也可向下弯曲[图 6-1(a)中虚线]。用棒的中点偏离水平位置的距离 x 标志棒的形变,则 x 与作为参数的力 F 之间的关系大致如图 6-1(b)所示。这表示棒的形状在 $F=F_c$ 处发生了突变*:当 $F < F_c$ 时,棒只有一个平衡位置 $x=0$;当 $F=F_1 > F_c$ 时,棒有三个平衡位置 $x=0$ 和 $x=\pm x_1$,但其中的 $x=0$ 是不稳定的。因此把棒所受的力当参数看待, F_c 便是临界值或分岔点。至于在 $F > F_c$ 时棒取上下两位置的哪一个(向哪方弯曲),则完全由偶然因素(微扰)决定。

* 实际上,棒的弯曲现象虽是为普通而又明显的突变现象,但却又是一比较复杂的问题。因一旦发生形变,棒中的纵向应力 F 也随着发生突变。又当形变发生后,在 $0 < F < F_c$ 时,形变仍能维持住。逐渐减小 F 直到 $F=0$ 时,形变才突然消失。参考下一节关于多重定态中滞后现象的叙述。

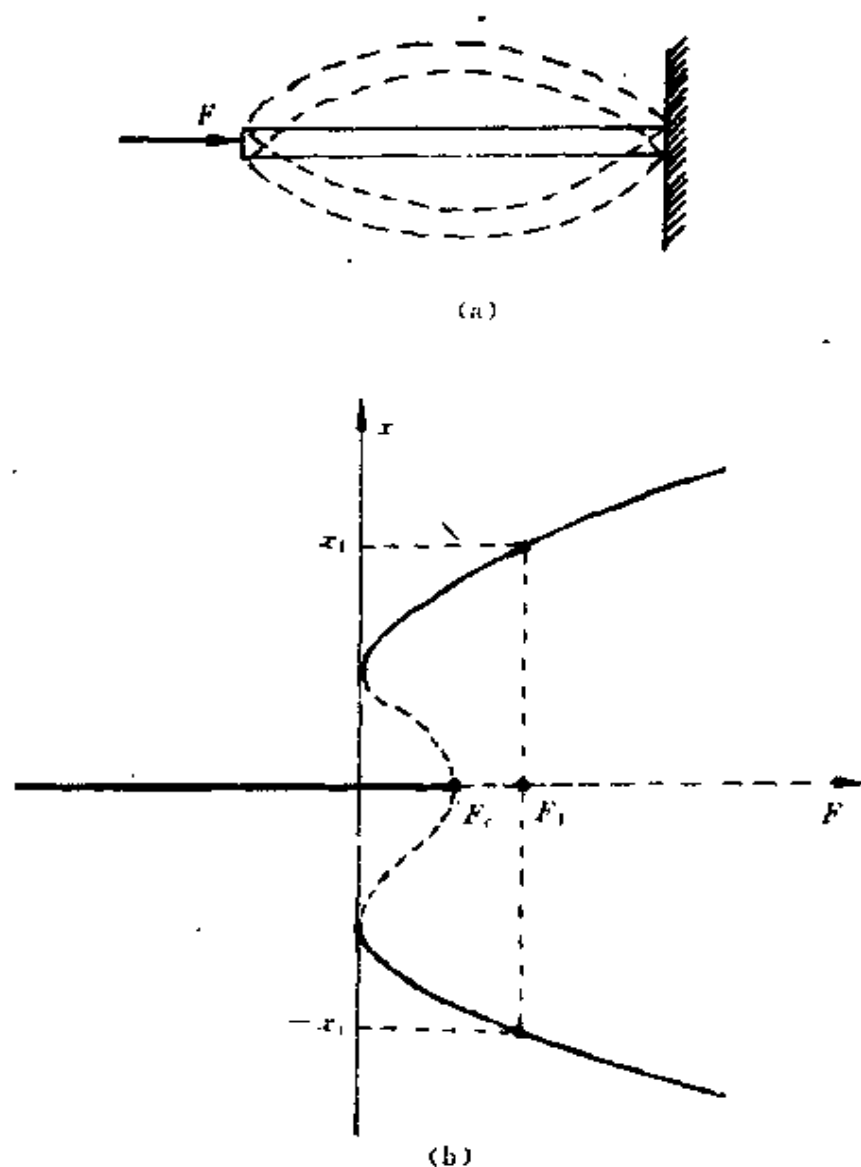


图 6-1 橡胶棒受力时形变与力的关系

实线:稳定状态 虚线:不稳状态

在以上范德玻尔方程和棒的形变两例中,虽都存在突变现象,但仔细分析可以看出,它们之间也还有一定的差别:前者表示非线性方程(5·1)的解的性质(或拓扑结构)随参数的微小变化而发生了突然变化(结构不稳定),我们称这样的分岔为动态分岔。橡胶棒所代表的是:方程(6·1)中的定态 $f_i=0$ 解的数目(或稳定性)随

参数值的微小变化而出现的突然变化,这样的分岔称为静态分岔。当然,静态分岔问题可以看作是动态分岔问题的一部分内容。反之,定态数目的突然变化(静态分岔)往往要引起一般(包括非定态的)解的性质突然变化(动态分岔)。

2. 霍普夫分岔

我们进一步讨论像范德波尔方程在 $\alpha = \alpha_c = 0$ 时出现的分岔,人们称这种在参数值微小变化时,由稳定平衡点突变出现极限环的分岔为霍普夫(Hopf)分岔。用变量-参数空间表示,霍普夫分岔大致如图 6-2 所示:当参数值 μ 小于其临界值 μ_c (对于范德波尔方程, $\mu_c = \alpha_c = 0$) 时,平衡点是稳定焦点或稳定结点。当 $\mu > \mu_c$ 时,平衡点不稳,出现了稳定的极限环。 μ 取不同值时,极限环的形状和大小不同。

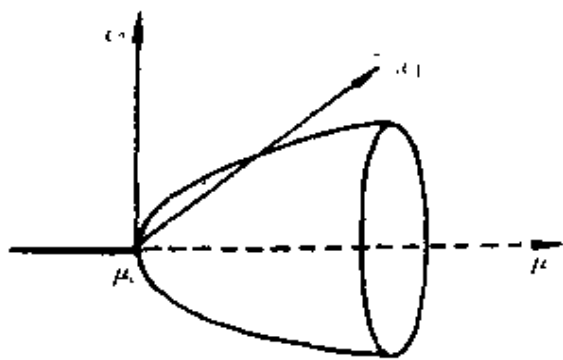


图 6-2 霍普夫分岔

实线表示稳定状态,虚线表示不稳状态。

为了实现霍普夫分岔,在参数值 μ 小于(当然也可能是大于)临界值 μ_c 时,定态是稳定的,其特征值的实部 λ_r 应小于零: $\lambda_r < 0$ 。当分岔出现稳定极限环时,它包围的不稳奇点不可能是鞍点,因此分岔不可能是式(6·3)所示的 $\Delta = 0$ 的情形,而只能是式(6·2)所示的 $T = 0$ 的情形。将式(6·2)代入式(3·11)在分岔点上得

$$\lambda = \lambda_i = \pm i \sqrt{\Delta}$$

即出现霍普夫分岔时,特征值的变化如图 6-3 所示,其虚部 λ_i 总不为零。这也是很自然的,因特征极的虚部不为零才意味着振荡,而

这是极限环必须具备的。反之,在式(6·3)所表示的分岔情形,式(3·11)给出特征根的虚部为零: $\lambda=0$,即不存在振荡,所以不可能出现极限环。

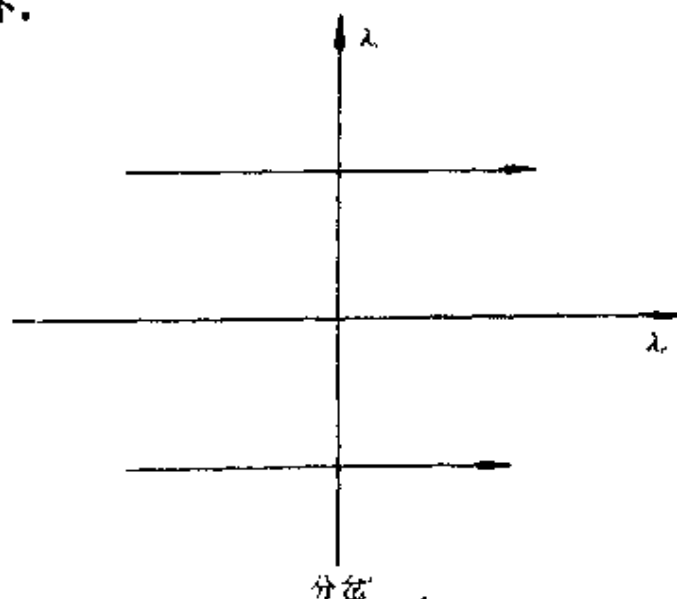


图 6-3 霍普夫分岔时特征值的变化

式(6·2)自然表示非线性系统的霍普夫分岔出现在其线性化方程奇点是中心的时候。当然,对于线性方程,即使奇点是中心也不可能出现霍普夫分岔。而非线性方程在中心处也不一定都能实现分岔而得到稳定的极限环。关于由式(6·2)分岔得到稳定极限环的进一步条件,我们就不再讨论了。在此只再分析一些具体问题。

首先我们讨论比范德波尔方程(1·21)更普遍的阻尼运动方程

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x + h(x, \dot{x}) = 0 \quad (6 \cdot 4)$$

$h(x, \dot{x})$ 是方程的非线性部分。上式自然是一种列娜方程(4·5)。将上式改写成二变量的方程组

§ 6 分岔现象简介

85

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - \alpha y - h(x, y)\end{aligned}\quad (6 \cdot 5)$$

此方程有平衡点(0,0),而且

$$\begin{aligned}T &= -\alpha \\ \Delta &= \omega^2\end{aligned}\quad (6 \cdot 6)$$

因此与范德玻尔方程一样,当阻尼系数 $\alpha=0$ 时,特征根为

$$\lambda = \pm i\omega \quad (6 \cdot 7)$$

因此只要非线性项 $h(x, y)$ 取适当形式(见上节关于列娜方程的定理),阻尼系数 α 由负变为正时即可出现霍普夫分岔。对于范德玻尔方程

$$h(x, \dot{x}) = ax^2\dot{x} \quad (6 \cdot 8)$$

又如

$$\begin{aligned}h(x, \dot{x}) &= \dot{x}^3 \\ \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x + \dot{x}^3 &= 0\end{aligned}\quad (6 \cdot 9)$$

或

$$\begin{aligned}h(x, \dot{x}) &= x^2 + \dot{x}^2 \\ \ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 + a)\dot{x} + \omega^2 x &= 0\end{aligned}\quad (6 \cdot 10)$$

这两方程在 $\alpha=0$ 处都将出现霍普夫分岔。

还有一种容易出现霍普夫分岔的情形是系统的动力学方程取如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - xf(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y - yf(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (6 \cdot 11)$$

或

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y - xf(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - yf(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (6 \cdot 12)$$

式中 $f(x^2 + y^2)$ 是 x 和 y 的连续的非线性函数,且除 $f(0,0)=0$ 外, $f>0$ 。

为了较易看出上两方程在 $\mu=0$ 处可出现霍普夫分岔,最好采用极坐标 (r, θ)

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \end{aligned} \quad (6 \cdot 13)$$

则式(6·11)和(6·12)变为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r[\mu - f(r)] \\ \dot{\theta} &= \pm 1 \end{aligned} \quad (6 \cdot 14)$$

在第二式中,对式(6·11), $\dot{\theta}=1$;对式(6·12), $\dot{\theta}=-1$ 。上式中两变量 r 和 θ 的变化互相独立,因此便于分析。当 $\mu < 0$ 时, $\dot{r} < 0$,向径 r 总是趋于变小,最后便将趋于原点。所以 $\mu < 0$ 时原点是稳定平衡点(定态)。再看 $\mu > 0$ 情形。由于 $f(0)=0$ 和 $f(r)$ 的连续性,当 $f(r) < \mu$ 时, $\dot{r} > 0$,向径数值要逐渐变大,故原点不稳定。但当 $f(r) > \mu$ 时, $\dot{r} < 0$,向径变小。因此存在某一 r_1 使得[如果 $f(r)$ 是 r 的单调递增函数,则 r_1 是唯一的,否则 r_1 不是唯一的,于是就可能出现几个极限环] $\dot{r}=0$,于是

$$\begin{aligned} r &= r_1, f(r) = \mu \\ \theta &= t + \text{常数} \end{aligned} \quad (6 \cdot 15)$$

便是一极限环。所以系统在 $\mu=0$ 处出现分岔。

作为式(6·11)的例子,当 $f=x^2+y^2$,有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (6 \cdot 16)$$

在极坐标中上式为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (6 \cdot 17)$$

很明显, $\mu < 0$ 时, $\dot{r} < 0$,平衡点 $(0,0)$ 是稳定的。当 $\mu > 0$ 时,若 $r < \sqrt{\mu}$,则 $\dot{r} > 0$, r 要变大使平衡点不稳;如果 $r > \sqrt{\mu}$,则 $\dot{r} < 0$, r 要变小(图6-4),故 $r = \sqrt{\mu}$ 便是一稳定极限环, $\mu=0$ 是霍普夫分岔点,其分岔图与图6-2相似。

如§4所述,极限环也有稳定与不稳定之分,因此霍普夫分岔也有两种结果。前述范德波尔方程(1·21)、方程(6·9)、(6·10)、

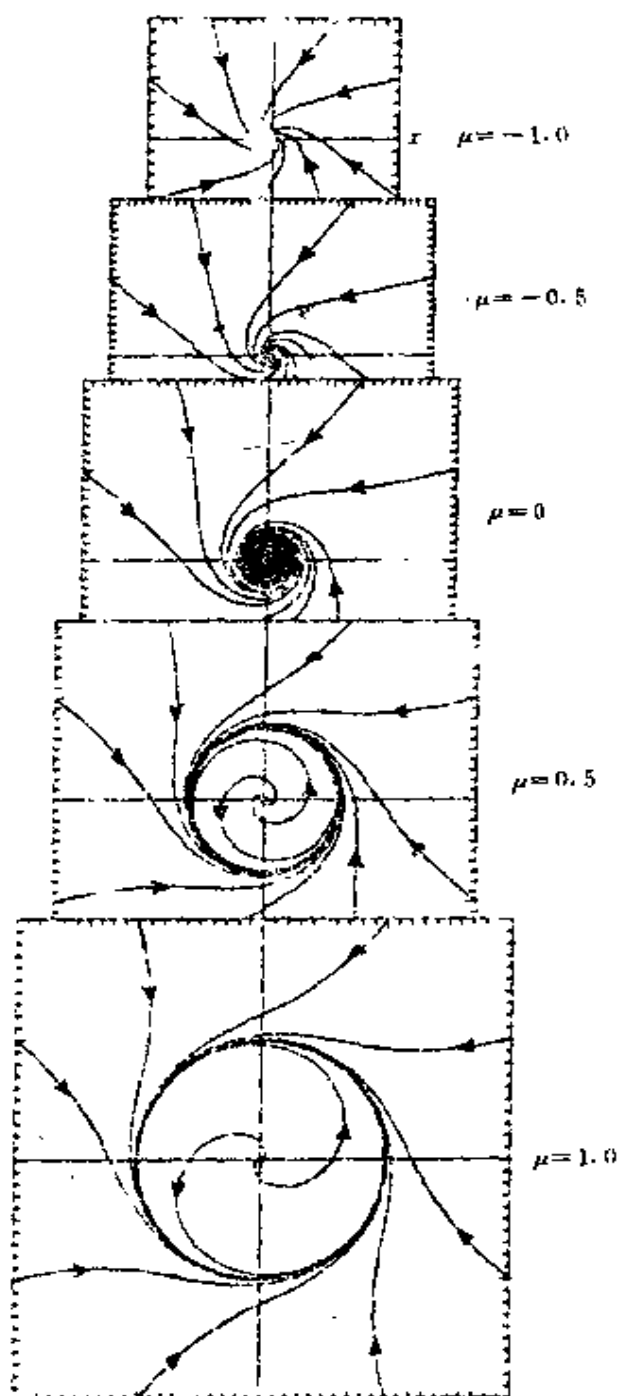


图 6-4 方程(6.16)的相平面轨线

(6·12)和(6·16)等都属于分岔得到稳定极限环的情形。也可能有相反的情形,即由不稳定平衡点分岔出现不稳定极限环。试考察方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (6 \cdot 18)$$

上式很容易变换为极坐标形式

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu + r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (6 \cdot 19)$$

此方程的原点仍是平衡点。当 $\mu > 0$ 时, $\dot{r} > 0$, r 要增大使平衡点不稳。当 $\mu < 0$ 时,

若 $r < \sqrt{-\mu}$, $\dot{r} < 0$, 轨线从 $r = \sqrt{-\mu}$ 趋向原点, 原点稳定;

若 $r > \sqrt{-\mu}$, $\dot{r} > 0$, 轨线从 $r = \sqrt{-\mu}$ 趋向无穷远;

若 $r = \sqrt{-\mu}$, $\dot{r} = 0$ 。

可见

$$r = \sqrt{-\mu} \quad (6 \cdot 20)$$

是一极限环, 但是不稳定, 稍有微扰, 系统即将脱离此极限环。所以

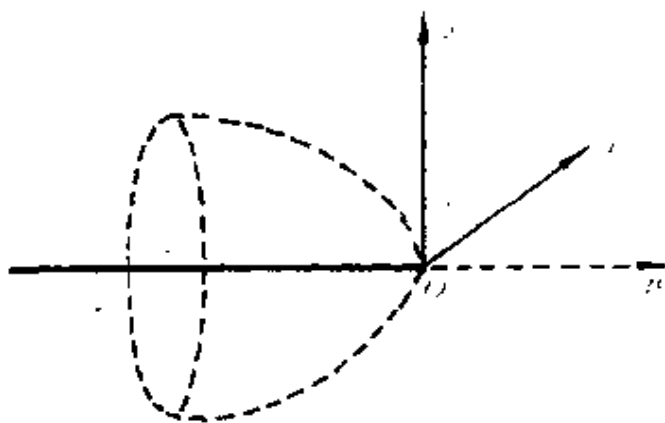


图 6-5 亚临界霍普夫分岔

实线表示稳定状态, 虚线表示不稳定状态

方程(6·18)或(6·19)在 $\mu=0$ 处也出现霍普夫分岔,如图6-5所示。由图可以看出,不稳环与稳定定态出现在分岔点的同侧($\mu<0$ 侧),而图6-2所示的稳定环与稳定定态是分别处在分岔点的两侧。我们称分岔出来的解(分岔分支解)与原来稳定定态解(参考分支)在同一侧的分岔(如图6-5)为亚临界分岔(subcritical bifurcation),称分岔分支与稳定定态分处于分岔点两侧的分岔(如图6-2)为超临界分岔(supercritical bifurcation)。这就是说,由亚临界霍普夫分岔产生的与稳定定态出现在分岔点同侧的极限环总是不稳定的,而由超临界霍普夫分岔产生的与稳定定态出现在分岔点不同侧的极限环是稳定的。这一规律与§4所述“包围不稳定奇点的极限环一定是稳定的,而包围稳定奇点的极限环总是不稳定的”是一致的。

3. 几种典型的静态分岔

再介绍几种简单而又典型的静态分岔。我们将通过具体例子进行分析讨论。

(1) 鞍-结分岔(折叠分岔)

试考察单变量非线性方程

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (6 \cdot 21)$$

很明显,当 $\mu<0$ 时,方程无定态解; $\mu>0$ 时, $\mu - x^2 = 0$ 给出两定态(平衡点):

$$x_1 = \sqrt{\mu} \quad (6 \cdot 22)$$

$$x_2 = -\sqrt{\mu}$$

在 $x-\mu$ 平面上,此两定态分布在抛物线上(图6-6)。可见, $\mu=0$ 是分岔点。

这种分岔之所以称为鞍-结分岔可以从把一维方程(6·21)嵌入一个二维系统中看出。如可以把式(6·21)提升为下面的二维方

程：〔当然也还可以有其他形式，这些形式不影响一维方程(6·21)解的性质〕

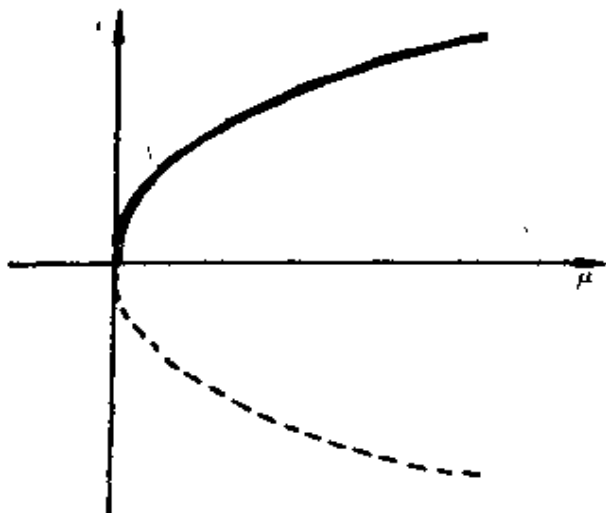


图 6-6 鞍-结分岔

$$\dot{x} = y \quad (6 \cdot 23)$$

$$\dot{y} = \mu - x^2 - y$$

上式实际上又代表下述非线性方程所描述的阻尼运动：

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - \mu = 0 \quad (6 \cdot 24)$$

或者说受阻尼作用的弹性系统具有如下形式的势能：

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3 - \mu x \quad (6 \cdot 25)$$

式(6·23)和式(6·24)的定态自然是 $(\sqrt{\mu}, 0)$ 和 $(-\sqrt{\mu}, 0)$ ，与式(6·22)一致。在定态 $(\sqrt{\mu}, 0)$ 附近，式(6·23)的线性化方程为 $[\xi_1 = x - \sqrt{\mu}; \xi_2 = y]$ 。参考式(3·1)和(3·2)〕

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (6 \cdot 26)$$

$$\dot{\xi}_2 = -2\sqrt{\mu}\xi_1 - \xi_2$$

由此得

$$T = -1, \quad \Delta = 2\sqrt{\mu}$$

因此定态 $(\sqrt{\mu}, 0)$ 是稳定结点(μ 很小, $T^2 - 4\Delta > 0$)。

再看定态 $(-\sqrt{\mu}, 0)$, 在它附近, 式(6·23)的线性化方程为
($\xi_1 = x + \sqrt{\mu}$; $\xi_2 = y$)

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= 2\sqrt{\mu}\xi_1 - \xi_2\end{aligned}\quad (6 \cdot 27)$$

由此得

$$T = -1; \quad \Delta = -2\sqrt{\mu}$$

即定态 $(-\sqrt{\mu}, 0)$ 是鞍点。因此图 6-6 表示定态的抛物线两支中, 上半支是稳定的, 下半支是不稳的。在分岔点 $\mu=0$ 处, 两支合并。

所以当 $\mu < 0$ 时, 方程(6·21)无定态; 在 $\mu > 0$ 时存在一稳定结点和一不稳鞍点。当 μ 从大于零而趋于零时, 结点和鞍点合并, 因此 $\mu=0$ 处的分岔是鞍-结分岔。图 6-7 清楚地显示出鞍-结分岔时在分岔点两边的巨大差别; $\mu > 0$ 时解有两个不同流域(以渐近线 $x = -\sqrt{\mu}$ 为界), 初始条件不同将得到两种完全不同的结果; $\mu < 0$ 时因没有奇点(平衡点), 所有轨线都趋于无穷远。这也表明, 静态分岔也可以使(6·23)或(6·24)所表示的阻尼系统由于参数在分岔点处的微小差别可以引起运动性质出现突变。

(2) 跨临界分岔(transcritical bifurcation)

出现这种分岔的典型单变量非线性方程取如下形式:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (6 \cdot 28)$$

上式有两定态(平衡态); $x=0$ 和 $x=\mu$ 。另一方面, 如果系统的势能为

$$U(x) = -\frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad (6 \cdot 29)$$

其平衡点也是 $x=0$ 和 $x=\mu$ 。因此方程(6·28)相当于系统具有式(6·29)形式的势能。

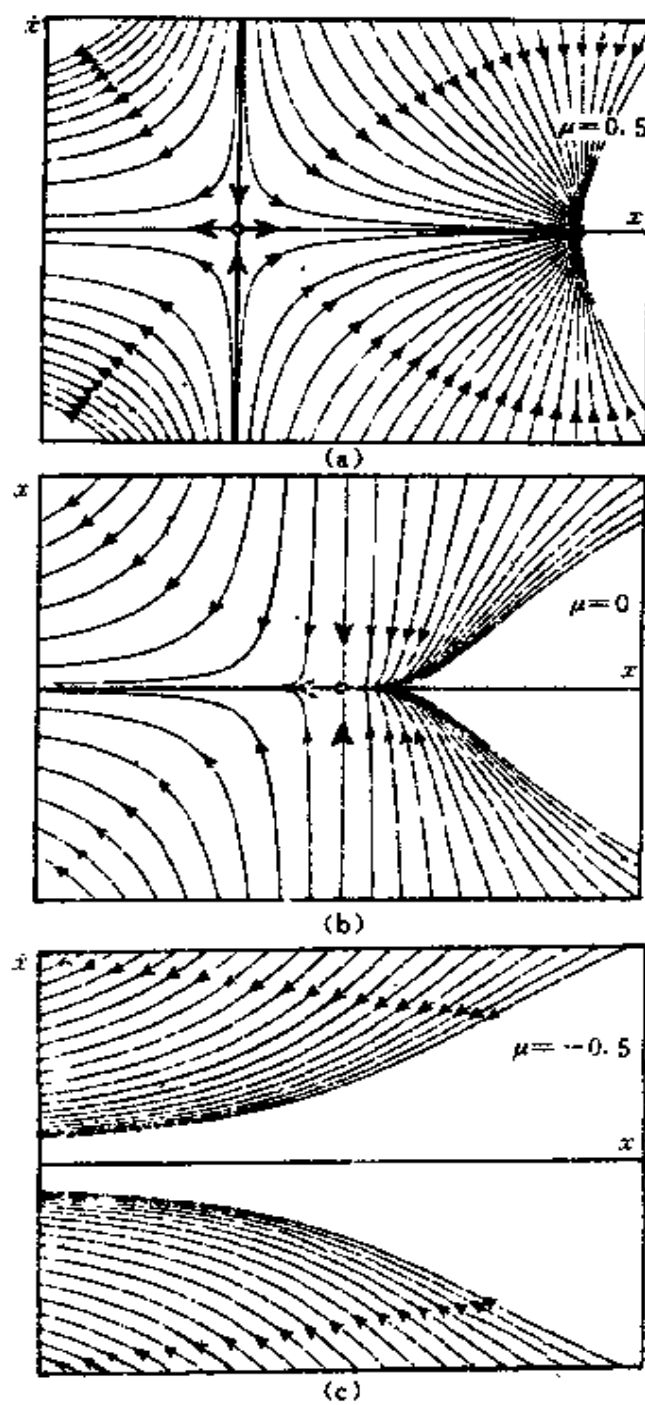


图 6-7 鞍-结分岔时的相平面上的轨线

对于平衡点 $x=0$, 式(6·28)的线性化方程为(方程中略去非线性项)

$$\dot{\xi} = \mu \xi \quad (6 \cdot 30)$$

其特征根就是

$$\lambda = \mu$$

因此 $\mu < 0$ 时, 定态 $x=0$ 是稳定的; $\mu > 0$ 时, 它是不稳定的。

再看定态 $x=\mu$, 这时的线性化方程为

$$\dot{\xi} = -\mu \xi \quad (6 \cdot 31)$$

此时的特征根为

$$\lambda = -\mu$$

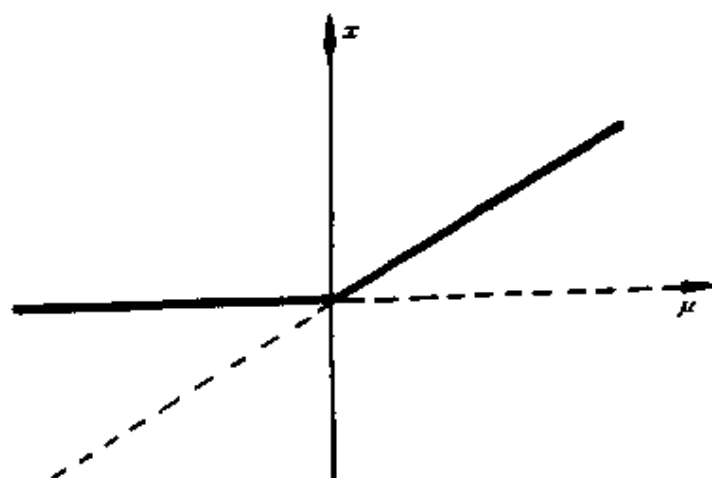


图 6-8 跨临界分岔

因此当 $\mu < 0$ 时, 定态 $x=\mu$ 是不稳的, 而 $\mu > 0$ 时 $x=\mu$ 却是稳定的(图 6-8)。所以两定态的稳定性在 $\mu=0$ 处发生突变: 原来稳定的($\mu < 0$ 时的原点)变为不稳定的($\mu > 0$ 时的原点), 原来不稳定的($\mu < 0$ 时的 $x=\mu$)变为稳定的($\mu > 0$ 时的 $x=\mu$)。

某些工程桁架的势能具有式(6·29)的形式, 从而其平衡状态的变化具有此跨临界分岔的特性。当它受某一方向的力 F 低于某

一值 F_c ($\mu = F - F_c < 0$) 时, 它可以维持形状不变, 于是其形变 x 与受力 F 之间的关系如图 6-8 纵轴的左侧稳定定态所示。当受力 F 超过阈值 F_c 时 ($\mu = F - F_c > 0$), 形变开始出现 ($x \neq 0$), 且与受力 F 有线性关系, 故形变 x 与力 F 的关系如图中纵轴右侧稳定平衡点所示。

(3) 音叉分岔 (pitchfork bifurcation)

另一种情形是方程为

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (6 \cdot 32)$$

这相当于系统的势能为

$$U = -\frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad (6 \cdot 33)$$

即 §1 中的硬弹性系统 [注意式 (6·32) 与式 (1·11) 系数符号不一样]。方程 (6·32) 和 (6·33) 的定态 (平衡点) 有三 (参考图 1-2): $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{\mu}$ 。

对于平衡点 $x=0$, 方程 (6·32) 的线性化方程是 ($\xi=x$)

$$\dot{\xi} = \mu\xi \quad (6 \cdot 34)$$

其特征根为 μ 。当 $\mu < 0$ 时, 平衡点 $x=0$ 是稳定的; 当 $\mu > 0$ 时, 它是不稳的。

对于平衡点 $x=\sqrt{\mu}$ 和 $x=-\sqrt{\mu}$, 方程 (6·32) 的线性化方程都是 ($\xi=x\pm\sqrt{\mu}$)

$$\dot{\xi} = -2\mu\xi \quad (6 \cdot 35)$$

其特征根为 -2μ 。因为此时 μ 只能取正值, 故这两平衡点都是稳定的。于是方程 (6·32) 的平衡点如图 6-9 所示, 由于其形状如音叉, 故称方程 (6·32) 在 $\mu=0$ 处出现的分岔为音叉分岔。

图 6-1 所示橡胶棒形变与音叉分岔颇相似。如果引起橡胶棒形变的力 F 的临界值 (阈值) F_c 趋于零, 则图 6-1(b) 便退化为图 6-9 了。

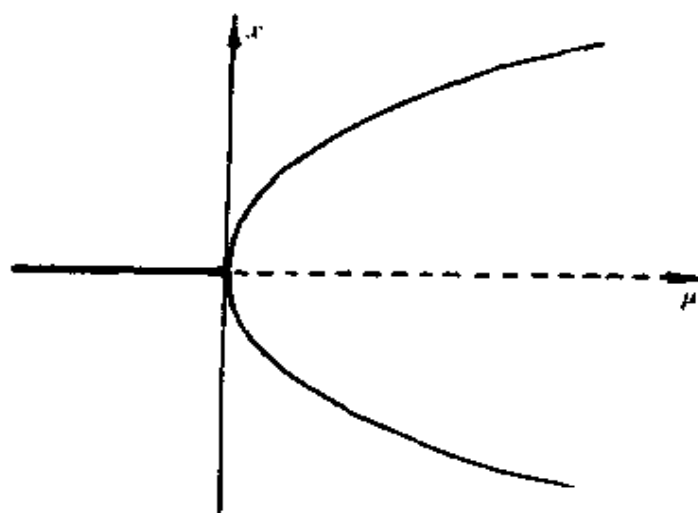


图 6-9 音叉分岔

还有一些物理变化属于音叉分岔的范畴。如单轴各向异性铁磁体(铁磁体具有不同磁化方向的磁畴是与表面有关的宏观效应,与我们现在讨论的突变现象无直接关系)的磁化强度 M 与温度 T 的关系就是又一更典型的例子。单轴各向异性铁磁体具有一个容易磁化的晶轴。磁矩只能是平行或反平行于此轴。当温度 T 高于居里点 T_c 时,剧烈的热运动使磁矩的两种取向概率完全相等,从而铁磁质的平均磁化强度 $M=0$ 。一旦 $T < T_c$, 铁磁质开始出现自发磁化, M 可取正负两个值,它取其中哪个值完全由偶然因素(如微扰)决定。随着温度的继续降低, M 的取值逐渐增大。故 $M-T$ 曲线如图 6-10 所示,它与图 6-9 形状一样,只是反过来罢了($T_c - T$ 相当于参数 μ)。

音叉分岔在 $\mu > 0$ 时两稳定平衡态是对称分布的,如橡胶棒受压向上下两方向形变的概率相等。图 6-6 所示的鞍-结分岔在 $\mu > 0$ 时却只有一个稳定平衡态,因此不具有此对称性。如果方程(6·32)和(6·33)所表征的系统失去对称性。如上述橡胶棒某一面稍有缺陷(或铁磁体磁化时存在微弱的外磁场),则其形变(或磁

化)可能不具有对称分布,形变(或磁化)将是单一方向的。即系统将由音叉分岔过渡到鞍-结分岔。

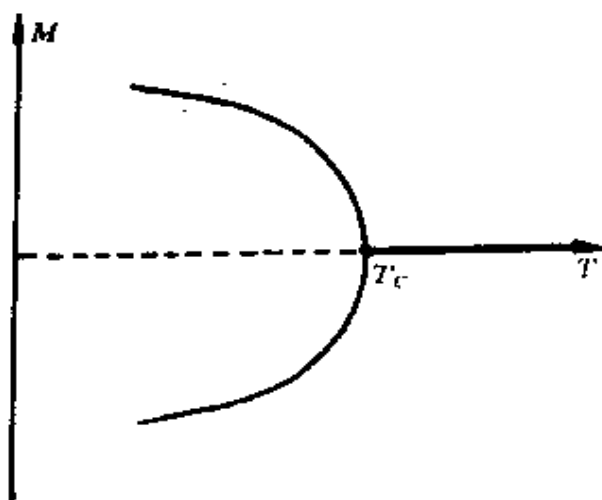


图 6-10 铁磁体的自发磁化曲线

如果系统不是硬弹性系统而是软弹性系统,即式(1·11)中的 $\mu < 0$,而式(6·33)和(6·32)分别变为

$$U = -\frac{1}{2}\mu x^2 - \frac{1}{4}x^4 \quad (6 \cdot 36)$$

$$\dot{x} = \mu x + x^3 \quad (6 \cdot 37)$$

用类似的方法可知,这时的平衡态将如图 6-11 所示。即仅当 $\mu < 0$ 时有一个稳定平衡态,另两个是不稳的; $\mu > 0$ 时系统无稳定状态。人们称这时在 $\mu = 0$ 处出现的分岔为反音叉分岔。

图 6-9 中分岔出来的解(分岔分支)与原来稳定平衡解(参考态)分别在分岔点的不同侧,故音叉分岔是超临界分岔。图 6-11 中的分岔分支与原来的稳定平衡解都在分岔点的同一侧,故反音叉分岔是亚临界分岔。由此也可见,由超临界分岔产生的分岔解(分岔分支)确是稳定的,而由亚临界分岔产生的分岔解是不稳定的,这与前面讲的关于霍普夫分岔的结果相同。

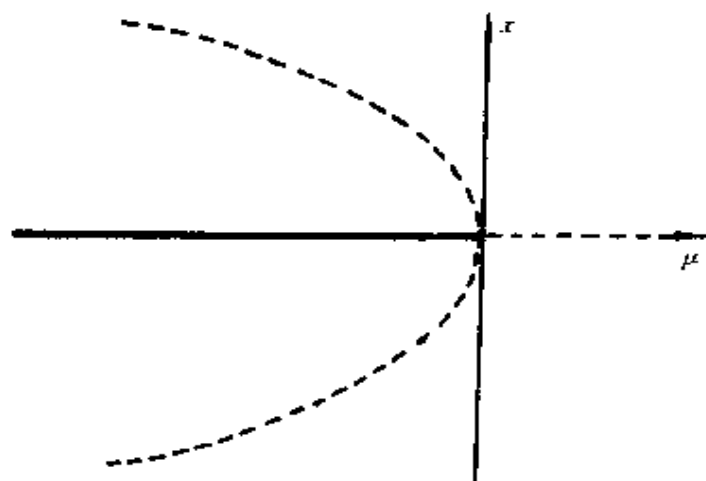


图 6-11 反音叉分岔

4. 逐次分岔和耗散结构的形成

还要指出,一个系统的分岔有时不仅仅出现一次。随着参数值 μ 的不断变化,可能出现一系列的分岔点。也就是说,满足条件 (6·2) 或 (6·3) 的解不是唯一的,于是在与各个解对应的不同参

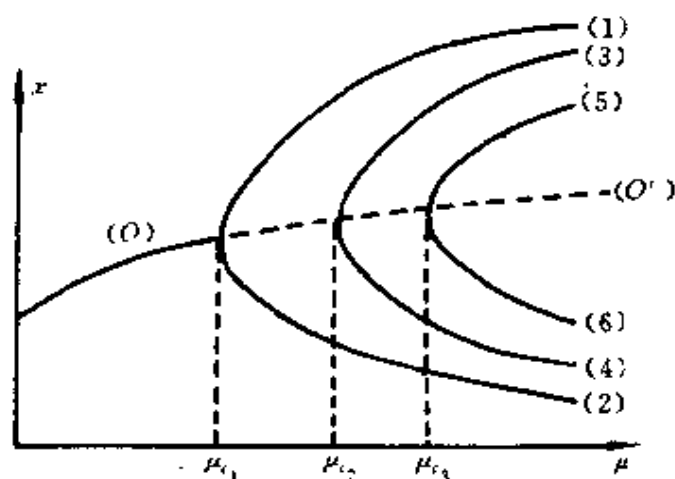


图 6-12 逐次初级分岔

数值 μ_c 处都可能出现分岔,如图 6-12 所示。设图中(O)是原来的稳定定态(参考态,即通常的热力学平衡态),在参数 μ 取 μ_{c1} 、 μ_{c2} 、 μ_{c3} 、...等处都出现分岔,从而出现了一系列分岔解(分岔分支)(1)、(2)、(3)、……。因此例如当 $\mu > \mu_{c3}$ 时,将存在 7 种可能的状态,其中 6 个是稳定定态(或三个稳定极限环),而原来的热力学平衡态反而是不稳的[图中(O')支]。

还存在另一种情形。当系统经过第一次分岔处于稳定状态(定态或极限环)(1)时,由于参数值的变化,(1)的稳定性又可能发生突变。即(1)自身又可在某一参数值 μ_d 处出现分岔。如此下去,将出现一系列的次级分岔的级联现象(图 6-13)。

布鲁塞尔学派的一些学者曾对三分子模型(§5)的逐级分岔进行了计算和分析,得到了一些具体结果*。

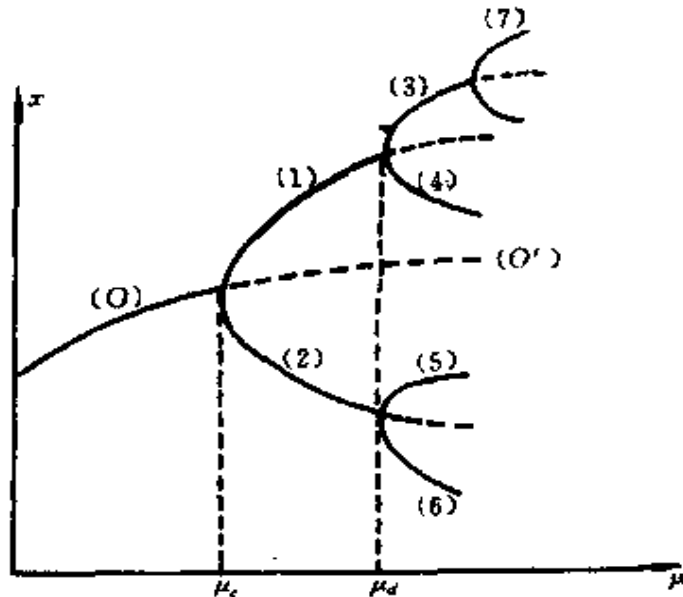


图 6-13 逐次次级分岔

* 参阅尼科利斯和普利戈京著,徐锡申等译:《非平衡系统的自组织》§7.9 和附录 1.3.

极限环的超临界分岔的级联现象还有所谓倍周期分岔现象,由此还可能最后分岔出现混沌。我们将在下一章介绍。

在一定的参数值范围内由逐级分岔得到的多个状态通常都是离散的,人们有时称这种由逐次分岔出现多个离散状态的现象为“宏观量子化”。这种状态的“量子化”又使人们认为一些动力学系统具有“记忆”作用并使系统具有储存信息的本领。如已知系统已处于图 6-13 中(7)的状态,可以推知,它是来自状态(3)以至(1),而不会是来自状态(4)或(2)。

分岔和次级分岔具有很重要的实际意义。既然分岔使系统的动力学方程的解(状态)的拓扑结构发生了变化,自然也要相应地使系统的结构发生质的变化。对于一个物理学或化学研究的物质系统,这意味着系统在分岔点两边分处于不同相(phase)中。如前面讲的铁磁体在分岔点(临界点,也就是居里点 T_c)一侧($T > T_c$)属于磁化强度 $M=0$ 的均匀无序相,而在另一侧($T < T_c$)则属于磁化强度 $M \neq 0$ 的自发磁化相。因此分岔现象表示出现了相变*。

通常物质系统多处于热力学平衡态中。经过分岔,原来的热力学平衡态在参数轴的另一侧失稳,新出现的状态(如稳定极限环)是非平衡态。进一步的高级分岔自然是发生在远离热力学平衡态的区域。因此,非线性系统中出现的分岔现象相当于非平衡相变。

在热力学平衡态中,系统的熵取极大值,物质分布将是尽可能地处于均匀无序状态。这时系统具有最高的对称性,即一切对称操作都不改变系统的状态。或者说,这时存在有无穷多对称元素:空间各种平移、各种转动、反射以及时间平移。经过分岔,系统处于新

* 严格说,分岔现象(临界现象)应该是对应于临界点的每侧只有一种相的第二类相变(连续相变),而不是两相可以共存的第一类相变。

的定态或振动状态,如时间周期状态(极限环)或空间的规则花样(如B-Z反应中的图5-2和图5-3)。这些状态自然不会像热力学平衡态那样均匀无序,而是不同程度的有序化了。也就是说,对称性受到破坏而不如原来状态那样高了。以普里戈京为首的布鲁塞尔学派称这种由非平衡过程形成的具有时间有序(处于振荡状态)或空间有序的结构为耗散结构。因此耗散结构是分岔引起对称破缺(symmetry breaking)而形成的。

各种生物的各种组织和器官以至生物体自身自然是高度有序的结构,这是生物不断与周围环境交换物质与能量的非平衡条件下发育形成的。因此它们只能是通过分岔(非平衡相变)而形成的耗散结构。例如,生物胚胎的发育过程可用某一(或某些)适当参数的数值表征,参数取值在某一范围对应胚胎发育的某一阶段。当参数像超过某一临界值时出现分岔,产生了新的分支状态,这表示生物发育出现了新的组织或器官,高级(二级、三级、...)分岔出现多种分岔状态,表示胚胎发育逐步生长出具有各种复杂组织和器官的结构,最后便形成了整个生物。

天体的演化、地球的地质时期的进化、生物种类的进化,甚至人类社会的进化等,也都可看成是逐级分岔的级联现象,正是由于这种多次的对称破缺,它们才得以具有很复杂的结构(耗散结构,参考§15)。

这样一来,生物形态学和进化论等就都可以用定量的数学形式表述了。

§7 多重定态和突变理论简介

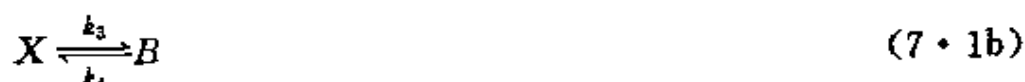
由于静态分岔,非线性系统中可以同时存在多个定态。这种多重定态(multisteady states)的存在,使系统出现一些重要性质。不

同流域的存在(§2和§5)就是一例。我们现在以一个典型的化学反应做为具体例子分析非线性方程具有多重定态解时出现的一个重要性质——滞后现象,然后用这个例子介绍突变理论的基本概念。

1. 自催化反应的施乐格(Schlögl)模型

我们已经知道,化学反应的速率方程常常是非线性的。而且它很容易出现多重定态。某些化学反应的热效应(吸热或放热)还可引起温度变化,而温度变化又可反过来影响反应速率,这样就更可能使非线性速率方程更复杂而更易出现多重定态。另一种容易引起出现多重定态的重要方式是自催化反应。曾经有些人提出过关于自催化反应的模型。我们现在以比较简单又典型的施乐格模型为例来进行分析。

施乐格模型是由下面两反应组成:



显然,上述反应的总效应是



所以在反应(7·1)中,A和B分别表示底物和产物。当然,单有A存在并不能引起反应(7·2),必须有中间物X存在,式(7·1a)表示X具有自催化作用(由2X变为3X)。

设底物和产物的浓度维持不变,则反应的速率方程为

$$\frac{dX}{dt} = k_1 AX^2 - k_2 X^3 - k_3 X + k_4 B \quad (7 \cdot 3)$$

首先讨论平衡(动态平衡)条件。这要求反应〔7·1(a)〕和〔7·1(b)〕的反应速率分别都等于零,即(下标e表示平衡时的值)

$$\begin{aligned}k_1AX_e^2 &= k_2X_e^3 \\ k_3X &= k_4B\end{aligned}\quad (7 \cdot 4)$$

由此得

$$\left(\frac{X}{A}\right)_e = \frac{k_1}{k_2}; \quad \left(\frac{A}{B}\right)_e = \frac{k_2k_4}{k_1k_3} \quad (7 \cdot 5)$$

上式表示只有当底物和产物浓度满足一定的条件,反应才停止,系统处于平衡态。

当 A 和 B 不满足条件(7·5)时,系统处于非平衡态,反应不停止。反应也可以在定态情形下进行,即反应可在中间物浓度 X 不变下进行。由(7·3)可知,定态条件是(下标 S 表示定态)

$$k_2X_S^3 - k_1AX_S^2 + k_3X_S - k_4B = 0 \quad (7 \cdot 6a)$$

或

$$X_S^3 - aX_S^2 + kX_S - b = 0 \quad (7 \cdot 6b)$$

$$a = k_1A/k_2, \quad b = k_4B/k, \quad k = k_3/k_2$$

根据代数理论可知,由于系数不同,上述三次代数方程有不同性质的解。令

$$q = -\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{3}k \quad (7 \cdot 7)$$

$$r = \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}ak + \frac{1}{2}$$

则式(7·6b)的解可分为以下三种情形:

- (1) $q^3 + r^2 > 0$ 时,有一个实根和一对复根;
- (2) $q^3 + r^2 < 0$ 时,有三个不同实根;
- (3) $q^3 + r^2 = 0$ 时,有一个单根和一对重根($q = r = 0$ 时,则为三重根)。

$$\text{单根: } X_S = 2r^{\frac{1}{3}} + a/3$$

$$\text{重根: } X_S = -r^{\frac{1}{3}} + a/3$$

将方程

$$q^3 + r^2 = 0 \quad (7 \cdot 8a)$$

用 a 和 b 写出, 有

$$b^2 + \left(\frac{4}{27}a^3 - \frac{2}{3}ak\right)b + \frac{4}{27}k^3 - \frac{1}{27}a^2k^2 = 0 \quad (7 \cdot 8b)$$

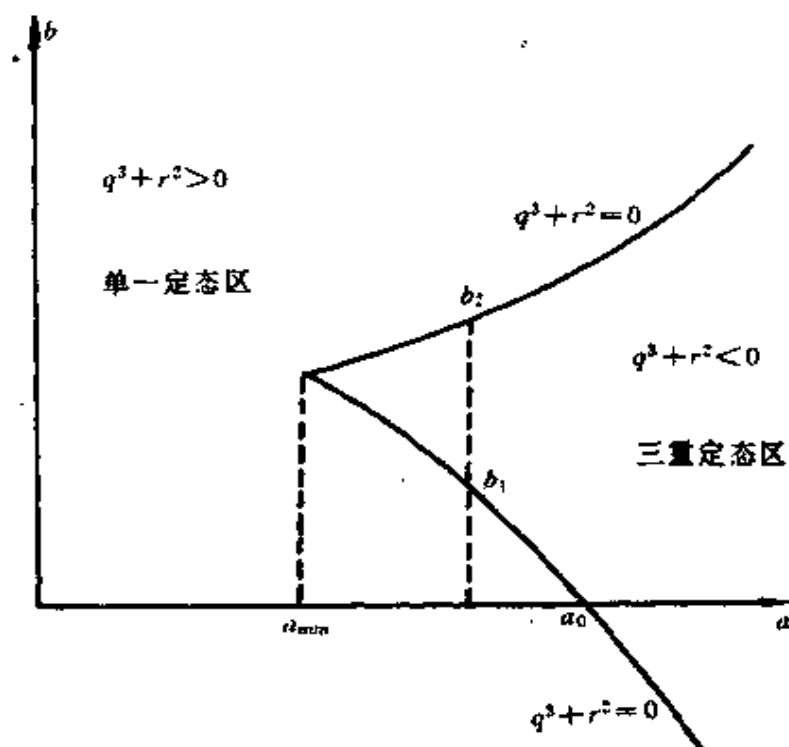


图 7-1 在 $a-b$ 平面上稳定性的分区

对于一定的 a 值, 上式有关于 b 的两个解 b_1 和 b_2 , 设 $b_1 < b_2$, 则方程 (7·6b) 有三个不同实根的情形 (2) 应满足 (图 7-1)

$$b_1 < b < b_2 \quad (7 \cdot 9)$$

又平衡条件 (7·5) 可写为

$$\left(\frac{b}{a}\right)_e = k \quad (7 \cdot 10)$$

很容易证明, 式 (7·10) 只能存在于只有一个实根的情形 ($q^3 + r^2 > 0$), 即平衡态只可能存在于单态区。而三重态只能在远离平衡态的 (参数) 区域出现。

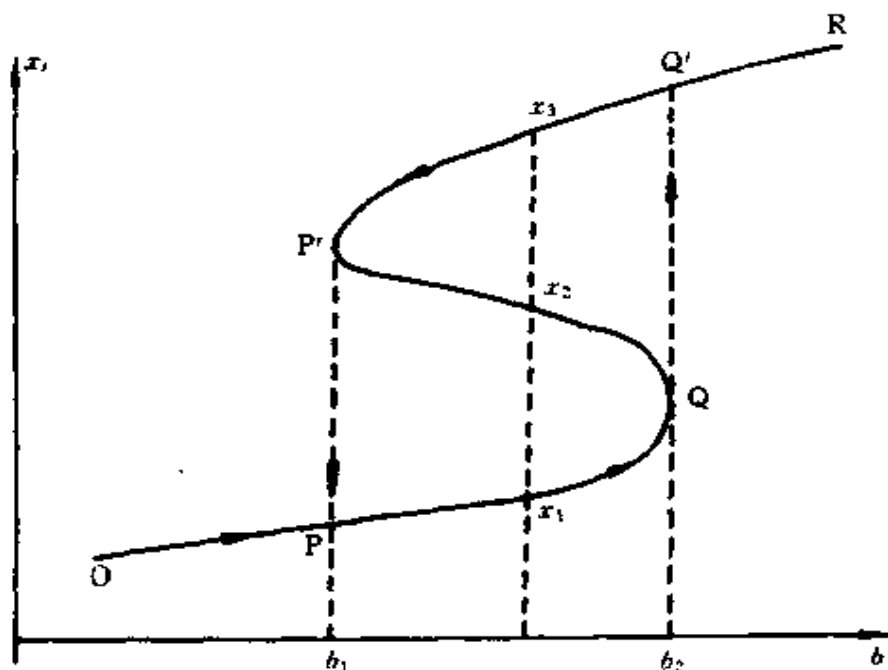


图 7-2 三重态中的滞后现象

如果取 $a > a_{\min}$ (见图 7-1), 根据(7·7)画出定态 X_s 和 b 的关系, 将得到图 7-2 的曲线。此结果清楚地表示, b 在 (b_1, b_2) 区间内时的确存在三个定态(三重态): X_1 、 X_2 和 X_3 , 在 (b_1, b_2) 之外, 定态仍是单一的。所以当 a 取值一定时, b_1 和 b_2 都是分岔点。

2. 稳定性分析和滞后现象

还须分析这些定态的稳定性。由式(7·3)可以看出,

$$\text{当 } X \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{dX}{dt} = k_4 B > 0$$

$$\text{当 } X \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{dX}{dt} \rightarrow -\infty$$

因此对于方程(7·6a)有一个实根的单态和有三个实根的重态, $\frac{dX}{dt} - X$ 曲线分别取图 7-3a 和图 7-3b 的形式。由图 7-3a 可知, 对于单态 X_s , 当扰动使 $X < X_s$ 时, $\frac{dX}{dt} > 0$, 即 X 将增大; 当扰

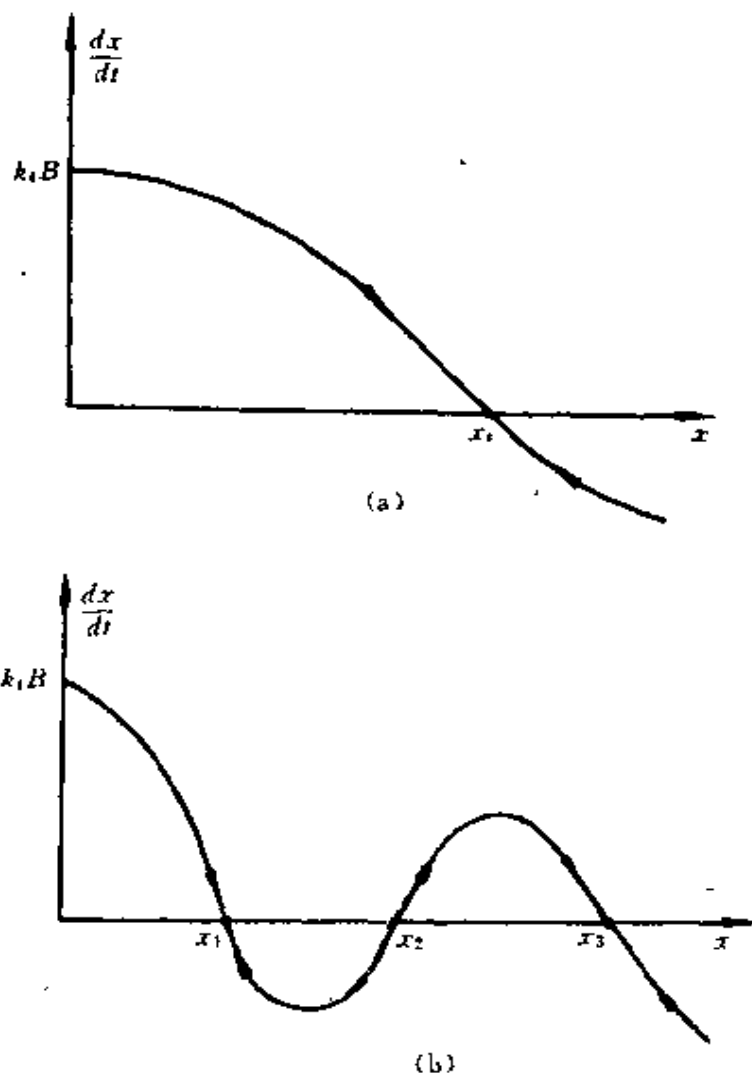


图 7-3 单态(a)和三重态(b)的稳定性分析

动使 $X > X_5$ 时, $\frac{dX}{dt} < 0$, 即 X 将减小, 因此不管扰动如何使 X 偏离 X_5 , 系统仍将返回定态 X_5 , 从而此单态是稳定的。

再看三重态, 因 7·3b 表明, 在 X_1 和 X_3 附近的情形与单态 X_5 完全相似, 因此定态 X_1 和 X_3 是稳定的。至于在中间那个定态 X_2 附近, 当扰动使 $X < X_2$ 时, $\frac{dX}{dt} < 0$, 即 X 要进一步减小而远离

X_2 。当扰动使 $X > X_2$ 时, $\frac{dX}{dt} > 0$, 即 X 要进一步增大而远离 X_2 。因此在三重态中, 中间态 (X_2) 是不稳的。

三重态的存在使得参数值缓慢变化时, 系统状态将出现所谓滞后 (hysteresis) 现象。设开始时系统处于图 7-2 中的单态 O 处, 当参数 b 之值缓慢增大时, 状态沿 OPQ 支变化, 即使在三重态区 ($b_1 < b < b_2$) 内, X 仍取确定值 X_1 。只有当系统受到超过相当于中间支 QP' 的扰动, 它才可能自动跃迁到 $P'Q'$ 支所示的状态。当 b 增大到 b_2 再继续微小增大时, 系统将自动由 Q 突变到 Q' , 然后沿上支 $Q'R$ 变化。如果系统开始处于上支 $P'Q'R$ 所示的状态, 逐渐减小 b 值, 系统不会沿上述原来的路线返回到 O 点。当状态沿 $RQ'P'$ 变化进入到三重态区内, X 取值是 X_3 而不是 X_1 。当 b 减小到 b_1 后再继续稍微变小, 状态将由 P' 突变到 P , 然后沿下支 PO 变化。这种滞后现象与大家熟知的磁滞现象相似。

由于 OPQ 支上的 X 值较小, 它所代表的状态通常是热力学平衡态或基态, 而 X 取值较大的支 (图 7-2 的上支) 则相当于激发态或高能量态。当系统处于 PQ 段的状态, 仅当受到足够大 (超过相当于中间支 QP' 之值) 的微扰时, 系统才有可值自动跃迁到 $P'Q'$ 支上。反之, 在 $P'Q'$ 支上也可能由于受微扰而跃迁到 PQ 支上。由此可见, 由于三重态只有两个是稳定的, 它实际上相当于双稳态: 系统只可能处于两稳定状态之一, 或者说, 状态变化只能是非此即彼的全或无 (all or none) 跃迁。

上述滞后现象或全或无跃迁具有广泛的实际意义。例如, 理论和实际已证实 (§ 19), 激光器等光学系统中就存在像图 7-2 那样的双稳态, 而且可实现自脉冲现象。在某些化学反应中, 某些内在因素自发引起的爆炸或停滞 (减弱) 现象很可能就是这种双稳态引起的。这是通常化学反应所不希望遇到的。为此, 应适当选取反应

参数使之尽量远离突变点(b_1 和 b_2)甚至整个三重态区。当然,也可能有的化学反应可以利用突变现象。

在生命现象中,生物进化过程中新物种的生成和细胞分化形成新的组织也都可看作是它们自增殖(自催化)在一定的周围环境(方程中参数取适当值)进行的。从以上分析看,这也可能是由于自催化过程形成多重态,然后系统在多重态之间跃迁而引起的。此外,可兴奋细胞(如神经和肌肉细胞)的激活就是其电位(细胞膜内外电位差)存在双稳态并出现跃迁的结果,这是引起神经冲动和肌肉(如心肌)动作的原因(参考 §2 和 §22)。

还要看到,如果把图 7-2 与范德瓦耳斯理论的 $V-P$ 曲线(等温线)对比,可以看出它们的相似性。范德瓦耳斯理论可以较好地解释气-液相变。此处远离平衡态的多重态区域内出现的状态突变现象也可看作是非平衡相变。它在临界点(如 b_1 和 b_2)的行为与相变确有许多相似之处。在此我们就不再进行讨论了。

3. 突变理论简介

分岔现象意味着存在突变。突变理论(catastrophe theory)就是一种专门研究突变现象的数学理论,它是托姆(Thom)等人提出的一种理论。我们现在通过对上面例子的分析对此理论略加介绍。

从上节关于静态分岔的一些例子可以看出,某些单变量系统往往存在一势函数(势能或热力学势) $U(x)$ 使得(用撇代表对变量 x 求导,即 $U' = \frac{dU}{dx}$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{x} = \dot{y} &= f(x, \mu) = -U'\end{aligned}\tag{7.11}$$

对于定态(平衡态)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = 0 \\ \ddot{x} &= \dot{y} = f(x, \mu) = -U' = 0\end{aligned}\quad (7 \cdot 12)$$

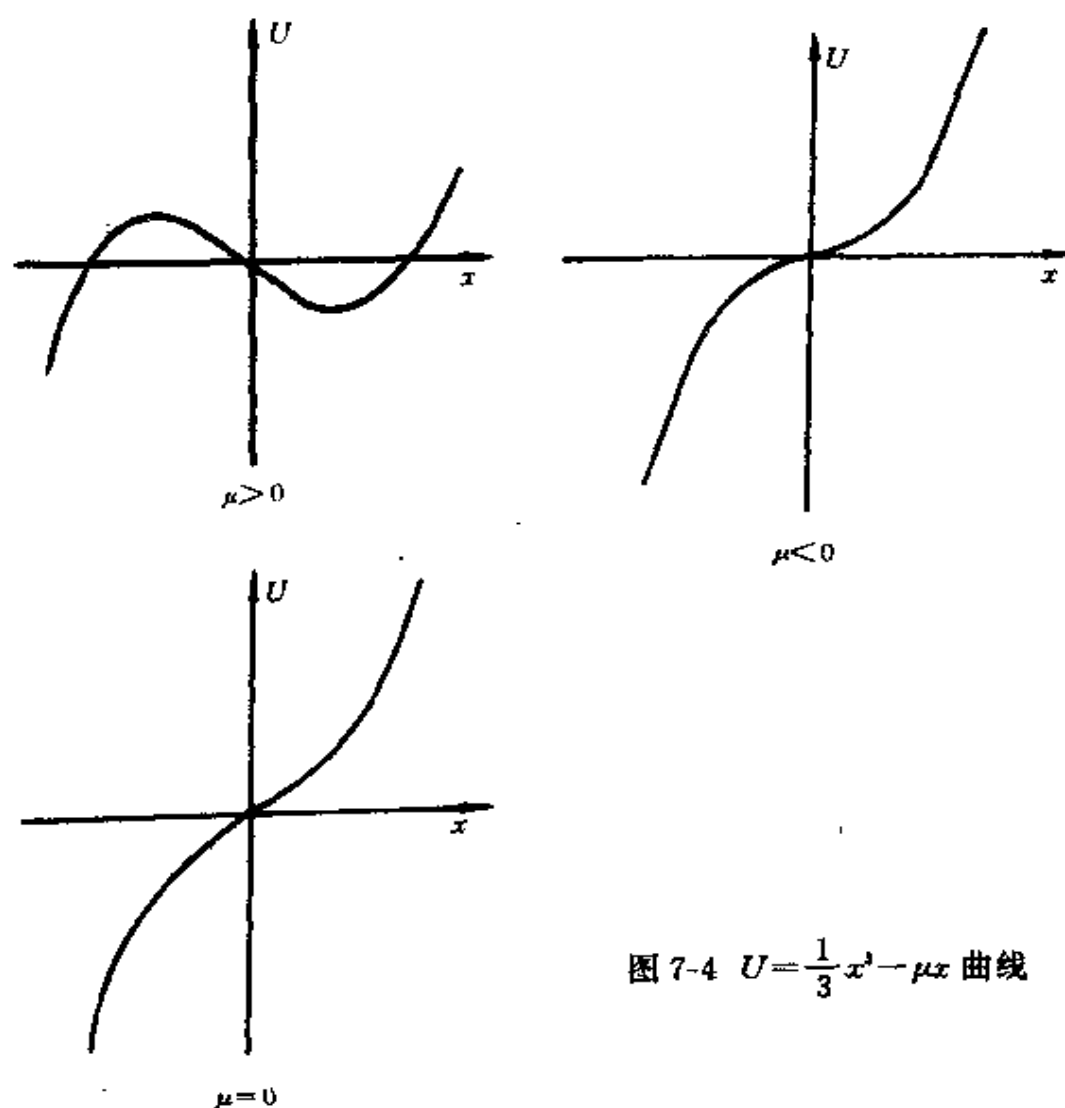


图 7-4 $U = \frac{1}{3}x^3 - \mu x$ 曲线

即定态就是势函数 U 取极值的状态, U 取极大值 ($U' < 0$) 对应于不稳定态, U 取极小值 ($U' > 0$) 对应于稳定定态。

在参数 μ 变化引起分岔和解 X 的性质发生突变时, 势函数 U 自然也要发生重大变化。例如在上节讲的鞍-结分岔情形。不同 μ 值的 $U(x) - X$ 曲线如图 7-4 所示: $\mu > 0$ 时, U 有一极大和一极小, 分别对应于系统有一不稳定定态和稳定定态。 $\mu < 0$ 时, U 无极

值,故系统无定态。

还可以注意到,在变量-参数平面(空间)中, $U' > 0$ 和 $U' < 0$ 的两区域被定态曲线

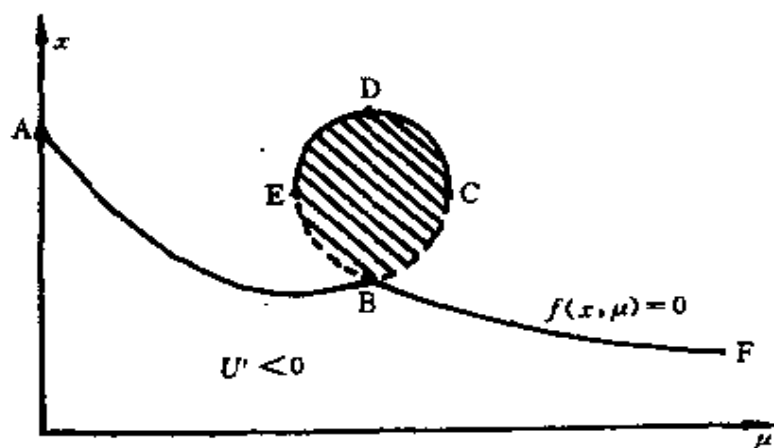


图 7-5

$$f(x, \mu) = 0 \quad (7 \cdot 13)$$

所分隔。而且 $U' < 0$ 的区域总是在稳定定态曲线下面,因为如果图 7-5 所示阴影区中 $U' < 0$,由式(7·12)知在此区中 $f > 0$,而在此区域上界的定态曲线上, $f = 0$ 。这表示在 $U' < 0$ 的区域,当 x 增加时, f 要减小,即

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dU}{dx} \right) < 0$$

从而

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right) > 0$$

既然 U 对变量 x 的二阶导数大于零,因此 U 在 $f=0$ 处是取极小值,从而定态是稳定的。同样可推知, $U' < 0$ 区域下面的定态曲线是不稳定的。据此,我们就可以比较容易地判断某些复杂情形下定态的稳定性了。如图 7-5 的定态曲线中,我们自然容易判断 AB 和 BF 两段代表稳定定态。对于 BCDE 段,其中 CDE 部分也是在 U'

<0 区域之上,故 CDE 也是代表稳定定态。但 BC 和 BE 两部分是在 $U' < 0$ 区域之下,故 BC 和 BE 两部分是不稳定的。

以上结果虽然是对只有一个参数的情形分析得到的,但对不止一个参数的情形也同样成立,只是更复杂罢了。

由此可见,只要知道系统的势函数 U ,就可求出其定态并设法判断其稳定性。托姆等人研究了多种典型的势函数并分析了它们引起的突变的特点。上节几种静态分岔都是属于可以这样分析的情形。变量较多,特别是存在振荡的情形,这种方法就有些困难了。

现在用上面的方法分析施乐格模型。为了得到与托姆的标准形式一致,令

$$\begin{aligned} z &= x - \frac{k_1}{3k_2}A \\ \mu &= \frac{k_1^2 A^2 - 3k_1 k_2}{3k_2^2} \end{aligned} \quad (7 \cdot 14)$$

$$\nu = \frac{k_1 k_3}{3k_2^2}A - \frac{2k_1^3}{27k_2^3}A^3 - \frac{k_4}{k_2}B$$

$$\tau = k_2 t$$

于是式(7·3)中消去了二次项并简化为

$$-\frac{dz}{d\tau} = z^3 - \mu z + \nu \quad (7 \cdot 15)$$

引入势函数 U

$$U(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{\mu}{2}z^2 + \nu z \quad (7 \cdot 16)$$

则式(7·15)变为

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{dU}{dz} \quad (7 \cdot 17)$$

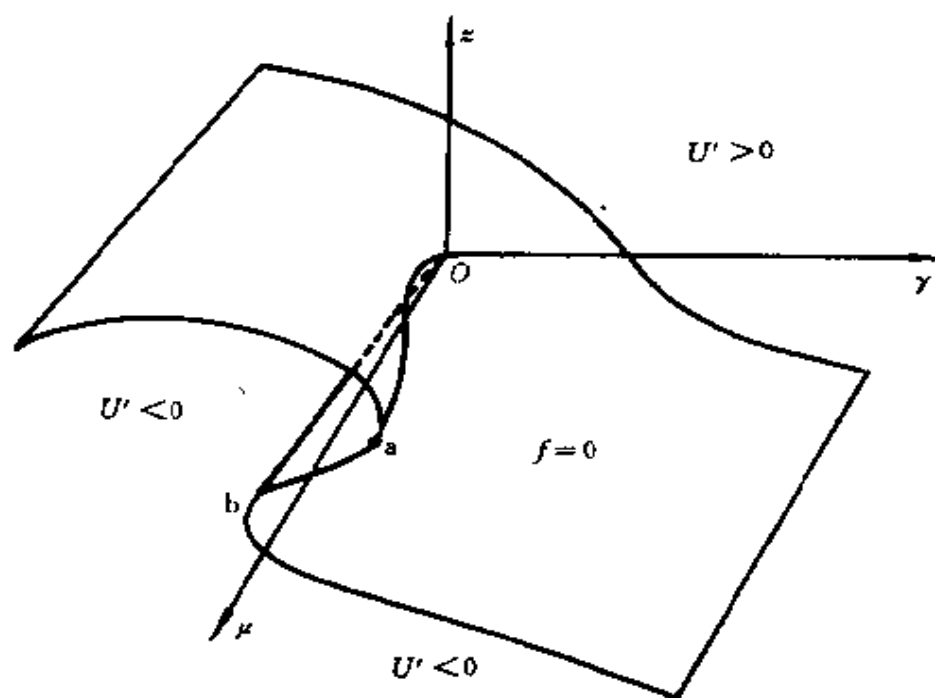
对于定态, $\frac{dU}{dz} = 0$, 即

$$f(z, \mu, \nu) = z^3 - \mu z + \nu = 0 \quad (7 \cdot 18)$$

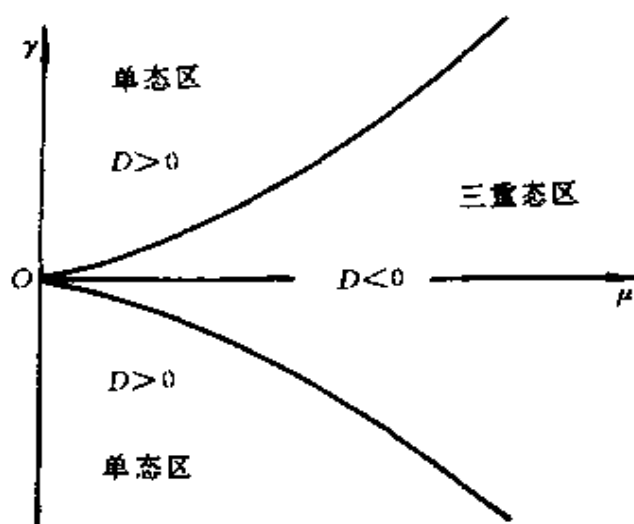
在由 z 和 $\mu\nu$ 张成的三维空间里,上式是一曲面〔图 7-6(a)〕,此曲

§ 7 多重定态和突变理论简介

111



(a).



(b)

图 7-6 尖点突变

面有一部分折叠(图中 Oa 和 Ob 之间部分),在此部分,对应于给定的 (μ, ν) 值, z 有三个值,而其余部分 z 只有一个值。此折叠部分的边界就是三次方程(7·18)三根中有一对重根的情形。仿照前而得到式(7·8)的方法可得在 $\mu-\nu$ 平面上此边界线〔图 7-6(b)〕的方程为〔与式(7·8)比较〕

$$D(\mu, \nu) = -4\mu^3 + 27\nu^2 = 0 \quad (7 \cdot 19)$$

上式与式(7·8)相当,而图 7-6(b)则与图 7-1 相当。

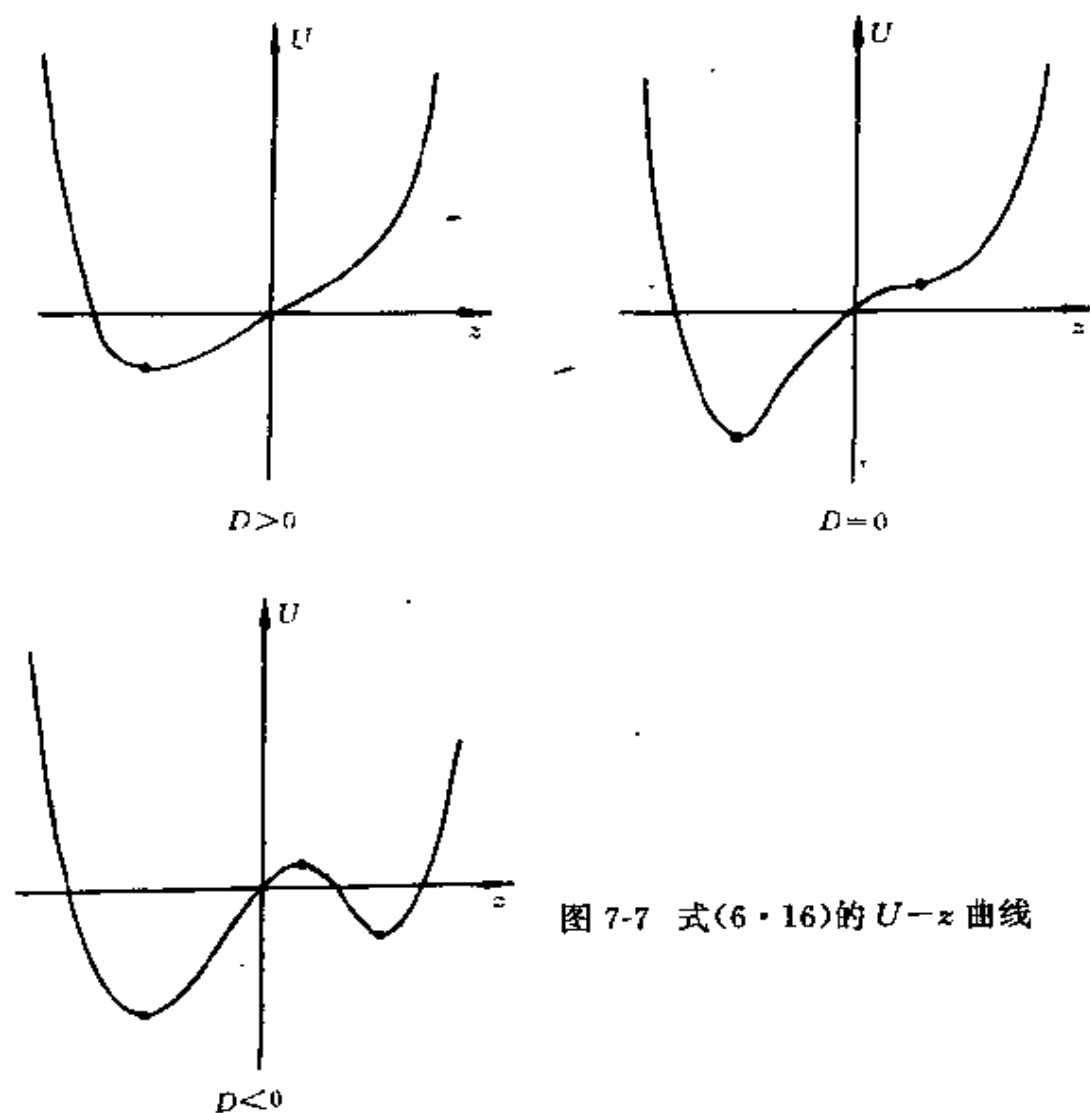


图 7-7 式(6·16)的 $U-z$ 曲线

由式(7·19)可见,在有两个参数时, $D(\mu, \nu)=0$ 便组成了分岔点的集合。根据此集合的形状[图 7-6(b)],这种突变称为尖点突变,而图 6-6 则称为折叠突变。

从 $U(x)$ 的形状看, $D(\mu, \nu)=0$ 也确是一分界线,如图 7-7 所示: $D>0$ 时, U 只有一个极值,这对应于系统只有一个稳定定态; $D<0$ 时, U 有三个极值,其中两个极小对应于两个稳定定态,两极小之间的极大对应于不稳定定态。

从 U' 的符号变号也可以判断定态的稳定性。在图 7-6(a)中,整个曲面 $f=0$ 上方 $U'>0$,在其下方则是 $U'<0$,而折叠部分(Oab)却在 $U'<0$ 区域之下,因此这部分所表示的定态(相当于图 7-2 中的 QP' 部分)是不稳定的。这与上一小节分析结果一致。

§ 8 受迫振动

在许多实际问题中,非线性系统往往受到外加强迫力的作用。表征这类问题的非线性方程自然更难有严格的解析解存在。已经有一些近似方法求解这类方程。我们现在来介绍其中的一种方法——摄动(微扰)法,并由此考察受迫非线性振动的一些特点。

1. 概 述

我们都很熟悉,一个受阻尼力的线性振子的运动方程为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8 \cdot 1)$$

此方程的解为〔设阻尼较弱 $4\omega_0^2 > \alpha^2$ 。否则解是非周期的,即运动是纯指数衰减到静止态(稳定结点)〕

$$x = Ae^{-\alpha/2 t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8 \cdot 2)$$

式中

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2/4 \quad (8 \cdot 3)$$

A 和 φ 由初始条件决定。式(8·2)表示运动是阻尼振动,最后($t \rightarrow \infty$)的静止态是稳定焦点。

如果振子受到简谐强迫力 $F \cos \Omega t$ 作用,其运动方程为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \Omega t \quad (8 \cdot 4)$$

此方程的解为(不考虑暂态过程)

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (8 \cdot 5)$$

式中

$$A = \frac{F}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2 \Omega^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (8 \cdot 6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (8 \cdot 7)$$

式(8·5)~(8·7)表示系统按强迫力频率振动,振幅与位相跟系统的运动参数和强迫力大小(F)有关,当强迫力频率 Ω 等于系统固有频率 ω_0 时,振幅最大,即出现了共振(图 8-1)。

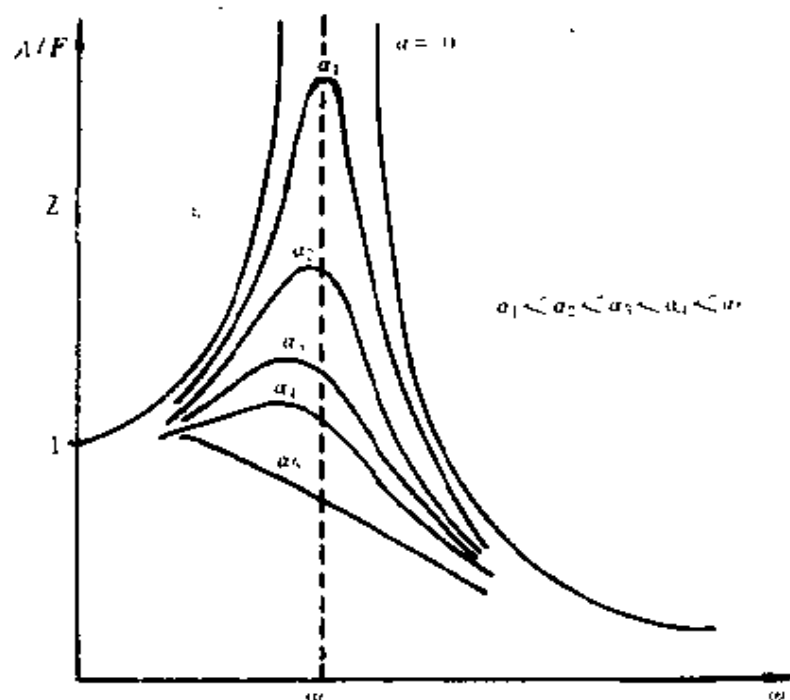


图 8-1

对于非线性系统,无论恢复力是非线性(如杜芬方程描述的),还是阻尼力是非线性(如范德波尔方程表述的),它们的解都是极其复杂的,这不仅表现在方程中参数不同,振动的形态(如包含各种频率成分)可能很不同,甚至还可能出现极其复杂的无序运动,也就是所谓混沌。

在本节中,我们将只以杜芬方程为例,用摄动法求出它的解,以便读者对非线性方程求解的复杂性略见其一斑,同时了解非线性受迫振动的一些特性。振动系统在周期力作用下还可能出现混沌,这方面问题将在下一章讨论。

2. 无阻尼杜芬方程的谐振解

用近似方法求解非线性微分方程,已有好几种方法,在此我们采用摄动法。为简单计,先研究无阻尼的情形。引入一小量 $\epsilon (0 < \epsilon \ll 1)$ 并把非线性和强迫力都看成是对系统的摄动(微扰),无阻尼($a=0$)时的杜芬方程(1·15)即可写成

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon [-\omega^2(ax + bx^3) + P \cos \Omega t] \quad (8 \cdot 8)$$

与方程(1·15)比较可知

$$\omega^2(1 + \epsilon a) = \kappa = \omega_0^2 \quad (8 \cdot 9a)$$

$$\omega^2 \epsilon b = \mu \quad (8 \cdot 9b)$$

$$\epsilon P = F \quad (8 \cdot 9c)$$

ω 可看作是无摄动时系统的频率, ω_0 是无摄动无阻尼时的频率。

先求用频率 ω 振动的周期解。为方便计,引入新的时间变量 τ 代替原来的时间变量 t :

$$\begin{aligned} \Omega t &= \tau + \varphi \\ \frac{d}{dt} &= \Omega \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \quad (8 \cdot 10)$$

φ 是待定的位相。改为对新自变量 τ 求导, (8·8) 变为

$$\Omega^2 \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon [-\omega^2 (ax + bx^3) + P \cos(\tau + \varphi)] \quad (8 \cdot 11)$$

作为周期解,上式自然要满足周期条件

$$x(\tau + 2\pi) = x(\tau) \quad (8 \cdot 12)$$

既然 φ 待定,这就容许我们选择下面较方便的初始条件:

$$x(0) = 0 \quad (8 \cdot 13)$$

我们来寻找方程(8·11)的展成小量 ε 的级数的解:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (8 \cdot 14)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots \quad (8 \cdot 15)$$

由(8·12)和(8·13)应有

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8 \cdot 16)$$

$$x_i(0) = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8 \cdot 17)$$

将式(8·14)和(8·15)代入式(8·11)并令左右两边 ε 的同次幂项相等,得到

$$\begin{aligned} \Omega^2 \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \Omega^2 \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -\omega^2 (ax_0 + bx_0^3) + F \cos(\tau + \varphi_0) \\ \Omega^2 \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -\omega^2 (ax_1 + 3bx_0^2 x_1) - F \varphi_1 \sin(\tau + \varphi_0) \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (8 \cdot 18)$$

我们来利用以上诸式逐步求 x_i 。由(8·18)的第一式和初始条件(8·17)得到零级近似解

$$x_0(\tau) = A_0 \cos \frac{\omega}{\Omega} \tau \quad (8 \cdot 19)$$

式中 A_0 是一常数。为了使上式还满足周期条件(8·16),应有

$$\Omega = \omega \quad (8 \cdot 20)$$

上式表示,零级近似相当于共振情形。

在求以下各级近似中,我们一律取 Ω 为 ω 。将(8·19)代入(8·18)的第二式并注意

$$\cos^3 \tau = \frac{1}{4} (3 \cos \tau - \cos 3\tau) \quad (8 \cdot 21)$$

得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 = & -\frac{1}{\omega_0^2} \sin \varphi_0 \sin \tau - (aA_0 + bA_0^3 - \frac{P}{\omega_0^2} \cos \varphi_0) \cos \tau \\ & - \frac{1}{4} bA_0^3 \cos 3\tau\end{aligned}\quad (8 \cdot 22)$$

为了满足 $i=1$ 时的周期条件(8·16), 上式右边 $\sin \tau$ 和 $\cos \tau$ 的系数均应为零, 这有两种可能:

$$aA_0 + \frac{3}{4}bA_0^3 - \frac{P}{\omega^2} = 0, \quad \varphi_0 = 0 \quad (8 \cdot 23a)$$

$$aA_0 + \frac{3}{4}bA_0^3 + \frac{P}{\omega^2} = 0, \quad \varphi_0 = \pi \quad (8 \cdot 23b)$$

上两式分别表示在零级近似的周期解中, 振动与外力同相($\varphi_0=0$)和反相($\varphi_0=\pi$), (8·23b)表示的后一情形相当于前一情形(8·23a), 只是振幅是负的。因此我们只要取其中一种情形即可。我们取(8·23a)。这样, 由(8·19)和(8·23a)便完全确定了零级近似的周期解了。

考虑(8·22a)和 $i=1$ 时的初始条件(8·17)便得到一级近似解

$$x_1(\tau) = A_1 \cos \tau + \frac{1}{32} bA_0^3 \cos 3\tau \quad (8 \cdot 24)$$

与定 A_0 类似, A_1 还得由二级近似才能确定。

将(8·19)和(8·24)代入(8·18)的第三方程即得关于一级近似的方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + x_2 = & -\frac{P\varphi_1}{\omega^2} \sin \tau - (aA_1 + bA_0^2 A_1 + \frac{3}{128} b^2 A_0^5) \cos \tau \\ & - \frac{1}{4} bA_0^2 (3A_1 + \frac{1}{8} aA_0 + \frac{3}{16} bA_0^3) \cos 3\tau \\ & - \frac{3}{128} b^2 A_0^5 \cos 5\tau\end{aligned}\quad (8 \cdot 25)$$

同样, 考虑到 x_2 的周期条件(8·16), 上式右边 $\sin \tau$ 和 $\cos \tau$ 的系数应应为零, 于是得

$$A_1 = -\frac{3b^2 A}{32(4a + 9bA_0^2)}, \quad \varphi_1 = 0 \quad (8 \cdot 26)$$

再考虑 $i=2$ 时的初始条件(8·7), 由(8·25)得到二级近似:

$$\begin{aligned} x_2(\tau) = & A_2 \cos \tau + \frac{1}{32} b A_0^2 (3A_1 + \frac{1}{8} a A_0 + \\ & + \frac{3}{16} b A_0^3 \cos 3\tau + \frac{1}{1024} b^2 A_0^5 \cos 5\tau \end{aligned} \quad (8 \cdot 27)$$

其中 A_2 又得由下一级近似才能确定。

如此下去可得更高级近似, 但我们不拟再进行下去了, 只是指出, 各级近似中, φ_i 都等于 0。将(8·19)、(8·24)和(8·27)代入(8·14)便得到方程(8·8)的准确到二级近似的周期解(将 τ 换回到原来自变量 t)

$$\begin{aligned} x(t) = & (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2) \cos \Omega t + \frac{\varepsilon}{32} b A_0^2 A_0 \\ & + \varepsilon (3A_1 + \frac{1}{8} a A_0 + \frac{3}{16} b A_0^3) \cos 3\Omega t \\ & + \frac{1}{1024} b^2 A_0^5 \cos 5\Omega t \end{aligned} \quad (8 \cdot 28)$$

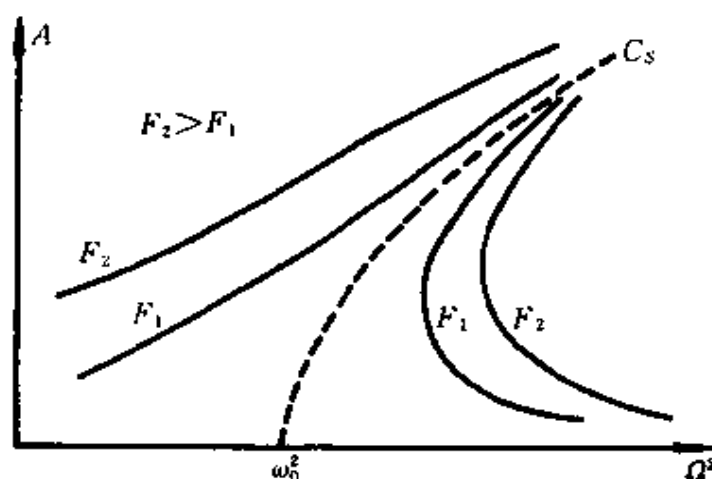
至于位相 φ , 我们已求得 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 。进一步计算可知在无阻尼时各级近似的 $\varphi_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 都等于零, 即无阻尼时的 $\varphi=0$, 振动强强迫力同步, 如式(8·28)所示〔与 $\alpha=0$ 时的式(8·7)比较〕。

式(8·23)给出了振幅 A_0 与强迫频率 Ω 的关系〔与式(8·6)对比〕。考虑到 ε 是极小量, 由式(8·20)、(8·9a)和(8·23a)得到

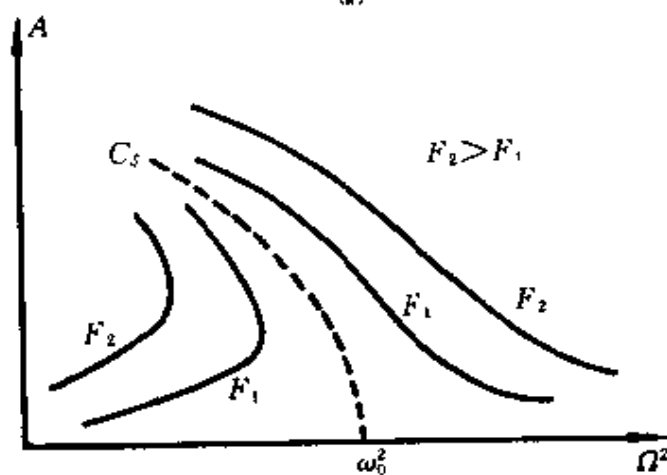
$$\begin{aligned} \Omega^2 = \omega^2 = & \frac{\omega_0^2}{1 + \varepsilon a} = \omega_0^2 (1 - \varepsilon a) + O(\varepsilon^2) \\ = & \omega_0^2 [1 - \varepsilon (\frac{P}{\omega^2 A_0} - \frac{3}{4} b A_0^2)] + O(\varepsilon^2) \\ = & \omega_0^2 (1 + \frac{3}{4} \varepsilon b A_0^2) - \frac{\varepsilon P}{A_0} + O(\varepsilon^2) \\ = & \omega_0^2 + \frac{3}{4} \omega_0^2 \varepsilon b A_0^2 - \frac{F}{A_0} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

或

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\mu A_0^2 - \frac{F}{A_0} + O(\epsilon^2) \quad (8 \cdot 30)$$



(a)



(b)

图 8-2

(a) $\mu > 0$ 情形 (b) $\mu < 0$ 情形

对不同 F 画出 $A_0 - \Omega$ 曲线得到图 8-2, 其中 $F=0$ 时的曲线称为骨干线(图中点线), 用 C_s 表示, 即 C_s 满足的方程为

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\mu A_0^2 \quad (8 \cdot 31)$$

可以看出, $\mu \neq 0$ 时的曲线与 $\mu=0$ 时的(图 8-1)不一样, $\mu < 0$ 和

$\mu > 0$ 的 $A_0 - \Omega$ 曲线的上部分别偏向左和右。

3. 有阻尼时的杜芬方程的谐振解

再考虑有阻尼的情形, 这时代替式(8·8)应有

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon[-\xi\omega\dot{x} - \omega^2(ax + bx^3) + P\cos\Omega t] \quad (8 \cdot 32)$$

与式(1·15)比较可知

$$\omega^2(1 + \varepsilon a) = \kappa = \omega_0^2 \quad (8 \cdot 33a)$$

$$\omega^2 \varepsilon b = \mu \quad (8 \cdot 33b)$$

$$\varepsilon \xi \omega = \alpha \quad (8 \cdot 33c)$$

$$\varepsilon P = F \quad (8 \cdot 33d)$$

按前面处理无阻尼时的同样方法, 得到 x_1 是周期函数应满足的条件是〔代替式(8·23)〕

$$\xi A_0 - \frac{F}{\omega^2} \sin\varphi_0 = 0 \quad (8 \cdot 34a)$$

$$(a - \frac{3}{4}bA_0^2)A_0 - \frac{F}{\omega^2} \cos\varphi_0 = 0 \quad (8 \cdot 34b)$$

由上式即得有阻尼时的零级近似位相

$$\varphi_0 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi}{a + \frac{3}{4}bA_0^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\mu A_0^2} \quad (8 \cdot 35)$$

上式表明有阻尼时, 振动与外力不再同步。由式(8·33a)和(8·34)还得到零级近似的振幅与频率的关系〔代替(8·6)和(8·29)〕

$$[\omega_0^2(1 + \frac{3}{4}\varepsilon A_0^2) - \Omega^2]^2 + (\varepsilon \xi \omega_0^2)^2 = (\frac{\varepsilon P}{A_0})^2 \quad (8 \cdot 36)$$

或

$$[\omega_0^2 + \frac{3}{4}\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\mu A_0^2 - \Omega^2]^2 + (\frac{\omega_0^2}{\Omega}\alpha)^2 = (\frac{F}{A_0})^2 \quad (8 \cdot 37)$$

图 8-3 是不同 μ 值时的 $A_0 - \Omega^2$ 曲线。可以看出, 在非线性情形下, 骨干线 C_s 偏向左右。

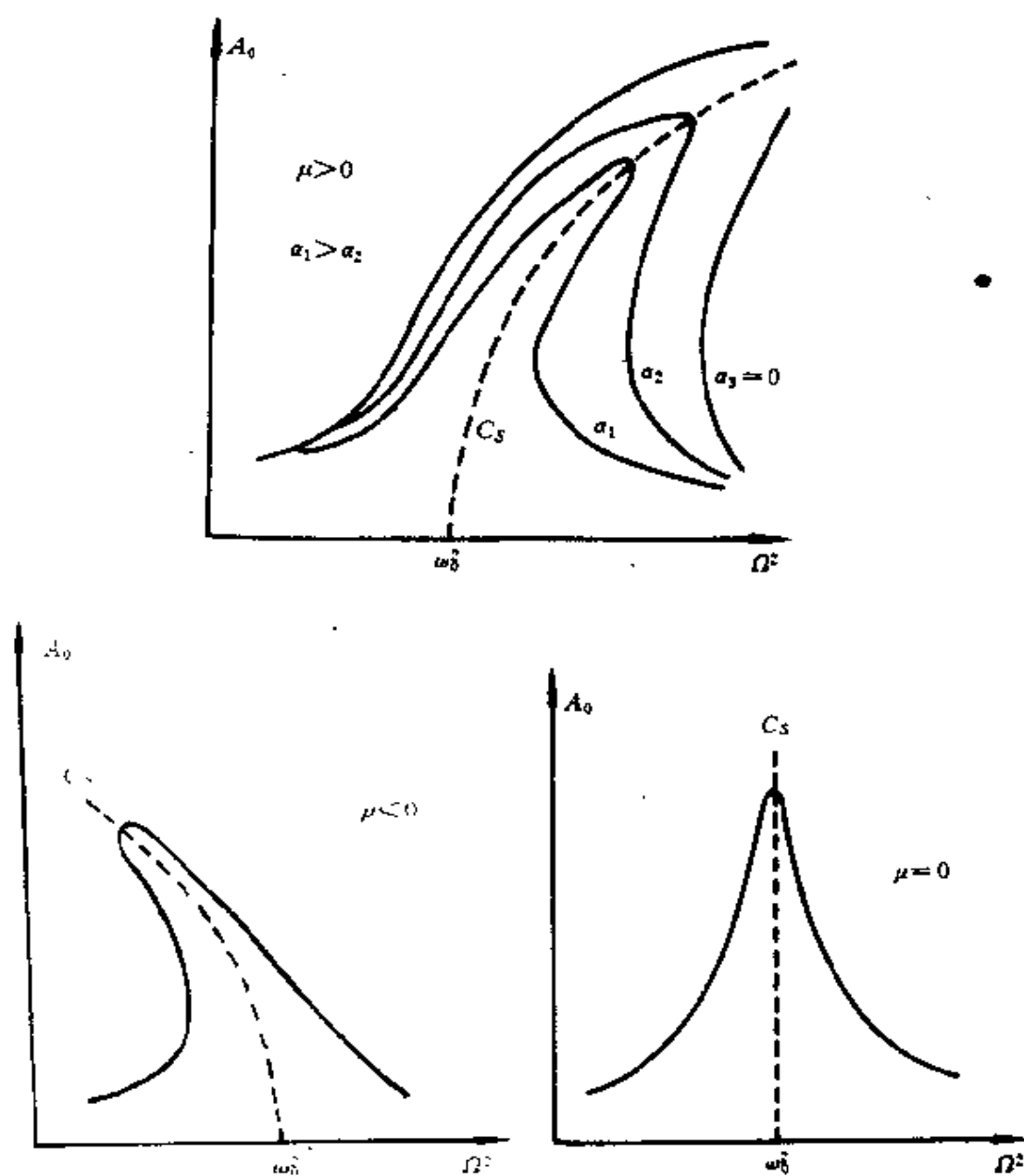


图 8-3

当非线性不很厉害(μ 很小)时,摄动参数 ϵ 可以取很小值的情形,系统的受迫运动是以频率 Ω 、振幅为 A_0 的振动占统治地位,即经过暂态过程后,运动可近似地用下式表示:

$$x = A_0 \cos(\Omega t + \varphi) + O(\epsilon) \quad (8 \cdot 38)$$

图 8-3 各曲线中某一点 P 就是表示上式中 A_0 与 Ω 的关系。式 (8·38) 所表示的这种谐振动在 (x, \dot{x}) 相平面中的轨迹自然是绕原点的封闭椭圆。如果考虑到非线性的存在, 系统的运动除了式 (8·38) 所表示的谐振动外, 还存在其他一些运动 (如频率为 3Ω 、 5Ω 等的振动) 成分, 因此实际运动在相平面的轨迹并不是封闭曲线。图 8-4 是在方程 (1·15) 的诸参数取某些确定值时用计算机直接求解所得的结果。由此图我们可以看出以下两点:

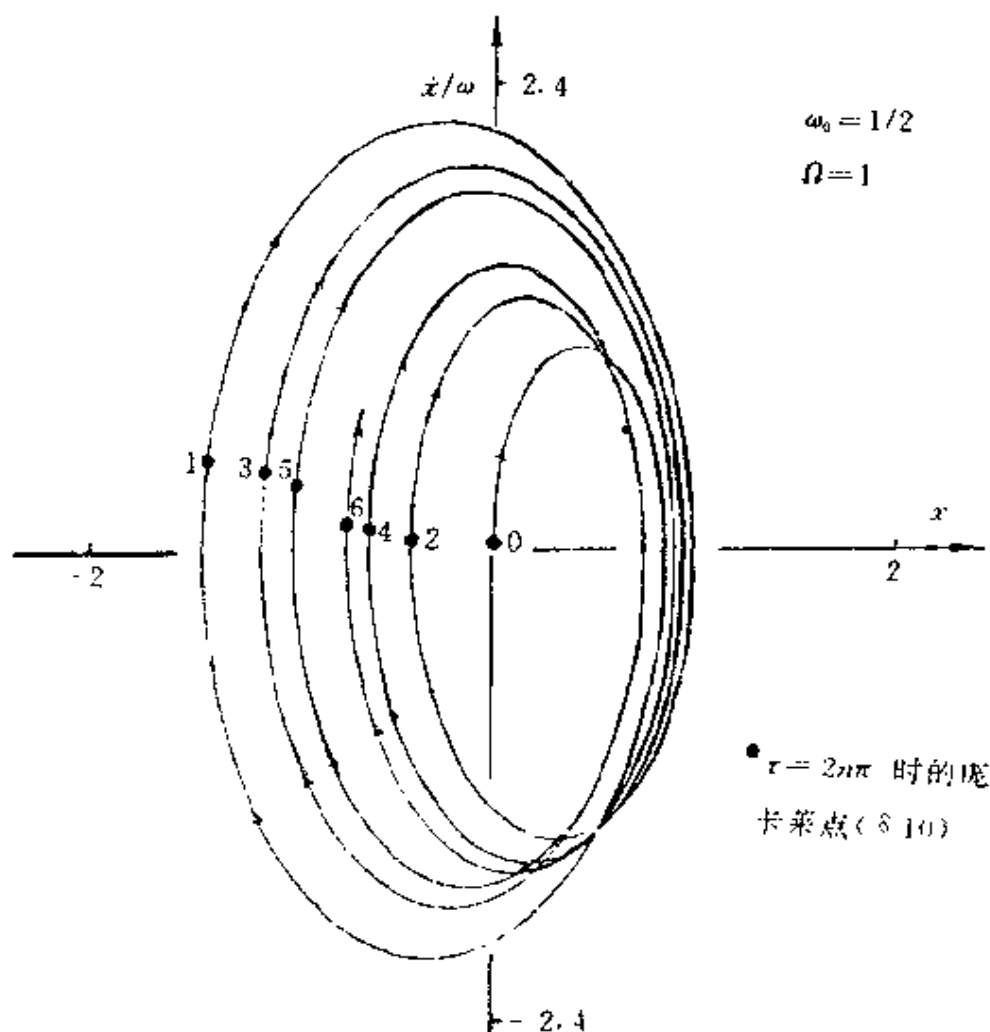


图 8-4

(1) 在一定的参数值(Ω 与 ω_0 差别不是很大)的情形下, 运动轨迹虽不是封闭曲线, 但近似地是绕原点的旋转, 这表明系统的运动成分主要是式(8·38)表示的振动, 其他成分可看作是对此振动的修正。或者说, 非线性系统的运动可近似地用式(8·38)表示, 但其振幅 A_0 和位相 φ 是随时间变化的。

(2) 受迫非线性振动在 (x, \dot{x}) 相平面中的轨迹有交点, 这是二变量自治方程所没有的现象。这种轨线交点的出现是由于式(1·15)或(8·32)有含时的强迫项, 因此把它们变为二变量的一阶微分方程组时, 它是非自治的(参考 § 2)。

4. 振动的稳定性和跳跃现象

由图 8-3 还可见, Ω 取值在一定范围内时, 对于一定的 Ω 值, 振幅 A_0 可以取三个不同的值。如图 8-5 中的 A、B 和 S 三点。但是可以证明(见 § 7 和下面), 振幅取中间值 S 的振动是不稳定的。为了研究振动的稳定性, 将 A_0 和 Ω 随时间缓慢变化的式(8·38)改写成下面的形式:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t)\cos\Omega t - b(t)\sin\Omega t \\ \dot{x}/\Omega &= -a(t)\sin\Omega t - b(t)\cos\Omega t \end{aligned} \quad (8 \cdot 39)$$

式中 a 和 b 是随时间缓慢变化(相对于周期 $2\pi/\Omega$ 而言)的函数。如前所述, 频率为 Ω 的振动在 (x, \dot{x}) 相平面中的代表点以角速度 Ω 旋转, 而式(8·39)中的 a 的 b 是以频率 Ω 绕原坐标 x 和 \dot{x} 作顺时针方向旋转(图 8-6), 因此在以 a 和 b 为坐标轴的所谓范德波尔平面中, 频率为 Ω 的振动的代表点是不旋转的不动点。

将式(8·39)代入原非线性受迫振动方程(1·15)或(8·32)中并略去微小的高次谐波项, 可得关于 a 和 b 的一阶微分方程组。考虑到初始条件

$$a(0) = x(0); \quad b(0) = \dot{x}(0)/\Omega \quad (8 \cdot 40)$$

解此方程组得到 $a(t)$ 和 $b(t)$ 。图(8-7)就是在范德玻尔平面上的一组解,其中的三个不动点 A、B 和 S 就是定态解($\dot{a}=\dot{b}=0$),它们分别对应于图 8-5 中 A、B 和 S 三点($A_0=\sqrt{a^2+b^2}$)。很明显,图 8-7 中的 A 和 B 是稳定焦点,因此它们都代表稳定的振动;S 是鞍点,因此它所表示的振动状态是不稳定的。

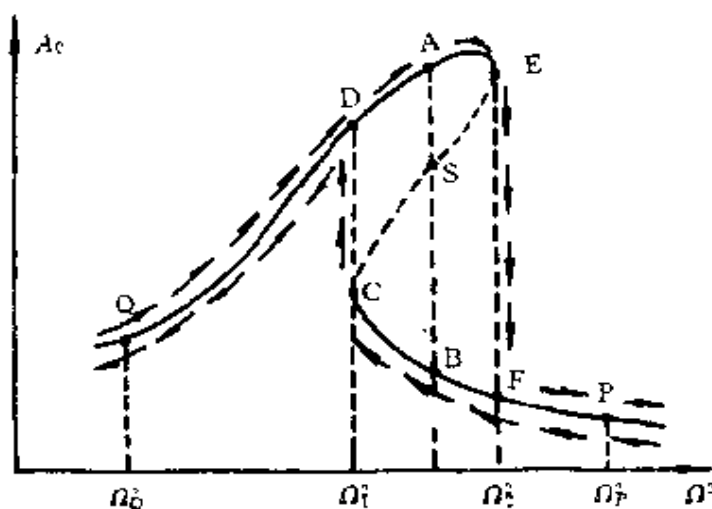
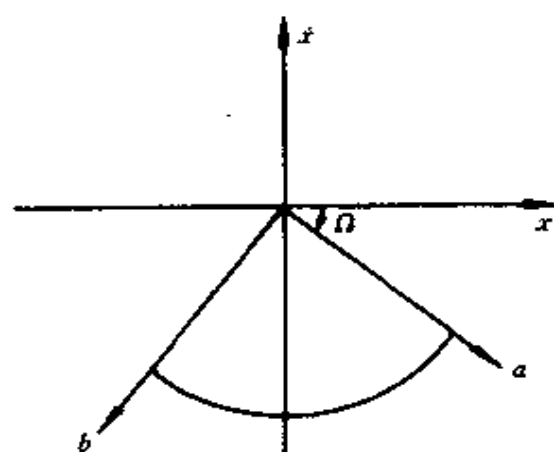


图 8-5



范德玻尔平面

图 8-6

图 8-7 的范德波尔平面中的那些轨线代表各不同初始条件的暂态过程。可以看出,不同初始条件的这些轨线被分界线分隔为两个区域(即 §2 所述的流域或吸引区)。这两个区域的所有轨线最后分别落在 A 和 B 上。即系统的运动在经过暂态过程后,不是按振幅 A 振动,就是按振幅 B 振动(当然这是忽略了其他谐波,而是只考虑频率为 Ω 的基频振动)。到底是按哪一振幅振动,则是由初始条件决定。我们来仔细分析此问题。

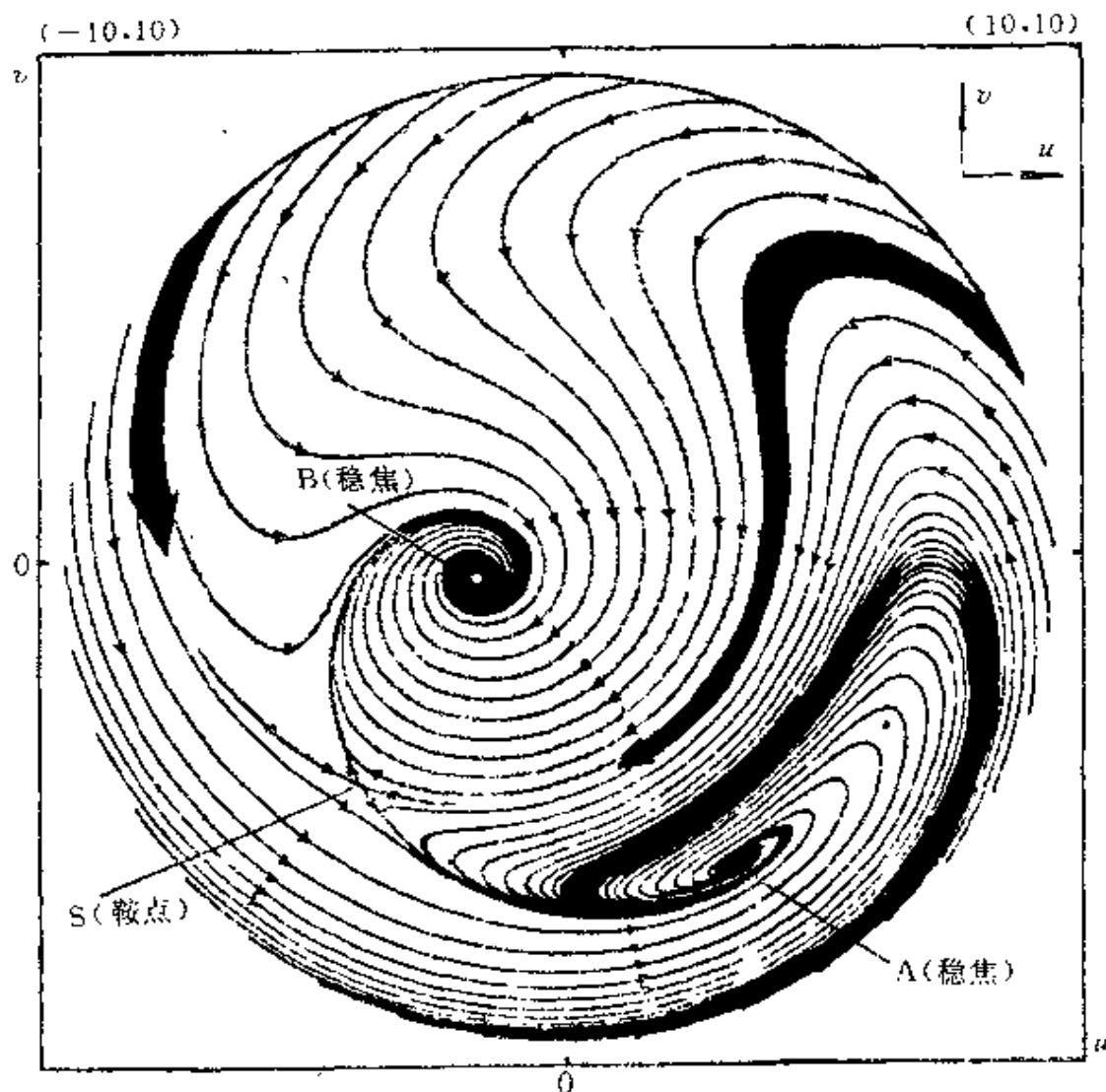


图 8-7 杜芬方程在范德波尔平面上的解

设开始时强迫频率 Ω 较大, 如为图 8-5 中的 Ω_P 。这时的振幅自然用 $A_0-\Omega$ 曲线(简称共振线)上的 P 表示。当缓慢减小 Ω , 振幅即沿此共振线由 P 向左移, 即振幅缓慢增加, 当 Ω 进一步减小经过 Ω_1 时, 振幅缓慢增至 C, 并由 C 跳跃增至 D, 然后沿 DQ 缓慢变小。如果开始时 Ω 很小如为 Ω_0 , 振幅在共振线上支的 Q 点。当缓慢增加 Ω 时, 振幅也缓慢增加。当 Ω 增至 Ω_2 时, 振幅缓慢增加至 E 后突然剧烈减小到 F。以后 Ω 缓慢增加振幅沿 FP 缓慢变小。由此也可看出, 只有共振线的上支 QE 和下支 PC 所表示的振动才能实现, 中支 CE 所表示的不稳定振动不能实现。显然, Ω_1 和 Ω_2 相当于分岔点, 上述现象就是 § 7 所述的滞后现象。

上述当外加强迫力频率 Ω 在 Ω_1 和 Ω_2 处微小变化引起的振幅剧烈变化的现象称为跳跃现象。此现象在一些振动或转动机械(或其中某些部件)中已观察到。即人们发现, 由于外加周期力的频率(或振幅 F , 分析从略)微小变化可能引起某些设备或器件振动突然变剧而遭破坏, 也有些则是振动突然减弱而不能正常运转。有一些研究者也做过这样的实验: 在磁场中放置一通有交流电的金属导线, 导线在交变磁场力作用下振动, 当改变交流电频率时, 观察到导线振动的振幅突然加剧和突然减现。这类跳跃现象, 只有用上述非线性理论分析, 才能予以解释。

5. 分 谐 振

如果强迫力频率 Ω 比系统的固有频率 ω_0 大不少(如 $\Omega \geq 3\omega_0$), 可以证明, 系统的振动还将有频率为 $\Omega/3$ 的分谐振(Subharmonic)。我们不拟再为此进行数学推导, 只是仍采用范德玻尔平面分析法对此次谐振进行稳定性分析。

由于此时除了频率为 $\Omega/3$ 的分谐振占统治地位外, 也还有频率为 Ω 的基振存在。代替式(8·39), 应有

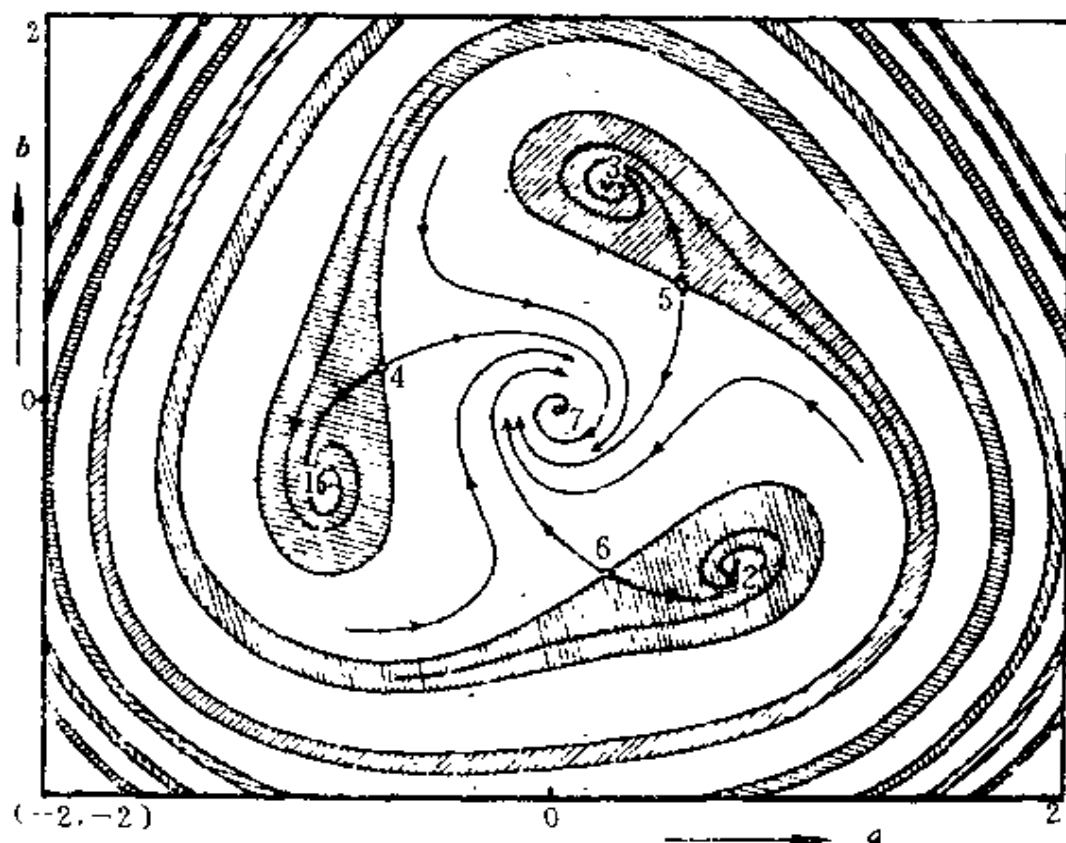
$$x(t) = a(t) \cos \frac{\Omega}{3}t - b(t) \sin \frac{\Omega}{3}t + \cos \Omega t \quad (8 \cdot 41)$$

当然,考虑最后一项的存在,这时以 $a(t)$ 和 $b(t)$ 为坐标轴以 $\Omega/3$ 为角速度沿顺时针方向旋转的范德玻尔平面变得很复杂。但是仍按前述方法将式(8·41)代入式(1·15)并略去不是频率 $\Omega/3$ 的其他高分谐振,仍可得关于 a 和 b 的一阶微分方程组。解此方程组得到 $a(t)$ 和 $b(t)$ 。图 8-8(a)就是频率为 $\Omega/3$ 的分谐振的范德玻尔平面,图中 1、2 和 3 三点是稳定焦点,它们代表频率为 $\Omega/3$ 的稳定振动,阴影部分是它们相应的吸引区。4、5 和 6 三点是鞍点,因此它们虽也代表频率为 $\Omega/3$ 的振动,但因为是不稳定的而不能实现。即它们所表示的振动都分别很快地过渡到 1、2 和 3 三点所表示的稳定振动或原点 7(0,0)表示的振动,如图中的箭头所示。 $a=b=0$ 的原点 7 自然表示没有分谐振的状态,由式(8·41)可知它表示频率为 Ω 的基振。图 8-8(b)表示在点 1 附近的振动。可以看出,这时(在点 1 附近)1/3 次分谐振(即频率为 $\Omega/3$ 的振动)比基振要强很多。

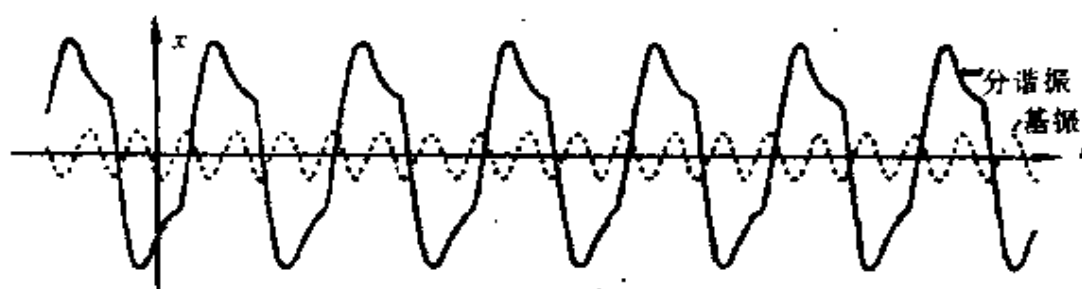
到底什么样的频率的振幅占统治地位,这要由系统的各参数决定。如当 $\Omega \approx \omega_0$ 时,系统以基振为主;当 $\Omega \approx 3\omega_0$ 时,1/3 次分谐振便是很重要的成分了。

利用非线性系统产生的分谐振是实现分频的一种方法。这在某些电路中已得到应用,如石英钟表就是多次利用了分频。

还应该指出,虽然范德玻尔平面便于分析各振动成分的稳定性,但我们应当注意其局限性或缺点:1、它只限于系统运动中有一种频率的振动成分占主导地位,其他成分可以忽略或至少很弱的情形,当各振动成分振幅相差不大时,此分析法就不适用了;2、如果系统的初始状态远离定态,则振幅(以至位相)缓慢变化的前提不成立,从而此分析也就不准确了。



(a)



(b)

图 8-8 方程 $\ddot{x} + 0.002\dot{x} + x - \frac{1}{6}x^3 = 1.5\cos 2.85t$ 的振动

(a) 第三级分谐波 ($\Omega/3$) 的范德波尔平面 (阴影部分标出不同流域)

基谐波: 稳定焦点 7; 分谐波: 稳定焦点 1, 2, 3, 鞍点 4, 5, 6。

(b) (a) 中点 1 附近的振动

6. 结合频率(结合音)

在许多情形下,系统所受的外力即使是周期性的,也不一定是简谐(正弦)形式的。当外力不是简谐形式时,结果又如何呢?我们知道,任何周期过程都可以分解为付利叶级数,即一个基振和许多谐振之和。因此在系统受周期性外力作用时,更普遍意义的是应分析多种不同频率的简谐力作用的结果。

如前所述,一个线性系统受一个简谐力作用时,它将以此简谐力的频率为频率作受迫振动。如果强迫力包含好几个不同频率的简谐成分,根据线性系统的叠加原理,系统总的受迫振动将是各不同频率的强迫振动之和(叠加)。

对于非线性系统,叠加原理不适用,结果自然不会像线性系统那样简单。试考虑两不同频率 Ω_1 和 Ω_2 的简谐力作用下的杜芬方程,并且假设阻尼作用可以忽略($\alpha=0$)。这时的运动方程为(与式(1·15)比较)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = F_1 \cos \Omega_1 t + F_2 \cos \Omega_2 t \quad (8 \cdot 42)$$

因为当 $\mu=0$ 时叠加原理成立,我们可以将 μ 很小时上式的解近似地写成下面的形式:

$$x(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t + \mu y(t) \quad (8, 43)$$

右边最后一项可看作是对前两项的修正。将上式代入(8·42)并化简:

$$\begin{aligned} & \{(\omega_0^2 - \Omega_1^2 + \frac{3}{4}\mu(A_1^2 + 2A_2^2))A_1 - F_1\} \cos \Omega_1 t \\ & + \{(\omega_0^2 - \Omega_2^2 + \frac{3}{4}\mu(2A_1^2 + A_2^2))A_2 - F_2\} \cos \Omega_2 t \\ & + \mu\{\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{1}{4}[A_1^3 \cos 3\Omega_1 t + 3A_1^2 A_2 \cos(2\Omega_1 + \Omega_2)t \\ & + 3A_1^2 A_2 \cos(2\Omega_1 - \Omega_2)t + 3A_1 A_2^2 \cos(\Omega_1 + 2\Omega_2)t \end{aligned}$$

$$+3A_1A_2^2\cos(\Omega_1-2\Omega_2)t+3A_2^3\cos 3\Omega_2t\}+O(\mu^2)=0 \quad (8 \cdot 44)$$

令上式 $\cos\Omega_1t$ 、 $\cos\Omega_2t$ 和 μ 的系数分别等于零, 得到

$$\omega_0^2-\Omega_1^2+\frac{3}{4}\mu(A_1^2+2A_2^2)-\frac{F_1}{A_1}=0 \quad (8 \cdot 45a)$$

$$\omega_0^2-\Omega_2^2+\frac{3}{4}\mu(2A_1^2+A_2^2)-\frac{F_2}{A_2}=0 \quad (8 \cdot 45b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}+\omega_0^2y= & -\frac{1}{4}[A_1^3\cos 3\Omega_1t+3A_1^2A_2\cos(2\Omega_1+\Omega_2)t \\ & +3A_1^2A_2\cos(2\Omega_1-\Omega_2)t \\ & +3A_1A_2^2\cos(\Omega_1+2\Omega_2)t \\ & +3A_1A_2^2\cos(\Omega_1-2\Omega_2)t+3A_2^3\cos 3\Omega_2t] \end{aligned} \quad (8 \cdot 45c)$$

当 F_1 、 F_2 、 Ω_1 和 Ω_2 给定时, 由式(8·45a)和(8·45b)即可解出振幅 A_1 和 A_2 。修正因子 y 可由解式(8·45c)得到。可以看出, 此式是线性方程, 根据叠加原理, 其解应包含右边所有各频率成分。事实上, 式(8·45c)的特解是

$$\begin{aligned} y(t)= & -\frac{1}{4}\left[\frac{A_1^3\cos 3\Omega_1t}{\omega_0^2-9\Omega_1^2}+\frac{3A_1^2A_2\cos(2\Omega_1+\Omega_2)t}{\omega_0^2-(2\Omega_1+\Omega_2)^2}\right. \\ & +\frac{3A_1^2A_2\cos(2\Omega_1-\Omega_2)t}{\omega_0^2-(2\Omega_1-\Omega_2)^2} \\ & +\frac{3A_1A_2^2\cos(\Omega_1+2\Omega_2)t}{\omega_0^2-(\Omega_1+2\Omega_2)^2} \\ & \left.+\frac{3A_1A_2^2\cos(\Omega_1-2\Omega_2)t}{\omega_0^2-(\Omega_1-2\Omega_2)^2}+\frac{A_2^3\cos 3\Omega_2t}{\omega_0^2-9\Omega_2^2}\right] \end{aligned} \quad (8 \cdot 46)$$

将 A_1 、 A_2 和上式的 $y(t)$ 代入式(8·43)即得(8·42)的准确到 μ 的一次幂的近似解。由此可见, 当非线性系统受到频率为 Ω_1 和 Ω_2 的两个强迫作用时, 系统的振动除了主要是频率为 Ω_1 和 Ω_2 的两个共振成分外, 还包含有频率为 $3\Omega_1$ 、 $2\Omega_1+\Omega_2$ 、 $2\Omega_1-\Omega_2$ 、 $\Omega_1+2\Omega_2$ 、 Ω_1

$-2\Omega_2$ 和 $3\Omega_2$ 等成分。

应当指出,我们考虑的非线性项一直是三次幂项 x^3 ,从而由式(8·21)引出了以上各处出现的频率为 3Ω 和 $\Omega/3$ 的振动。如果非线性项包含平方项 x^2 ,如 §1 所述的鼓膜的振动,则计算结果将引出频率为 2Ω 和 $\Omega/2$ 的振动。

还应当指出,如果非线性项不太弱时,考虑到 μ 的高次项,进一步近似计算指出,振动将包含各种 $n\Omega_1 \pm m\Omega_2$ (n 和 m 为自然数)的成分。所有 $n\Omega_1$ 或 $m\Omega_2$ 的频率就是通常所谓的诸频(谐音),而 $n\Omega_1 \pm m\Omega_2$ 则称为结合频率(结合音)。在声学中,结合音是一很重要现象。如 §1 所述,人耳鼓膜就是非线性的,如不同频率的两纯音同时作用在鼓膜上时就会引起结合音,如频率为两纯音频率之和的和音与两频率之差的差音。如果结合音强度大到超过听觉阈,它们就会引起不愉快的感觉。亥姆霍兹(Helmholtz)早在一百多年前就指出这种结合音是由于非线性引起的。扬声器的振动系统也具有非线性特性,较强的不同频率作用也会出现可听到的结合音。

习 题

1. 常微分方程组通常有哪些形式的解?
2. 如何通过线性化方程的稳定性来知道非线性方程的稳定性?
3. 奇点有哪几种类型? 它们都在什么样的条件下出现?
4. 什么叫极限环? 它与线性振子在相平面上的轨线或一般中心附近的闭曲线有何区别?
5. 何谓软激发? 何谓硬激发? 试举几个实例。
6. 何谓分岔? 举出几种不同形式的分岔。
7. 何谓李雅普诺夫稳定? 何谓轨道稳定? 何谓结构稳定? 试分别举例说明之。
8. 为什么三重定态实际上往往是双稳态?
9. 一池塘最多能养 1000 条鱼, 鱼在池塘自然繁殖, 其规律为

$$\dot{x} = kx(1000 - x)$$

已知塘已有鱼 100 条, 三个月后繁殖为 250 条, 求六个月后为多少条。

10. 用李雅普诺夫稳定性定义判断下列方程在给定的初始条件下解的稳定性:

(1) $\dot{x} = x + t, \quad x_0(0) = 1$

(2) $\dot{x} = -x + t^2, \quad x_0(0) = 1$

(3) $\dot{x} = 4x - t^2x, \quad x_0(0) = 0$

(4) $\dot{x} = (x - x^3)/2t, \quad x_0(1) = 0$

(5) $\dot{x} = ax, \quad x_0(0) = 1$

(6) $\dot{x} = x, \quad x_0(0) = y_0(0) = 1$

$$\dot{y} = -y$$

$$(7) \quad \dot{x} = x, \quad x_0(0) = y_0(0) = 0$$

$$\dot{y} = x$$

$$(8) \quad \dot{x} = y, \quad x_0(0) = y_0(0) = 0$$

$$\dot{y} = -2x - 2y$$

$$(9) \quad \dot{x} = -x - 3y, \quad x_0(0) = y_0(0) = 0$$

$$\dot{y} = x - y$$

$$(10) \quad \dot{x} = ax + y, \quad x_0(0) = y_0(0) = 0$$

$$\dot{y} = -x + ay$$

11. 用李雅普诺夫定理判断下列方程组零解的稳定性:

$$(1) \quad \dot{x} = -x - y + y(x + y)$$

$$\dot{y} = x - x(x + y)$$

$$(2) \quad \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2)$$

$$(3) \quad \dot{x} = -x + xy^2$$

$$\dot{y} = -2x^2y - y^3$$

$$(4) \quad \dot{x} = x^3 - 2y^3$$

$$\dot{y} = xy^3 + x^2y + \frac{1}{2}y^3$$

$$(5) \quad \dot{x} = 2x^2 - 2y^2$$

$$\dot{y} = xy$$

$$(6) \quad \dot{x} = -xy^2$$

$$\dot{y} = -x^2y$$

$$(7) \quad \dot{x} = x - 3y$$

$$\dot{y} = 5x - y$$

$$(8) \quad \dot{x} = ax - xy^2$$

$$\dot{y} = 2x^4y$$

$$(9) \quad \dot{x} = -3x + y - z + 3x(6x^2 + 5y^2 + 2z^2)$$

$$\dot{y} = -2x - 5y + z + 5y(6x^2 + 5y^2 + 2z^2)$$

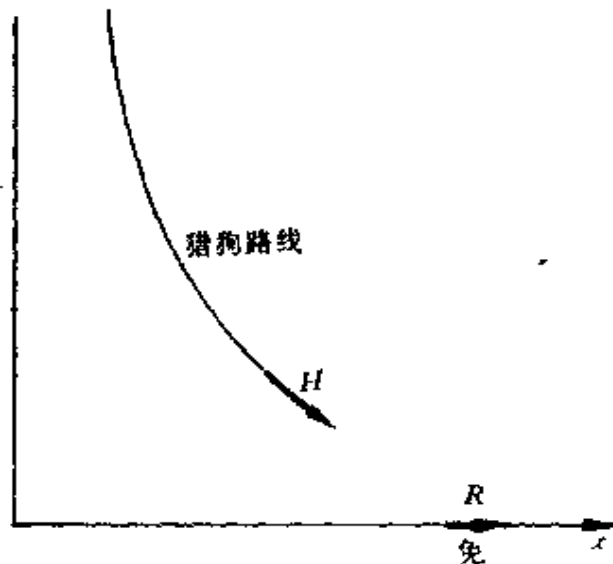
$$\dot{z} = 2x - y - 2z + 2z(6x^2 + 5y^2 + 2z^2)$$

12. 追赶问题: 设一猎狗追捕一兔。兔沿 x 轴方向逃跑, 猎狗追赶方向始终对着兔(见题图 1-1), 它们的速率分别是 R 和 H 。

(1) 分别写出两者的运动方程;

(2) 写出猎狗相对于兔的运动方程;

(3) 猎狗在什么样的条件下才可能抓住兔。



题图 1-1

13. 下列方程中的奇点都是什么样的奇点?

- (1) $\dot{x} = 3x + 4y, \quad \dot{y} = 2x + y$
- (2) $\dot{x} = 2y - 3x, \quad \dot{y} = x + 4y$
- (3) $\dot{x} = 2x + 3y, \quad \dot{y} = x + 4y$
- (4) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 2x - y$
- (5) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 4y - 2x$
- (6) $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x - y$
- (7) $\dot{x} = x + 3y, \quad \dot{y} = -6x - 5y$
- (8) $\dot{x} = -2x - 5y, \quad \dot{y} = 2x + 2y$
- (9) $\dot{x} = 2y - 3x, \quad \dot{y} = y - 2x$
- (10) $\dot{x} = 2x + 5y, \quad \dot{y} = x + 2y$

14. 判断下列方程组零解的稳定性:

- (1) $x^{(3)} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$
- (2) $x^{(3)} + 2\ddot{x} + a\dot{x} + 3x = 0$
- (3) $x^{(4)} - 2x^{(3)} + \ddot{x} + 2\dot{x} - 2x = 0$
- (4) $x^{(4)} + 5x^{(3)} + 18\ddot{x} + 34\dot{x} + 20x = 0$
- (5) $x^{(4)} + 2x^{(3)} + a\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$
- (6) $x^{(5)} + 3x^{(4)} - 5x^{(3)} - 15\ddot{x} + 4\dot{x} + 12x = 0$

15. 用线性稳定性定理判断下列方程组的零解的稳定性:

- (1) $\dot{x} = 2xy - x + y$
 $\dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y$
- (2) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 2x$
 $\dot{y} = 3x^2 - x + 3y$
- (3) $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$
 $\dot{y} = (4+8x)^{1/2} - 2e^y$
- (4) $\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x})$
 $\dot{y} = 2y - 1 + (1-6x)^{1/3}$
- (5) $\dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x)$
 $\dot{y} = 2e^x - (8+12y)^{1/3}$
- (6) $\dot{x} = \tan(y-x)$
 $\dot{y} = 2^y - 2\cos(\frac{\pi}{3} - x)$
- (7) $\dot{x} = \tan(x-y) - 2x$
 $\dot{y} = (9+12x)^{1/2} - 3e^y$
 $\dot{z} = -3y$

16. 在下列方程组中, 参数 a 和 b 取什么样值时零解是渐近稳定的。

- (1) $\dot{x} = ax - 2y + x^2$
 $\dot{y} = x + y + xy$
- (2) $\dot{x} = ax + y + x^2$
 $\dot{y} = x + ay + y^2$
- (3) $\dot{x} = x + ay + y^2$
 $\dot{y} = bx - 3y - x^2$
- (4) $\dot{x} = y + \sin x$
 $\dot{y} = ax + by$
- (5) $\dot{x} = 2e^{-x} - (4+ay)^{1/2}$
 $\dot{y} = \ln(1+9x+ay)$

17. 求出下列方程组的所有奇点并指出它们各属于什么类型。

- (1) $\dot{x} = x(1-x-y), \dot{y} = \frac{1}{4}y(2-3x-y)$

$$(2) \quad \dot{x} = 9x - 6y + 4xy - 5x^2, \dot{y} = 6x - 6y - 5xy + 4y^2$$

$$(3) \quad \dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu(y - x^3), \mu > 0$$

$$(4) \quad \dot{x} = y - x,$$

$$\dot{y} = y - x^2 - (x - y)(y^2 - 2xy + \frac{2}{3}x^3)$$

$$(5) \quad \dot{x} = 2x - 7y + 19,$$

$$\dot{y} = x - 2y + 5$$

18. 在极坐标下的方程组

$$\dot{r} = f(r), \quad \dot{\theta} = 1 \text{ 中, } f(r) \text{ 是 } r \text{ 的连续函数.}$$

(1) 在什么条件下方程组具有极限环解?

(2) 在哪些条件下极限环分别是稳定的、不稳定的和半稳定的?

19. 证明方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \omega^2 x + g(x) = 0$$

不可能有极限环解, 其中 $f(x)$ 是具有确定符号的函数, $g(x)$ 是任意函数。

20. 判断下列方程组有无极限环存在:

$$(1) \quad \dot{x} = y + x^3$$

$$\dot{y} = x + y + y^3$$

$$(2) \quad \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

$$(3) \quad \dot{x} = 2xy + x^3$$

$$\dot{y} = -x^2 + y - y^2 + y^3$$

$$(4) \quad \dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x - (1 + x^2 + x^4)y$$

$$(5) \quad \dot{x} = x + y + \frac{1}{3}x^3 - xy^2$$

$$\dot{y} = -x + y - x^2y + \frac{2}{3}y^3$$

$$(6) \quad \dot{x} = y - x + x^3$$

$$\dot{y} = -x - y + y^3$$

21. 求下列方程组的极限环并判断其稳定性。

$$(1) \quad \dot{x} = -x + (x-y)(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\dot{y} = -y + (x+y)(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$(2) \quad \dot{x} = -y - x(x^2+y^2-1)^2$$

$$\dot{y} = x - y(x^2+y^2-1)^2$$

$$(3) \quad \dot{x} = -y + x[(x^2+y^2)^{1/2}-1][(x^2+y^2)^{1/2}-2]$$

$$\dot{y} = x + y[(x^2+y^2)^{1/2}-1][(x^2+y^2)^{1/2}-2]$$

$$(4) \quad \dot{x} = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-2x-8)$$

$$\dot{y} = y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - x(x^2+y^2-2x-8)$$

$$(5) \quad \dot{x} = -y + x[1-(x^2+y^2)^{1/2}][a+y^2(x^2+y^2)^{-1}]$$

$$\dot{y} = x + y[1-(x^2+y^2)^{1/2}][a+y^2(x^2+y^2)^{-1}]$$

$$(6) \quad \dot{x} = -y + x(x^2+y^2-1)^2$$

$$\dot{y} = x + y(x^2+y^2-1)^2$$

$$(7) \quad \dot{x} = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-4)$$

$$\dot{y} = y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) + x(x^2+y^2-4)$$

22. 方程组为(μ 和 a 都是参数)

$$\dot{x} = y + x[\mu + a(x^2+y^2)]$$

$$\dot{y} = -x + y[\mu + a(x^2+y^2)]$$

(1) 分析奇点的性质;

(2) $a < 0$ 时极限环的类型和分岔性质;

(3) $a > 0$ 时极限环的类型和分岔性质。

23. 方程组为

$$\dot{x} = y - x[\mu - (x^2+y^2)^{1/2}]^2$$

$$\dot{y} = -x + y[\mu - (x^2+y^2)^{1/2}]^2$$

(1) 它有无极限环解? 其稳定性如何?

(2) 分析其分岔情形。

24. 证明方程

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - \mu)\dot{x} + x = 0$$

在 $\mu = 0$ 处出现霍普夫分岔。

25. 设系统的势函数为

$$V = \frac{1}{4}x^4 - \frac{\mu}{2}x^2$$

试分析此系统的分岔性质。

26. 系统的运动用下述方程描述：

$$\ddot{x} = \sin x (\mu \cos x - 1), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

- (1) 求此系统的平衡点并指出其稳定性；
- (2) 分析此系统分岔的性质。

第二章 混 沌

如前所述,混沌是某些非线性方程所特有的一种解,即它是某些非线性系统所特有的一种运动形态。由于近二三十年的深入研究,人们已掌握了这种运动形态的一些独特之处。本章就是要对混沌的规律作进一步考察。

§ 9 混 沌

随着近二三十年近似方法的进展,特别是计算机的飞速发展,使得在非线性微分方程的数值积分上取得巨大进展,从而也促进人们对其解的了解方面更全面透彻。

1963年气象学家洛伦兹(E. Lorenz)研究两无限平面间的流体的运动。值体下层加热(模拟大气在地表受阳光加热时情形)要出现对流。在做了简化后,洛伦兹得到下面的运动方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{9.1}$$

式中 x 、 y 和 z 分别为与对流强弱、对流引起的水平温差和垂直方向温差有关的变量, σ 、 r 和 b 则分别为与普兰多(Prandtl)数、瑞利(Rayleigh)数和容器大小有关的参数。在用计算机求上式的数值解时,洛伦兹发现,在参数取适当值时,解是非周期的,而且具有随机性。这是首先明确地从决定性方程得到随机性的结果。随后埃

农(Henon, 1964)和若斯勒(Rössler, 1976)等人也得到类似的结果, 茹厄勒(Ruelle, 1971)、梅(May, 1976)、费根鲍姆(Feigenbaum, 1978)和库埃特(Couette, 1978)等人对这类随机运动的一些特性进行了研究。这样就开创了一种新的运动形态——混沌的发现和研究。

我们不拟追踪并详述混沌研究的发展过程, 只准备由简而繁地逐步研究其重要规律和特性。

1. 杜芬方程所引起的混沌

在 § 8 中我们已经看到, 如果杜芬方程(1·15)中的非线性项和强迫项都比较弱, 而可以看作是对线性振子的摄动时, 这样得到的近似解仍具有解析形式, 系统的运动可以看作是各种频率的振动的叠加。当方程中的非线性项和强迫项较大而不能看作是摄动时, 结果将如何呢? 这时如 § 2 所述, 方程(2·14)求解的结果是, x 的变化虽然大体上限制在一定范围内, 但变化却是杂乱无章的; x 值虽往复变化(“振动”), 但并不是周期过程, 因为无论时间多长, x 也不会重复原来形式的变化(图 2-4)。这种不是由随机性外因引起的, 而是由确定性方程(内因)直接得到的具有随机性的运动状态就称为混沌。或者说, 混沌是具有随机性的非周期性振动*。

当系统作通常的规则运动时, 无法避免的涨落所引起的初始条件的微小变化一般只引起运动状态的微小差别, 即初始状态接近的轨道始终是接近的, 从而人们对系统的运动作出预测(确定论)。混沌则不然, 它具有对初始条件的敏感依赖性, 即初始条件的微小差别常常使轨道按指数形式分开(参考 § 14), 试考查下述受迫杜芬方程:

* 关于混沌运动随机性的讨论, 还可参考 § 14、15、17。

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.4\cos 1.2t \quad (9 \cdot 2)$$

用计算机求解此方程*。当两初始条件相差极小时,解 $x(t)$ 随时间变化和解在相平面 (x, \dot{x}) 上的轨线分别如图 9-1 和图 9-2 所示。可



图 9-1 方程 $\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.3\cos 1.2t$
两个邻近初始条件的 $x-t$ 曲线

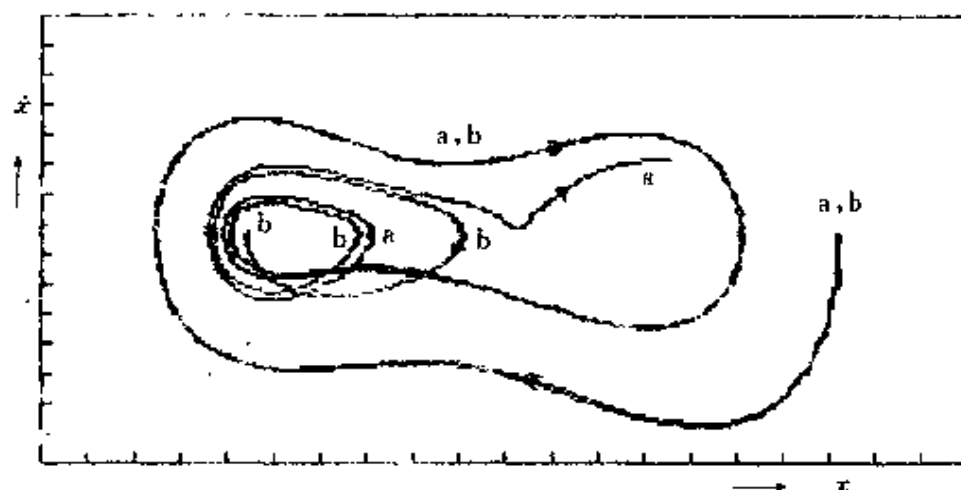


图 9-2 图 9-1 方程的解在相空间中的轨迹

* 在用计算机进行近似计算时,由于采用的近似方法不同或计算时所选步长的不同都有可能引起不同的结果。这里讲的两运动的差别自然是指排除了这些计算方法可能引起的差异,而是指由运动自身决定的。

以看出,时间不长时,两个解差别极小,甚至不能分辨。但随着时间增长,两个解差别越来越大,而且很快就变得完全不一样了。真所谓差之毫厘,失之千里。洛伦兹戏称混沌运动对初始条件的敏感依赖性为蝴蝶效应:由于全球气象可能处于混沌状态,因此有一支蝴蝶在巴西拍动翅膀,可能在美国德克萨斯州引起龙卷风。

对于一个实际系统,由于无法避免的内部涨落和外部环境噪声的影响,初始状态的微小差别总是无法避免的,从而混沌对初始状态这种敏感依赖性必然引致运动的不确定性(随机性)。从稳定性角度看,这不仅表明作混沌运动时系统的定态是不稳定的(§ 2),而且系统还不具有轨道稳定性(§ 4);相邻轨道最后将相互远远地分离。

由于混沌具有随机性,它在相平面的有限范围内的轨线必然要有折叠,否则轨线就只能是封闭曲线(规则的周期运动!)或延伸到无限远去(发散解!)。这样轨线必然有交点。但这是二变量自治方程所不允许的(§ 2)。因此混沌运动只可能出现在三个或三个以上变量的自治方程组中,这时即使在相空间中的轨迹不相交,但它在二维相平面上的投影却可以相交。

还可看出,即使描述运动的方程是确定的,但由于混沌运动的随机性,人们无法对系统的状态作出预测,即对于混沌运动,机械决定论不适用。

2. 从倍周期分岔到混沌

如果仔细考察上述混沌的形成过程,还不难发现某些普遍规律。

设方程(9·2)中,除外加周期力振幅 F 是可变参数外,其余参数都取定值:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = F \cos 1.2t \quad (9 \cdot 3)$$

当 F 由小逐渐变大时, 上述方程的解依次如图 9-3 所示。 $F < 0.3$ 时, 解 $x(t)$ 都是周期振荡, 而且周期是逐次成倍增加: $F = 0.2$ 时, 振荡周期 τ 等于外加周期力的周期 T :

$$\tau = T = 2\pi/1.2$$

$F = 0.27$ 时, $\tau = 2T$; $F = 0.28$ 时, $\tau = 2^2T$; $F = 0.2867$ 时, $\tau = 2^3T$ 。 F 继续增大达到某一临界值 F_∞ ($F_\infty \approx 0.3$) 时, τ 应为 2^∞ , 即周期变为无穷大振荡, 实际已不是周期的了, 因此可以想象, $F > F_\infty$ 时, 系统运动不可能仍是周期的, 于是便出现混沌。这表明参数逐步变化时, 系统由倍周期分岔进入混沌状态是完全自然的事了。在参数取值是在混沌的范围内 (如 F 取值在图 9-3(e) 和图 9-3(g) 所给值之间的图 9-3(f)), 还存在很窄的周期“窗口”, 如图 9-3(f) 的周期为 $5T$ 的周期振荡 (参考 §11)。从混沌区继续加大 F 值, 又可能依次出现周期为 $2^n T$ 的周期振荡 ($n = \dots, 2, 1, 0$), 如图 9-3(h) 和图 9-3(i) 所示的 $2T$ 和 $1T$ 振荡。

这种倍周期振荡并由此通向混沌的情况也可由相平面 (x, \dot{x}) 上的轨线看出。图 9-4 是与图 9-3(a)~(e) 相对应的相平面上的轨线 (去掉了暂态过程)。可以看出, 周期运动确都是闭曲线, 周期为 $2^n T$ 的周期振荡有 n 条近似相同走向的轨线, 这些轨线共有 n 个交点。至于混沌运动 [图 9-4(e)], 其轨线看上去确是杂乱无序的。当然并不是混沌运动的轨线真是完全无序而没有一定结构 (参看 §14), 实际上它是有内部结构的, 这就要求对这类复杂运动采用一些有效方法进行分析研究 (参看 §10, 14 和 §15)。上述过程的物理解释大致是: 受迫振荡可以看成是两个运动系统的耦合, 其中之一是杜芬方程

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0 \quad (9.4)$$

所表征的非线性系统; 另一是外加周期力, 它可看作是一线性简谐

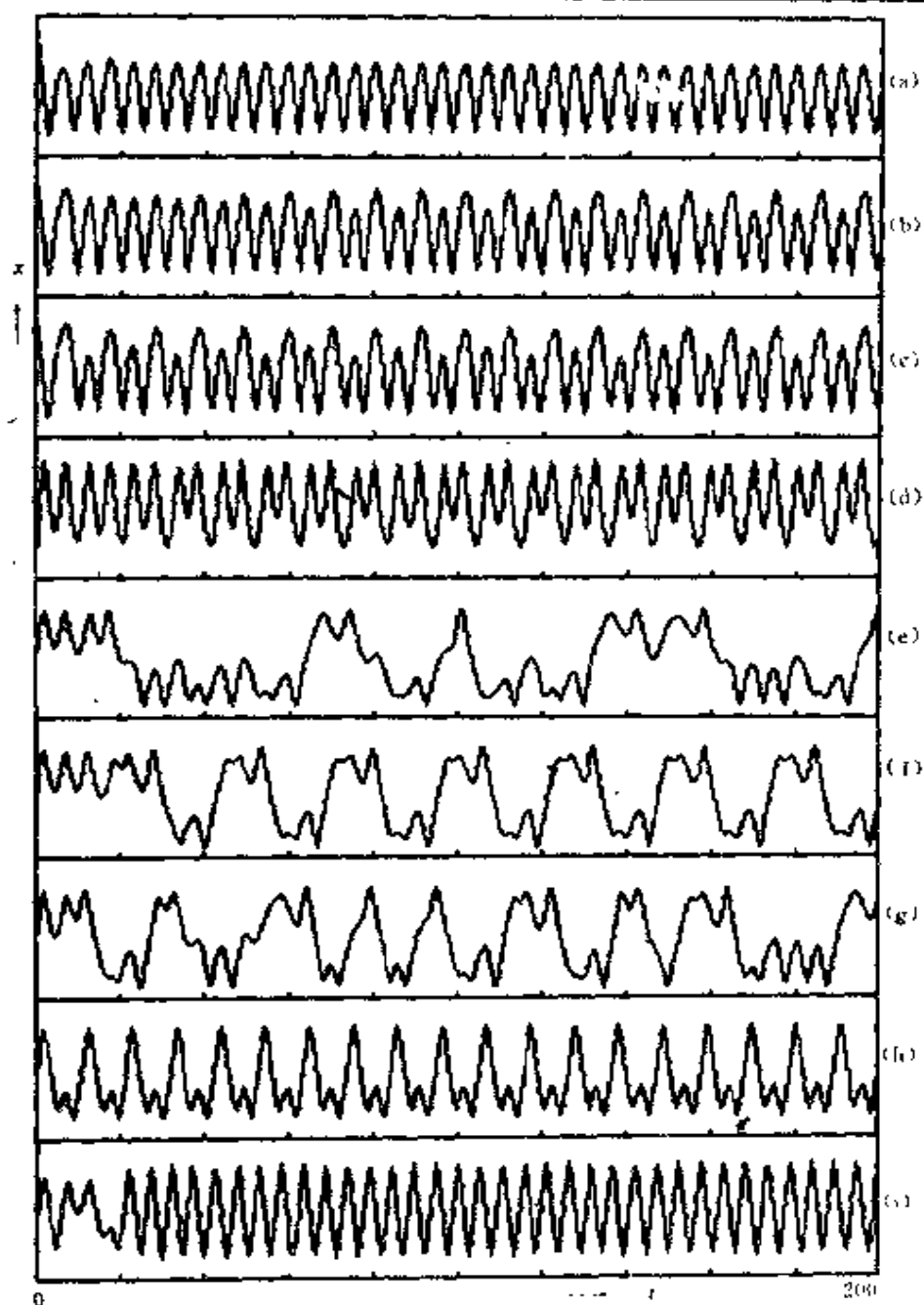
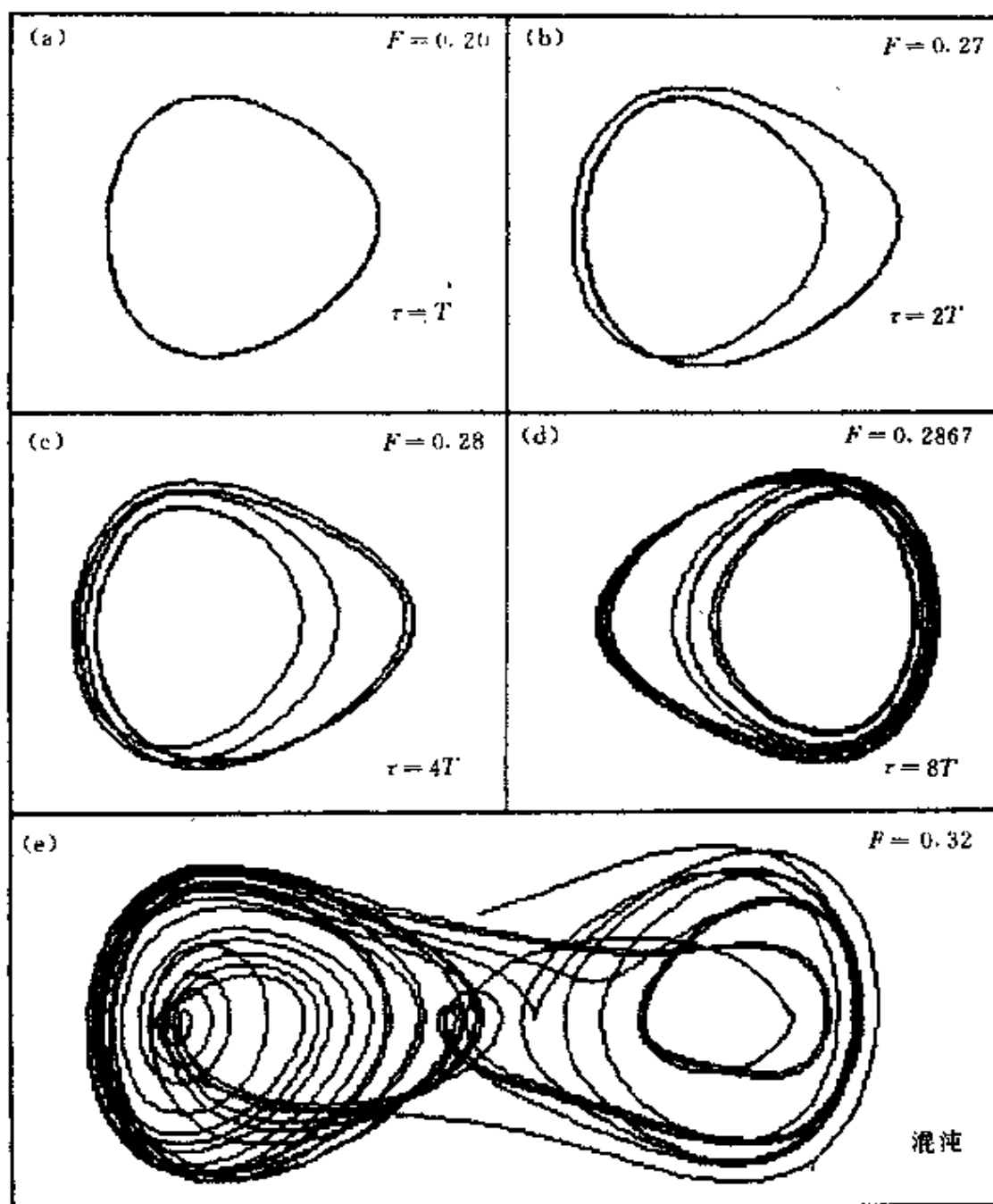


图 9-3 方程(9·3)中 F 取不同值(由上往下依次分别取 0.20、0.27、0.28、0.2867、0.32、0.36、0.40、0.645、0.85)时的 $x-t$ 曲线
 (a)~(d): $2^n T$ 周期振荡(n 依次为 0、1、2、3); (e)、(g): 混沌; (f): 嵌在混沌中的 $5T$ 周期窗口; (h)、(i): $2^n T$ 周期振荡(n 分别为 1 和 0)

图 9-4 方程(9·3)中 F 取不同值时在 (x, \dot{x}) 平面上的轨线

振荡系统。对于非线性系统(9·4),根据§3的分析,很容易知道它有三个奇点(定态):

(1)鞍点: $x_1=0, x_2=0$

(2)稳定焦点: $x_1=1, x_2=0$

(3)稳定焦点: $x_1=-1, x_2=0$

当外加周期力的振幅 F 极小时,线性系统的振荡很弱,它对非线性系统作用也很弱,整个系统的运动便可看作两独立运动的叠加,即整个系统的运动是围绕非线性系统两稳定焦点之一以线性振子的频率($\Omega=1.2, \tau=T$)振荡[图 9-4(a)]。稍许加大 F ,非线性系统的影响只是使整个系统的这种围绕稳定焦点的振荡出现分频(倍周期)[参考§8和图 9-4(b)]。系统这种按外加周期力的周期或其倍周期($\tau=2T$)振荡称为锁频,即振荡频率锁在外力的频率或其分频上。当 F 再加大到使其幅值超过非线性系统三奇点之间的间隔时,系统可以在这些奇点之间来回跃迁振荡[图 9-4(e)],从而运动复杂化了,这就出现了混沌。当 F 进一步加大,线性振子又处于主导地位,非线性系统的影响是次要的,整个系统又被锁在外加周期力的各分频上。当 F 再进一步加大,线性振子完全处于统治地位,非线性系统的作用相对来说极弱,这时整个系统便按线性系统方式运动,即它被锁在外加周期力的频率上($\tau=T$)。这就是说,两耦合系统其中之一(线性振子)弱到整个系统可看作两相对独立系统,或者其中之一(线性振子)强到占统治地位时,系统都将处于锁频状态。只有当两系统强弱不相上下时,两振荡相互强烈影响,运动才复杂化而出现混沌。

上述解 $x(t)$ 的性质随参数变化的情形还可表示如下:用解 $x(t)$ 的极大值[或 $x(t)$ 与某截面的交点值,参看下节]为纵坐标,用方程中的可变参数(此处是外加周期力的幅值 F)为横坐标画图(用计算机求解时直接画出),可得图 9-5 的结果。这表示当 F 小于

临界值 F_{∞} 时, 解随参数变化是倍周期分岔过程, F_1, F_2, \dots 是一系列的分岔点。当 $F > F_{\infty}$ 时, 即出现混沌。费根鲍姆详细地研究了由倍周期分岔通向混沌的情形。他发现了其中一些普适的规律。如分岔点处参数值 F_n 的收敛服从如下普适规律:

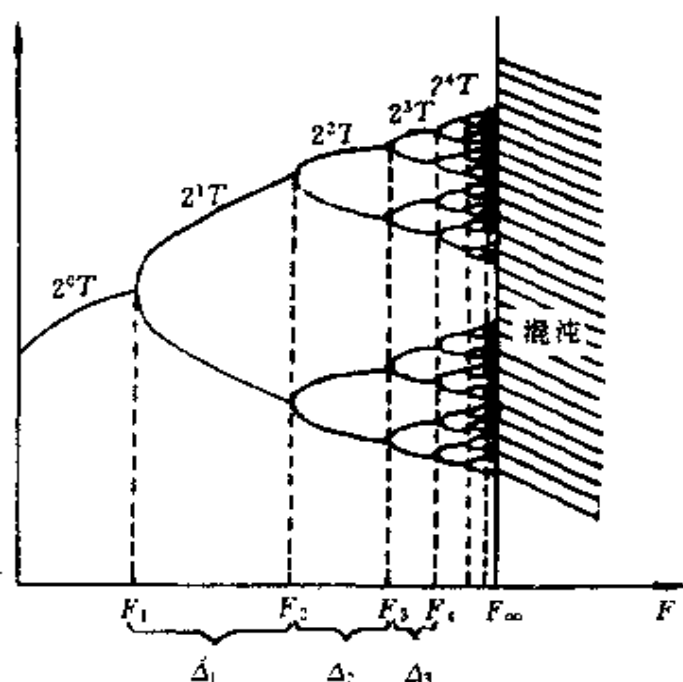


图 9-5 倍周期分岔与混沌

$$F_n = F_{\infty} - \frac{C}{\delta^n}, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9 \cdot 5)$$

C 为与动力学方程形式有关的常数。由上式得

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1} - F_n}{F_{n+2} - F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \quad (9 \cdot 6)$$

δ 称为费根鲍姆常数。不同类型的方程, δ 值不同, 对于许多情形 (即在所谓庞卡莱映象具有二次型极大情形, 参考 § 11)

$$\delta = 4.669\,201\,609\,1 \quad (9 \cdot 7)$$

关于倍周期分岔通向混沌的详情, § 11 和 § 12 还要介绍。如果让两个 (甚至三个) 参数都变化并在它们组成的参数平面 (或空间) 中

画出各种周期运动和混沌出现的范围,就可以对倍周期分岔和混沌出现的条件更加清楚了(参考图 20-3 和图 20-4)。

除了由倍周期分岔道路可通向混沌外,我们还将在以后对其他通向混沌的道路略加介绍(参考 § 13)。

3. 显示混沌现象的简单实验

关于混沌运动的存在,不仅已由理论和计算机计算所预言,也已在某些领域(激光、固体物理和化学振荡等,参看第三章)中被观察到,而且也可用一些比较简单的实验证实。下面我们举几种观察研究混沌运动的简单装置。

(1) 跳球实验

让一个金属球垂直地落在平滑桌面上,球与桌面的非弹性碰撞使球跳回的高度逐次变小,即减幅(阻尼)振荡。如果让桌面沿垂直方向振动,则球相当于受到一周周期外力驱动。选取桌面振动的振幅 A 作为可调参数,就可能观察到小球跳回高度变化的情况。

实际实验可用图 9-6 的装置。用扬声器 L 的纸盆代替桌面。纸盆上粘一表面皿(或凹透镜,用以保护纸盆并使球跳回时保持竖直方向),皿上粘一压力传感薄膜(如压电晶体),扬声器接音频振荡器。振荡器还接到示波器的 X 轴上和—(音频)电压计上。电压计用以测量作为调节参数的电压幅值,示波器水平偏转表示电压的变化。压力传感薄膜接示波器的 Y 轴上,即示波器垂偏转表示球冲击力的大小,即间接表示球跳回的高度。

随着电压幅值 A 的增大,示波器上确依次观察到周期为 T 、 $2T$ 、 $4T$ 、…的振荡,最后进入混沌状态。图 9-7 是球周期运动和混沌运动示意。下节将看到(图 10-5),实际测量结果显示,跳球运动有时确具有混沌性质。

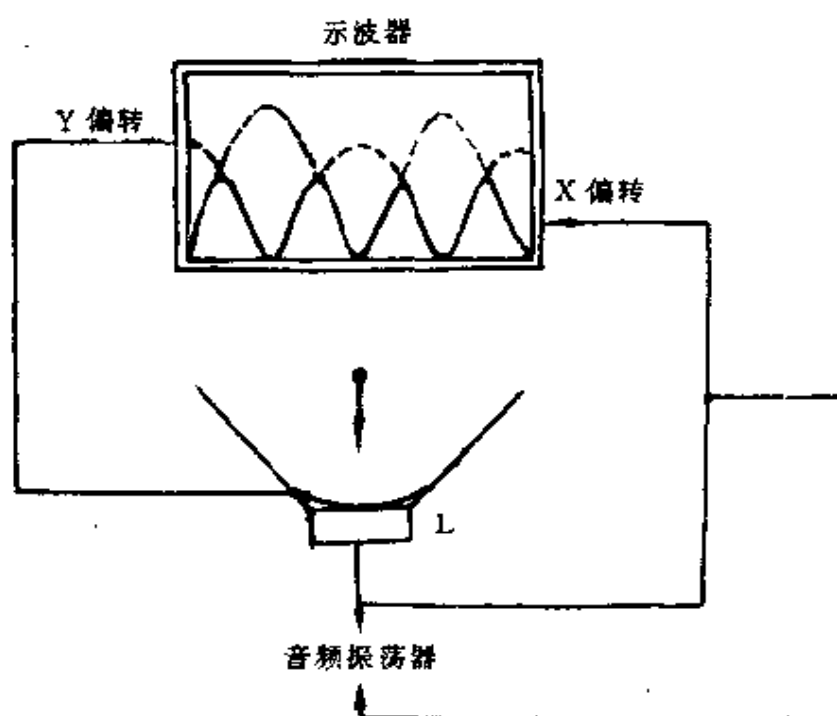


图 9-6



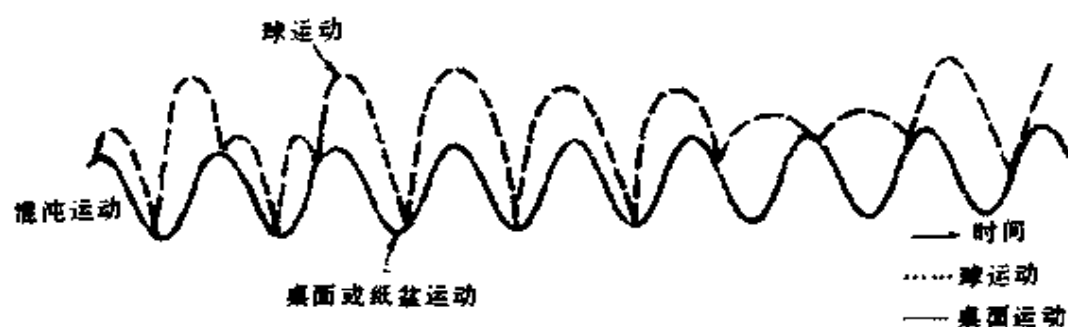


图 9-7 跳球实验中的周期运动的混沌运动

(2) 水龙头滴水实验

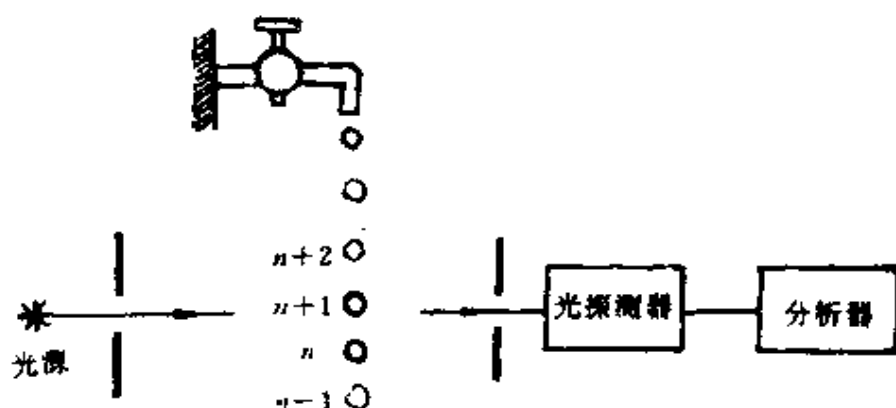


图 9-8 滴水实验装置

人们都熟知,水龙头开得很小时,水是一滴一滴地往下滴。滴水快慢受水龙头大小和形状、开启程度、水密度、重力加速度、表面张力和温度等因素制约,即滴水是服从确定的规律。人们往往初步推想,不管滴水快慢如何,相邻两次滴水的时间间隔总是一定的,即滴水是周期过程。然而仔细观测(图 9-8)指出(肖, Shaw, 1981),适当调节各控制参数,水龙头滴水既可以是周期的,也可以由倍周期面过渡到混沌。图 9-9 是吴和谢利(Wu and Schelly, 1989)用很

精确的装置在不同水流速度下得到的结果之一。它明确显示在相当宽的流水速度范围内,两相邻水滴之间的时间间隔具有混沌性质。下一节还要介绍吴和谢利用另一方法显示这一性质。

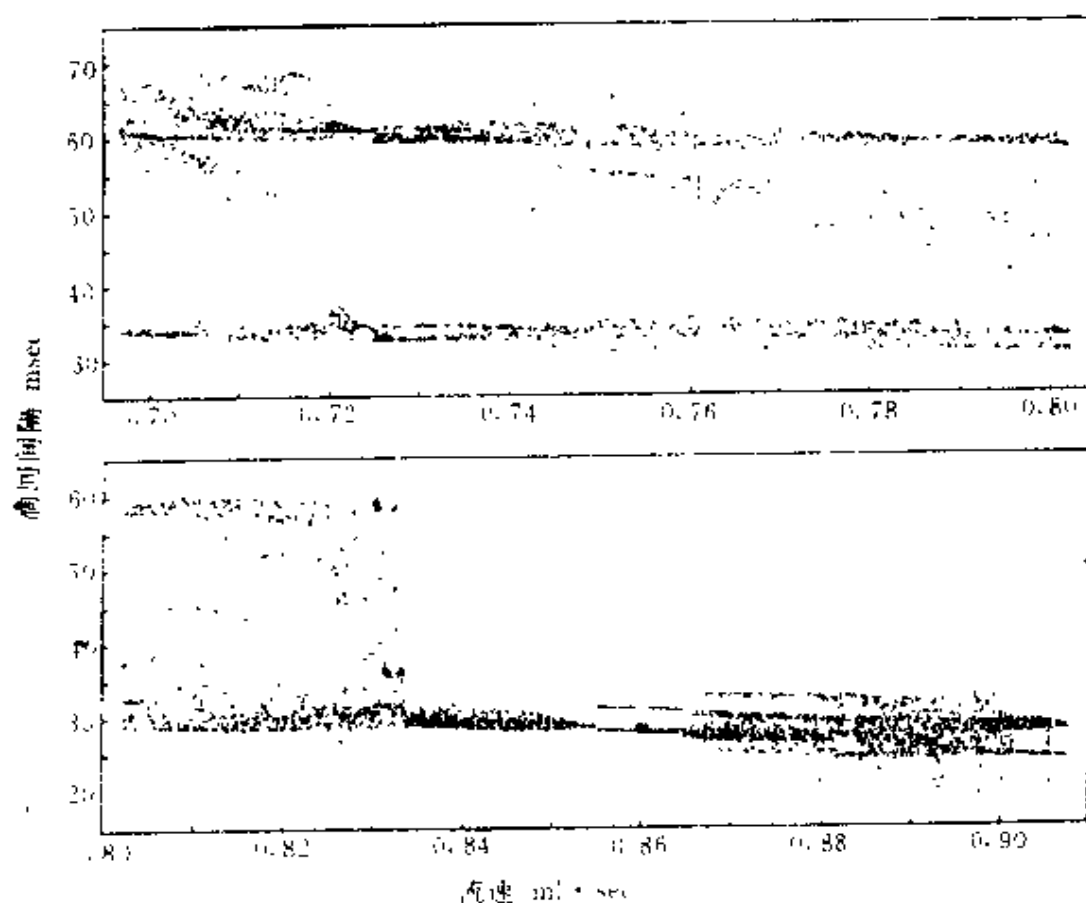


图 9-9 吴和谢利滴水实验结果之一:
滴间间隔与流速之间的关系(共 4.8×10^4 个数据点)

(3) 含负阻元件的电路

在 §1 中我们已讲到含负阻元件的电路可构成非线性系统。如果在电路中接入一交变电源,就可以在交变电源作用(或者说,LCN 电路构成的振子与电源振子耦合作用)下出现倍周期分岔和

混沌。图 9-10 就是这样的一个电路,其中负阻元件 N 可以是隧道二极管或单结管等,其在负阻区的工作点可用一与之并联的可变电压(如用可变电阻)的直流电源来调节(图中未画出)。这时方程(1·26)变为

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} - \omega^2 x + \mu x^3 = B \cos \Omega t \quad (9 \cdot 8)$$

式中 x 、 α 、 ω 和 μ 仍由式(1·25)给出。适当选取电路中的参数,如电源幅值 B 和频率 Ω ,或电容 C 等,人们已观察到了倍周期分岔和混沌。

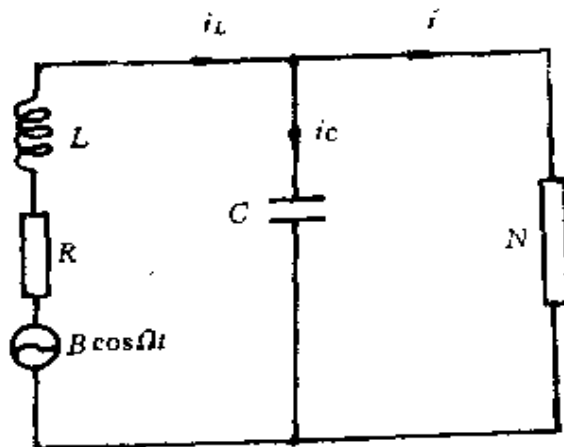


图 9-10 含负阻元件电路

(4) 变容二极管电路

上述振荡电路中的负阻元件也可用其他非线性元件代替。图 9-11 就是用变容二极管作为非线性元件。变容二极管的电容 C 与电压的关系为

$$C = \frac{C_0}{(1 + \frac{V_C}{\varphi})^r} \quad (9 \cdot 9)$$

式中 C_0 、 φ 和 r 均为常数。如果取下面的近似式(南京大学倪垸苏和魏荣爵,1985)

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{Q}{C(1 + \frac{V_c}{\varphi})^r} \approx V_c - r \frac{V_c^2}{\varphi} \quad (9 \cdot 10)$$

$$V_c \approx \frac{Q}{C} + r \frac{Q^2}{\varphi C_0^2}$$

则由克希霍夫定律得到 $VL \dot{I} + RI + V_{C1} + V_c = V_0 \cos \Omega t$, 从而

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})Q + \frac{r}{C_0^2 \varphi} Q^2 = V_0 \cos \Omega t \quad (9 \cdot 11)$$

上式与杜芬方程的差别仅在于用二次项代替了杜芬方程中的三次项。

用此实验确实观察到了倍周期分岔和混沌(见下节图 10-10)。在 § 18 我们还要进一步讨论这类实验。

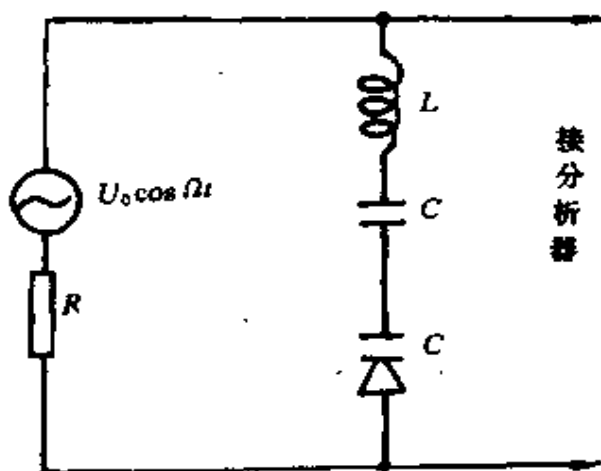


图 9-11 变容二极管电路

§ 10 研究非线性振荡和混沌的某些方法

为了研究非线性振荡,从前面几节的讨论中看出,我们可以采用直接观察状态变量随时间的变化这种直观的方法和在相空间

(或相平面)观察其轨迹。但是很明显,当运动很复杂或出现混沌时,直接观察状态随时间变化即使时间极长,也不一定能看出一点头绪。即如果不对它作进一步加工分析,是不易了解运动的性质和有关频谱成分等方面的信息,从而难于区分混沌和其他形式的振荡。直接观察相空间或相平面中的轨线固然不失为一有效方法,但是运动很复杂时,轨线可能是混乱一片,甚至很可能充满某一区域面看不出什么规律。

由于以上两方面的局限性,为了研究复杂的非线性振荡特别是混沌运动,还必须有其他有效方法。下面介绍三种常用的方法。至于进一步用某些物理量来刻画或区分各种运动的特征,将陆续在 § 14 和 § 16 介绍。

1. 频闪采样法

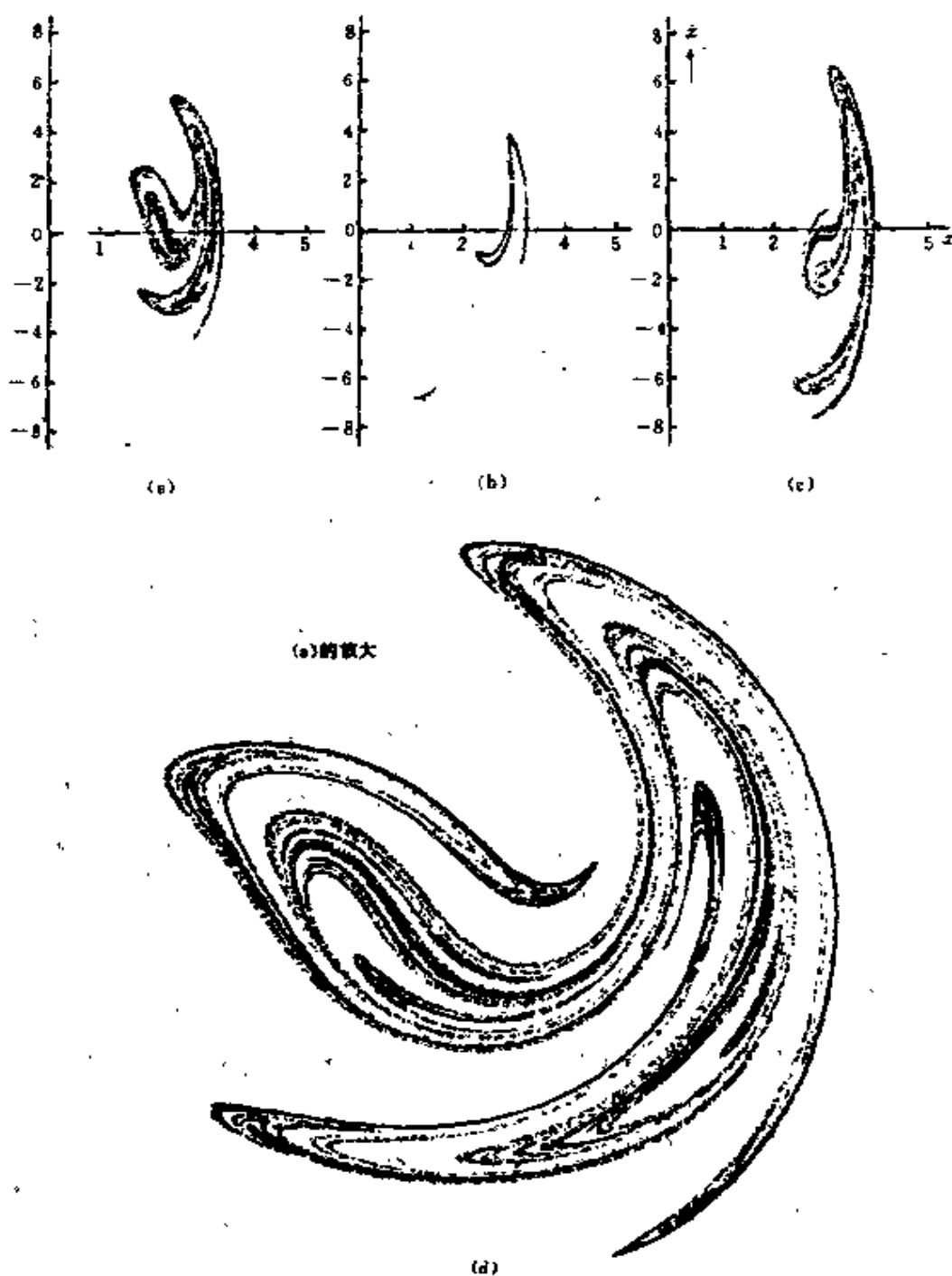
为了避免复杂运动在相平面上轨迹的混乱不清,可以只限于观察隔一定时间间隔(称为采样周期) τ 在相空间的代表点。即不管连续运动的轨迹如何,我们用隔一定时间闪光一次的频闪(观察)法只观察轨迹上的代表点(称为采样点)。这样,原来在相平面的连续运动就被一系列离散点 P_0, P_1, P_2, \dots 所代表。

这些采样点怎样表示运动的特征呢?对于定态,采样点自然是一固定点。对于周期运动,由于其在相平面中的轨迹是闭曲线,如果我们取采样周期就等于运动周期,则采样点也是一不动点*:

$$P_0 = P_1 = P_2 = \dots$$

对于受迫振动,如果取采样周期等于强迫力周期,则系统作基振时的采样点仍是不动点。当系统作 n 次分谐振时,由于这时运动

* 如果考虑到运动要经过一暂态过程才能达到稳定的周期过程,则采样点将有一逐步趋近不动点的过程。

图 10-1 方程 $\ddot{x} + ax + x^3 = F \cos t$ 解的频闪采样

(a) $a=0.05, F=7.5$; (b) $a=0.25, F=8.5$; (c) $a=0.10, F=12.0$; (d) (a)的放大

周期等于强迫力周期的 n 倍,在一运动周期内有 n 次闪光观察到采样点,因此这时采样点是 n 个离散点。

对于非周期运动,采样点不可能是有限个。在通常情况下(如耗散系统),变量 x 总是取有限值,从而采样点是在一定区域内的一片密集点。图 10-1 就是上田(Ueda)得到的杜芬方程解的频闪采样结果(Ueda,1980)。把坐标放大以增大分辨本领(图 10-1d),可以看出,采样点的分布并不是完全混乱的,而是有着层状的规则结构。不断加大分辨本领,可得到不断重复原分布形态的微细几何结构。这是混沌与过去统计物理学中的随机运动(如气体分子运动)最重要区别之处,因后者不可能有这类结构。这种无穷层次的自相似结构也就是所谓标度不变性:不同标度(或尺寸大小)下结构(或形状)相同。

既然不同类型的运动可得到不同形态的频闪采样结果,反过来便可以用这种频闪采样法(用计算机)选取适当采样频率,将采样结果作图,由它分析运动的性质。对于在周期力作用下的受迫运动,通常就取强迫力的频率(或其分频)作为采样频率。当采样结果为一·点时,运动便是周期运动(特殊情形下是稳定定态);当采样结果为 n 个(n 是整数)离散点时,运动也是周期的,其频率是采样频率的 $1/n$ ($1/n$ 次分谐振动);当采样结果是无穷多离散点集合时,运动就是随机的。如果采样只是在一定区域密集的点而且具有层次结构(可用加大分辨本领来观察),则此随机运动便是混沌。

2. 庞卡莱截面法

与上述频闪法类似,早在上世纪末庞卡莱就提出了一种方法,它对分析多变量(x_1, \dots, x_n)自治系统的运动很有用。

在多维相空间($x_1, \dot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n$)中适当(要有利于观察系统的运动特征和变化,如截而不能与轨线相切,更不能包含轨线而。)

选取一截面,在此截面上某一对共轭变量如 x_1 和 \dot{x}_1 取固定值,通常称此截面为庞卡莱截面。观察运动轨迹与此截面的截点(称为庞卡莱点),设它们依次为 $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ 。这样原来相空间的连续轨迹在庞卡莱截面上便表现为这些离散点之间的映象:

$$P_{n+1} = TP_n \quad (10 \cdot 1)$$

T 称为庞卡莱映象。

我们知道,单变量的周期运动在相平面中的轨迹是封闭曲线。二个变量的周期运动在 2×2 维相空间的轨迹是在二维环面上(图 10-2)。依此类推, N 个变量的周期运动是 $2N$ 维相空间的 N 维环面上。为简单和形象计,我们研究二变量的情形,这时的庞卡莱截

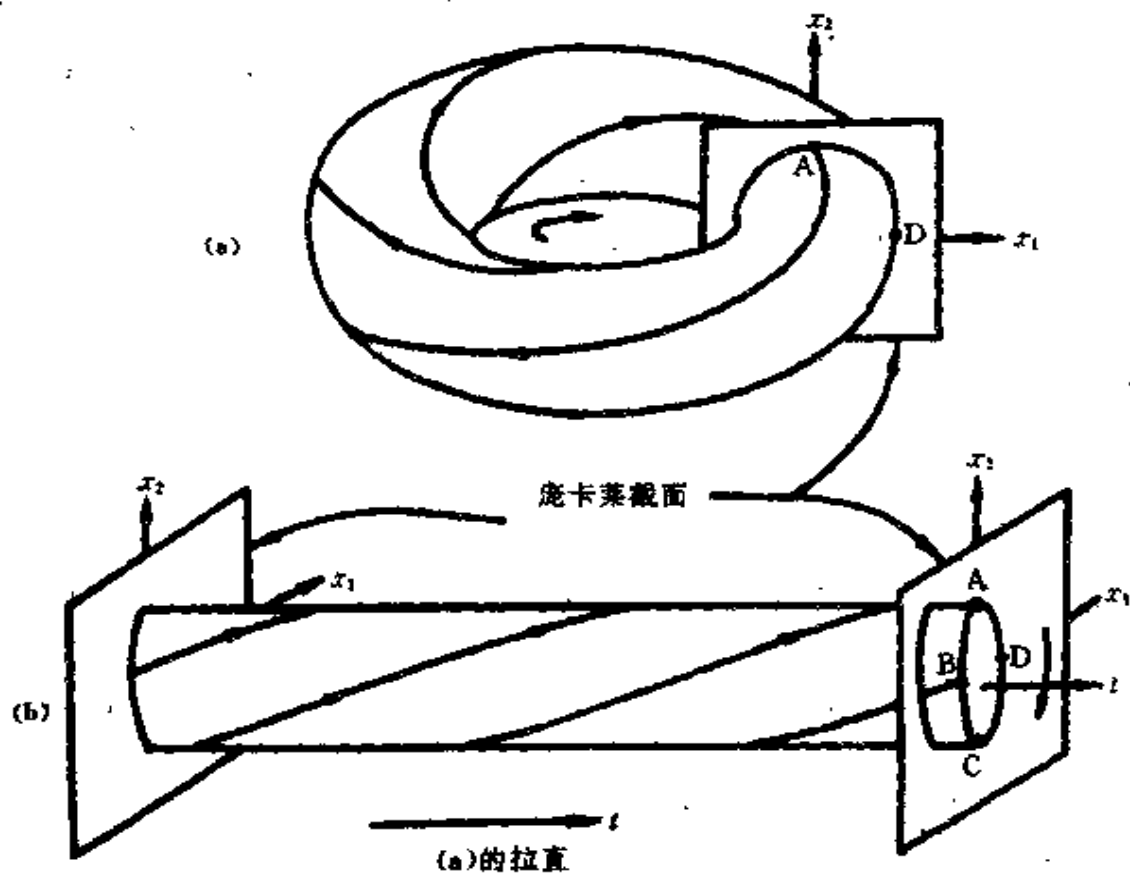


图 10-2 二维环面

面也示于图 10-2。

如果运动时两变量 x_1 和 x_2 的周期相等, 则运动轨迹通过庞卡莱截面都是在同一点, 即庞卡莱点是一不动点, 庞卡莱映象是一恒等映象:

$$P_n = TP_{n-1} = T^{(2)}P_{n-2} = \cdots = T^{(n)}P_0 \quad (10 \cdot 2)$$

如果两变量的频率 ω_1 和 ω_2 不等, 设

$$\alpha = \omega_1 / \omega_2 \quad (10 \cdot 3)$$

我们称两频率之比 α 为转动数, 它表示在庞卡莱截面上相邻两代表点之间角位移(以 2π 为单位)。如果 α 为有理数, 则在庞卡莱截面上将得到 α 个点。

如果 α 为无理数, 严格说系统的整体运动不是周期的。当然各变量 x_1 和 x_2 的运动还是规则的, 两初始条件靠近的运动的轨线也可维持很靠近, 从而人们仍可对运动状态作出预测。我们称这种运动为准周期运动。这时庞卡莱截面上的截点将布满整个环的外周, 即构成一封闭曲面。

对于更多变量($N \geq 3$)的情形, 周期运动和准周期运动的轨线是在 N 维环面上, 其与二维庞卡莱截面的交点也同样是一些离散点或封闭曲线。

至于混沌, 因其在相空间的轨迹具有随机性, 它在庞卡莱截面上将形成一片或多片密集点。

因此可以抛开相空间的轨道, 借助计算机画出庞卡莱截面上的截点, 由它们可得到关于运动特性的信息:

当庞卡莱截面上只是一不动点或少数离散点时, 运动是周期的;

当庞卡莱截面上是一闭曲线时, 运动是准周期的;

当庞卡莱截面上是一些成片的密集点时, 运动便是混沌。

当然, 以上指的是庞卡莱截面上的稳定图象, 没有考虑初始阶

段的暂态过程。如考虑暂态过程,稳定的定态可以是一系列离散的庞卡莱点,最后才变为一个不动点。

作为例子,考虑方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2)^{1/2} \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2)^{1/2}\end{aligned}\quad (10 \cdot 4a)$$

采用极坐标后上式变为[分别与方程(5·12)和(5·14)对比]

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu - r) \\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}\quad (10 \cdot 4b)$$

其解为

$$\begin{aligned}r &= \mu r_0 / [r_0 + (\mu - r_0)e^{-t}] \\ \theta &= -t + \theta_0\end{aligned}\quad (10 \cdot 5)$$

式中 (r_0, θ_0) 为 (r, θ) 的初始值。上式消去 t 后得到相平面上的轨线方程

$$r = \mu r_0 / [r_0 + (\mu - r_0)e^{\mu(\theta - \theta_0)}] \quad (10 \cdot 6)$$

如果取 $\theta=0$ 为庞卡莱截面(线),结果映象点为

$$\begin{aligned}r_n &= \mu r / [r_0 + (\mu - r)e^{-\mu 2n\pi}] \quad n=1, 2, \dots \\ \theta_n &= 0\end{aligned}\quad (10 \cdot 7)$$

$n \rightarrow \infty$ 时,截点趋于极限点 $(\mu, 0)$ (图 10-3)。显然,以上表示由暂态过程过渡到极限环。

作为另一例子,我们研究所谓若斯勒(Rössler)方程,这是若斯勒 1976 年提出的一个很简单的非线性方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - \mu z\end{aligned}\quad (10 \cdot 8)$$

很明显,上面的若斯勒方程仅在第三方程中有简单的非线性项 xz 。当 $a=b=1/5, \mu=5.7$ 时,肖(R. S. shaw, 1981)得到解在 xy 平面上的轨线如图 10-4a 所示。可以看出,此运动可能很复杂,不像是周期的。如果再取 $y=0$ 作为庞卡莱截面,则在其上的庞卡莱映

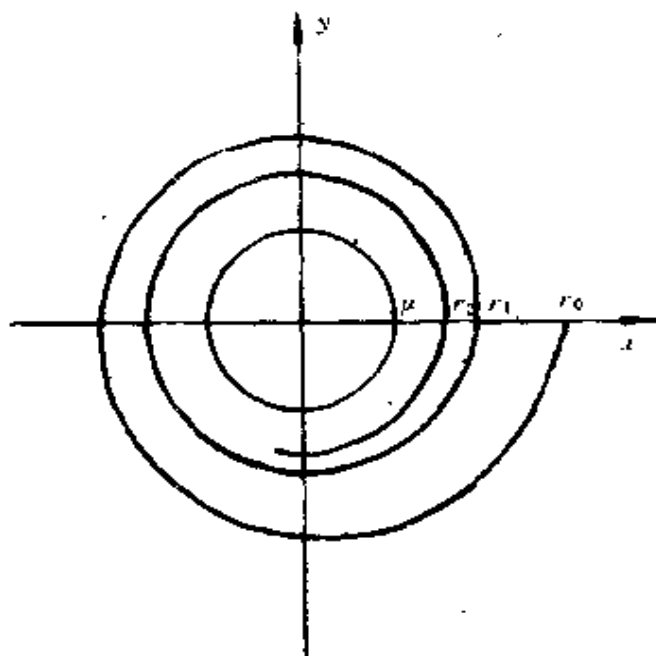


图 10-3

象如图 10-4b 所示,它大体上是一条有一极大值的曲线。下面两节对这种映象作了较详细分析,结果是:当参数 μ 在适当范围变化时,确可出现倍周期分岔并通向混沌。

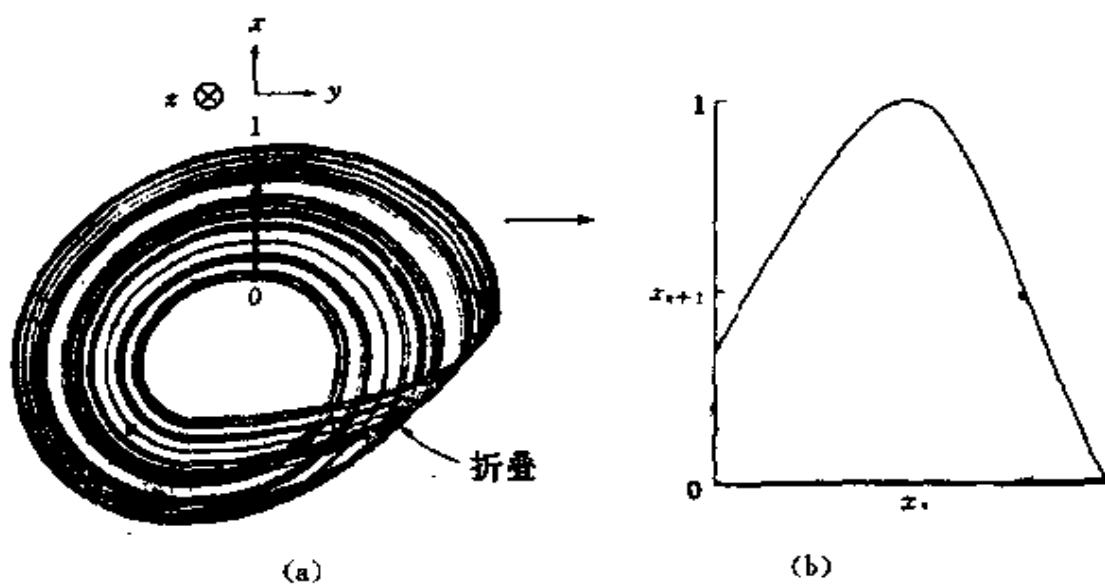


图 10-4 若斯勒方程的轨线(a)和庞卡莱映象(b)

在 § 16 还将介绍一个典型的庞卡莱截面法表示的结果(图 16-11)。

实用上,庞卡莱截面常常也可沿时间轴截取。以两变量 x 和 y 的情形为例,这相当于用 x 、 y 和 t 张成三维空间,然后顺着 t 轴等间隔地取 $t=n\tau$ ($n=1,2,3,\dots$) 的垂直于 t 轴的截面,庞卡莱映象便是轨线在这些截面上截点之间的映象。实际上,频闪法就是分析研究在这样的庞卡莱截面上截点的分布。

图 10-5 是跳球实验所得到的一幅庞卡莱截面图。可以看出,它显示这时跳球运动具有混沌性质。

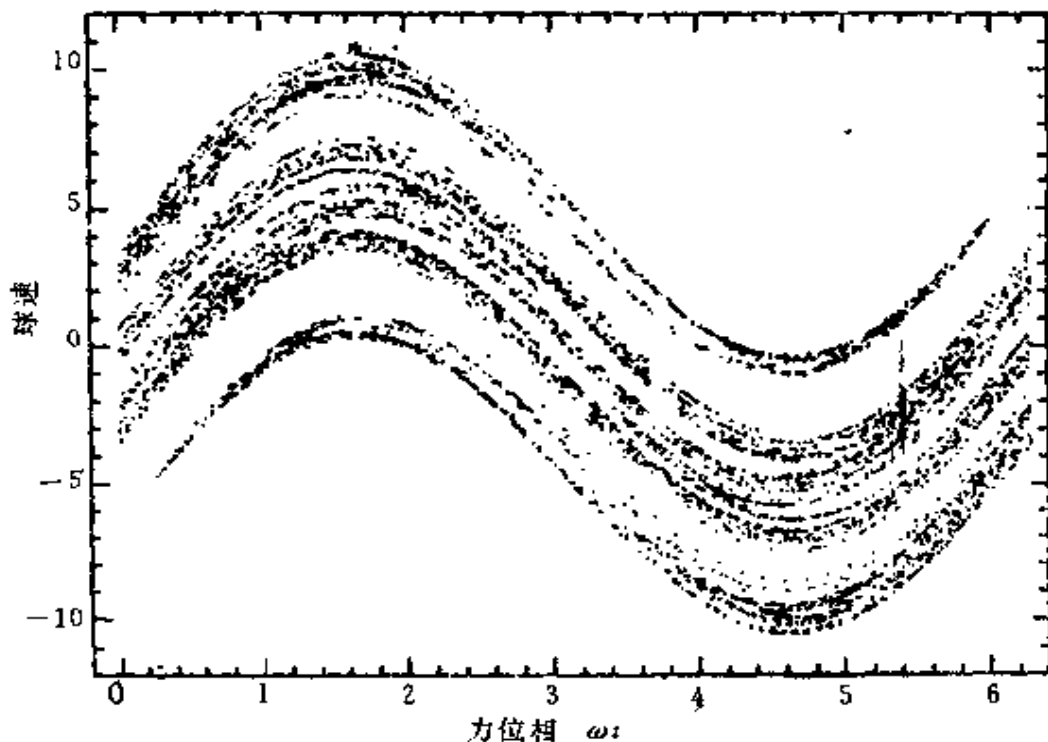


图 10-5 跳球实验

3. 相空间重构(reconstruction of phase space)

在实验过程中,有时候可能只便于对一个变量进行测量,这时候频闪采样法和庞卡莱截面法不一定适用。但这时仍可仿效频闪

采样法并利用相空间概念进行分析。即适当选取一时间延迟量 T , 取 $x(t), x(t+T), x(t+2T), \dots, x[t+(m-1)T]$ 为坐标画 m 维 ($m \leq 2n+1, n$ 为自变量个数) 空间 (称为相空间) 轨线。由于三是能形象地画出的最大维数, 仅想由相空间轨线 (构成所谓吸引子, 见 § 14) 表现判断系统运动的性质, 则可简单地取 m 等于 2 或 3。如果要得到关于系统更充分的信息, 如关于系统变量的数目, 还须重构更高维的相空间。这样的做法称为相空间重构法。

相空间重构法虽然是用一个变量在不同时刻的值构成相空间, 但动力系统的变量的变化自然跟此变量与系统的其他变量的相互作用有关, 即此变量随时间的变化隐含着整个系统的动力学规律。因此, 重构的相空间的轨线也反映系统状态的演化规律。

由于通常要分析的运动中变量常是振荡的 (周期的或非周期的), 也可以依次取变量 x 相邻两次极大值 x_m 作离散映象, 画 $x_m(N+1) - x_m(N)$ 图, 此图与庞卡莱映象类似, 由它也可得到关于运动性质的信息。

稍微仔细分析可以看出, 重构的相平面 $[(x(t), x(t+T))]$ 或相空间 $[x(t), x(t+T), x(t+2T)]$ 中的图形与相平面 (x, \dot{x}) 的图形相似。对于定态, 这种作图法的结果当然仍是一定点。对于周期运动, 结果也将是有限个点。对于混沌, 结果便是一些具有一定分布形式或结构的离散点。

图 10-6 就是吴和谢利 (1989) 用相空间重构法表示的滴水实验的结果。可以看出, 至少其中的 (a)、(b)、(i) ~ (l) 诸图显示滴水的混沌特性。

4. 功率谱法

谱分析是研究振动和混沌的一个重要手段。根据付里叶分析, 任何一个周期为 T 的周期运动 $x(t)$ 都可以展成付里叶级数:

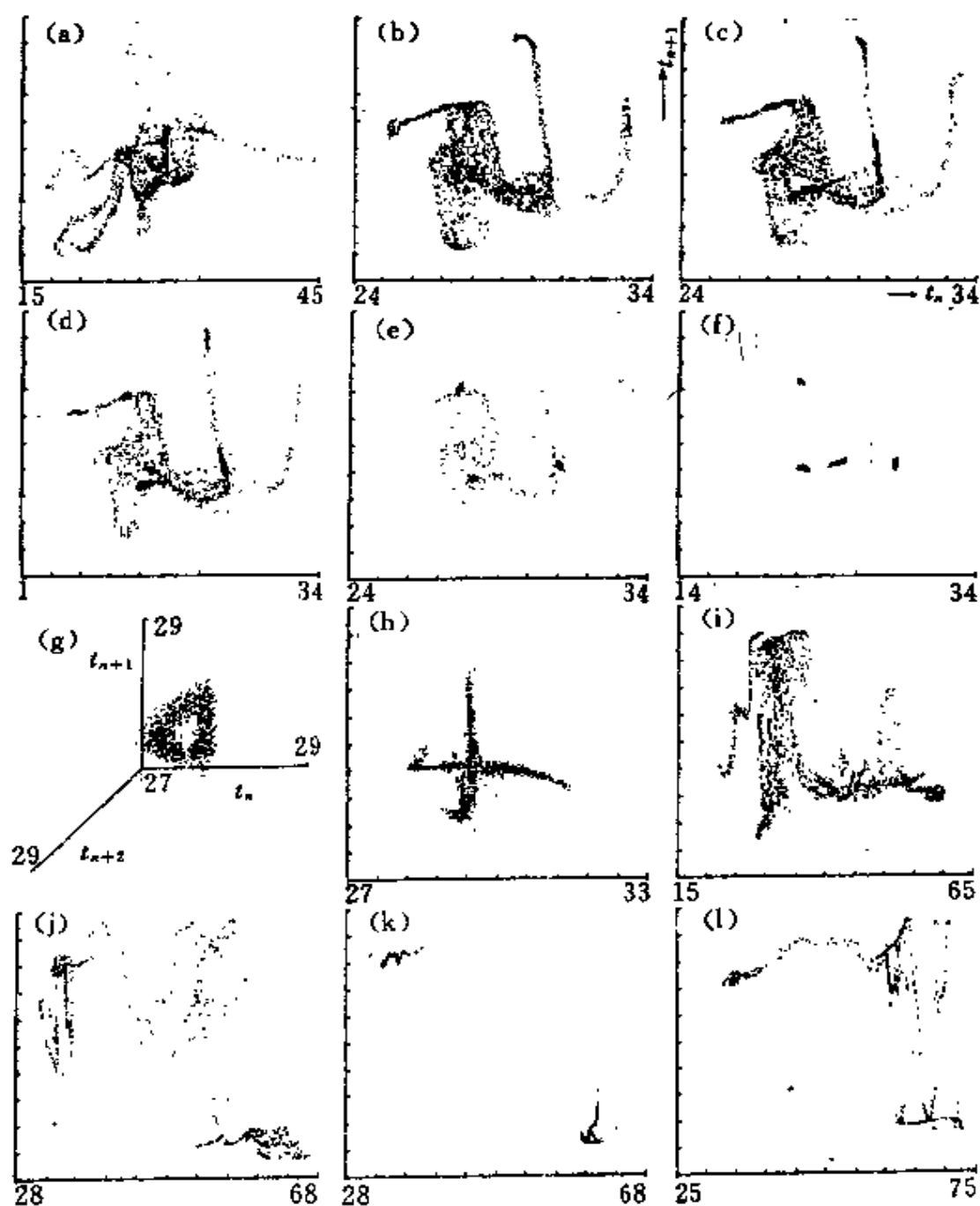
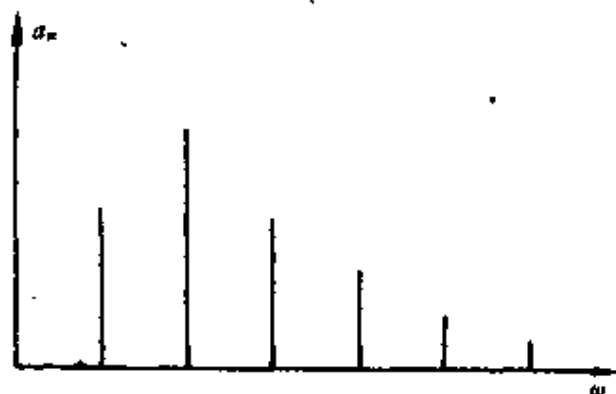


图 10-6 吴和谢利滴水实验结果之二：相空间重构法(每小图含 4000 个点)
 时间单位是 ms, 流速(ml/s)是：(a)0.888；(b)0.871；(c)0.867；(d)0.865；(e)0.862；
 (f)0.857；(g)0.854；(h)0.840；(i)0.809；(j)0.748；(k)0.727；(l)0.692

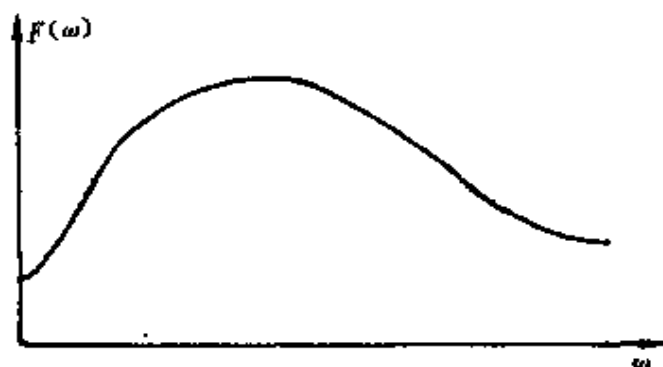
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t} \quad (10 \cdot 9)$$

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \quad (10 \cdot 10)$$

上式的物理意义是：任何形式的周期运动可以看成是基振(频率为 ω)和其一系列的泛谐振的叠加。各泛振的振幅 a_n 与频率的关系为分立谱[图 10-7(a)]。



(a).



(b)

图 10-7 周期运动(a)和非周期运动(b)的频率谱

对于任何非周期运动的时间函数 $x(t)$ ，我们不能把它展成付里叶级数，而只能把它写成付里叶积分：设

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (10 \cdot 11)$$

则

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (10 \cdot 12)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (10 \cdot 13)$$

即非周期运动的频率谱是连续谱,如图 10-7(b)所示。

对于随机过程(包括混沌),我们自然可以想象其频率谱是连续谱。然而,有两点我们应当注意:(1)有些随机过程的 $x(t)$ 可能随时间 t 而无限连续下去,即 $x(t)$ 在任何时刻都具有有限值,如理想的白噪声就是这样。在此情形下,式(10·11)不成立,即将 $x(t)$ 表成付里叶积分的条件不成立;(2)有些运动或过程,包括混沌,它们虽然具有随机性,但也并不是彻底随机的,而是既有随机性,又或多或少还有一定的规律(色噪声)。如对于两个变量 x_1 和 x_2 的情形,图 10-8(a)所示的噪声就是完全无规则的,而图 10-8(b)的结果虽然也是噪声,但两变量 x_1 和 x_2 之间也还是存在一定的规律。上而讲的混沌也是这样[参考图 10-1 和图 10-4(a)]。因此对于一般的随机运动(或噪声),我们不可能利用付里叶变换式(10·12)~(10·13)求出其振幅—频率谱,有的即使可以求出来,但不能反映运动的某些特性。为了用谱分析来了解随机过程的特性,必须采取新的办法。

为此,我们定义自相关函数(autocorrelation function,也称离散卷积), $x(t)$ 的自相关函数 $C(\tau)$ 的定义是

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt \quad (10 \cdot 14)$$

式中 τ 是时间的移动值。这样定义的 $C(\tau)$ 的值表示两时刻(t 和 $t+\tau$)运动或随机过程的相互关联或相似的程度。很容易想象:当 $x(t)$ 的幅值一定时, $C(\tau)$ 越大,则就意味着 $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 越相

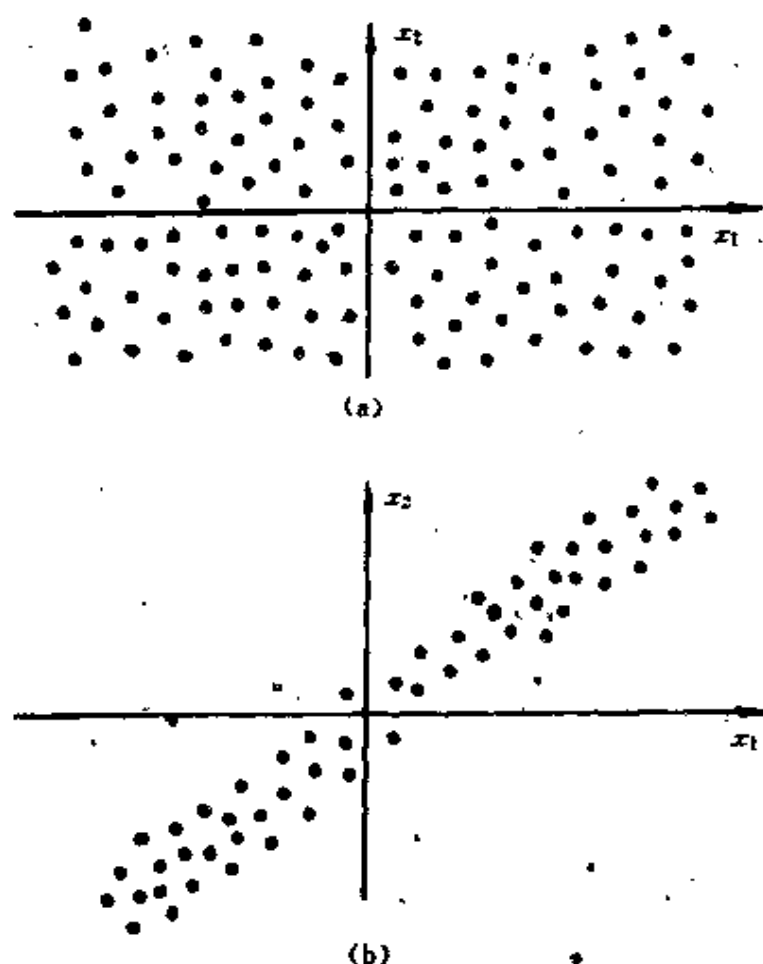


图 10-8

似。又 τ 越小时, $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 越相似, 从而 $C(\tau)$ 值越大。反之, τ 越大时, $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 差别可能越来越大, 最后以至 $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 完全无关而 $C(\tau)$ 越来越小直至趋于零。因此 $C(\tau)$ 才取名为自相关函数。图 10-9 左边示出几种情形下的自相关函数。在 (a) 中, $x(t) = A \sin \omega t$, 当 $\tau = nT$ 时 ($T = \frac{2\pi}{\omega}$ 是周期, n 是整数), $C(\tau)$ 取极大值, 即 $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 完全相似 (同); 反之, 当 $\tau = (n + \frac{1}{2})T$ 时, $C(\tau) = 0$, 这表示 $x(t+\tau)$ 与 $x(t)$ 位相相反 (完全不相似)。图 10-9

(b)~(d)表示不同带宽的白噪声,(b)是窄带(频谱带较窄)白噪声,(c)是宽带白噪声,(d)是理想(频谱宽为无限)白噪声。可以看出,带越宽, $C(\tau)$ 越窄。对于理想白噪声, $C(\tau)$ 变为 δ 函数。

从上面的例子以及具体分析还可以看出,自相关函数具有以下性质:

(1) $C(\tau)$ 是实偶函数,即

$$C(\tau) = C(-\tau) \quad (10 \cdot 15)$$

因为

$$\begin{aligned} C(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} x(\lambda)x(\tau+\lambda)d\lambda \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = C(\tau) \end{aligned}$$

上式中第二等式是由代换 $\lambda=t-\tau$ 得到,第三等式是考虑到由于积分上下限同时改变 τ 而积分间隔 T 并不变,当 $T \rightarrow \infty$ 时,这样的改变不引起结果变化。

(2) $C(0)$ 是 $C(\tau)$ 的最大值。因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int [x(t) \pm x(t+\tau)]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int x^2(t) dt \pm \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int x(t)x(t+\tau) dt \\ &= 2C(0) \pm 2C(\tau) \end{aligned}$$

所以

$$C(0) \geq |C(\tau)| \quad (10 \cdot 16)$$

(3) $C(0)$ 等于 $x(t)$ 的均方(平均平方)值。因为

$$C(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (10 \cdot 17)$$

根据定义,上式右边就是 $x(t)$ 的均方值。

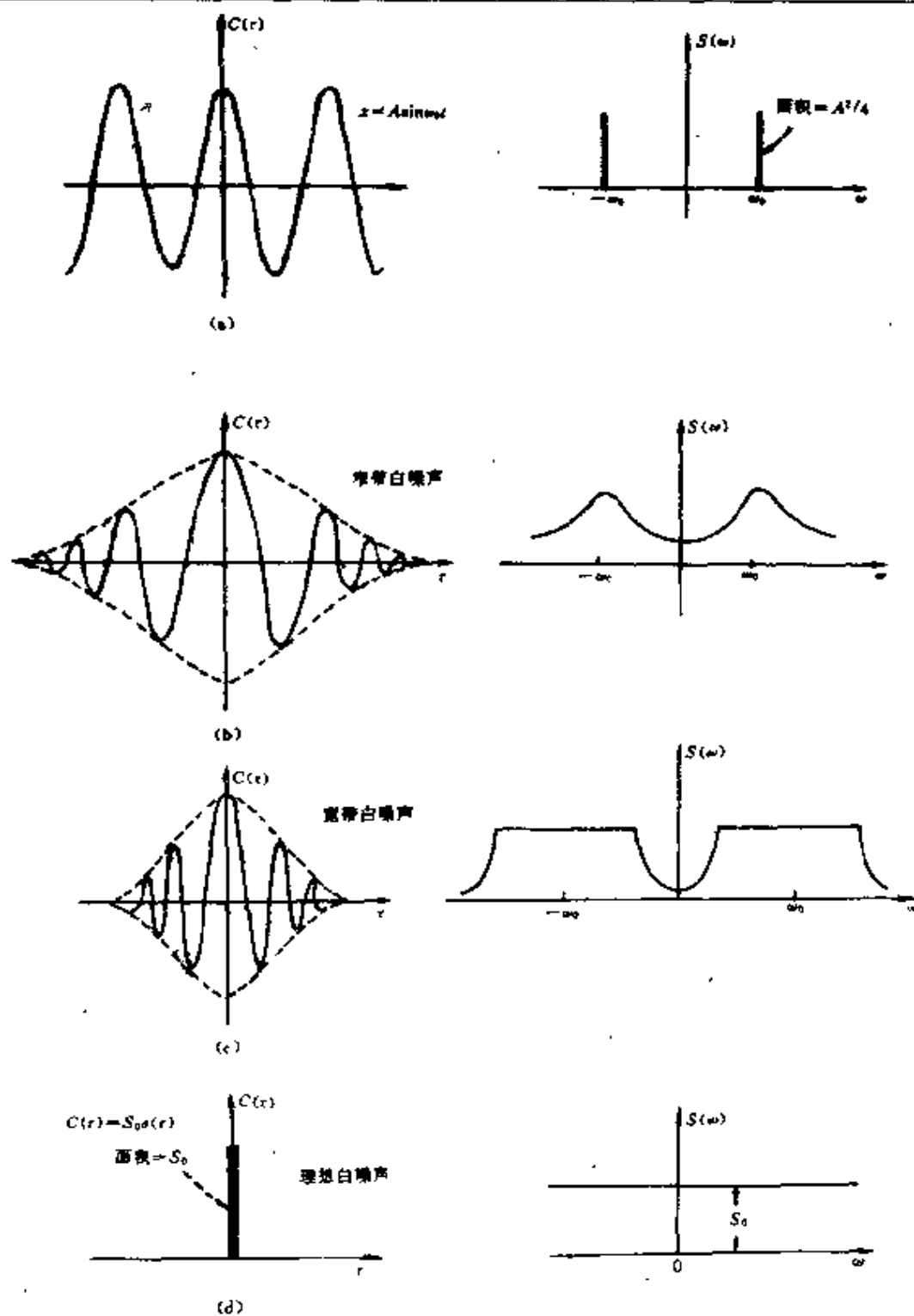


图 10-9 几种情形的自相关函数(左边)和功率谱(右边)

(4) 对于周期运动, $x(t)$ 是周期函数, 则 $C(\tau)$ 也是周期函数, 此时 $C(\tau)$ 不仅在 $\tau=0$ 处有极大值, 在 nT 处 (T 是周期) 都会出现极大。这一点从上面关于正弦函数的例子已可看出。

(5) 在有些情形下, 运动并不是规则的, 但也不是完全随机的, 如混沌运动和图 10-8b 所示的噪声。设如果 $x(t)$ 包含有随机过程 $s(t)$ 和规则运动 $r(t)$ 两部分

$$x(t) = s(t) + r(t) \quad (10 \cdot 18)$$

则 $x(t)$ 的自相关函数等于这两部分各自的自相关函数之和

$$C_x(\tau) = C_s(\tau) + C_r(\tau) \quad (10 \cdot 19)$$

据此, 我们可以利用自相关函数分析混沌在随机过程中的确定信号或混沌的特征。

为了表示运动 (特别是随机过程) 的频谱特性, 可以对自相关函数进行付里叶变换:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10 \cdot 20)$$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (10 \cdot 21)$$

以上两式有时称为维纳-辛钦定理。 $C(\tau)$ 的付里叶变换 $S(\omega)$ 即可用来表征运动的频谱特性。

$S(\omega)$ 具有以下一些性质:

(1) $S(\omega)$ 是频率 ω 的实偶函数。这可以很容易从上面讲的 $C(\tau)$ 是 τ 的实偶函数推得。

(2) $S(\omega)$ 曲线下的面积等于运动变量 $x(t)$ 的均方值。因为根据式 (10·17) 和 (10·21) 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (10 \cdot 22)$$

(3) $S(\omega)$ 表示功率谱密度。因为通常 $x(t)$ 表示振动位移, 而功率与 $x^2(t)$ 成正比; 又如在电路中, $x(t)$ 表示电流强度, 则 $x^2(t)$ 表

示通过单位电阻的功率。因此式(10·22)左边表示平均功率,从而 $S(\omega)$ 表示功率的(频)谱密度。所以通常称 $S(\omega)$ 为功率谱密度函数。

图 10-9 右侧为与左侧相对应的几种情形的功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。图 10-9(a)的正弦函数具有线状谱,这是很自然的事。可以证明,此时

$$C(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad (10 \cdot 23)$$

$$S(\omega) = \frac{A^2}{4} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (10 \cdot 24)$$

从图 10-9(b)~(d)右侧可看出,不同带宽的噪声的功率谱确表示了噪声的频带宽窄的特点。

目前已有专门仪器可以测出各种信号(过程)的功率谱,然后可由功率谱分析信号的特征。这在分析一些随机过程或混沌特别有用。在工业上可用以分析一些机械(如电机、汽轮机、车辆和飞机等)或其中一些部件的振动特性、载荷影响以及可能出现的故障等。对于已知的运动方程,则可利用计算机直接求其解的功率谱并据以分析解的性质,如是否是混沌等。

图 10-10 是林赛(Linsay, 1981)用变容二极管实验(图 9-11)测得的功率谱。各图是按外加交变电压幅值 V_0 (作为可变参数)递增排列的。当 V_0 极小时,出现基频[式(9.11)中的 Ω ,即周期等于 2^0T , $T=1/\nu=2\pi/\Omega$]及其倍频 $n\Omega$ ($n=1, 2, 3, \dots$)。当 V_0 加大到超过 1.9V 时,出现分频 $\Omega/2$ (即周期为 2^1T)及其倍频 $n\Omega/2$ 。再加大 V_0 ,出现第二次分频 $\Omega/4$ (即周期为 2^2T)及其各倍频 $n\Omega/4$ 。如此等等。图 10-10 中的 a~d 清楚地表示了此倍周期(分频)分岔过程。图中 $3 \times 4P$ 表示周期为 $3 \times 4T$ 的振荡状态,5P 表示周期为 $5T$ 的振荡状态,等等。又,图中 O 表示基频(Ω)谱线,1、2、3、…分

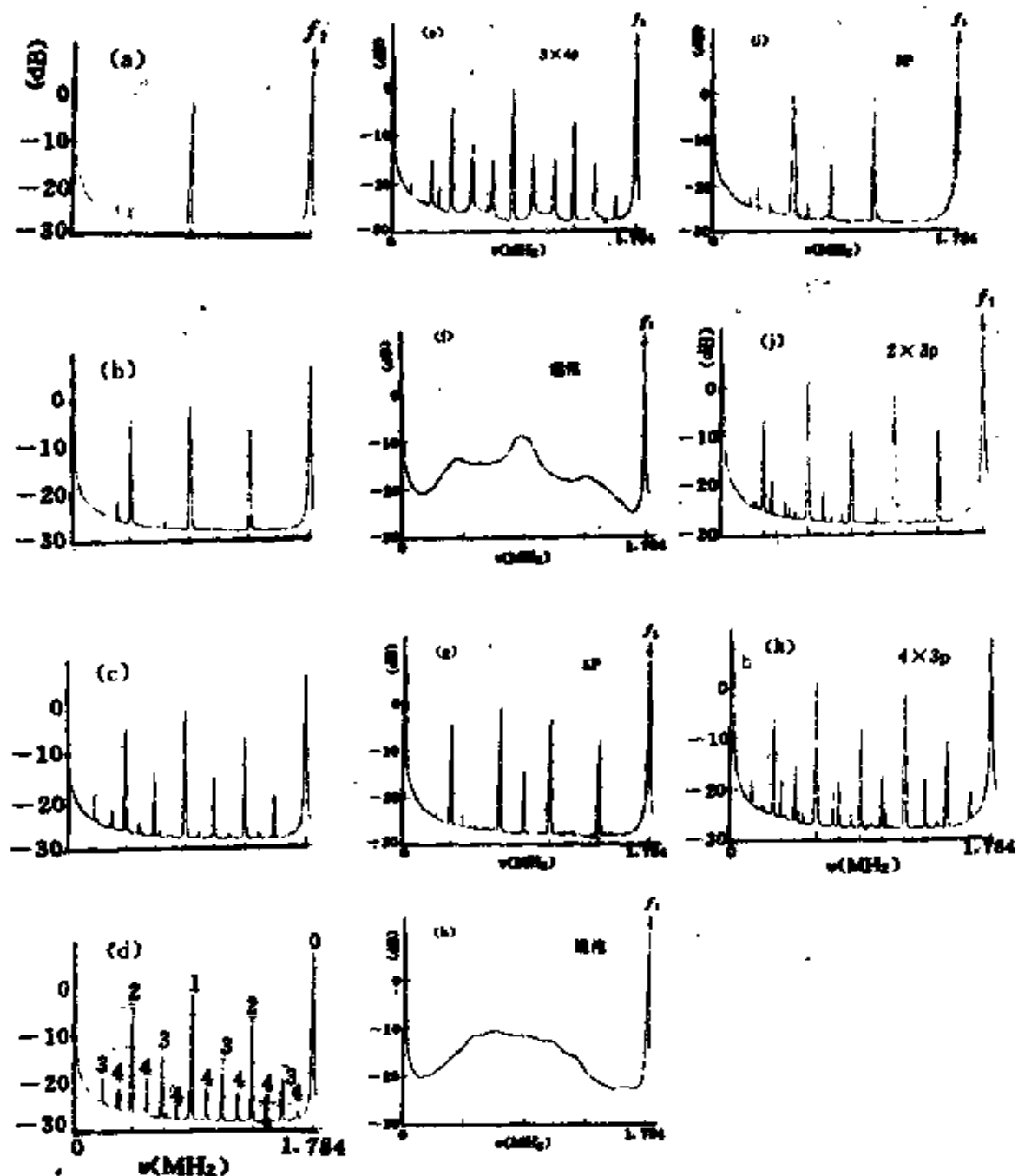


图 10-10 变容二极管实验的功率谱

$$C_0 = 81.8 \text{ pF}, \varphi = 0.6 \text{ V}, r = 0.44,$$

$$f_1 = \Omega / 2\pi = 1.78 \text{ MHz}$$

别表示倍周期 2^1T 、 2^2T 、 2^3T 、… 诸谱线(包括它们的奇数倍倍频的)。限于电路中存在的噪声, 2^5T 以上很弱的倍周期没能被观测到。把测得的诸 V_0 的分岔值代入式(9.6), 林赛算得 $\delta = 4.67$, 这与式(9.7)给出的值很接近。

再稍增大 V_0 , 观察到了 $\Omega/4$ 及其 $1/3$ 分频振荡[图(e)]。接着的图 f 是随机性的连续谱, 但这并不是像图 10-7a 那样的白噪声, 因它在 $2T$ 和 2^2T 处有极大。因此图 f 代表混沌, 极大处的周期 $2T$ 和 2^2T 表示系统在混沌区来回振荡的平均周期。再进一步增大 V_0 , 依次得到 $5P$ [图(g)]混沌[图(h)], $3P$ [图(i)]和 $6T$ [图(j)]等等, 这表示 $5T$ 和 $3T$ (比处 $6T$ 是 $3T$ 的倍周期, 参看下节图 11-9)是嵌在混沌区[图(f)和图(h)]中的周期窗口(参看下节)。

图 10-11 是克拉奇菲尔德(J. P. Crutchfield, 1980)得到的若斯勒方程(10.8)在 $a=b=1/5$ 、 μ 取各不同值时的功率谱及相应的 xy 平面上的轨线(奇怪吸引子, 见 § 14), 两者都清楚地显示倍周期分岔过程和最后($\mu > \mu_\infty = 4.20$ 时)出现混沌。

由此可见, 对于研究像混沌这样的复杂运动中的频谱特性并据以将混沌与随机运动加以区别, 功率谱法是很有效的。其分辨本领可以高达 2^7 次谐波。远远比直接观测相空间轨迹法(最好可分辨 2^5 次谐波)要高。至于频闪采样法, 虽然有人做分辨高达 2^{13} 次谐波, 但它主要用于周期外力驱动下的系统。而庞卡莱截面法的分辨本领一般都不超过功率谱法。

还要指出, 以上各种方法的好坏, 除了与分析着重的角度(直观轨迹还是频谱)有关外, 还与所用计算机的性能(字长、运算速度和容量)有关。如功率谱法由于要将许多谱平均才能得到质量较好的结果, 因此它要求计算机有较大的存储容量。

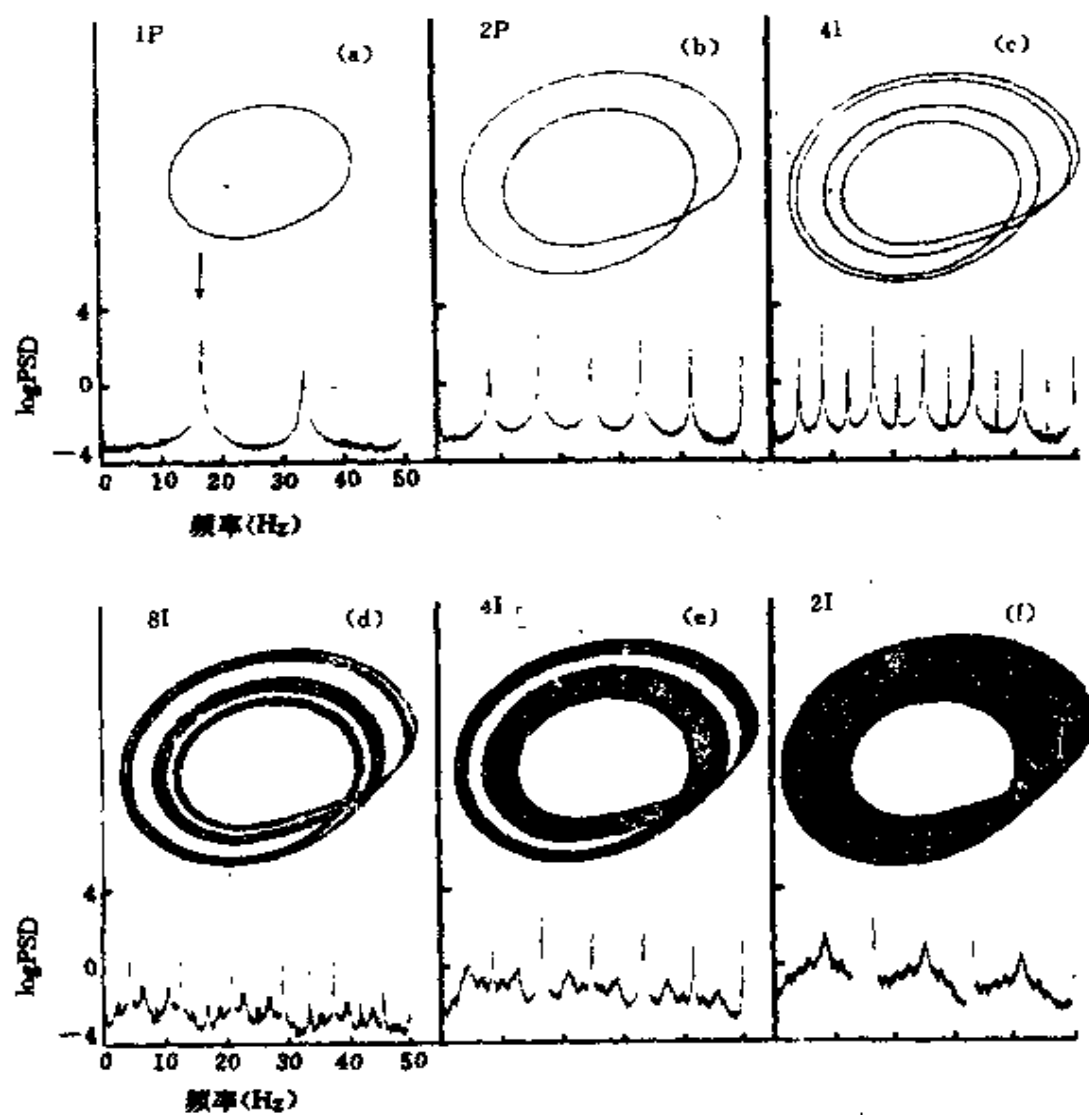


图 10-11 若斯勒方程的功率谱和轨线(吸引子)

(a) $\mu=2.6$; (b) $\mu=3.5$; (c) $\mu=4.1$;(d) $\mu=4.23$; (e) $\mu=4.30$; (f) $\mu=4.60$;

§ 11 离散映象(1)

以上诸节都是用微分方程表示一些连续形式的动力学规律。还有一些系统,其动力学规律不是连续过程,它们不能用微分方程表述,而是直接用差分方程或离散映象表述。所谓离散映象,通常是指下式表述的关系:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (11 \cdot 1)$$

式中 x 既可是单变量,也可以是状态空间的矢量, x_n 和 x_{n+1} 分别是映象前后变量的取值, F 表示此二值之间的关系。

当然,并不是表示离散过程的差分方程或离散映象同表示连续过程的微分方程之间截然无关。事实上,如大家所熟知,微分方程本来就是差分方程取极限的结果。如微分方程

$$\dot{x} = F(x) \quad (11 \cdot 2)$$

就可以用下述三个差分方程之一逼近:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = F(x_n)$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = F(x_{n+1}) \quad (11 \cdot 3)$$

$$\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau} = F(x_n)$$

式中 τ 是变量 x 取前后两值之间的时间间隔(称为步长)。此外,如 § 10 所述,高维空间连续过程的庞卡莱映象就是离散映象,即低维截面上的离散映象可以反映高维连续过程的一些规律。因此,关于差分方程或离散映象的研究自然具有很重要的理论和实际意义。

下面以一种最典型的离散映象——逻辑斯谛映象为例分析其

基本规律。

1. 逻辑斯谛映象

在 § 1 所述的虫口问题中,如果虫口没有世代交叠(即子代出生后,亲代即不存在或其数量可忽略),根据式(1.39),其某一代(设其为第 $n+1$ 代)的数量 x_{n+1} 与其亲代(第 n 代)的数量 x_n 之间的关系可以表为

$$x_{n+1} = \alpha x_n - \beta x_n^2 \quad (11 \cdot 4)$$

式中 α 和 β 都是常数,右边二项代表的意义与式(1.39)相同。

式(11·4)称为逻辑斯谛映象。经适当变换(如令 $y_n = \frac{\alpha}{\beta} x_n$)后它可写成

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (11 \cdot 5)$$

上式的物理意义可解释如下:新的 x_n 表示虫口数量与该地区能供养的最大虫口数之比。因此虫口可利用的食物数量与 $1-x$ 成正比。从而子代数量 x_{n+1} 既与亲代数量 x_n 成正比,也与 $1-x$ 成正比。当虫口数量达到极限($x_n=1$)时,可供利用的食物为零,虫口便不能再繁殖了,从而 $x_{n+1}=0$ 。

式(11·4)和式(11·5)都是二次映象。在一定的参数范围,如 μ 在 $(0, 2)$ 之间时, $x_{n+1} - x_n$ 曲线都有一极大值,它们都属于所谓单峰(unimodal)映象的范畴,这类映象有许多共同的特征,只要研究其一种的行为就可知其他。

首先我们要知道的是,在一定的环境和条件(参数 α, β 或 μ 取一些定值)下,虫口的数量能繁殖到什么数量。显然,出现此不变值或不动点的条件是

$$x_{n+1} = x_n \quad (11 \cdot 6)$$

或

$$F(x_n) = x_n \quad (11 \cdot 6')$$

一种求此不动点的形象方法就是作图:用直角坐标系的纵横坐标分别表示 x_{n+1} 和 x_n , 则式(11·5)如图 11-1 的曲线所示, 不动点(11·6)就是些 $F(x_n)$ 曲线与分角线的交点。当开始时 x 取任意小值 x_0 时, 经过第一次迭代(映象) x 将取值 x_1 。把 x_1 再当横坐标(经 x_1 画平行横轴的横线, 它与分角线交点的横坐标)作为第二次迭代的初值 x_1 。通过此横坐标 x_1 的竖线与 F 的交点的纵坐标就是第二次迭代的结果 x_2 。如此下去, 如果参数 μ 的值不太大时, 最后便达到 F 与分角线的交点 S , 此交点的纵横坐标 x_s 就是满足式(11·6)的不动点数值。可以看出, 任意不同的初值 x_0 , 经过多次

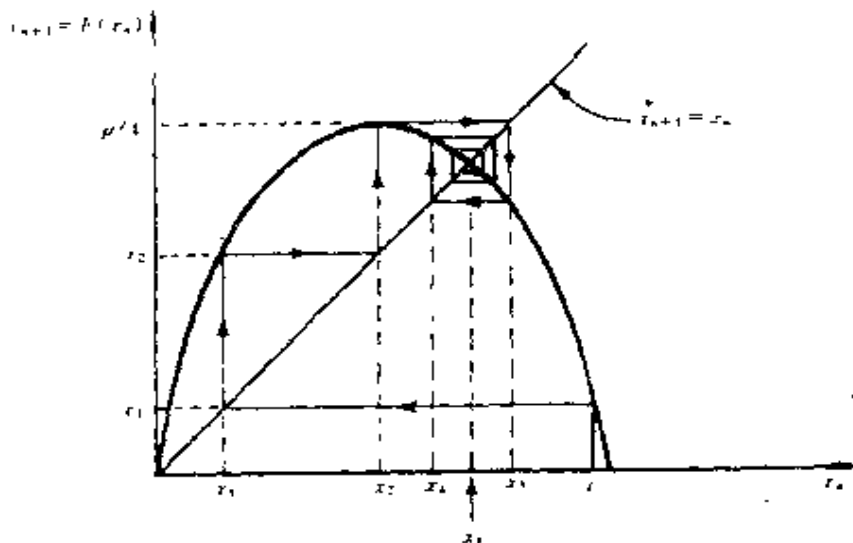


图 11-1 逻辑斯蒂映象

迭代都将达到同一不动点 S , 这表明在一定条件下, 不管开始时虫口数量如何, 其最后数量总是稳定在 x_s 。

2. 不动点的稳定性

上述离散映象的不变值(不动点)类似微分方程解的定态。定态有稳定性问题, 不动点也有稳定性问题, 即不动点可能是稳定

的,也可以是不稳定的。根据定义,不动点坐标 x_s 满足式(11·6)

$$x_s = F(x_s) \quad (11 \cdot 6'')$$

设外界影响使 x 值稍许偏离 x_s 一极小量 ϵ

$$x = x_s + \epsilon$$

则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_s + \epsilon_{n+1} = F(x_n) = F(x_s + \epsilon_n) \\ &= F(x_s) + F'(x_s)\epsilon_n + \frac{1}{2}F''(x_s)\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

考虑到式(11·6'')得

$$\epsilon_{n+1} = F'(x_s)\epsilon_n + \frac{1}{2}F''(x_s)\epsilon_n^2 + \dots \quad (11 \cdot 7)$$

由于 ϵ 很小,上式中只须保留 ϵ 的一次项,于是得(把 $F'(x_s)$ 写成 F'_s):

$$\epsilon_{n+1} = F'_s \epsilon_n \quad (11 \cdot 8)$$

或

$$\epsilon_{n+1} = (F'_s)^n \epsilon_0 \quad (11 \cdot 8')$$

所谓稳定性,自然要求经过迭代后的 ϵ 越来越小,因此离散映象的稳定性条件是

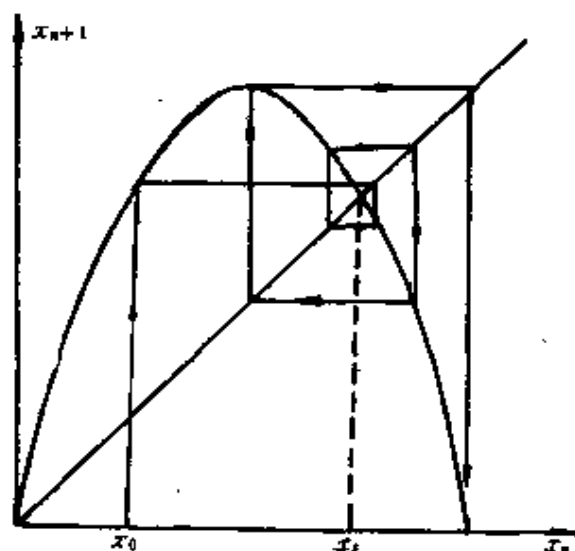
$$\left| \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} \right| = |F'_s| < 1 \quad (11 \cdot 9)$$

也就是说,稳定不动点要求图 11-1 中 F 曲线在 s 处的斜率绝对值小于 1。如果 $|F'_s| > 1$,则 x_s 不可能是稳定的,如图 11-2 所示。稍许偏离 x_s 的值(如图中的 x_1),经过多次迭代后,越来越偏离 x_s ,从而 x_s 不是稳定的。

对于由稳定过渡到不稳定的临界情形:

$$|F'_s| = 1 \quad (11 \cdot 10)$$

在式(11·7)中只保留 ϵ_n 的线性项的做法就得出什么结论,这类似经典力学中所谓中立平衡的情形。这时必须考虑式(11·7)中 ϵ_n

图 11-2 不动点 x_s 不稳定情形

的高次项。

对于式(11·5)的映象,不动点条件为

$$x_s = \mu x_s(1 - x_s) \quad (11 \cdot 11)$$

$$x_s = (\mu - 1)/\mu \quad (11 \cdot 12)$$

临界条件(11·10)是

$$\mu - 2\mu x_s = \pm 1 \quad (11 \cdot 13)$$

联立解(9.11)和(9.12)得

$$\mu = 1 \quad (11 \cdot 14a)$$

$$\mu = 3 \quad (11 \cdot 14b)$$

当 $\mu=1$ 时, $x_s=0$, 所以式 $\mu=1$ 表示 x_s 由不稳定的负值过渡到稳定的正值。由于通常 x 取负值没有实际意义, 这种临界情形可不予考虑。

当 $\mu=3$ 时, 不动点 x_s 也由稳定过渡到不稳定, 这时出现分岔, 下面将进一步分析此情形。

3. 单峰映象的倍周期分岔

当 μ 比 3 大得不算太多(具体说, $3 < \mu < 3.449\,489\,7$, 理由见下面)时, 单一不动点的条件(11·6)不能满足, 这时将交替出现两个状态, 即

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F(x_n) \\x_{n+2} &= F(x_{n+1}) = F[F(x_n)] = F^{(2)}(x_n) = x_n\end{aligned}\quad (11 \cdot 15)$$

或

$$x_{n+2} = T(x_n) = x_n \quad (11 \cdot 15')$$

式中 $T(x)$ 是复合函数:

$$T(x) = F^{(2)}(x) = F[F(x)] \quad (11 \cdot 16)$$

$F^{(2)}$ 表示两次迭代而不是平方。如对于映象(11·5)。

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= \mu x_{n+1}(1 - x_{n+1}) \\&= \mu[\mu x_n(1 - x_n)][1 - \mu x_n(1 - x_n)] \\&= \mu^2 x_n[1 - (1 + \mu)x_n + 2\mu x_n^2 - \mu x_n^3] \quad (11 \cdot 17)\end{aligned}$$

从而

$$T(x) = F^{(2)}(x) = \mu^2 x[1 - (1 + \mu)x + 2\mu x^2 - \mu x^3] \quad (11 \cdot 18)$$

此结果可以从图 11-3a 表示的 $x_{n+1} - x_n$ 关系或图 11-3b 表示的 $x_{n+2} - x_n$ 关系清楚看出, 图中 x_d 和 x_d' 表示交替出现的两个数值。

这种两个不同值交替出现的现象称为两点周期, 它的实际意义用虫口问题的例子来说就是: 在某些(用参数 μ 表示)条件下, 昆虫的数量每隔一定时期要交替出现大数和小数(图 11-4)。这有些类似果树结果量的大年和小年的交替, 当然果树结果量不一定是遵从逻辑斯谛规律。

与一个不动点是否稳定类似, 两点周期也有是否稳定的问题。其稳定的条件是:

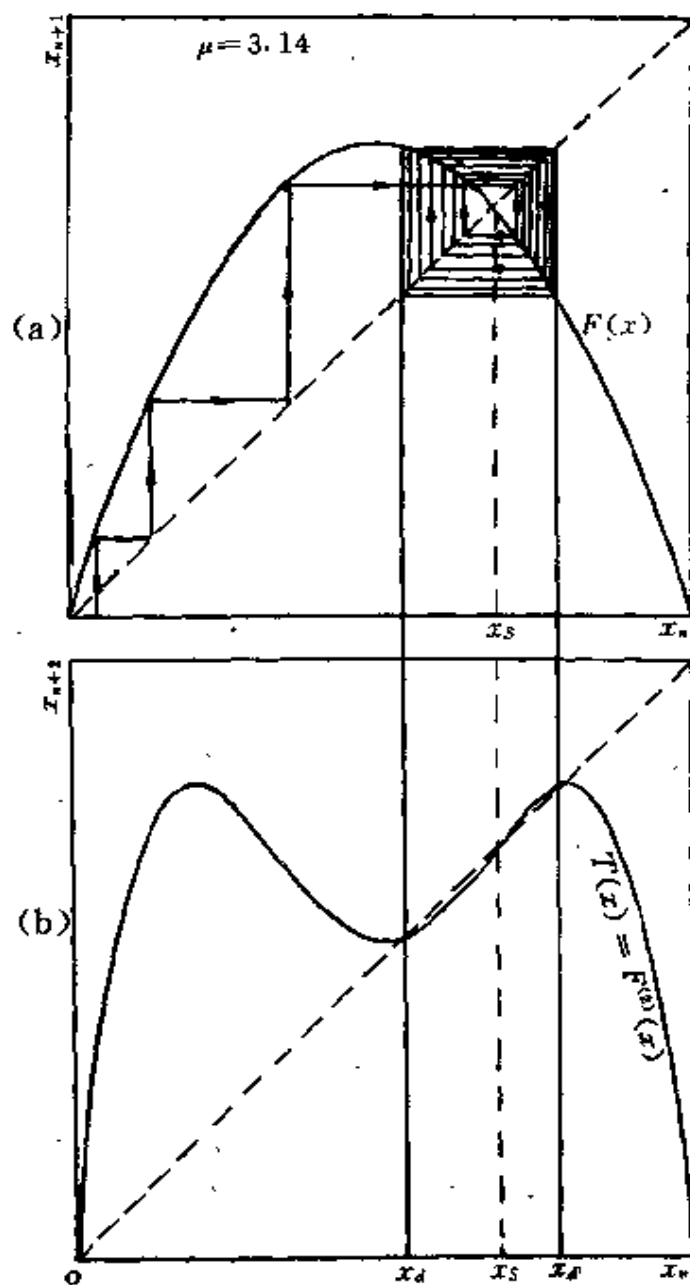


图 11-3 两点周期

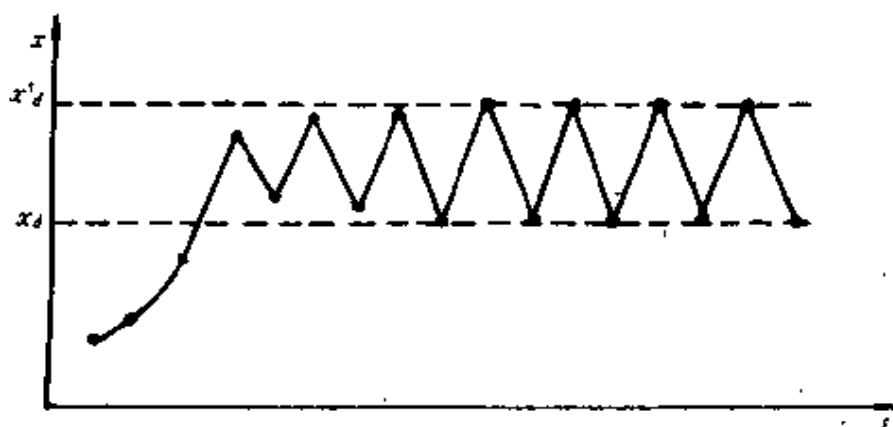


图 11-4 两点周期中数值随时间的变化

(时间 t 不大时是暂态过程)

$$|T'(x)| = |F^{(2)'}(x)| < 1 \quad (11 \cdot 19)$$

在两点周期的两个数值 x_d 和 x'_d 上, 上式表示的导数值相等, 因为利用复合函数求导规则

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=x_n} &= \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x} \right)_{x=x_n} \\ &= \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_{n+1}} \right)_{x=x_{n+1}} \left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right)_{x=x_n} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_{n+1}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_n} \\ &= \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=x_{n+1}} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=x_d} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x'_d} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_d} \\ &= \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=x'_d} \end{aligned} \quad (11 \cdot 20)$$

所以 $F^{(2)}$ 在两点的导数相等, 两点的稳定性相同。

对于逻辑斯谛映象 (11·5), 由式 (11·18) 可知其两点周期的不动点由下式决定:

$$\mu^2 x[1 - (1 + \mu)x + 2\mu x^2 - \mu x^3] = x \quad (11 \cdot 21)$$

这是一个四次方程, 它的四个根就是复合函数 $F^{(2)}$ 与分角线的四个交点 (图 11-3)。对于 $x=0$ 这个根, 很易证明 (当 $\mu > 1$ 时) $T' > 1$, 因此它是不稳定的。还有一个根对应于不动点 x_s , 它也是不稳定的。剩下两点周期的两点 x_d 和 x'_d 之值可由下述方法求得。因为

$$x_d = \mu x'_d(1 - x'_d), \quad x'_d = \mu x_d(1 - x_d) \quad (11 \cdot 22)$$

经过运算可得

$$x_d + x'_d = (\mu + 1)/\mu \quad (11 \cdot 23a)$$

$$x_d^2 + x'^2_d = (\mu^2 + 1)/\mu^2 \quad (11 \cdot 23b)$$

由此可知 x_d 和 x'_d 是下述二次方程的解:

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + (\mu + 1) = 0 \quad (11 \cdot 24)$$

即

$$x_d, x'_d = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \quad (11 \cdot 25)$$

由上式和式 (11·20) 得到在此两点的导数为

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = \mu^2(1 - 2x_d)(1 - 2x'_d) = -\mu^2 + 2\mu + 4 \quad (11 \cdot 26a)$$

两点周期临界稳定的条件是

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = \pm 1 \quad (11 \cdot 26b)$$

于是得到两点周期参数的临界值为

$$\mu_1 = 3, \quad \text{当 } F^{(2)'} = 1 \quad (11 \cdot 27a)$$

$$\mu_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.449\,489\,7, \quad \text{当 } F^{(2)'} = -1 \quad (11 \cdot 27b)$$

所以两点周期只可能是参数 μ 取值在 $(3, 3.449\ 489\ 7)$ 中出现。否则它是不稳定的。

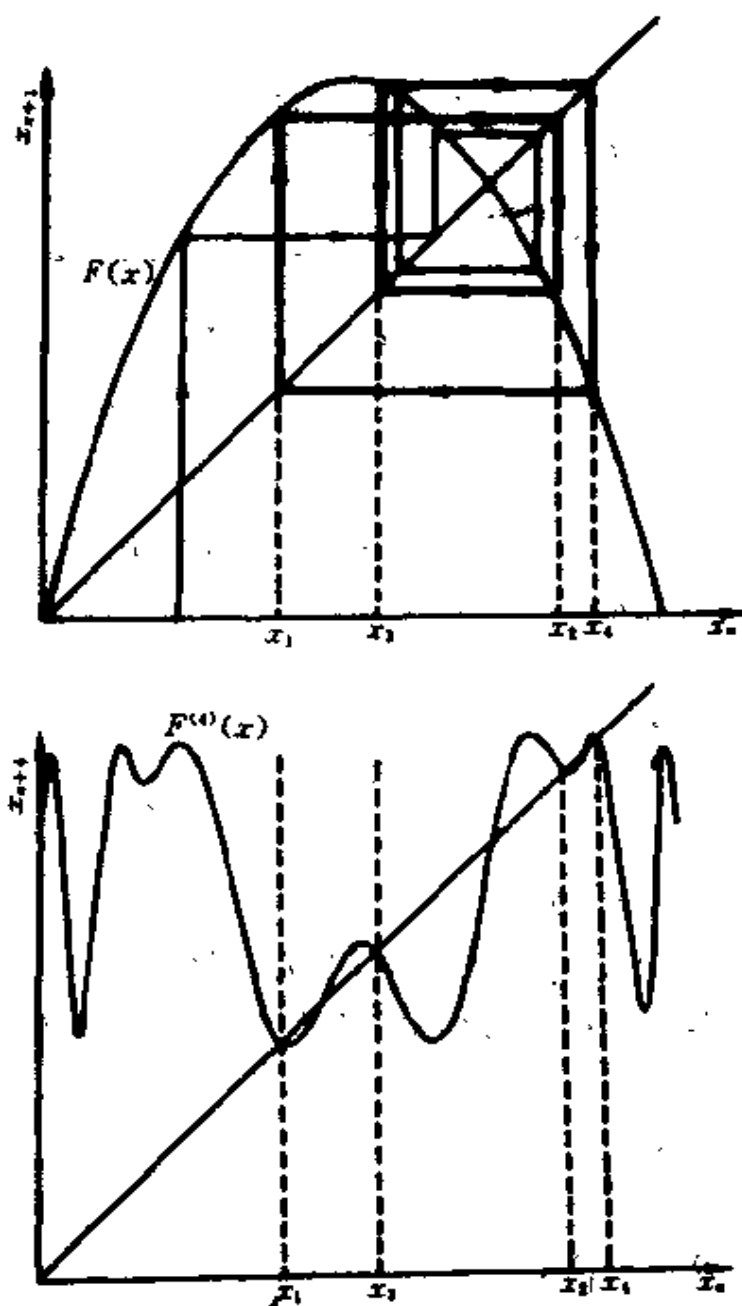


图 11-5 四点周期

当 $\mu > \mu_2$ 时又将怎样呢? 这时两点周期也不稳定了。但可能出

现四点周期,即四个稳定点 x_1, x_2, x_3, x_4 交替出现(图 11-5 和图 11-6):

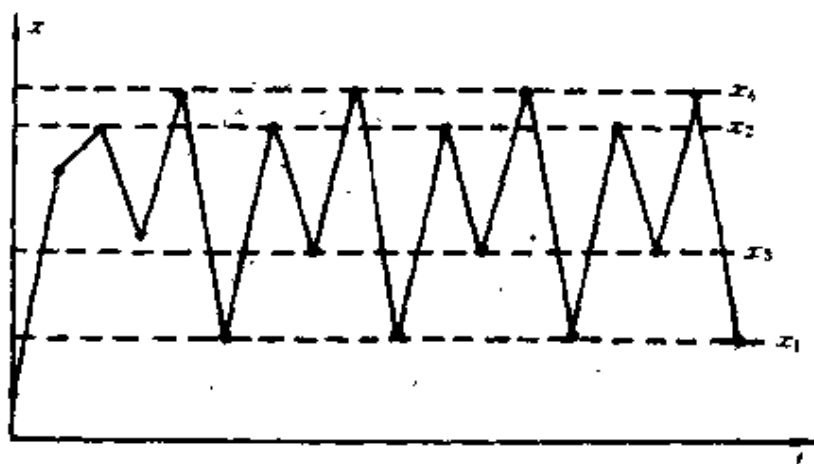


图 11-6 四点周期中 x 随时间变化

$$\begin{aligned} x_{1+4}' &= F(x_4) = F[F(x_3)] = F\{F[F(x_2)]\} \\ &= F\{F[F(F(x_1))]\} = F^{(4)}(x_1) \end{aligned} \quad (11 \cdot 28)$$

类似式(11·9)、(11·19)和(11·20),四点周期的稳定条件是:

$$|F^{(4)}| = |F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)F'(x_4)| < 1 \quad (11 \cdot 29)$$

而临界条件(分岔点)为

$$F^{(4)} = F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)F'(x_4) = \pm 1 \quad (11 \cdot 30)$$

依此类推,四点周期之后将相继出现 2^n 点周期($n=3, 4, 5, \dots$)。

类似上面诸式,我们有

$$\begin{aligned} F^{(n)'}(x) &= \underbrace{(F\{F[F\cdots F(x)]\})'}_{\text{共 } n \text{ 个 } F} \\ &= F'(x_1)F'(x_2)F'(x_3)\cdots F'(x_n) = \prod_{i=1}^n F'(x_i) \end{aligned} \quad (11 \cdot 31)$$

稳定条件是

$$|F^{(n)'}(x)| = \left| \prod_{i=1}^n F'(x_i) \right| < 1 \quad (11 \cdot 32)$$

临界点(分岔点)则由下式决定:

$$|F^{(n)'}(x)| = \pm 1 \quad (11 \cdot 33)$$

对于逻辑斯谛映象(11·5),分岔点依次为

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
3.0	3.449 489 7	3.544 090	3.564 407	3.568 759
μ_6	μ_7	μ_8		
3.569 692	3.569 891	3.569 934		

与 § 9 所述相似,上述这种依次出现周期加倍的现象就是倍周期分岔。

很明显,上表所列参数 μ 的临界值有收敛趋势。事实也的确如此,它们最后收敛到一极限值 μ_∞ ,与式(9.5)一样,此收敛序列可表为

$$\mu_n = \mu_\infty - \frac{C}{\delta^n} \quad (n \gg 1 \text{ 时}) \quad (11 \cdot 34)$$

式中 δ 就是费根鲍姆常数(9.7)。

$$\mu_\infty = 3.569\ 945\ 6$$

$$C = 2.6327$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\mu_{n+1} - \mu_{n+2}} \quad (11 \cdot 35)$$

此外,两相邻周期轨道之间的距离也是收敛的,如在 $x = \frac{1}{2}$ 处轨道分裂的大小之比(图 11-7)趋于一常数:

$$d_n/d_{n+1} = -\alpha \quad \text{当 } n \gg 1 \text{ 时} \quad (11 \cdot 36)$$

$$\alpha = 2.502\ 907\ 875\ 1 \quad (11 \cdot 37)$$

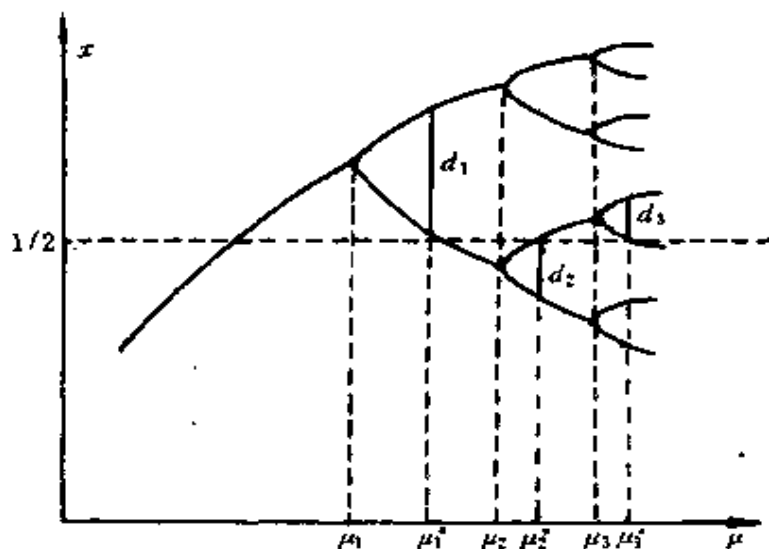


图 11-7

4. 由倍周期分岔到混沌

与 § 9 所述的连续系统的微分方程结果类似,在离散映象中,由倍周期分岔也可进入混沌。这可以很容易地在计算机上观察到。即用计算机计算对应于每一参数 μ 的不动点 x 的值(为得到稳定不动点 x 值,在用计算机进行迭代运算时,必须去掉与初始值有关的开始约一二百次的迭代),然后适当($\Delta\mu$ 越小自然越精细,但越小运算时间又太长)选取参数 μ 的增量 $\Delta\mu$ (计算机步长),用参数 μ 为横坐标,不动点 x 值为纵坐标作图,这样可得到图 11-8 的结果。由图可见, $\mu < \mu_\infty$ 时,随着 μ 的增大,确依次出现 2^n ($n=1,2,3,\dots$) 周期分岔。当 $\mu > \mu_\infty$ 时,情况完全变了,这时 x 取值是随机的,也就是出现了混沌。所以 μ_∞ 是倍周期分岔到混沌的分岔点,也就是规则取值的周期序列区到混沌区的交界点。

必须注意,混沌区并不是像白噪声那样完全混乱一片。首先,由图 11-8 可见,在混沌区最右边,对参数 μ 的每一取值, x 的取值是连在一起的。由 μ 取值 3.676 处往左, x 的取值分成二个带。再

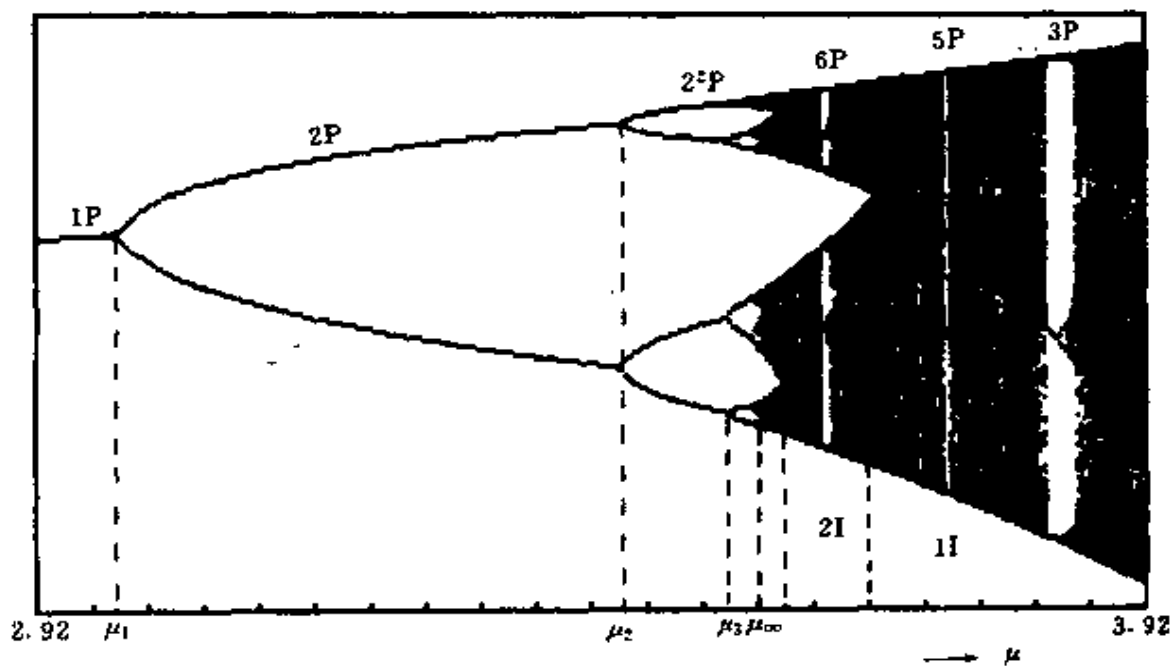


图 11-8 逻辑斯蒂映象的倍周期分岔和混沌

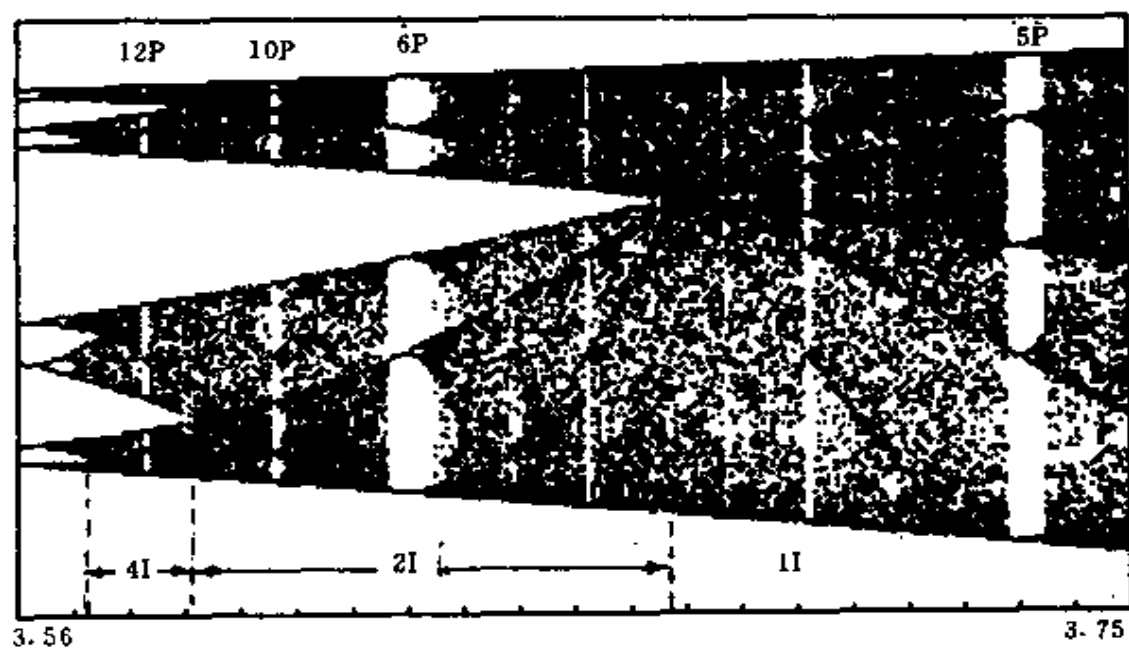


图 11-9 图 11-8 部分放大

往左, x 取值又分成四个带, 如此下去, x 取值分成八个带、十六个带、... 直到 μ_∞ 为止。也就是说, 混沌区以与周期区相反的方向从右到左分为 2^n ($n=0, 1, 2, \dots$) 个带。我们把这些混沌带分别称为 $1I, 2I, 4I, \dots$ (即 $2^n I$) 混沌带。此处 I 表示相反 (Inverse) 或庞卡莱映象中的岛 (Islands); 而用 nP ($n=0, 1, 2, \dots$) 表示 n 点周期, P 表周期 (Period) 或庞卡莱映象中的点 (Points)。因此 μ_∞ 是周期序列 nP 和混沌带序列 nI 分别从两边相向收敛的共同极限。

如果把 x 和参数 μ 的尺度放大以便看出混沌区内的细节, 可以发现, 在混沌区内也还存在许多不是混沌的周期窗口。如 $\mu=3.83$ 附近的 $3P$ 窗口。 $3P$ 往左依次还有 $5P, 7P, 9P, \dots$ 等窗口, 在 $2I$ 区带内则依次有 $2 \times 3P, 2 \times 5P, 2 \times 7P, \dots$ 等窗口, 在 $4I$ 带内则依次有 $4 \times 3P, 4 \times 5P, 4 \times 7P, \dots$ 等窗口, 如此等等 (图 11-9)。即混沌区内的周期窗口序列也是自右向左的。

上述规律也就是所谓萨柯夫斯基 (Sarkovskii) 定理。考虑下面的序列:

$$\begin{aligned} &3, 5, 7, 9, \dots, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 9, \dots \\ &2^2 \times 3, 2^2 \times 5, 2^2 \times 7, 2^2 \times 9, \dots \\ &\dots\dots\dots \\ &2^n \times 3, 2^n \times 5, 2^n \times 7, 2^n \times 9, \dots \\ &2^m, \dots, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1 \end{aligned} \quad (11 \cdot 38)$$

如果映象 F 具有一个 P 周期, 而在上面的序列中 P 后有 Q , 则映象 F 必定会有 Q 周期。

根据萨柯夫斯基定理, 如果一个映象有 $3P$ 周期, 则它必定有全部更大的周期。当然, 萨柯夫斯基定理提出时 (1964), 还不知道混沌的存在, 因此定理中没有涉及混沌带的存在与编序。现在我们已经知道, 在上述周期轨道序列中, 起始的 $3, 5, 7, 9, \dots$ 诸周期轨道是嵌在 $1I$ 混沌带中的周期窗口, 其次的 $2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times$

9、…诸周期轨道是嵌在 $2I$ 混沌带中的周期窗口，…。因此序列(11·38)也表示了混沌带的编序。而且由此引导李天岩和约克(T. Y. Li 和 J. A. Yorke, 1975)得出一关于存在有混沌的简单判据：周期 $3P$ 意味着混沌。当然，把此判据中的“周期 $3P$ ”改为“周期 $5P$ ”或“周期 $7P$ ”等非 $2^n P$ 的周期，它仍然成立，因为这些周期轨道都是嵌在混沌区内的很窄的“窗口”。图 9-3 的计算结果[图 9-3(f)]的 $5P$ 轨道是夹在图 9-3(e)和图 9-3(g)两混沌图之间]和图 10-10 的实验结果[图 10-10(g)的 $5P$]都说明了这一判据的正确性。

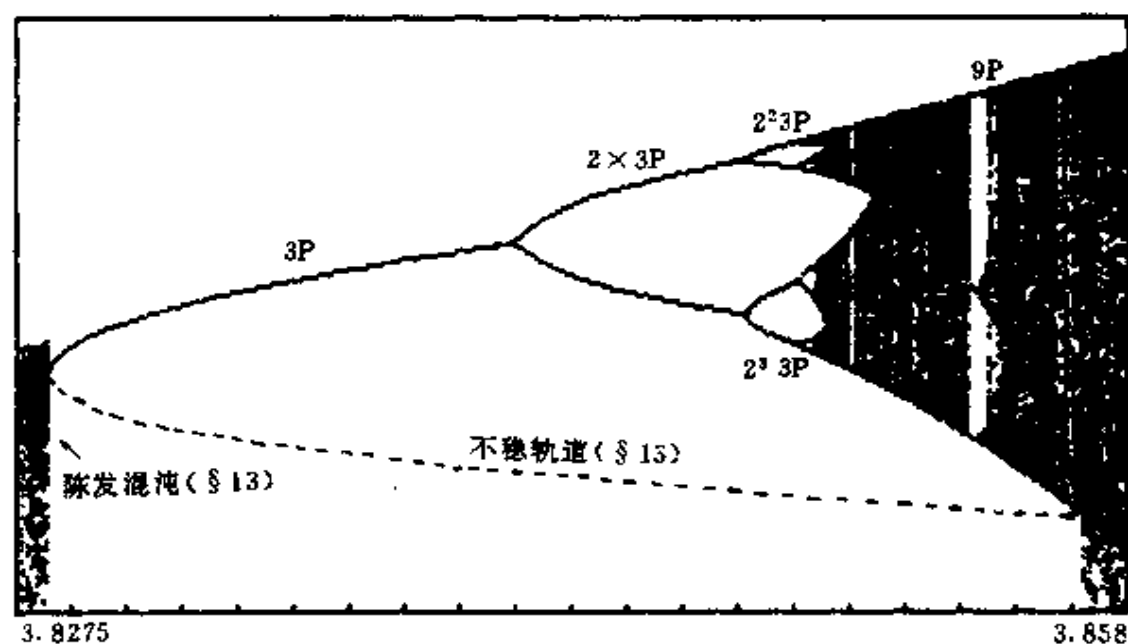


图 11-10 $3P$ 中的精细结构

不仅如此，如果把周期窗口中某一部分放大还将发现，它也有与图 11-8 相同的精细结构，即它也包含有从左到右的倍周期分岔序列和从右到左的混沌带反序列。图 11-10 就是把 $3P$ 的最上部放大的结果。可以看出，这种二级结构与图 11-8 的一级结构完全一样。因为图 11-10 中左边也是 $3P$ ， $2 \times 3P$ ， $4 \times 3P$ ， $8 \times 3P$ ，…等从左

到右的周期分岔序列,右边也是从右到左的 $3I, 2 \times 3I, 4 \times 3I, 8 \times 3I, \dots$ 等的混沌序列,而且在此二级混沌区中也还有从右到左的 $3 \times 3P, 3 \times 5P, 3 \times 7P, 3 \times 9P, \dots$ 等周期窗口。

如果把图 11-10 这种二级结构图的某一部分继续放大,如把其中的 $9P$ 的中部放大,又可得到同图 11-8 和图 11-10 完全一样的三级结构。这样下去,可以不断地得到四级、五级、 \dots 结构。由此可见,混沌带中存在着无穷层次的自相似结构。这说明混沌与通常所说的随机过程还有着本质的区别。

但是这类周期窗口和次级混沌带总是在参数变化不大时即发生了突变。如图 11-10 中的 $3P$ 精细结构延伸到 $\mu = 3.8575$ 时,三个二级混沌带突然又连成一个混沌带。这种由于参数连续变化而引起的混沌状态的突变被格瑞玻日 (Grebogi, 1983) 称为混沌的危机 (crisis)。混沌危机的出现是由于不稳周期轨道 (此处是由鞍一点发出的不稳 $3P$ 轨道,如图 11-10 中的虚线所示) 与次级混沌带相遇引起混沌带中的轨道充斥于各次级轨道之间。类似的危机 (突变) 也存在于二维和三维映象以及微分方程所描述的系统中。

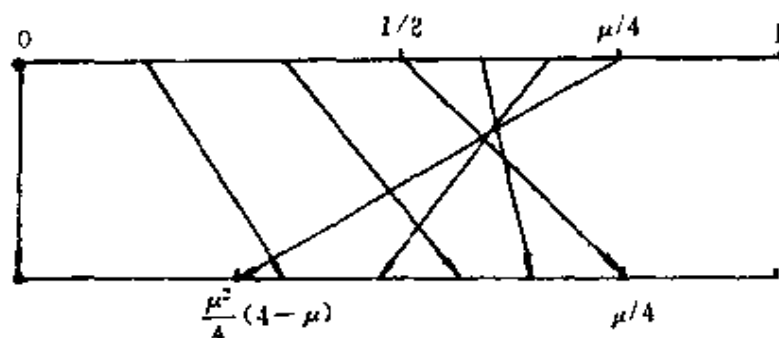


图 11-11

对映象的较仔细的分析还可以使我们进一步了解混沌形成的过程。仍以逻辑斯谛映象 (11.5) 为例,它把区间 $(0, 1/2)$ 中的点映象到区间 $(0, \mu/4)$, 把区间 $(1/2, \mu/4)$ 的点映象到区间 $(\mu/4, \mu^2/4(4-\mu))$ 。

$-\mu)/4^2)$ (图 11-11)。区间 $(\mu/4, 1)$ 的点映象到区间 $(\mu^2(4-\mu)/4^2, 0)$, 但由于 $\mu/4$ 是映象后可能取的最大值(参看图 11-1), 因此区间 $(\mu/4, 1)$ 的进一步映象实际上不存在。当 $\mu > \mu_\infty = 3.57$ 时, 区间 $(0, 1/2)$ 中的点映象后总是互相排斥分开, 而区间 $(1/2, \mu/4)$ 中的点 x 值越大映象后反而越变小。即映象相当于折叠作用(图 11-11)。这样连续的映象便使点不断分离和折叠, 映象点最后都集中在区间 $(\mu/4, \mu^2(4-\mu)/4^2)$ 内。也就是说映象最后只是在此区间内各点间反复迭代, 这样映象点便可能形成复杂的看来不是规则的(即无序的)混沌。

由以上以及前面的分析讨论, 我们还可以得到关于混沌的下述结论:

(1)混沌是服从决定性方程(微分形式或离散形式)的动力学系统的一种复杂的运动形态。诚如梅(May, 1976)所说, “简单的动力系统不一定导致简单的动力性质。”

(2)由于混沌是在反复分离和折叠下才得以形成, 而分离和折叠又只有映象并非一一对应的(自然也就是不可逆的!)即非线性时才可能, 因此混沌只可能在非线性系统中出现;

(3)混沌的存在, 不仅与系统的非线性特性(非线性方程的形式)有关, 而且还与方程中的参数数值有关。如在逻辑斯谛映象中, 当 $\mu < \mu_\infty$ 时就不可能出现混沌。因此混沌的存在往往与非线性系统的分岔相联系;

(4)由于排斥和折叠, 在混沌中, 系统的运动(如代表点的迭代过程)往往对初始条件非常敏感; 初始条件的微小差别, 要引起迭代过程的巨大差异。

可以看出(参考 § 9 和下面的 § 14), 以上这些结论, 对微分方程的混沌解也同样成立。

§ 12 离散映象(2)

我们继续讨论有关离散映象的共同性问题以及介绍两种重要的映象。

1. 超稳定点和超周期

为了了解倍周期分岔和混沌的具有普遍意义的性质,有必要介绍所谓超稳定点(superstable point)及相关的所谓超周期(supercycle)。为书写清楚方便,我们把迭代次数 n 和参数 μ 都写在函数的宗量里,即令

$$F(n, \mu, x) = \underbrace{F[F \cdots F(\mu, x)]}_{n \uparrow F} = F^{(n)}(x) \quad (12 \cdot 1)$$

其中

$$F(2^0, \mu, x) = F(1, \mu, x) = F(\mu, x) = F(x)$$

定义 $F'(n, \mu, x)$ 等于零的点为超稳定点,即如果在某点

$$F'(n, \mu, x) = 0 \quad (12 \cdot 2)$$

则此点即称为超稳定点,相应的 n 周期称为超周期。因为 n 周期的不动点满足方程

$$x = F(n, \mu, x) \quad (12 \cdot 3)$$

联立解方程(12·2)和(12·3)即可求得在超稳定点处出现所谓超周期时的 x_n^* 和 μ_n^* 。利用式(11·32)

$$F'(n, \mu, x) = \prod_{i=1}^n F'(1, \mu, x_i) \quad (12 \cdot 4)$$

由于 $F(1, \mu, x) = F(x)$ 只有唯一的超稳定点(图 12-1(a)中曲线 $F(x)$ 取极大值处) $x_0 = 1/2$, 所以 $x_0 = 1/2$ 是所有超周期 $F(2^n, \mu, x)$ 的公共超稳定点。图 12-1 表示超周期都出现在 $F(n, \mu, x)$ 取极

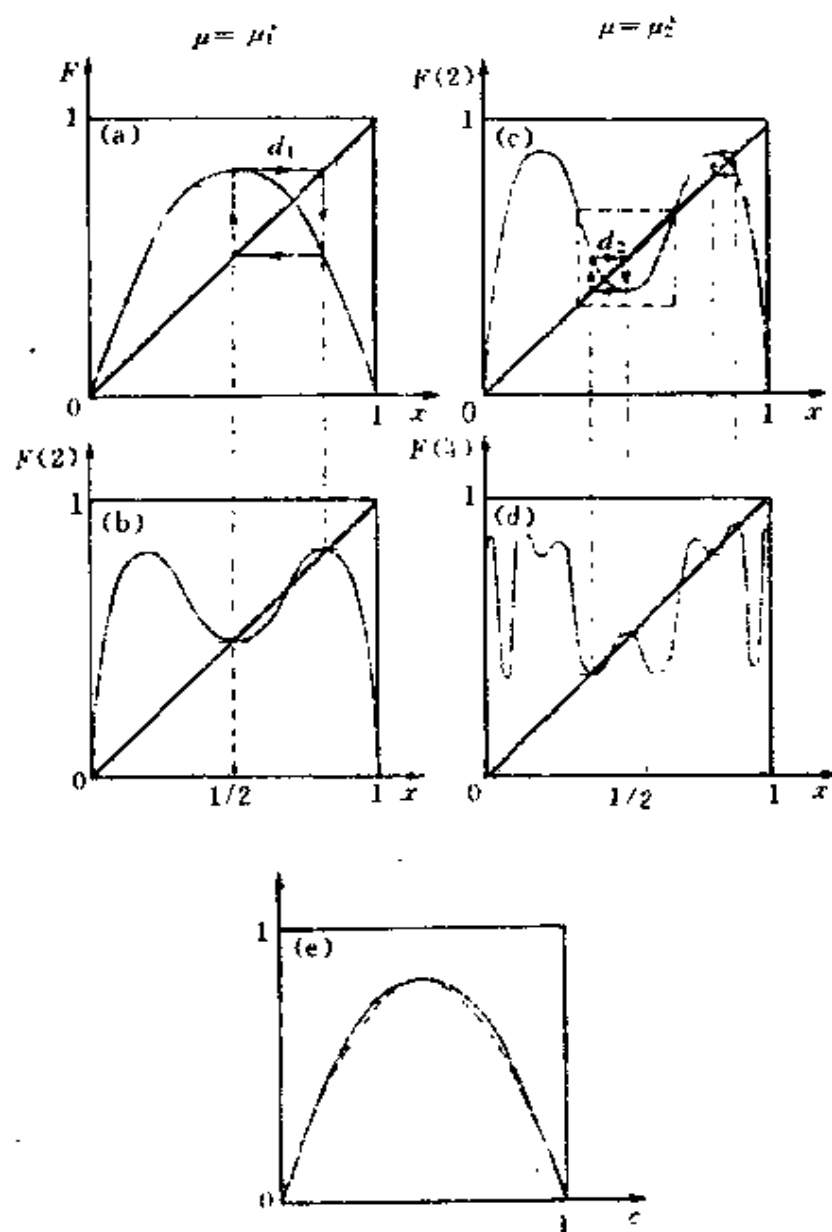


图 12-1 超周期

实线: $F(x)$, 即图(a)的重复;

虚线: $-aF\left(2, \mu_2^*, \frac{x}{-a}\right)$, 即图(c)虚线方框中曲线乘以 $(-a)$

值处。图 12-1(a)中的 d_1 和图 12-1(c)中的 d_2 分别是 $F(2^0, \mu, x)$ 和 $F(2^1, \mu, x)$ 的超周期大小, 它们就是图 11-7 中的 d_1 和 d_2 , 也就

是在 $x=1/2$ 处 $F(2^0, \mu, x)$ 和 $F(2^1, \mu, x)$ 轨道分裂的距离。因此各超周期的大小为

$$d_n = F\left(2^{n-1}, \mu_n^*, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (12 \cdot 5)$$

为方便计, 实行坐标变换: 取 $x = \frac{1}{2}$ 为新坐标系的坐标原点。于是在新坐标系中

$$d_n = F(2^{n-1}, \mu_n^*, 0) \quad (12 \cdot 6)$$

根据式(11·36)可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = D_1 \quad (12 \cdot 7)$$

式中 D_1 是一有限数。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n F(2^n, \mu_{n+1}^*, 0) = D_1 \quad (12 \cdot 8)$$

上式表示序列 $F(2^n, \mu_{n+1}^*, 0)$ 乘以标度(尺度)因子 $(-\alpha)$ 后是收敛的。这也就意味着限制 $d_n = F(2^{n-1}, \mu_n^*, 0)$ 大小的函数 $F(2^{n-1}, \mu_n^*, x)$ 自身也是收敛的。即改变标度的函数序列 $(-\alpha)^n F(2^n, \mu_{n+1}^*, x/(-\alpha)^n)$ 将收敛到一根限函数 $g_1(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n F\left[2^n, \mu_{n+1}^*, \frac{x}{(-\alpha)^n}\right] = g_1(x) \quad (12 \cdot 9)$$

上式左边序列的每一步骤可以看作是由以下三个操作联合实现的:

(1) 构造:

$$F(2^n, \mu_{n-1}^*, x) = F(2^{n-1}, \mu_{n-1}^*, x) \cdot F(2^{n-1}, \mu_{n-1}^*, x);$$

(2) 改变参数值使之由 μ_{n-1}^* 变为 μ_n^* ;

(3) 改变 x 的标度, 即将 x 乘以标度因子 $(-\alpha)$ 。

因此对于各种具有一个极大(单峰)的函数 $F(\mu, x)$, 不管此函数 $F(\mu, x)$ 原来的具体形式如何, 在超稳定点附近, 函数 $F(2^{n-1}, \mu_n^*, x)$ 的形式都很相似, 只是标度改变一个因子 $(-\alpha)^n$ (负号表示纵坐标期倒)。图 12-1e 中实线是图 12-1a 曲线的重复, 而

虚线则是图 12-1c 的虚线方框中的曲线乘以 $(-a)$ (放大 a 倍后再颠倒过来)。可以看出,两曲线确很相似。

既然 $F(2^1, \mu_2^*, x)$ [以至所有 $F(2^n, \mu_{n+1}^*, x)$] 在超稳定点 $x = 1/2$ 附近的形状仅由 $F(2^0, \mu_1^*, x)$ 在该处 (它取极大值处) 附近的形状决定, 因此极限函数 $g_1(x)$ 也只与极靠近 $x = 1/2$ 处函数 $F(2^0, \mu_1^*, x)$ 的形状有关。所以对于具有一个极大值的函数 [如二次函数, 像逻辑斯谛映象函数, 或 $(0, 1)$ 之间的 $\lambda \sin \pi x$, 等], 它们的极限函数 $g_1(x)$ 应该相同, 即 $g_1(x)$ 具有普适性。

2. 重正化群方程

为了进一步看出倍周期分岔的普适性并找出确定普适常数的方法, 还须进一步推广 (12·9)。令

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a)^n F[2^n, \mu_{n+i}^*, x/(-a)^n], \quad i = 0, 1, \dots \quad (12 \cdot 10)$$

因为

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a)^n F\left[2^n, \mu_{n+i-1}^*, \frac{x}{(-a)^n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a)(-a)^{n-1} F\left[2^{n-1+1}, \mu_{n+i-1}^*, \frac{1}{-a} \frac{x}{(-a)^{n-1}}\right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-a)(-a)^m F\left\{2^m, \mu_{m+i}^*, \frac{1}{(-a)^m} (-a)^m \right. \\ &\quad \left. F\left[2^m, \mu_{m+i}^*, \frac{1}{-a} \frac{x}{(-a)^m}\right]\right\} \\ &= -a g_i\left[g_i\left(-\frac{x}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

所以序列 $g_i(x)$ 之间的关系可用一标度变换 T 表示:

$$g_{i-1}(x) = (-a) g_i\left[g_i\left(-\frac{x}{a}\right)\right] = T g_i(x) \quad (12 \cdot 11)$$

T 称为倍变换(double transformation). 再定义 g_i 的极限函数:

$$g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \quad (12 \cdot 12)$$

则

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \quad (12 \cdot 13)$$

方程(12·13)表示 $g(x)$ 是与映象 $F(x)$ 具体形式无关的普适函数,它是倍变换 T 的不动点。而且如果 $g(x)$ 是式(12·13)的解,则改变标度(尺度)后的 $\lambda g(x/\lambda)$ 也是式(12·13)具有同一 α 的解。即方程(12·13)对 $g(x)$ 的标度是不定的。也就是说, $g(x)$ 具有标度不变性。通常为了确定起见,令

$$g(0) = 1 \quad (12 \cdot 14)$$

方程(12·13)和(12·14)就是表示倍周期分岔普适性质的重正化群方程。知道此方程的解,也就可以定普适常数 α 了,因

$$g(0) = 1 = -\alpha g[g(0)] = -\alpha g(1)$$

则

$$\alpha = -1/g(1) \quad (12 \cdot 15)$$

目前还没有关于解方程(12·13)的普遍理论和方法,只有一些关于 $g(x)$ 的数值计算。如对于单峰映象,费根鲍姆得到满足式(12·13)~(12·15)的数值解为

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 - 1.527\,632\,997x^2 + 0.104\,815\,194\,3x^4 \\ & + 0.267\,056\,734\,9x^6 - 0.003\,527\,413\,864x^8 \\ & + 0.000\,081\,581\,913\,43x^{10} + 0.000\,025\,368\,423\,39x^{12} \\ & - 0.000\,002\,687\,772\,769x^{14} + \dots \end{aligned} \quad (12 \cdot 16)$$

由此可算得

$$\alpha = -1/g(1) = 2.502\,907\,876 \quad (12 \cdot 17)$$

如果简单地取 $g(x)$ 为二次函数

$$g(x) = 1 + bx^2 \quad (12 \cdot 18)$$

方程(12·13)给出

$$1 + bx^2 = -a - ab - \frac{2b^2}{a}x^2 + O(x^4)$$

由此得

$$b = -\frac{2 + \sqrt{12}}{4} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -1.366$$

$$a = -2b = 2.73 \quad (12 \cdot 19)$$

这与费根鲍姆计算得到的准确值[式(12·17)]相差10%左右。

还可以证明,如果把 $F(\mu, x)$ 在 μ_∞ 处对 μ 展开到线性项,则算符 T 中对此线性项作用的线性部分的本征值就是普适常数 δ 。

总结以上两小节的分析可见,倍周期分岔确具有普适性,这种普适性具体表现就是重正化群方程,代表普适性定量关系的两常数 α 和 δ 也具有普适性。当然,不同性质的函数 $F(\mu, x)$, α 和 δ 之值不同。例如,对于保守系统(逻辑斯谛不是保守系!),有人(Helleman, 1983)指出,也可以出现类似的倍周期序列,但此时

$$\alpha = 4.018\ 076$$

$$\delta = 8.721\ 097 \quad (12 \cdot 20)$$

此外,普适性还表现在系统各分频(倍周期)功率谱强度的变化上。脑恩贝格和鲁德尼克(Nauenberg 和 Rudnick, 1981)的结果是: $2^n P$ 的平均峰高 $\varphi(n)$ 和 $2^{n+1} P$ 的平均峰高 $\varphi(n+1)$ 之比为一常数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = 2\beta^2 = 20.963 \quad (12 \cdot 21)$$

对上式取对数并用分贝表示则为

$$10 \log_{10} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = 13.2 \text{ dB} \quad (12 \cdot 22)$$

这表示每分频(倍周期)一次,功率谱强度下降很大。当然,如果 n 不大时,分频前后可能差别很小。

混沌带中的功率谱是在连续谱上叠加一些有一定宽度的线谱

(参看图 10-10、图 10-11 和图 20-5 等)。当 n 很大时, 线谱的均方峰宽 W_n 也有普适关系

$$W_n = W_0 / \beta^n$$

$$\beta = 3.2357 \quad (12 \cdot 23)$$

实际上, $\beta^{(2)}$ 和 β 也都是由标度变换因子 α 决定的普适常数, 如不同人得到关于 β 的两种不同的近似式:

$$\beta = \frac{2\alpha^2}{\alpha + 1} = 3.58$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} = 3.29 \quad (12 \cdot 24)$$

噪声的存在使各分频的功率谱和混沌带中的功率谱的细节(如周期窗口)不可能都显示出来。当某一级分频的强度低于或相当于噪声的强度时, 这一级及更高级的分频便不能被观察到。由式(12·22)可知, 为了观察到再多一级的分频, 就必须把噪声相应地降低 13.2dB。

3. 二维离散映象

以上讨论的都是一维(单变量)离散映象。实际问题中也遇到许多二维离散映象甚至高维映象。如有二个种群存在的生态学问题就可以表为二维离散映象, 而三维或三维以上连续微分系统在二维庞卡莱截面上的映象都是二维映象。如埃农在 1976 年研究洛伦兹方程(9.1)的庞卡莱映象时, 就得到一个二维映象(见下面)。

二维离散映象可用下式表示:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n) \quad (12 \cdot 25)$$

或

$$r_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = F[r_n(x_n, y_n)] \quad (12 \cdot 25')$$

设 $r_0(x_0, y_0)$ 为初始点, 用 δ_{n+1} 表示经 n 次映象引起的位移:

$$\delta_{n+1} = r_{n+1} - r_0 \quad (12 \cdot 26)$$

由线性近似得映象引起的与原位置的距离为

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} = \|\delta_{n+1}\| &= \|r_{n+1} - r_0\| = \|J(r_0) \cdot (r_n - r_0)\| \\ &= \|J(r_0) \cdot \delta_n\| \end{aligned} \quad (12 \cdot 27)$$

式中

$$J(r_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{r_0} \quad (12 \cdot 28)$$

为映象(12·25)在 r_0 处的雅可比矩阵。

可以看出, 映象引起的位移与在该点的雅可比矩阵有关。令 λ_1 和 λ_2 为 r_0 处雅可比矩阵的两特征值。当 λ_1 和 λ_2 都是实数时, 映象(12·25)使位置由 r_0 变为

$$r_1 = (x_1, y_1) = (\lambda_1 x_0, \lambda_2 y_0) \quad (12 \cdot 29)$$

n 次映象后位置变为

$$r_n = (x_n, y_n) = (\lambda_1^n x_0, \lambda_2^n y_0) \quad (12 \cdot 30)$$

在上式中消去 n 可得逐次映象引起的点位置变化的轨迹方程

$$\frac{\ln|x_n|}{\ln\lambda_1} - \frac{\ln|y_n|}{\ln\lambda_2} = \text{常数} \quad (12 \cdot 31)$$

设 $r_s = (x_s, y_s)$ 表示映象(12·25)的不动点

$$r_s = F(r_s) \quad (12 \cdot 32)$$

即

$$\begin{aligned} x_s &= f(x_s, y_s) \\ y_s &= g(x_s, y_s) \end{aligned} \quad (12 \cdot 32')$$

由式(12·27)~(12·30)可知, 不动点的稳定性与雅可比矩阵特

征值在不动点处的取值有关。例如,当 λ_1 和 λ_2 都小于 1 时,每经过一次映象后与不动点之间距离都要缩小,从而不动点是稳定的。反之,只要 λ_1 和 λ_2 之中有一个是大于 1,映象就会使位置逐步远离不动点,从而不动点是不稳的。因此关于二维离散映象中不动点的稳定性分析与 §3 关于连续流中的定态(微分方程的奇点)的稳定性分析十分相似。即根据雅可比矩阵(12·28)特征值 λ_1 和 λ_2 取值的不同,二维映象的不动点有以下几种:

- (1) $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1$: 不动点为稳定结点;
- (2) $\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$: 不动点为不稳结点;
- (3) $\lambda_1 > 1, 0 < \lambda_2 < 1$ (或 $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$): 不动点为鞍点;
- (4) λ_1 和 λ_2 为共轭复数,且 $\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| < 1$: 不动点为稳定焦点;
- (5) λ_1 和 λ_2 为共轭复数,且 $\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| > 1$: 不动点为不稳定焦点;

在这些点附近的轨线形状都与 §3 中各图相同。

以上是根据线性近似得到的关于不动点稳定性分析。与 §6 类似,考虑非线性,二维非线性映象由于某参数 μ 取值的变化还可能出现各种分岔。如 λ_1 和 λ_2 取复数值,当 $\mu = \mu_c$ 时, λ_1 和 λ_2 的模正好由小于 1 变为大于 1,这样就出现霍普夫分岔。同样,参数取值变化还可分岔出现混沌。但我们在此就不深入分析了。

我们只稍许分析一下埃农映象。埃农映象(用 T 表示)的方程是:

$$T: \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (12 \cdot 33)$$

上述映象的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b \quad (12 \cdot 34)$$

而逆变换则为

$$T^{-1}: \begin{aligned} x_n &= b^{-1}y_{n+1} \\ y_n &= x_{n+1} - ab^{-2}y_{n+1}^2 \end{aligned} \quad (12 \cdot 35)$$

可见,只要 $|J| = b \neq 0$,埃农映象就是可逆的。当 $b=0$ 时,映象就退化为一维映象了。

埃农映象 T 的作用可以通过把它分解成三个映象而看出,即令

$$T = T_3 T_2 T_1 \quad (12 \cdot 36)$$

$$T_1: \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= 1 - ax^2 + y \end{aligned} \quad (12 \cdot 36')$$

$$T_2: \begin{aligned} x'' &= bx' \\ y'' &= y' \end{aligned} \quad (12 \cdot 36'')$$

$$T_3: \begin{aligned} x''' &= y'' \\ y''' &= x'' \end{aligned} \quad (12 \cdot 36''')$$

T_1 、 T_2 和 T_3 的作用如图 12-2 所示; T_1 的非线性使图形发生弯曲,但保持面积不变; T_2 是沿 x 方向的压缩(设 $|b| < 1$); T_3 是使图形转动 90° 。所以总的埃农映象 T 是使面积弯曲、压缩和转动。当 $|b|=1$ 时,面积保持不变,埃农映象就是弯曲和转动。对一定的初始点 (x_0, y_0) ,重复成千上万次迭代(去掉与初始点有关的开始一、二百次迭代),可得到在 (x, y) 平面上点的分布。 $|b| < 1$ 时的这种点分布就是所谓吸引子(§ 14)。图 12-3(a)是 $b=0.3$ 、 $a=1.4$ 时埃农映象经过 10^4 次迭代所得结果。把此图中小方块部分放大并增

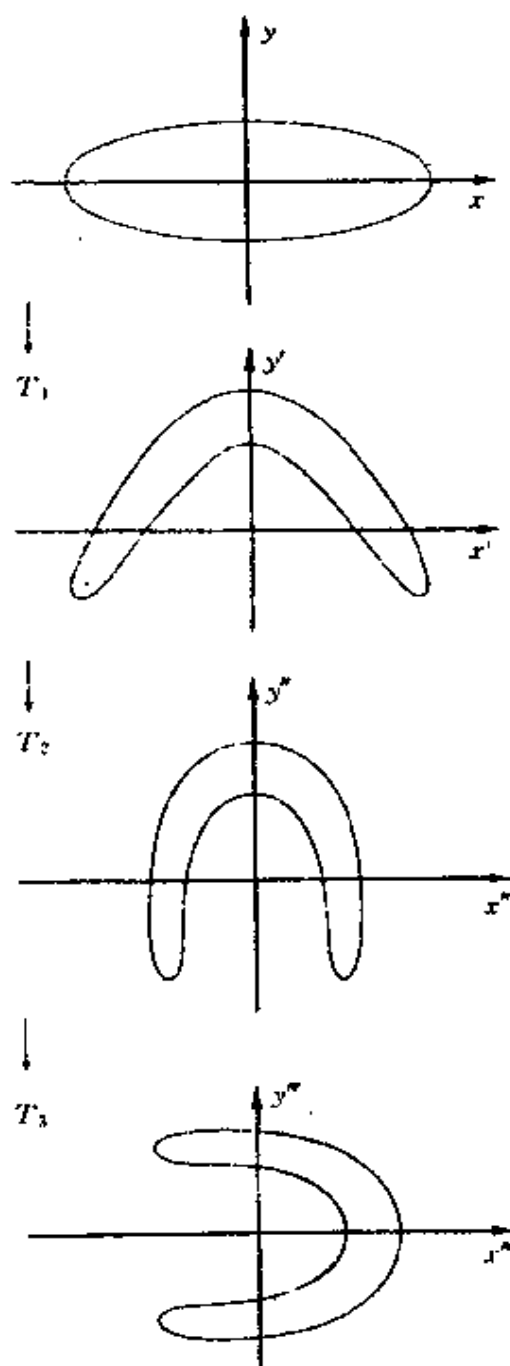
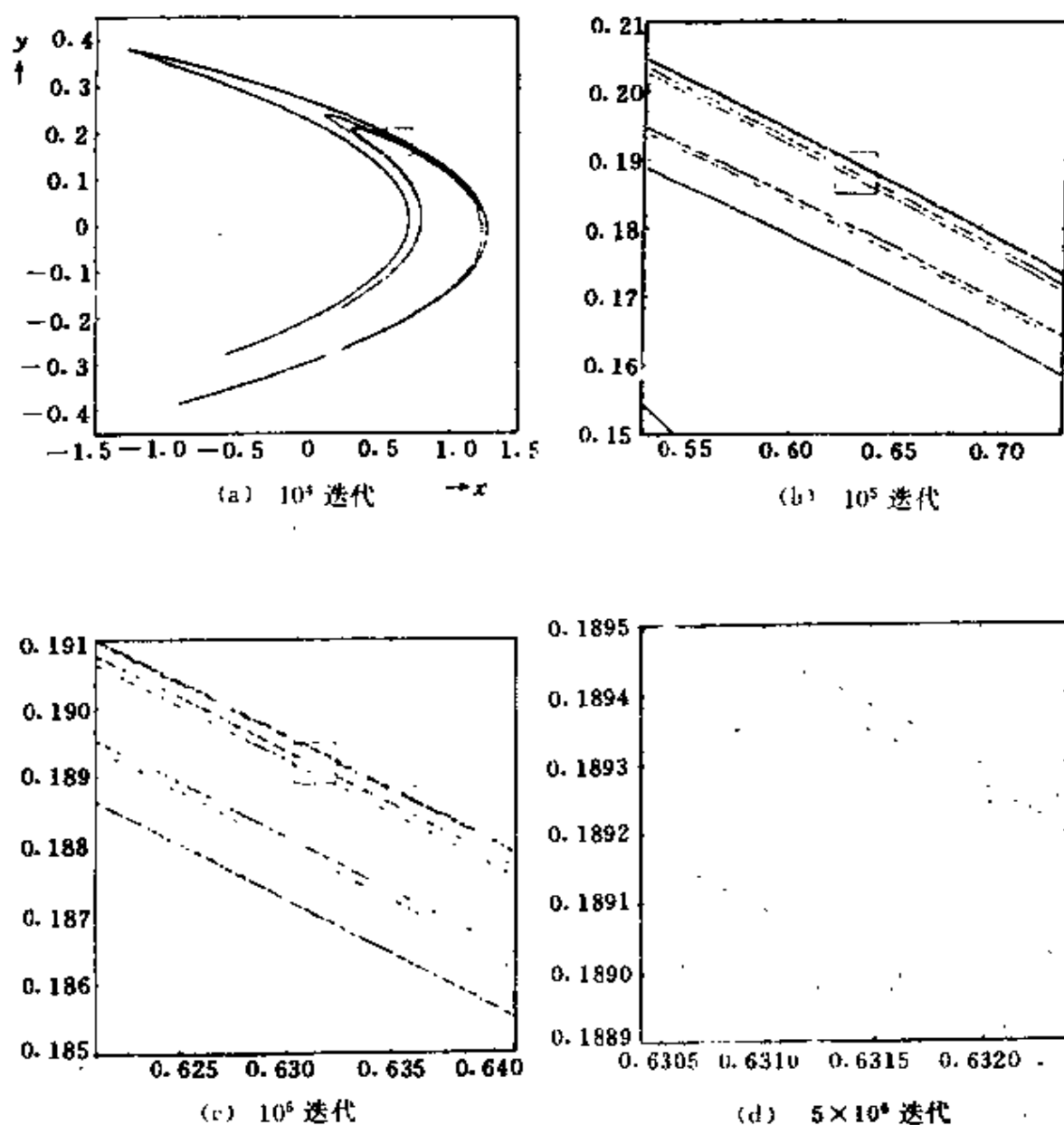


图 12-2 埃农映象(12-33)的分解

图 12-3 埃农映象($b=0.3; a=1.4$)

加迭代次数到 10^5 , 就得到图 12-3(b)。再把图 12-3(b) 中小方块部分放大并增加迭代次数到 10^6 , 又得到图 12-3(c), 同样, 把图 12-3(c) 中小方块部分放大并增加迭代次数到 5×10^6 , 又得到图 12-3

(d), 如此等等。因此埃农映象在此给定参数下确得到具有自相似结构的混沌。

归纳以上讨论, 可以得到关于二维离散映象的一些结论:

(1) 二维离散映象不动点的稳定性和分类与二变量微分方程组奇点(定态)的相似。

(2) 二维非线性离散映象也可能出现像连续流中的各种分岔。

(3) 一维非线性映象都是不可逆的, 它总是代表非保守过程。但是二维非线性映象既可以是耗散的, 也可能是保守的, 由雅可比行列式取像决定。

(4) 耗散系统的二维映象经过大量次迭代后可能要收缩到一些接近一维曲线但却有一定宽度的混沌轨道(吸引子)上, 而且这种混沌轨道具有无穷层次的自相似结构。

4. 圆映象

在研究耦合振荡和受迫振荡时, 一种特殊的所谓圆映象非常有用。我们现在对此像简要介绍。

一个振子受周期性强迫力作用, 相当于两个振子的耦合。我们知道, 当耦合作用可忽略时, 整个系统相当于两个独立的像子的振荡。故系统的运动在相空间 $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ 是两个互相垂直的振荡, 其轨迹是在二维环面上(参考图 10-2)。适当取庞卡莱截面并作庞卡莱映象, 可以发现, 由于周期力大小(或两振子耦合强弱)和频率不一样, 映象结果不一样。通常此映象可表为

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) + br_n \\ r_{n+1} &= br_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n)\end{aligned}\quad (12 \cdot 37)$$

式中 θ_n 表示振子振荡时在庞卡莱截面上第 n 次的转角, r_n 是相应

的环半径, ω 表振荡(圆)频率, $\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n)$ 表强迫力作用, K 表示强迫力的振幅。在此设强迫力频率为 1(我们感兴趣的是两频率之比 ω , 而不是两频率之绝对值)。 b 表示系统耗散强弱, 即相空间轨线(或吸引子, 见 § 14)收缩快慢, 因为变换式(12·37)的雅可比行列式为:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial r_n} \\ \frac{\partial r_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial r_{n+1}}{\partial r_n} \end{vmatrix} = b \quad (12 \cdot 38)$$

当 $b=1$, 映象保持面积不变, 系统是保守的; 当 $b<1$, 面积收缩。

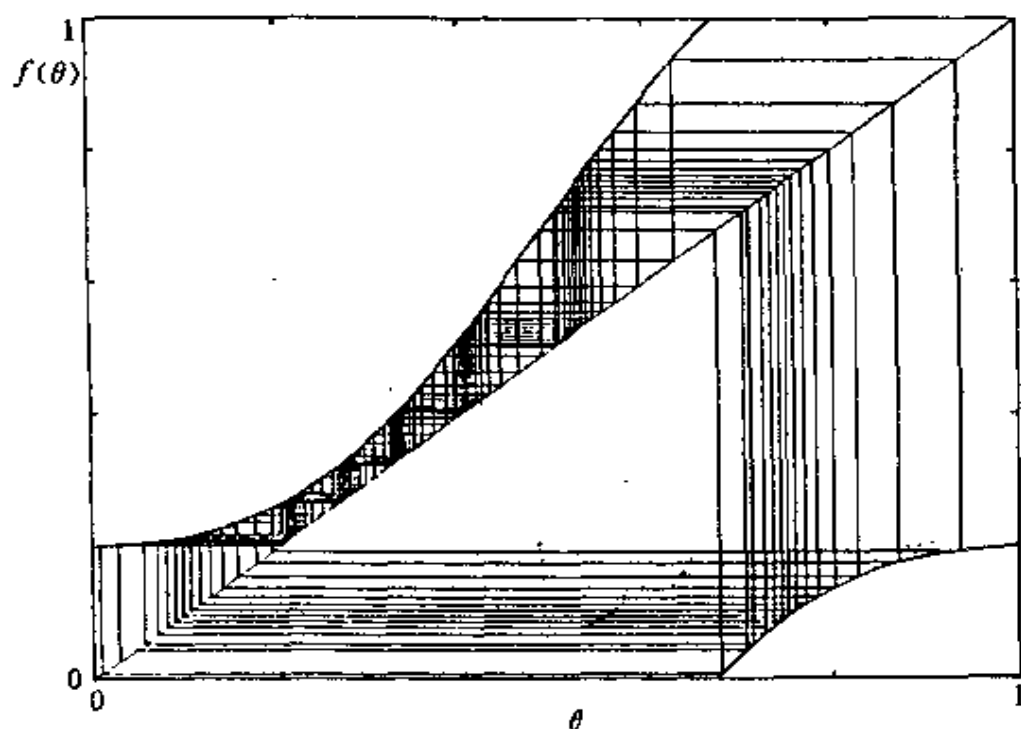
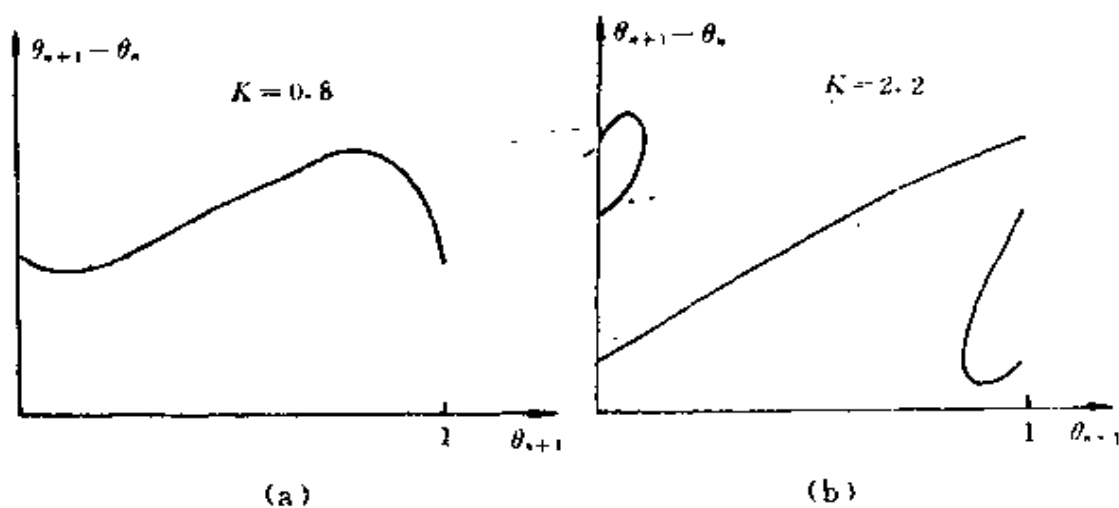
为简单计, 我们讨论在映象过程中半径 r 保持不变的情形, 即 $b=0$, 这时二维映象(12·37)退化为一维的:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \quad (12 \cdot 39)$$

这种简单地将圆周上的点映象到同一圆周上的另一点的映象称为圆映象(图 12-4)。式(12·39)中强迫项取正弦形式不是唯一的形式, 它只是表示强迫力(或另一振子)的周期性。

当 $|K|<1$ 时, $f(\theta)$ 和 $f^{-1}(\theta)$ 是可微的, 映象(12·39)使圆周上某些处伸长而另一些地方压缩[图 12-5(a)]; 当 $|K|>1$ 时, $f^{-1}(\theta)$ 变成不可微的, 映象使圆周折叠并变成不可逆的[图 12-5(b)]。在后一情形下, 映象自然变得很复杂, 从而可能出现混沌(见后)。

我们来具体地看一下当 ω 一定、 K 逐渐变化将出现什么结果。当 K 极小时, 即强迫力极小(或两振子耦合极弱)时, 两振子将各按自己的频率振荡, 整个系统的运动是在相空间的二维环面上。如果两振子频率之比 ω 是无理数, 运动充满整个二维环面, 系统的运动是准周期的(参考 § 10 关于庞卡莱截面的讨论)。如果两振子频率之比 ω 是有理数($\omega=p/q$, p 和 q 都是正整数), 则圆映象将

图 12-4 圆映象(12·37)的反复映象($K=0.9, \omega=0.2$)图 12-5 $\omega=0.46$ 时的圆映象

只是圆周上的 q 个点。此时系统的运动是周期的(分谐振),分母 q 表示分谐振(§ 8)的分数。加大 K , 则 ω 值在 p/q 较大时仍是准周

期运动(图 12-4)。强迫力 K 越大,周期运动出现的范围越大。所以频率之比(转动数)是无理数的两振子在耦合较强时仍可变为频率之比为有理数的周期振荡。我们称振子这种按强迫力频率〔在式(12·39)中设为 1〕的有理数(p/q)倍振荡为转动数是 p/q 的锁频(或锁相或锁摸,参考 § 9)。即 p/q 锁频表示在某一时间内,一个振子振荡 p 次另一振子(或强迫力)振荡 q 次。因此锁频的范围是随强迫力振幅 K 的增大而变宽。图 12-6 是在 (K, ω) 参数平面上画出的圆映象(12·37)的锁相区(用分数标出 p/q)。由图可见,如果转动数在 ω_1 和 ω_2 处分别有 p/q 和 r/s 两锁相区,则在 ω_1 和 ω_2 之间($\omega_1 < \omega < \omega_2$)还有转动数为

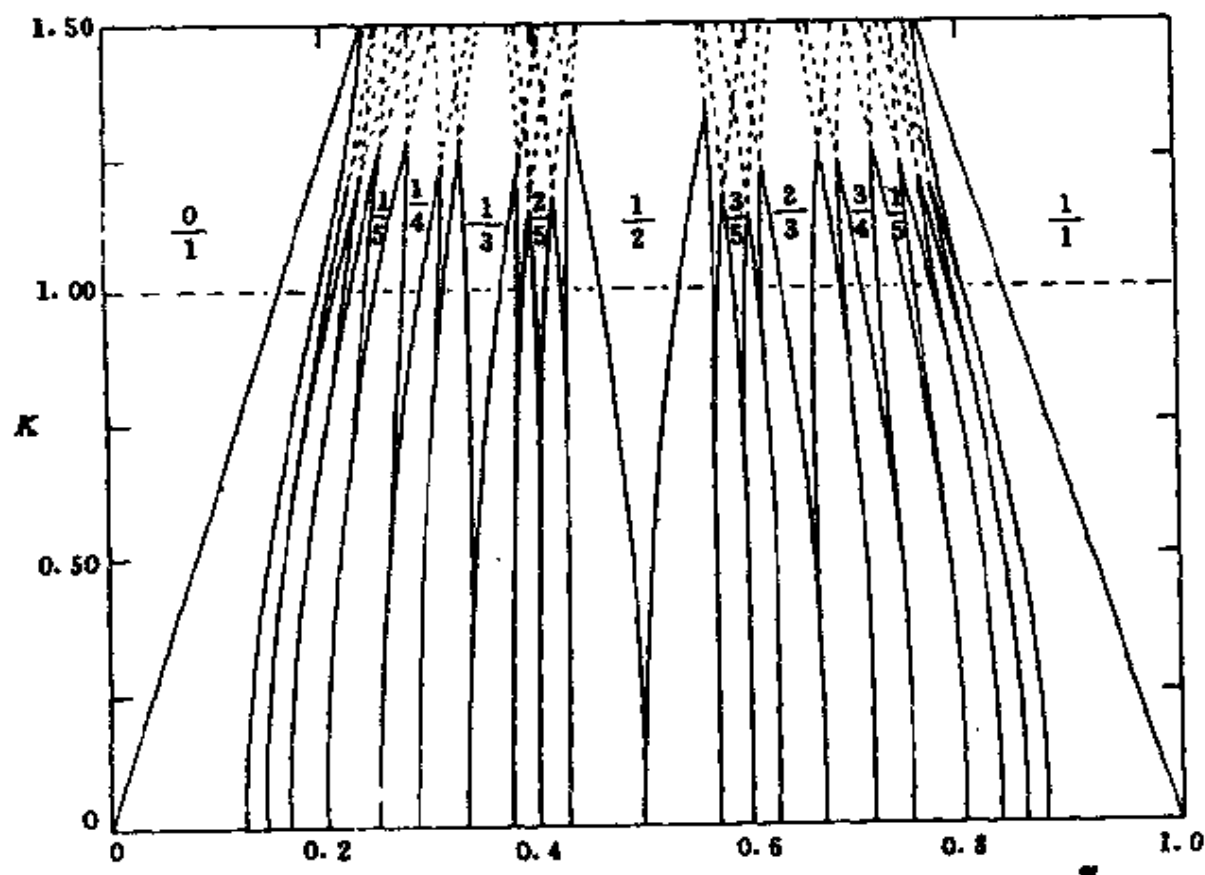


图 12-6 圆映象的锁相区和准周期运动区。标有分数的是锁相区,其余为准周期运动区。

$$\omega = \frac{r+p}{s+q} \quad (12 \cdot 40)$$

的锁相区。如图中左右两端的锁相区的转动数分别是 $0/1$ 和 $1/1$ ，式(12·40)指出有转动数为 $1/2$ 的锁相区(图的正中)。在锁相区 $0/1$ 和 $1/2$ 之间又有转动数为 $1/3$ 的锁相区(图中靠左边处)。而锁相区 $0/1$ 和 $1/3$ 之间又有 $1/4$ 的锁相区(图中 $1/3$ 和 $1/2$ 之间)等等。即锁相区的转动数排列顺序组成所谓法瑞(Farey)序列或法瑞树(图 12-7)。

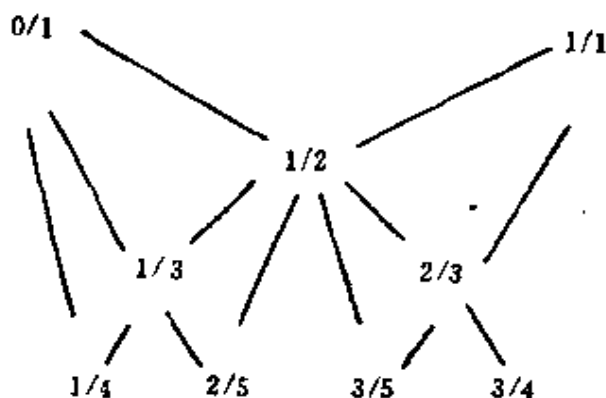
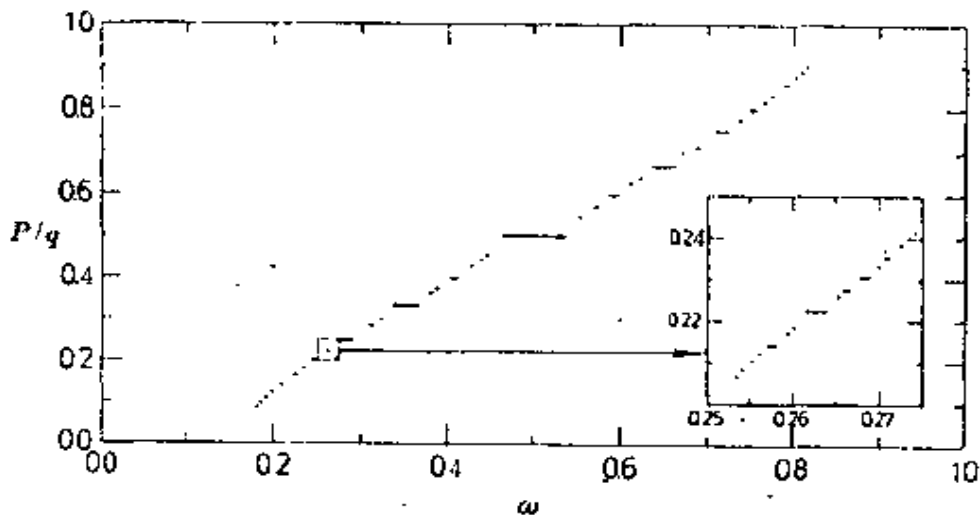


图 12-7 法瑞树

$K < 1$ 的非锁相区就是准周期运动区。随着强迫力(或两振子的耦合强弱) K 的变小,锁相区变得越来越窄,当 $K \rightarrow 0$ 时,锁相区趋于一些点: $\omega = p/q$ 。根据其形状(参考图 12-6),圆映象的锁相区常称为阿诺德(Arnold)舌或阿诺德角(Arnold tongues 或 Arnold horns)。

当 K 一定,画出锁相区的转动数 p/q 与频率 ω 的关系,得到图 12-8 的结果,其形状有如梯子,而且还具有自相似性,人们称之为魔梯(devil's staircase)。图 18-17 是魔梯的实例。

当强迫力振幅继续增大以至 $K > 1$ 时,映象出现折叠,参数平面 (K, ω) 中的锁相区互相重叠。此时振荡变得十分复杂以至出现

图 12-8 $K=1$ 时圆映象的魔梯

混沌。

许多受迫振荡或耦合振荡的实验证实了圆映象的一些结论。如格温和万斯特范尔(Gwinn and Westervelt, 1986)用 P 型锗在低温(1.8~4.2K)下外加交流电压进行实验,所得结果与圆映象分析一致:固定外加交变电压的频率改变其幅值 K ,可实现准周期振荡、锁相最后($K>1$)出现混沌。如让外加电压的频率 f_d 也改变,在 K 和 f_0/f_d (f_0 为振子固有频率)为坐标的参数平面上,对振荡特性进行分区,结果与图 12-6 一样。功率谱的测量也证实了这些结果。

5. 总结 § 9、§ 11 和本节的讨论分析可以看出,倍周期分岔和混沌具有重要的普适性:

(1) 不论是不同的连续流(微分方程的解)还是不同的离散映象,它们所具有的倍周期分岔结构都相同,而且最后都要通向混沌。倍周期分岔收敛和它们的功率谱强度变化都服从相同的规律,并为相同的普适常数 α 、 δ 和 β 所表征[式(11·34)~(11·36), (12·21~12·24)];

(2)混沌运动都具有不同层次的自相似结构,混沌带中各周期窗口的次级(二级、三级、…)分岔结构也服从与一级分岔结构相同的规律,并有相同的普适常数。

还可看出,既然离散映象与由微分方程决定的连续流具有一些共同规律,这就表明离散映象与微分方程之间具有内在关系。事实上由 § 11 可知,连续流的庞卡莱映象就是低维的离散映象,上面讲的二维埃农映象就是三维洛伦兹微分方程的庞卡莱映象。即低维离散映象可以反映高维的连续流的规律。因此同样维数下离散系统包含的内容或信息比连续系统要丰富。如一维流的轨道只可能是从源到漏,不能有任何花样。二维自治微分方程表示的连续系统的轨道除了少数奇点外,不可能有交点,从而不可能有混沌这类复杂图形(参考 § 9 和 § 14)。但是一维离散映象就可能包含有倍周期分岔和混沌这样丰富内容。由此我们自当注意,貌似一样的两类方程(11·1)和(11·2)绝不能混同(即使两式中的 F 相同!)。因为它们具有完全不同的性质,甚至连两者的定态和不动点都有不同的数值和稳定性。这在比较 § 11 逻辑斯谛映象的结果和 § 1 关于逻辑斯谛模型的结果就可清楚看出。

§ 13 间歇混沌和通向混沌的道路

除了 § 9 和 § 11 节讲的由倍周期分岔在参数穿过临界值(§ 11 的 μ_∞)可以出现混沌外,还有其他一些通向混沌的道路,其中又以间歇混沌最为重要。本节对这些作扼要介绍。

1. 切 分 岔

如 § 11 所述,离散映象(微分方程也一样,因这时就是指其庞卡莱映象)中的复合函数 $F^{(n)}(x)$ 与分角线的交点就是不动点,它

在离散映象中表示定态,在庞卡莱映象中,则表示连续流中的周期运动。在倍周期分岔过程中,当参数在分岔点 μ_c 附近变化时, $F^{(n)}(x)$ 与分角线的每一交点变化情况如图 13-1 所示(与图 11-3 和图 11-4 诸交点对照)。由图可见, μ 由小于 μ_c 变到大于 μ_c 时(对某些映象中某些参数,也可能是由大变到小),原来的每一不动点变为三个不动点,其中原有那个不动点(中间那个 i ,即图 11-3 中 x_i)变为不稳定的,新出现的另两个(j 和 k ,即图 11-3 中的 x_d 和 x_d 以及

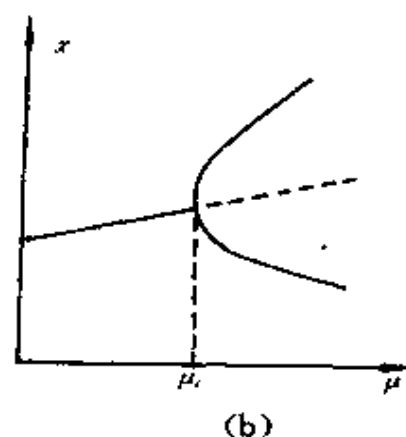
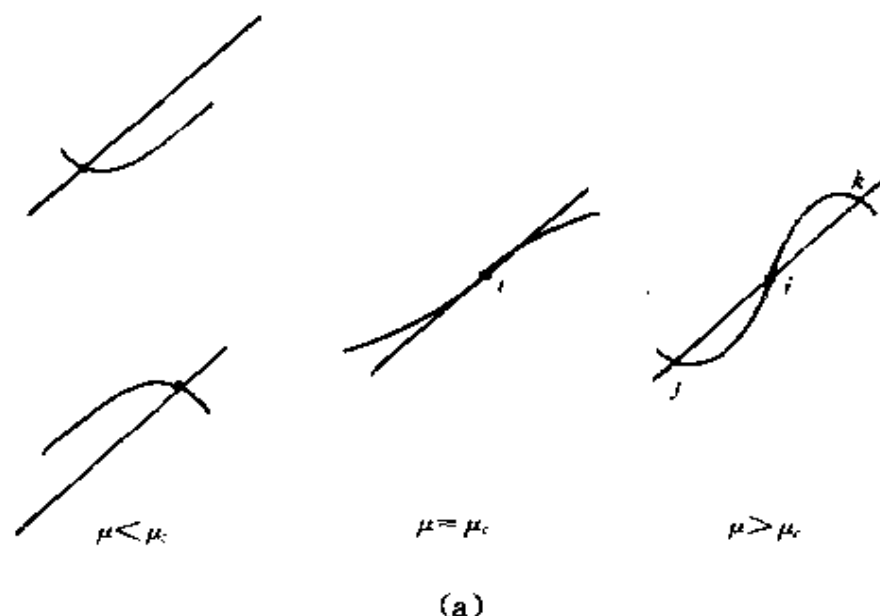


图 13-1 音叉分岔

图 11-5 中的 x_1 和 x_3 或 x_2 和 x_4) 反而是稳定的。这样才使稳定不动点由一变二, 二变四, 四变八, \dots , 从而才出现倍周期分岔〔图 13-1(b)〕。与图 6-9 比较可知, 倍周期分岔就是音叉分岔。

但是 $3P$ 、 $5P$ 、 $9P$, \dots 等分岔情况完全不同, 以 $3P$ 为例, 复合

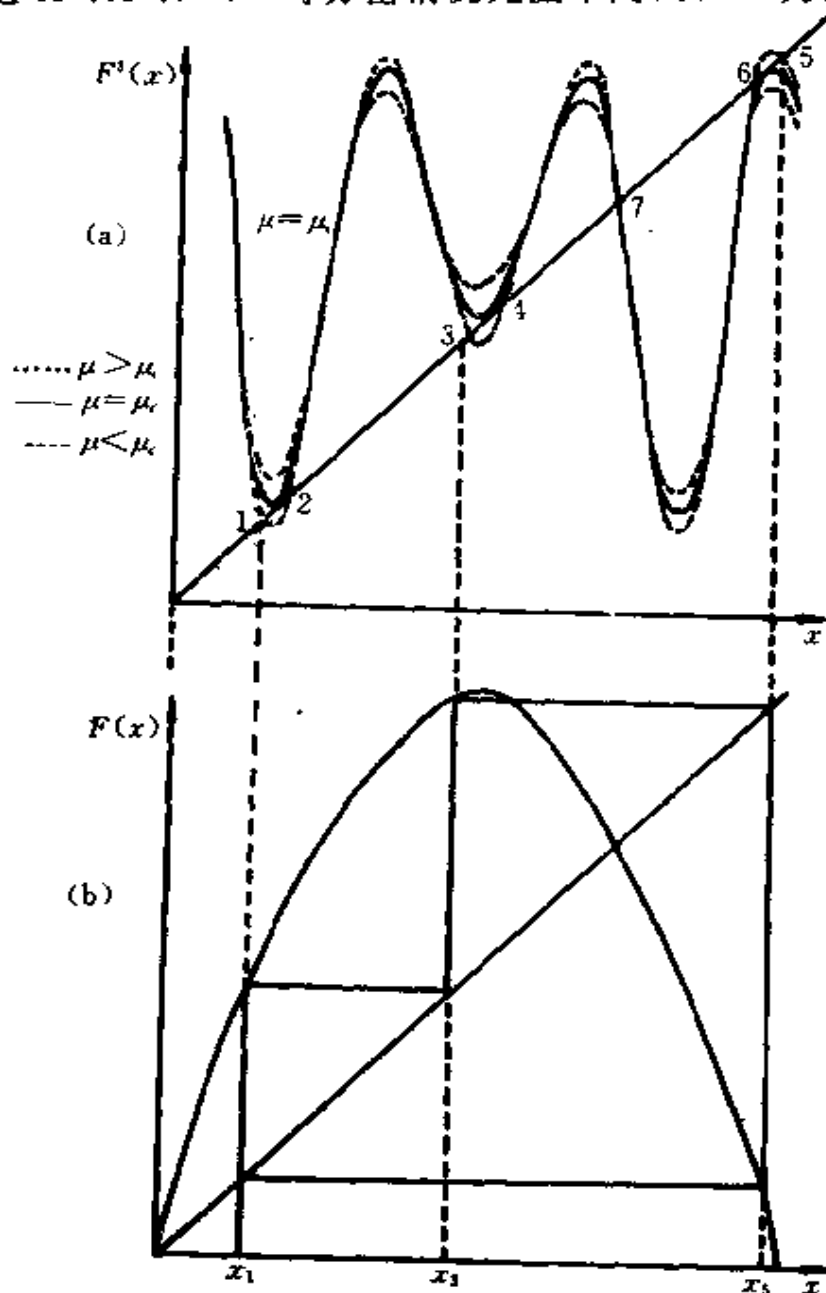
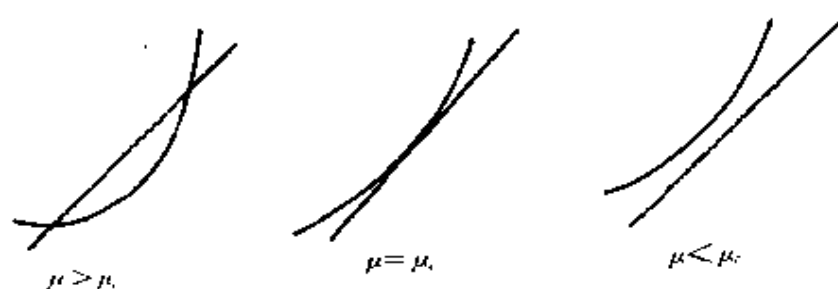
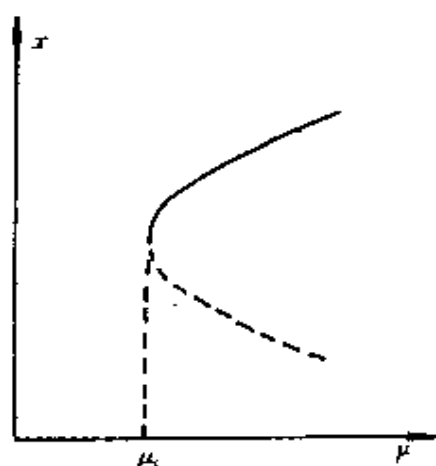


图 13-2 逻辑斯谛映象中 $3P$ 的不动点

函数 $F^{(3)}(x)$ 形状如图 13-2(a) 所示, 在 μ 稍大于 μ_c (对于逻辑斯蒂映象的 $3P$, $\mu_c = 3.828\ 43$) 时, $F^{(3)}(x)$ 与分角线共有三对交点 (另外还有一单独的不动点 7, 它是不稳定的, 我们不予考虑)。在每一对交点中, 有一点 (图中分别是 1, 3, 5 诸点) 是稳定的, 另一点 (图中分别是 2, 4, 6 诸点) 是不稳定的。三个稳定不动点 (1, 3, 5 三点) 便构成 $3P$ 轨道 [图 13-2(b)]。当 μ 逐渐减小 (对某些映象中某些参数, 也可能是增大) 到 $\mu = \mu_c$ 时, 原来每一对不动点退化为一个点, 即这时 $F^{(3)}(x)$ 与分角线相切 [图 13-3(a)]。当 $\mu < \mu_c$ 时,



(a)



(b)

图 13-3 切分岔

$F^{(3)}(x)$ 与分角线无交点,也就是说,这时不存在稳定定态。所以 $3P$ 的每一点的分岔情况如图 13-3(b)所示,它表示临界点 μ_c 一侧 ($\mu < \mu_c$) 无轨道(或定态),另一侧 ($\mu > \mu_c$) 也只有一个稳定轨道(或定态),另一个是不稳定的。人们称这类分岔为切分岔。比较图 13-3(b)和图 6-6 可以看出,切分岔就是 § 6 所述的鞍-结分岔。

2. 间歇混沌

试考察上述 $3P$ 轨道在 μ 稍小于 μ_c 的情形。这时 $F^{(3)}(x)$ 与分角线无交点,而是形成狭窄通道[图 13-4,它是图 13-3(a)右图的放大]。当初始状态在此通道口的 x_0 处,迭代过程使系统状态变化如图中箭头所示:开始时状态趋向通道最狭处,但因该处并不是不

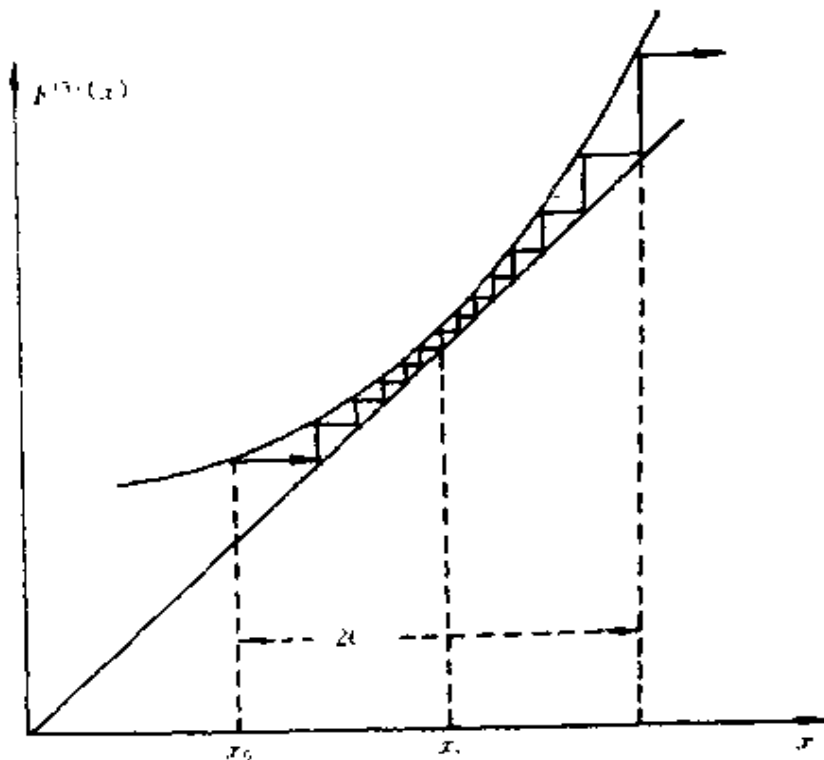


图 13-4 阵发混沌发生机制

动点,因此迭代不能停留在该处而是继续前进而逐渐远离该处,状态变化幅度又越来越大,最后便离开此通道而进入另一通道。以后又可能回到此通道,重复上述过程。当然并不与原来迭代路线完全一致。在通道内的迭代过程,状态变化极小,极近似于周期运动,而在两通道之间跳动时,状态发生很大变化,相当于出现间歇(阵发)过程(intermittet)或爆发(bursting)。这样的运动自然不是周期过程,人们称这种在切分岔情形下由于参数值紧靠临界值 μ_c 而引起的过程为间歇混沌或阵发混沌(图 13-5,与图 11-10 比较)。因此切分岔附近的间歇性也是通向混沌的一种途径。

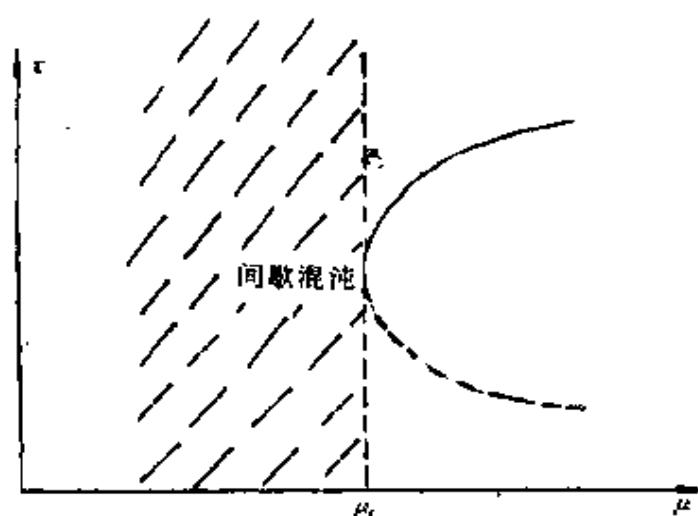


图 13-5 间歇混沌

间歇混沌在许多理论计算和实验观察中被发现。图 13-6(a)和(b)分别示出 $\mu > \mu_c$ 的 $3P$ 周期情形和 $\mu < \mu_c$ 时的间歇混沌。

图 13-7 是模拟心脏搏动过程中观察到的间歇混沌。图中曲线下的数字表示被激发的动作电位(引起心脏跳动时心肌细胞电位)数目(即心脏跳动次数)。可以看出,每隔六个或七个“正常”的动作电位,要出现一次迥异乎寻常的电位突变(爆发),这就是间歇混沌。爆发把周期或准周期过程(通常称这种过程为层流运动,得名

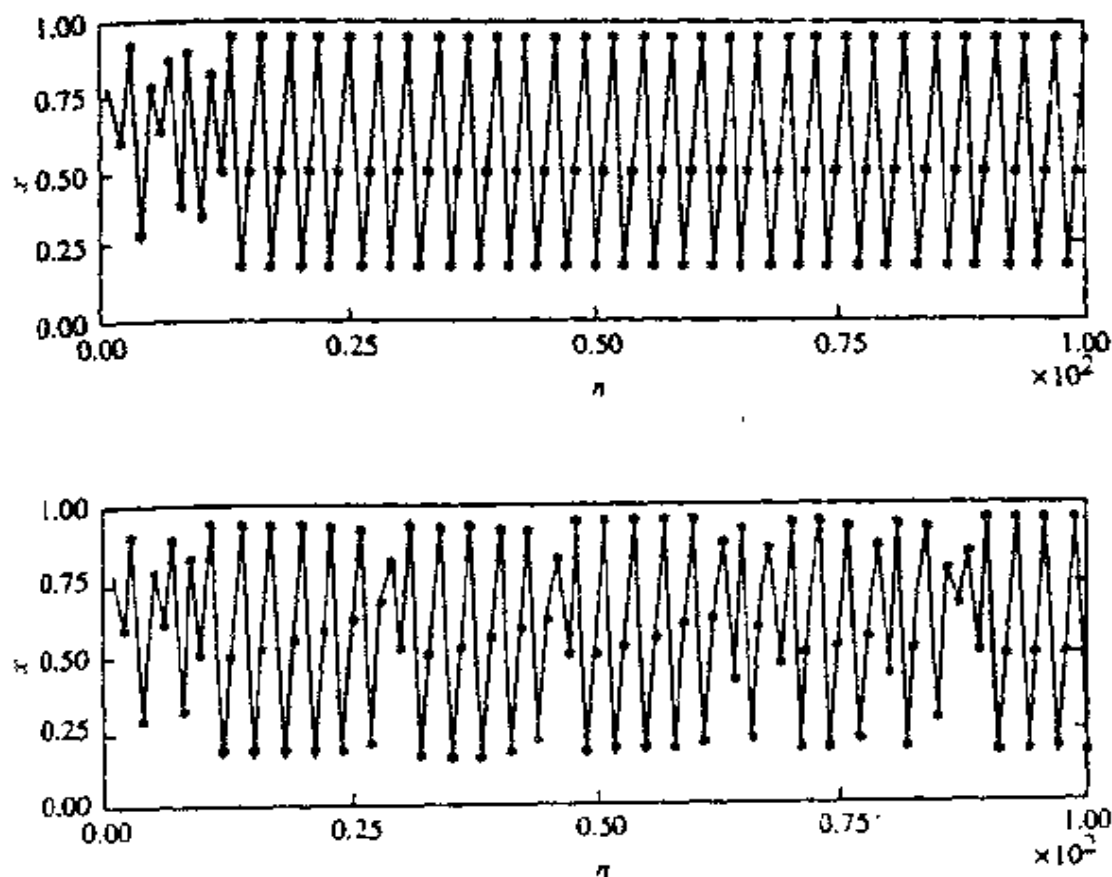


图 13-6 逻辑斯蒂映象中的间歇混沌

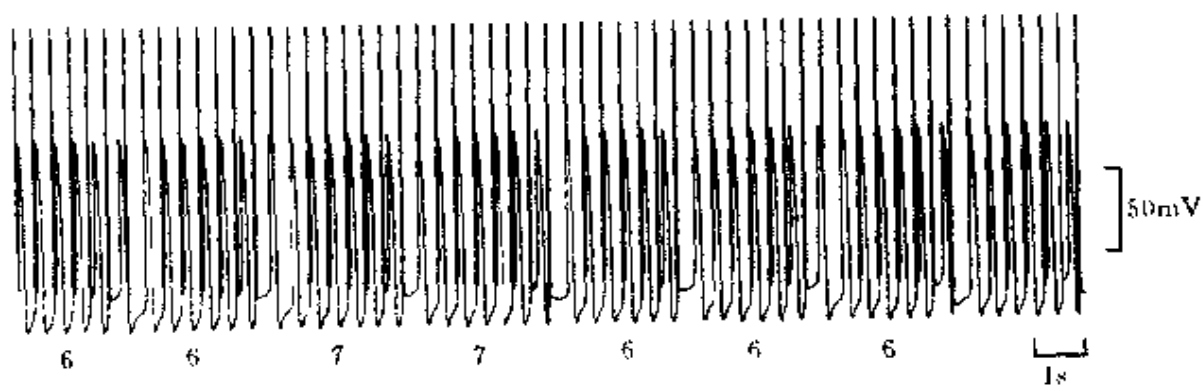
(a) $\mu = 3.82844$ (b) $\mu = 3.82842$ 

图 13-7 模拟心脏跳动时出现的间歇混沌

图下的数字表示每次阵发前的“正常”动作电位数。此处条件是 $A = 0.06$, $t_i = 350\text{ms}$, $\tau = 0.75$, 参考 § 22。

于流体流动时的规则运动,流体中的湍流相当于混沌)打断变成非周期的振动,这就是混沌。可以作这样的估计,某些心律不齐之类心脏疾病(如房颤)很可能与间歇混沌有关。

3. 层流时间长短的估计

我们可以大体估计一下在间歇混沌中作规则运动的层流时间的大小。为此,将复合函数 $F^{(3)}(x)$ 写成 $F(3, \mu, x)$ 并在临界点附近将它用泰劳级数展开:

$$F(3, \mu, x) = x_c + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_c (x - x_c) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_c (\mu - \mu_c) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_c (x - x_c)^2 + \dots \quad (13 \cdot 1)$$

因 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_c = 1$, 又令 $\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_c = a$, $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_c = 2b$, 得到(如果 $b=0$, 就往下取 $\frac{\partial^{(m)} F}{\partial x^{(m)}}$ 不为零的项)

$$F(3, \mu, x) = x + a(\mu - \mu_c) + b(x - x_c)^2 \quad (13 \cdot 2)$$

又因 $x_{n+1} = F(3, \mu, x_n)$, 上式变为

$$x_{n+1} - x_c = x_n - x_c + a(\mu - \mu_c) + b(x_n - x_c)^2 \quad (13 \cdot 3)$$

在窄通道中, x_{n+1} 与 x_n 相差很小, 引入变量

$$y = x - x_c \quad (13 \cdot 4)$$

式(13·3)变为

$$\Delta_1 y = a(\mu - \mu_c) + by^2 \quad (13 \cdot 5)$$

$\Delta_1 y$ 表示一次迭代过程中 x 的变化。 n 次迭代引起的 x 值的变化 $\Delta_n y$ 既与一次迭代 x 的变化量 $\Delta_1 y$ 有关, 也与迭代次数 n 或所需时间 $\Delta_n t$ 有关, 即

$$\Delta_n y \propto \Delta_1 y \Delta_n t \quad (13 \cdot 6)$$

上式可写为(最多适当改变参数 a 和 b 之值)

$$\frac{\Delta_n y}{\Delta_n t} = \Delta_1 y = a(\mu - \mu_c) + by^2 \quad (13 \cdot 7)$$

再将上式改写成连续情形下的微分形式

$$\frac{dy}{dt} = a(\mu - \mu_c) + by^2 \quad (13 \cdot 8)$$

由通道的入口到出口处(即设 $|y| \leq c < 1$)积分上式得

$$t \propto \frac{1}{\sqrt{ab(\mu - \mu_c)}} \lg^{-1} \frac{c}{\sqrt{b^{-1}(\mu - \mu_c)}} \quad (13 \cdot 9)$$

由于 $c/\sqrt{b^{-1}(\mu - \mu_c)} \gg 1$, 于是得系统在通道中经历的时间

$$t \propto (\mu - \mu_c)^{-1/2} \quad (13 \cdot 10)$$

上式表明, μ 越接近 μ_c , 通道越窄, 系统停留在通道的时间越长, 也就是层流(周期或准周期的“规则”运动)时间越长。当 $\mu = \mu_c$ 时, 层流时间就趋于无穷大, 即 $\mu = \mu_c$ 对应于纯周期运动。反之, 当 μ 偏离 μ_c 越大, 系统停留在通道中的时间越短, 间歇性越频繁出现, 随机性便越强烈。

可以指出, 由相变的平均场理论可得, 临界点附近的关联长度 ϵ 与温度 T 的关系为

$$\epsilon \propto |T - T_c|^{-1/2} \quad (13 \cdot 11)$$

以上两式非常相似, 这也表明有序的周期运动与无序的混沌之间的转变与相变很相似。

最后还要指出, 既然间歇混沌是出现在 $3P, 5P, \dots$ 之类切分岔的情形, 它自然也是出现在可能发生倍周期($2^n P$)分岔的系统中, 即由间歇通向混沌和由倍周期分岔通向混沌只不过是同一动力学系统在不同参数值下出现的现象。

4. 由准周期运动通向混沌

除了倍周期分岔和间歇两条通向混沌的道路外, 直接由霍普

夫分岔通向混沌也是可能的。

在霍普夫分岔理论提出(1942)后不久,朗道(Лангау, 1944)即据以提出湍流形成的理论:当雷诺数 R 很小时,流体处于与时间无关的层流状态,它对应于相空间的稳定不动点。当 R 超过某临界值时,出现霍普夫分岔,即出现频率为 ω_1 的振荡而使流体失稳。 R 再加大到另一临界值,发生第二次霍普夫分岔,出现了新的频率 ω_2 的振荡。运动用相空间的二维环面表示。通常 ω_1/ω_2 为无理数,这种准周期运动使流体运动进一步复杂。 R 进一步加大,将出现更多频率的准周期运动,最后这种极复杂的准周期运动便是湍流。即湍流是无数次霍普夫分岔形成的无数频率的准周期振荡的结果(图 13-8)。

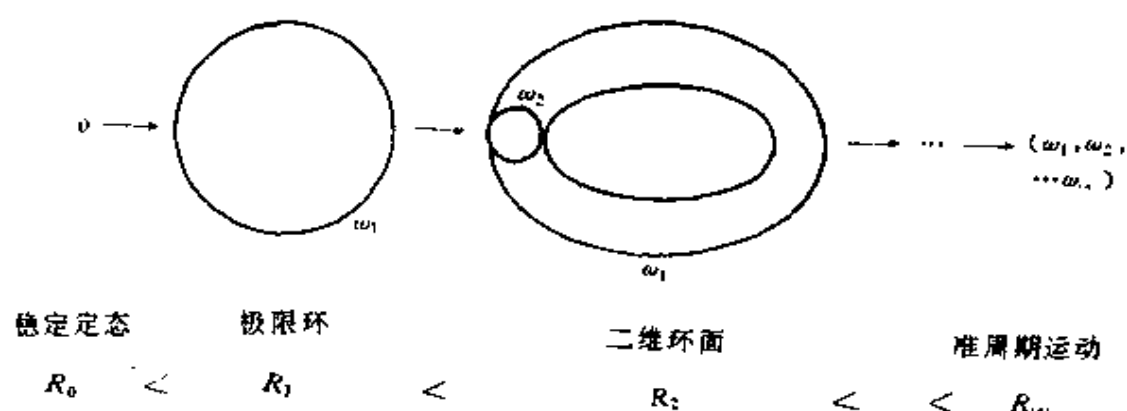


图 13-8 朗道通向湍流的道路

然而实验结果表明,虽然雷诺数 R 刚开始由层流状态下增加时功率谱测量结果确只有单一峰(一个频率的线状谱),接着是二个峰(二个频率),随后(而不是要出现大量线状谱以后)即变成连续谱了。此外,湍流对初始条件极敏感,而分岔理论则与初始条件无关。因此,看来朗道的湍流理论(或者说,由无穷多次霍普夫分岔通向混沌)并不符合实际。

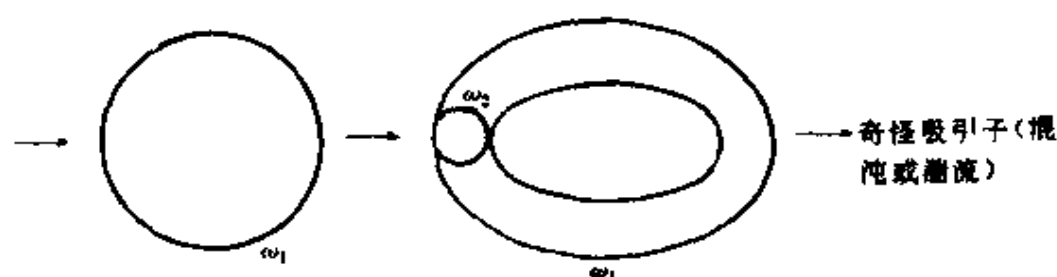


图 13-9 茹厄勒-塔肯斯通向混沌的道路

70 年代(1971 和 1978), 茹厄勒和塔肯斯(Ruelle 和 Takens)等证明*, 并不像朗道所说那样要经过无数次分岔出现无穷多频率才能进入混沌, 而是只要四次甚至三次分岔即可(图 13-9)。看来这条通向混沌的道路与上面讲的流体功率谱实验结果是相符的。这也与 § 12 所述圆映象在 $K > 1$ 时准周期运动可通向混沌相符。因为从图 12-7 可看出, 由准周期运动区似乎须通过锁相区才能到达混沌。但通过 K 和 ω 两参数的同时变化, 有可能由准周期运动区直接进入或逼近具有不同转动数 p/q 的锁相重叠区, 从而出现混沌。

从实验上看, 由于各种噪声(系统内部的热涨落, 外部各种条件的涨落)的存在, 也很容易把狭窄的锁相区掩盖掉, 这就更容易实现由准周期直接通向混沌。

§ 14 奇怪吸引子、分维和李雅普诺夫指数

混沌运动的重要特点突出表现在它在相空间轨线的收缩区域(吸引子)迥不同于通常的规则运动。对此类吸引子的分析描述是

* 严格地说, 茹厄勒等人并不是明确证明了在参数空间中有路径可由准周期运动直接通向混沌, 他们只是证明了准周期运动可逼近混沌。这与圆映象的结果是一致的。

研究混沌的一个重要方法。

1. 奇怪吸引子

在统计物理中,刘维定理指出,保守系统在相空间运动过程中,始终保持相体积不变,如 § 3 所述中心附近闭曲线所表示的守恒振荡。至于耗散系统,情况完全不同,一般说来(如阻尼力大于零的情形)其相体积要逐渐收缩(图14-1),即 n 维相空间的轨线都要

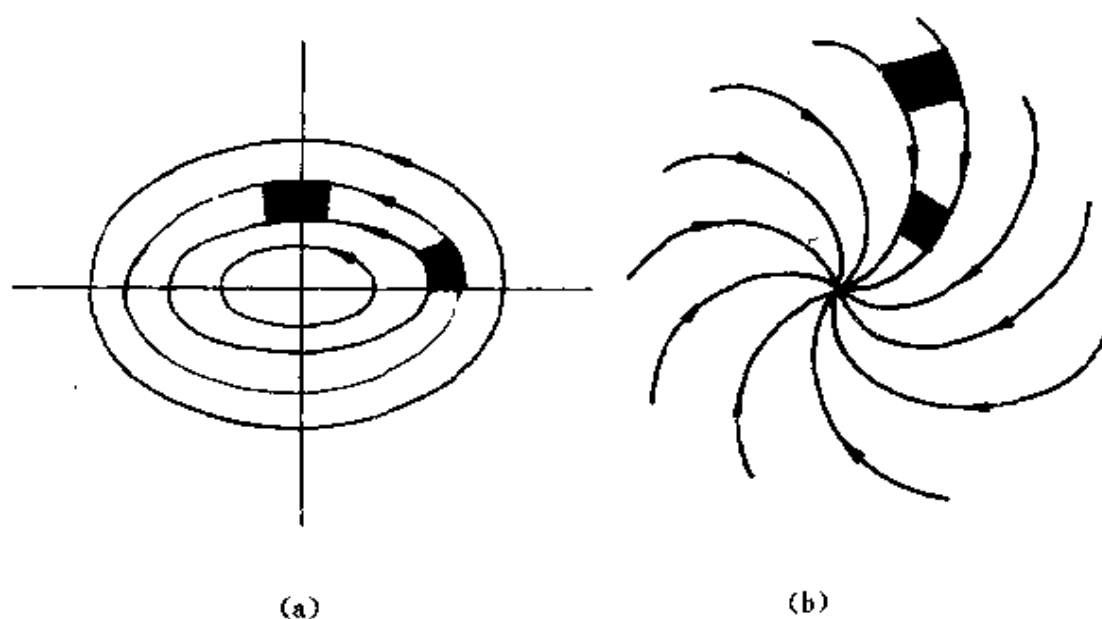


图 14-1

(a)保守系统 (b)耗散系统

收缩到 $k(k < n)$ 维面上。至于如何收缩或收缩程度如何,自然与系统的性质有关。如有的收缩至一不动点(稳定定态),其维数为零;有的收缩到闭曲线上(极限环),其维数为 1;有的收缩到二维或二维以上的环面上…等等。我们称这些时间足够长(即去掉开始一段时间的暂态过程)后系统在相空间中所趋向(收缩)的有限区域(如上述 k 维面)为吸引子(attractor)。很明显,吸引子是不随时间变化的几何体,其附近的轨道都要趋于它,它们的维数都是整数。

然而上述情况只能说是过去人们熟知的普通情况,混沌运动的吸引子与此完全不同。如 § 9 所述(参看图 9-2),对于同一动力学系统,初始条件的微小差别足以使两运动轨道是终迥然不同。这表明耗散作用从整体说固然是一种稳定因素,它要使轨道收缩;但从局部看,这时的相邻轨道却又有相互排斥而分离的作用。这一点也可从下面的分析看出:设系统的运动用下述自治方程表述:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (14 \cdot 1)$$

又设它有已知解 $x_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, 令

$$x_i = x_{i0} + \delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14 \cdot 2)$$

为 x_0 附近的另一解,将式(14·2)代入式(14·1)得

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n L_{ij}(x_0) \delta x_j \quad (14 \cdot 3)$$

矩阵

$$L_{ij}(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{x_0} \quad (14 \cdot 4)$$

称为线性化演化算子或李雅普诺夫矩阵。由 § 3 的讨论可知,只要 L_{ij} 有一个本征值 λ 的实部是正的, δx_j 就会指数发散:

$$\delta x_i = \delta x_{i0} e^{\lambda t} \quad (14 \cdot 5)$$

空间两相邻轨道将按指数型分开。对于混沌运动,其李雅普诺夫矩阵存在正实部特征根正是其特点,因为这时轨道随时间的迅速分开(δx 要发散)表明混沌运动不具有轨道稳定性,而且对初始条件极端敏感(§ 9)。

于是对于耗散系统的混沌运动,存在着看来似乎是相反的两个过程:一方面耗散作用要使轨道收缩;另一方面,轨道又要相互分离(发散)。由于收缩是由方程自身决定的(存在耗散项),它是对相空间整体(global)来说的,它要使远处的轨道趋向(收缩)至有限范围内(吸引子);而 $L_{ij}(x_0)$ 是对相空间具体点(x_0)附近的性质

来说的,故发散是局域(local)性质的,它使已靠近的轨道要互相排斥分开。这样,就使所有轨道最后(不计开始时刻的暂态过程)集中在相空间的有限范围内,靠拢又分开,分开又折叠而靠拢,无数次的来回折叠,才形成复杂的混沌,[图 10-4(a)]和图 10-11 所示若斯勒方程的吸引子就是这样。正因为如此,混沌运动的吸引子才必然具有复杂的无穷层次的自相似结构(§ 11)。如图 10-1 所示的受迫杜芬方程的解的结构和图 12-3 所示的埃农映象结构。

仔细观察和分析可以看出,混沌的吸引子与前面讲的普通吸引子至少有以下几点重要区别:

(1) 从整体说,系统是稳定的,即吸引子外的一切运动最后都要收缩到吸引子上;但是就局域说,吸引子内的运动又是不稳定的:相邻运动轨道要互相排斥而按指数型分离[参考式(14·5)]。

(2) 混沌态的吸引子不一定填满某一有限区域,面往往是具有一些空隙或空洞。情况大致如下:1I 混沌轨道的吸引子确是填满某有限范围的单连通区,2I、4I、8I、…等混沌态则是分别具有 1 个、2 个、3 个、…空洞的复连通结构(参考图 10-11 和图 20-6)。除了这些大的空洞外,还有不同层次的小的空隙或空洞。这些大大小小的空隙或空洞的存在,使吸引子具有无穷层次的自相似结构。

(3) 与不动点、极限环或高维环不同,不断的分开和折叠使混沌态吸引子上的运动依赖于初始条件(对初始条件的敏感依赖性)。即初始条件不同,同一吸引子上的轨道截然不同(参考 § 9 和图 9-2)。

由于以上一些特点,人们称混沌态这种具有无穷层次自相似结构的吸引子为奇怪吸引子(strange attractor),以别于不动点和极限环之类的简单吸引子(simple attractor,又称平凡吸引子)。

由以上分析也可见,当系统处于混沌态时,其运动大体上可看成是两种运动所组成:从整体看,系统是在绕一些大的空洞周而复

始地运动,这种运动近似地是周期的并有一平均周期。但实际上系统同时在绕无数大大小小的空洞运动,这种运动自然要具有随机性(但也不是完全随机的)。所以在混沌态中,系统既不是作规则运动,但也不是像噪声那样完全杂乱无章(无序)。事实上,混沌毕竟是服从决定性方程的运动状态(微分方程或差分方程的解),其运动自然应该具有一定的规律(有序),这就表现为其吸引子必定具有一定的结构。反映在功率谱上,便是混沌的谱往往是连续谱上还叠加了一些具有一定宽度的线状谱(宽峰, § 12),这些宽峰的中心频率就是轨线绕空洞作近似周期运动的平均频率。因此混沌是有序和无序的矛盾统一体,既可以说混沌是无周期的有序运动,也可以说是服从一定规律的无序(随机性)运动。

为了与过去熟知的完全随机或无序的混沌概念(如分子运动论中的混沌概念或某些词典中关于混沌一词的阐释)区别开来,人们有时把现在所讨论的混沌称为决定性混沌(deterministic chaos)。

奇怪吸引子既然具有不同于通常几何形体的无穷层次自相似结构,这就需要用某些物理量来表征其特征。我们将陆续予以介绍。

2. 分 维

奇怪吸引子既然是具有自相似性的结构,这就引起一个关于它的维数是怎样的问题。人们都很熟悉,曲线是一维的,圆和各种平面图形是二维的,球和各种立体图形是三维的。对于像图 10-1 这样的奇怪吸引子,它是在二维平面上的维构(当然也存在三维空间中的奇怪吸引子),我们自然不能说它们是一维的,因为它已不是一条曲线,但似乎也不好说它是二维的。因通常的二维几何体或集合(如圆、矩形或三角形等)是二维平面上的连续实体。但奇怪吸

引子却不是连续分布的实体,而是其中有大量空隙的结构。正是由于有大量空隙,它才可能具有无穷层次的自相似性。如何定量地把这种具有自相似性的结构或几何体与常见的几何体区分开呢? 1919 年德国数学家豪斯多夫(Hausdorf)把维数的概念推广到不限于整数,这就可用来定量地表征奇怪吸引子这种具有自相似性结构的特征。

我们知道,测量一个维数为 d 的物体的大小所得数值 M 与测量所用长度单位 ϵ 有关,此关系可表为

$$M(\epsilon) \propto \frac{1}{\epsilon^d}$$

如通常计算线长($d=1$)、而积($d=2$)和体积($d=3$)的数值时, $M(\epsilon)$ 确分别与 $1/\epsilon$ 、 $1/\epsilon^2$ 和 $1/\epsilon^3$ 成正比。把上式写成等式就是

$$M(\epsilon) = \frac{V}{\epsilon^d} \quad (14 \cdot 6)$$

式中常数 V 是 $\epsilon=1$ 时测量该物体大小所得数值。当把测量单位 ϵ 缩小 n 倍(变成 ϵ/n)时,测量物体所得数值增大为 k 倍(变成 kM),则

$$kM = \frac{V}{\left(\frac{\epsilon}{n}\right)^d} = \frac{V}{\epsilon^d} n^d$$

考虑式(14·6)得到

$$k = n^d$$

对上式两边取对数即得关于维数 d 的一种新定义式

$$d = \frac{\ln k}{\ln n} \quad (14 \cdot 7)$$

与上式类似,也可从另一角度来看这一问题。如果把一几何体(或集合)的线度放大 l 倍,此几何体的大小(或称广义体积,包括通常所说的长度、面积、以至高维体积)将放大为 k 倍,则

$$k = l^d \quad (14 \cdot 8)$$

上式形式上与式(14·6)相同,从而可得形式上相同的关于维数的定义:

$$d = \frac{\ln k}{\ln l} \quad (14 \cdot 9)$$

实际上,也可从式(14·5)直接定义维数。对式(14·5)取对数得

$$d = \frac{\ln M - \ln V}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\ln M \rightarrow \infty$, 于是得到关于维数 d 的另一定义式:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right)} \quad (14 \cdot 10)$$

上式定义的维数称为容积维 (capacity dimension) 或豪斯多夫维, 并用 d_c 表示。

式(14·7)、(14·9)和(14·10)都可看作是推广了的维数定义。把它们应用到普通的几何体,算得的维数自然都是整数。但对于一些具有无穷层次自相似的结构,以上诸式计算结果将给出非整数维数。人们称式(14·7)、(14·9)和(14·10)等新形式定义的可不限于整数的维数为分维 (fractal dimension)。为了对自相似结构(所谓分形,参看§17)的特点及其分维计算有具体而形象的了解,我们介绍几种典型的自相似结构。

(1) 康托尔 (Cantor) 集合

取一直线段 $(0, 1)$, 把它分为三等分然后去掉当中一段, 对留下的每一线段又三等分并去掉中间的一段。如此不断做下去, 留下的所有线段就构成所谓康托尔集合 (图 14-2)。显然, 康托尔集合构成一个无穷层次的自相似结构。为了确定此集合的维数, 试

将任一次分割后所得各线段放大三倍，如取第一次分割后留下的

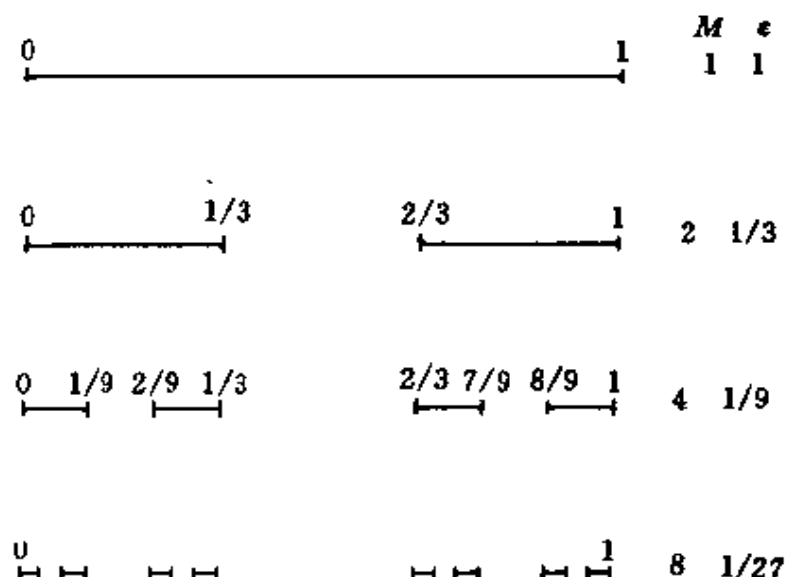


图 14-2 康托尔集合

线段 $(0, 1/3)$ 和 $(2/3, 1)$ 放大三倍，即在式 (14·9) 中 $l=3$ ，此两线段每一段都恢复到原长 1，从而这分割后的线段（共两个线段）总长变为原长的二倍，即 $k=2$ 。因此由式 (14·9) 得康托尔集合的维数为

$$d = \ln 2 / \ln 3 = 0.63093 \quad (14 \cdot 11)$$

(2) 席尔宾斯基 (Sierpinski) 垫片 (或箭头图案)



图 14-3 席尔宾斯基垫片

取一等边三角形, 将其分割为四等分挖去其中间的一份, 把剩下的三个三角形的每一个又各分为四等分挖去其中间一份, 如此下去, 所得的图案便构成一无穷层次自相似的结构 (图 14-3)。试把某次挖割后留下的三个三角形的边长放大二倍: $l=2$, 这样每个三角形就等于挖割前的三角形, 即放大边长二倍得到三个这样的三角形, 因此 $k=3$ 。于是由式 (14·9) 得到此集合的维数为

$$d = \ln 3 / \ln 2 = 1.58496 \quad (14 \cdot 12)$$

(3) 席尔宾斯基地毯

一正方形, 等分为九个小正方形并挖去其中间的小正方形, 对剩下的八个正方形的每一个又等分为九个更小的正方形并挖去中间的。如此继续下去, 也得到无穷层次的自相似结构 (图 14-4)。把每一小正方形的边长放大三倍 ($l=3$), 则得到八个同样的小正方形 ($k=8$), 因此由式 (14·9) 得到此席尔宾斯基地毯的维数为

$$d = \ln 8 / \ln 3 = 1.89279 \quad (14 \cdot 13)$$

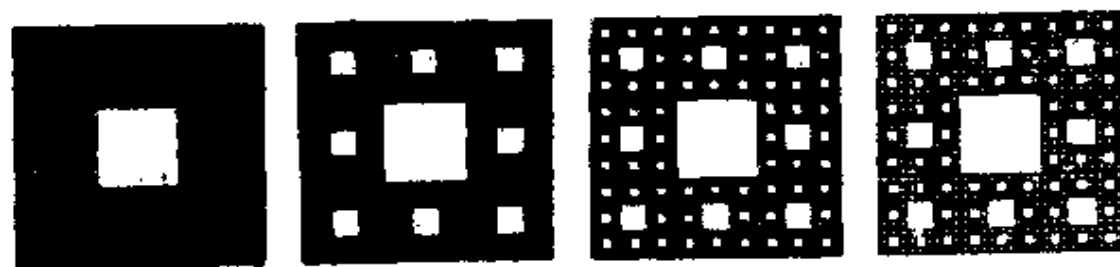


图 14-4 席尔宾斯基地毯

(4) 席尔宾斯基海绵

与得到席尔宾斯基地毯类似, 对一正方形进行同样的挖割就得到所谓席尔宾斯基海绵 (图 14-5)。很容易求得其维数为

$$d = \ln 20 / \ln 3 = 2.72683 \quad (14 \cdot 14)$$

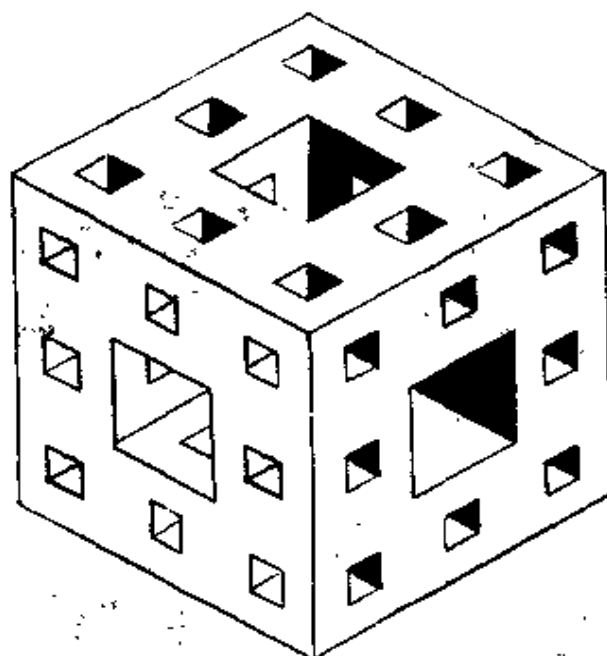


图 14-5 席尔宾斯基海维

(5) 科赫雪花

从一等边三角形出发，在它的每一边中间加一边长为原三角形边长的 $1/3$ 的小三角形，这样便形成一对称的六角形图 14-6 (b)。再对此六角形的每边以同样方式增加一小三角形得到图 14-6 (c) 的图形。如此不断下去，便得到一周边具有自相似性的复杂而对称的图案，这就是科赫 (Koch) 雪花图案，它与实验得到的实际雪花图案〔参考图 17-2 (a)〕颇为相似。可以看出，科赫雪花边周曲线是连续的，但是不可微的。虽然它所包围的面积是有限的，但边周曲线的长度却与测量长度单位的大小有关。设最初等边三角形边长为 1，边周总长即为 3。对以后各图形均取边周的每一直线段为测量长度单位，则每经过一次手术后，测量单位减小为原来的 $1/3$ ，而直线段的数目则增加至原来的 4 倍，即边周曲线总长增至原长的 4 倍。根据式 (14·9)，便得到科赫雪花边周的

维数是

$$d = \ln 4 / \ln 3 = 1.26186 \quad (14 \cdot 15)$$

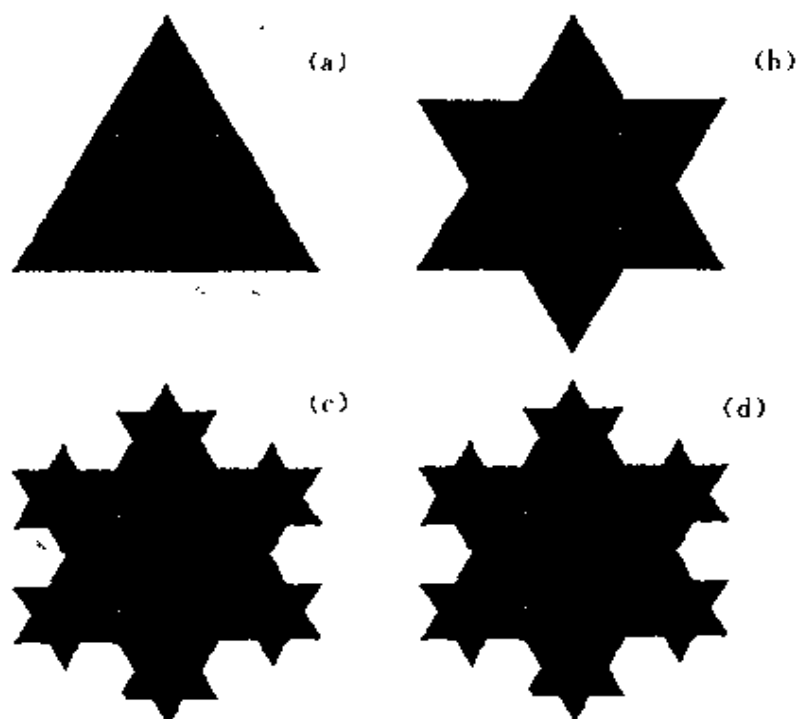


图 14-6 科赫雪花

上面这些例子表明,具有无穷层次自相似结构的不完整(“病态”)的线段和平面或立体图形的维数确比原来完整连续几何体的维数要小,而且都取非整数。看来这也还是合理的。可见,分维(非整数维数)确可表征一些具有自相似性而非完整连续实体的结构的特征。

因此具有无穷层次自相似结构的奇怪吸引子有非整数维数是很自然的。为了确定其维数,可将相空间或其投影(如庞卡莱截面)分成边长为 ε 的小格,然后跟踪一条轨道,数它穿过的小格数 M ,计算 $\ln M / \ln \varepsilon^{-1}$ 。然后缩小 ε 再计算 $\ln M / \ln \varepsilon^{-1}$ 。如此下去,画出 $\ln M$ 与 $\ln \varepsilon^{-1}$ 的关系曲线。根据式(14·10)沿此曲线外推到 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的 $\ln M / \ln \varepsilon^{-1}$ 就是维数 d 。这样的做法原则上固然是可行

的。但计算量则太大。也还可以根据维数与所谓李雅普诺夫指数（见下面）的关系来定维数。

3. 李雅普诺夫指数

为了定量地表示映象中相邻点相互分离的快慢（§ 11）或奇怪吸引子中轨道分离的快慢（轨道对初始条件的敏感依赖），人们引入李雅普诺夫指数。

为简单计，我们着重讨论一维情形。在一维离散映象

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (14 \cdot 16)$$

中，初始两点是互相分离（图 14-7 中的 Δx_1 ）还是靠拢（图 14-7 中的 Δx_2 ）由下式表示：

$$\begin{aligned} \left| \frac{dF}{dx} \right| &> 1, && \text{映象使两点分开;} \\ \left| \frac{dF}{dx} \right| &< 1, && \text{映象使两点靠拢;} \end{aligned} \quad (14 \cdot 17)$$

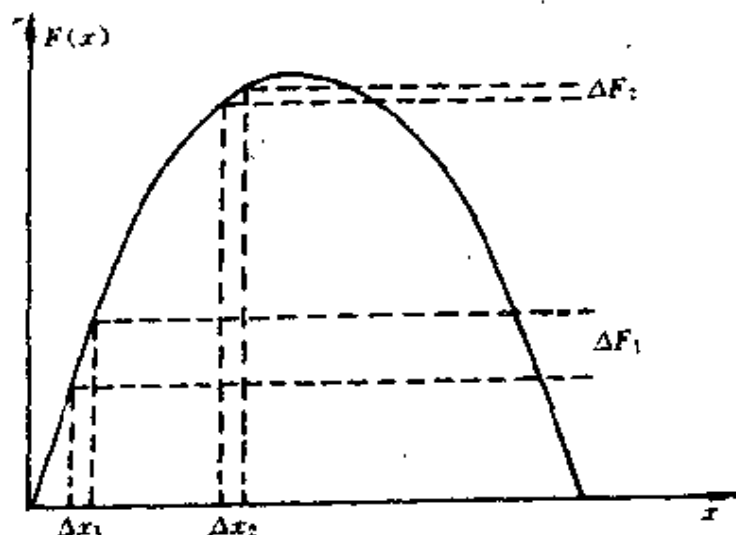


图 14-7

但是在不断的迭代过程中， $\left| \frac{dF}{dx} \right|$ 之值要随时变化。为了表示

从整体看相邻两状态分离的情况, 必须对时间 (或迭代次数) 取平均。为此, 设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 σ , 则

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\epsilon} \bullet \\ x_0 \quad x_0 + \epsilon \end{array} & \xrightarrow{\text{一次迭代}} & \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\epsilon e^{\sigma}} \bullet \\ F(x_0) \quad F(x_0 + \epsilon) \end{array} \\
 & \dots\dots & \\
 & \xrightarrow{n \text{ 次迭代}} & \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\epsilon e^{n\sigma}} \bullet \\ F^{(n)}(x_0) \quad F^{(n)}(x_0 + \epsilon) \end{array}
 \end{array}$$

于是原来相距为 ϵ 的两点经过 n 次迭代后相距变为

$$\epsilon e^{n\sigma(x_0)} = |F^{(n)}(x_0 + \epsilon) - F^{(n)}(x_0)| \quad (14 \cdot 18)$$

当取极限 $\epsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, 上式变为

$$\begin{aligned}
 \sigma(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^{(n)}(x_0 + \epsilon) - F^{(n)}(x_0)}{\epsilon} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0}
 \end{aligned} \quad (14 \cdot 19)$$

实际上上式与初始点无关。利用式 (11·32), 上式也可写成

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (14 \cdot 20)$$

式 (14·19) 中的 σ 即称为李雅普诺夫指数, 它表示在多次迭代中平均每次迭代所引导起的指数分离中的指数。

由式 (14·19) 可知, 当 $\sigma < 0$ 时, 相邻点终归要靠拢合并成一点, 这对应于不动点或周期运动; 反之, $\sigma > 0$ 时表示相邻点最后要分开, 因此这对应于混沌运动。图 14-8 是用式 (14·20) 计算得到的罗辑斯谛映象随参数 μ 的变化。可以看出, $\mu < \mu_\infty$ 时的周期运动确有 $\sigma < 0$; 当 $\mu > \mu_\infty$ 时, 大部分情形 $\sigma > 0$, 这对应于混沌运动。但是在此混沌区 ($\mu > \mu_\infty$) 中, 也有几个很窄处 $\sigma < 0$, 这对应于混沌区中的 $3P$ 、 $5P$ 、 $7P$ 等周期窗口。各 $\sigma = 0$ 的点便都是分岔点。

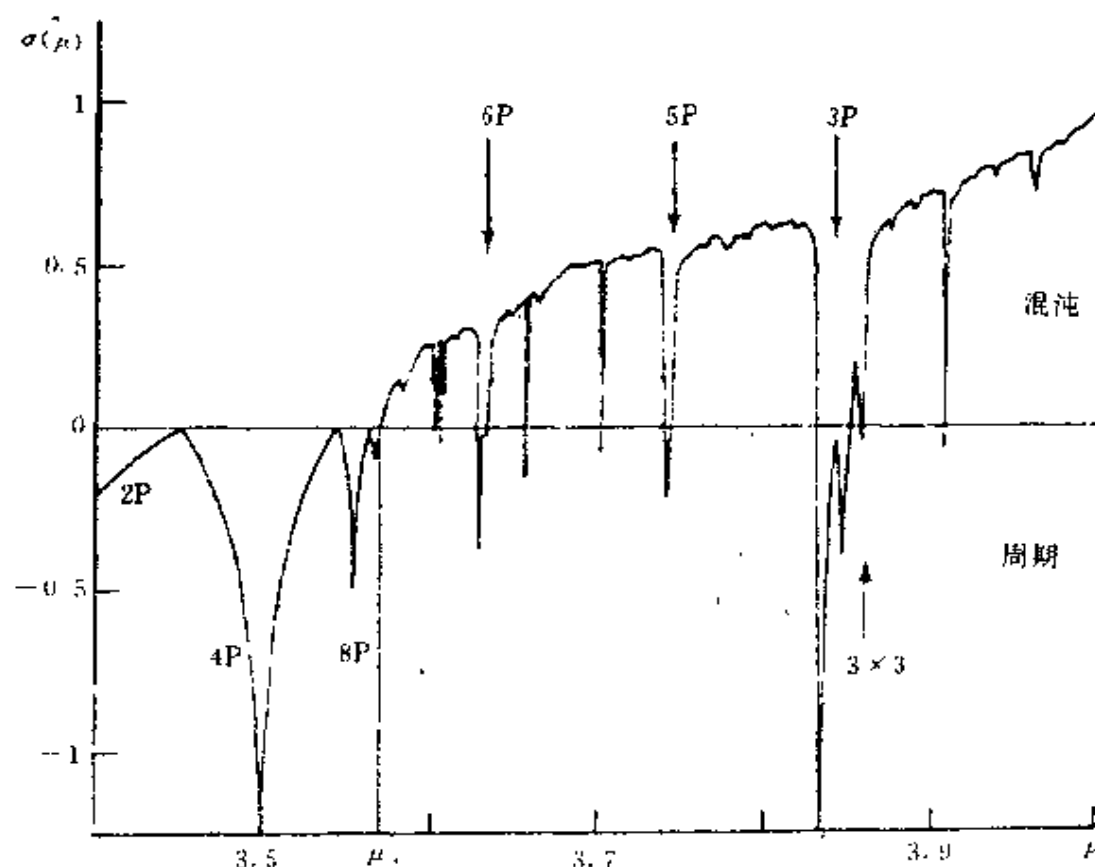


图 14-8 逻辑斯谛映象的李雅普诺夫指数

对于由微分方程 (14·1) 所定义的系统, 本节初的讨论〔参考式 (14·1) ~ 式 (14·4)〕指出, 李雅普诺夫矩阵的本征值正负可以表示相空间中两靠近点之间距离 $|\delta x|$ 在局部区域按指数形式增大 (分开) 或变小 (靠拢) 的快慢, 但是这当然不能说明沿轨道长时间结果如何。对于长时间总的效果。可以仿照式 (14·19) 用长时间 t 中 $|\delta x|$ 的平均变化所定义的李雅普诺夫指数来表征:

$$\sigma(x_0, \delta x) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta x(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(x_0, t)|}{|\delta x(x_0, 0)|} \quad (14 \cdot 21)$$

即 t 时刻内, δx 的变化是按指数增长 ($\sigma < 0$ 时为收缩), σ 为其平

均指数:

$$\delta x(x_0, t) = \delta x(x_0, 0)e^{\sigma t} \quad (14 \cdot 22)$$

由上式可知, 当由靠近〔相距为 $\delta x(x_0, 0)$ 〕的两点发出的轨道相互靠拢(收缩)时, $|\delta x(x_0, t)|/|\delta x(x_0, 0)| < 1$, 从而 $\sigma < 0$; 反之, 当轨道相互分离时, $|\delta x(x_0, t)|/|\delta x(x_0, 0)| > 1$, 从而 $\sigma > 0$ 。即

$\sigma < 0$, 轨道收缩(稳定)

$\sigma > 0$, 轨道分离(不稳定)

在 n 维相空间中, δx 是 n 维的, 从而 σ 应有 n 个值。试想像在 $t=0$ 时以 x_0 为中心以 $\delta x(x_0, 0)$ 为半径作 n 维球而, 由于各方向收缩或扩张程度不同。随着时间的演化, 在 t 时刻此球面将变形为 n 维椭球面。此椭球面的第 i 个坐标轴方向的半轴长为 $\delta x_i(x_0, t)$, 则李雅普诺夫指数 σ 的第 i 个分量 σ_i 之值为

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x_i(x_0, t)|}{|\delta x(x_0, 0)|} \quad (14 \cdot 23)$$

可见 σ 的 n 个不同值表示轨道沿不同方向收缩或扩张的不同。通常可将 σ 的 n 个值排列为

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (14 \cdot 24)$$

对于一维(单变量)情形, 吸引子只可能是不动点(稳定定态)。此时 σ 是负的。

对于二维情形, 吸引子或者是不动点或者是极限环。对于不动点, 任意方向的 δx_i 都要收缩, 故这时两个李雅普诺夫指数都应该是负的, 即对于不动点, $(\sigma_1, \sigma_2) = (-, -)$ 。至于极限环, 如果取 δx_i 始终是垂直于环线的方向, 它一定要收缩, 此时 $\sigma < 0$; 当取 δx_i 沿轨道切线方向, 它既不增大也不缩小, 可以想像, 这时 $\sigma = 0$ (这类不终止于不动点而又有界的轨道至少有一个李雅普诺夫指数等于零。证明可参考哈肯(Haken)书 Advanced Synergetics P. 80)。所以极限环的李雅普诺夫指数是 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, -)$ 。

同样可知，在三维情形下有

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (-, -, -), && \text{不动点} \\
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (0, -, -), && \text{极限环} \\
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (0, 0, -), && \text{二维环面} \\
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (+, +, 0), && \text{不稳极限环} \\
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (+, 0, 0), && \text{不稳二维环面} \\
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (+, 0, -), && \text{奇怪吸引子}
 \end{aligned} \tag{14 \cdot 25}$$

上面的第一种情形是明显的。对于三维相空间中的极限环，由于垂直于环线的两个方向的其他轨道都要趋于此极限环，故有两个 σ_i 值是负的。对于二维环面，垂直于环面方向的 σ 自然是负的，另外两个在环面上互相垂直方向的 σ_i 则都应等于零，所以有第三种情形的结果。对于不稳极限环和不稳二维环面，自然是把第二和第三两情形中 σ_i 的负号变为正号，这就分别是第四和第五两情形。对于奇怪吸引子，沿轨道方向的 σ_i 等于零。此外，如前所述，奇怪吸引子是稳定和不安定（或收缩和分离）两种因素共同作用的结果。因此它的李雅普诺夫指数一定要有一个是正的另一个是负的。这样就得到第六种情形。

总结上面的分析可以看出，李雅普诺夫指数可以表征系统运动的特征，其沿某一方向取值的正负和大小表示长时间系统在吸引子中相邻轨线沿该方向平均发散（ $\lambda_i > 0$ ）或收敛（ $\lambda_i < 0$ ）的快慢程度，因此，最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 决定轨线覆盖整个吸引子的快慢，最小李雅普诺夫指数 λ_{\min} 则决定轨线收缩的快慢，而所有指数之和 $\sum \lambda_i$ 可以认为是大体上表征轨线总的平均发散快慢。还可以看出，（1）任何（平庸的和奇怪的）吸引子必定有一个李雅普诺夫指数是负的；（2）对于混沌，必有一个李雅普诺夫指数是正的（另外，吸引子也至少有一个李雅普诺夫指数是负的）。因

此, 只要由计算得知, 吸引子至少有一个正的李雅普诺夫指数, 便可以肯定它是奇怪的, 从而运动是混沌。

应当指出, 虽然李雅普诺夫指数与李雅普诺夫矩阵都是把方程线性化后才得到的, 但两者却有重要的区别。如我们一再强调的, 李雅普诺夫矩阵本征值由相空间局部的性质决定的, 其值一般是复数; 李雅普诺夫指数虽也是线性方程 (14·3) 导出的, 表面上它似乎也是局部量, 但是从它的定义式 (14·21) 可知, 它是沿轨道长期平均的结果, 即已计入轨道上所有各点的局部影响, 因此它实质上是一整体量, 而且从其定义也可知其值总是实数。李雅普诺夫指数的整体性与李雅普诺夫矩阵本征值的局部性类似于统计物理中自由能 F 与系统能谱 E_i 之间的关系:

$$e^{-\beta F} = \sum e^{-\beta E_i}$$

即微观量 E_i 相当于李雅普诺夫矩阵本征值, 而对微观状态取平均的宏观量 F 自然相当于李雅普诺夫指数。

由于李雅普诺夫指数与分维都是描述奇怪吸引子特征的量, 可以想像, 它们之间可能存在一定关系。开普兰 (Kaplan) 和约克 (Yorke) (1979) 曾猜测此关系为

$$d = j - \sum_{i=1}^j \sigma_i / \sigma_{j+1} \quad (14 \cdot 26)$$

式中 σ_i 是按式 (14·24) 编序, j 是能使 $\sum \sigma_i > 0$ 的最大 i 值。在二维情形下, 上式简化为

$$d = 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (14 \cdot 26')$$

罗素 (Russell) 等人 (1980) 曾用式 (14·26) 计算了好几种情形下的 d 然后同用式 (14·10) 求得的 d 比较, 结果发现, 误差大体都在千分之一以内。当然, 式 (14·26) 毕竟是猜测而不是证明了的公式, 其适用范围到底如何, 还不能肯定。比如, 对

一维离散映象, 只能有一个 σ , 式 (14·26) 即不成立。如对于逻辑斯谛映象, 在周期区, $\sigma < 0$, $j=0$, 式 (14·26) 也给出 $d=1$, 这倒是表示零维不动点。但在混沌区, $j=1$, $\sigma_i > 0$, 对于 $i \neq j$, $\sigma_i = 0$ 。式 (14·26) 也给出 $d=1$, 而不是非整数。在一些临界(分岔)点, $\sigma=0$, 式 (14·26) 也给出 $d=0$, 这也是不合理的。

森肇 (1980) 曾提出另外一种 d 和 σ 的关系式。但看来并不比式 (14·26) 好多少。因此关于 d 与 σ 关系式的问题还有待进一步研究。

即使如此, 由于对一般(二维以上)情形, 由式 (14·26) 计算分维 d 要比按前而一些分维的定义 [式 (14·7)、(14·9) 和 (14·10)] 计算要容易得多, 而相互差别又很小, 因此式 (14·26) 仍常被利用。而且人们甚至就认为式 (14·26) 也是分维的一种定义形式, 并称之为李雅普诺夫维数。

4. 最大李雅普诺夫指数的计算

既然吸引子是否是奇怪的可由是否有一个李雅普诺夫指数是正的作出判断, 因此只要求出系统的最大李雅普诺夫指数 σ_1 , 看它是不是正的, 就可以判断吸引子是不是奇怪了。柏内庭 (Benettin) 等人于 1976 年提出了一个计算微分方程组的最大李雅普诺夫指数的方法。

选取两个很靠近的初始状态 x_0 和 y_0 , x 和 y 分别表示 (x_1, x_2, \dots) 和 (y_1, y_2, \dots) 。随着时间的演化, 由 x_0 和 y_0 分别出发的两轨道之间的位移 w 将随时间变化。令

$$w(t) = y(t) - x(t) \quad (14 \cdot 27)$$

根据式 (14·3), $w(t)$ 随时间的变化服从下而的方程

$$\frac{dw}{dt} = Lw \quad (14 \cdot 28)$$

L 就是李雅普诺夫矩阵。两状态之间的距离为

$$d(t) = |\mathbf{w}(t)| \quad (14 \cdot 29)$$

如果选取适当小的时间间隔 τ , 积分式 (14 · 28) 便可求得各时刻 $n\tau$ ($n=1, 2, \dots$) 的距离 d_n [d_n 表示 $d(n\tau)$]。知道了 d_n , 由式 (14 · 23) 就可求得最大李雅普诺夫指数 σ_1 了。虽然在计算机上很易计算这种积分并求出 d 的变化, 但由于 d 是随时间指数形式地增加, 积分极易发散而使计算机计算溢出, 实际无法由此算出 σ_1 。为了避免此问题, 柏内庭等人采取如下办法。设第 n 时刻 (以时间间隔 τ 为单位) 两轨道上的状态为 $\mathbf{x}(n\tau)$ 和 $\mathbf{y}(n\tau)$, 它们之间距离为

$$d_n = |\mathbf{w}(n\tau)| = |\mathbf{y}(n\tau) - \mathbf{x}(n\tau)|$$

在 $n+1$ 时刻两轨道上的状态分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(n+1)\tau] &= T^\tau \mathbf{x}(n\tau) \\ \mathbf{y}[(n+1)\tau] &= T^\tau \mathbf{y}(n\tau) \end{aligned} \quad (14 \cdot 30)$$

T^τ 表示在时间 τ 内运动引起的变换。这样在 $n+1$ 时刻两轨道之间距离变为

$$d_{n+1} = |T^\tau \mathbf{y}(n\tau) - T^\tau \mathbf{x}(n\tau)|$$

为避免计算时出现发散, 选取一个新的起点 $\mathbf{y}'[(n+1)\tau]$ 代替 $\mathbf{y}[(n+1)\tau]$, $\mathbf{y}'[(n+1)\tau]$ 是在 $\mathbf{x}[(n+1)\tau]$ 和 $\mathbf{y}[(n+1)\tau]$ 的连线上, 但距离 $\mathbf{x}[(n+1)\tau]$ 保持为最初的 d_0 , 如图 14-9 所示。以 $\mathbf{x}[(n+1)\tau]$ 和 $\mathbf{y}'[(n+1)\tau]$ 为起点再求 $n+2$ 时刻的两状态和其间距离 d_{n+2} 。这样每次都是从距离为 d_0 的两状态出发, 得到一系列的距
离 d_1, d_2, \dots 。当 τ 很小时, 由式 (14 · 23) 又可求得一条列的李雅普诺夫指数:

$$\frac{1}{\tau} \ln d_1/d_0, \frac{1}{\tau} \ln d_2/d_0, \dots$$

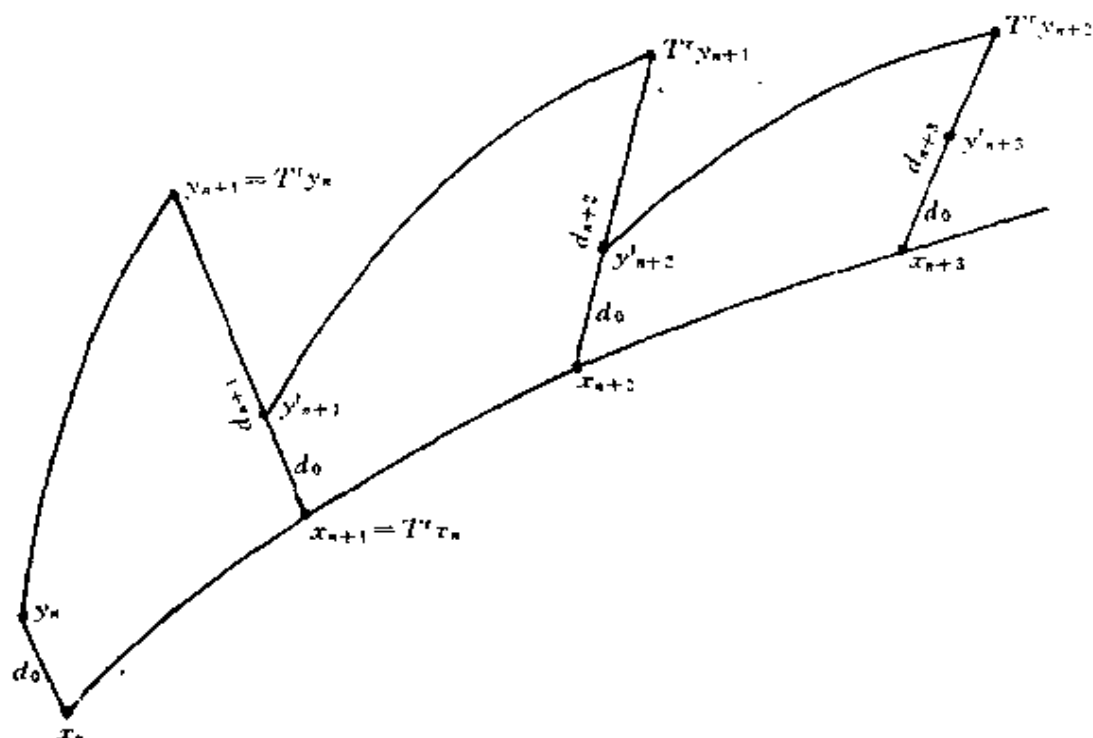


图 14-9 柏内庭法求最大李雅普诺夫指数

于是便得到最大李雅普诺夫指数

$$\sigma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d_0} \quad (14 \cdot 31)$$

当 d_0 很小而 n 极大 (如 10^5) 时, 只要 τ 不太大, 计算结果就与 τ 的大小无关了。

利用计算机可以实现这种计算, 从而可以对运动是否是混沌作出判断。

§ 15 熵

在分析非线性系统的动力学过程中, 熵也具有非常重要的意义。

1. 开放系的熵的变化和耗散结构

在热力学中已经知道, 由第二定律可推得熵增加原理: 对于一个孤立系, 熵的变化为

$$\delta S = 0, \quad \text{对于可逆过程} \quad (15 \cdot 1a)$$

$$\delta S > 0, \quad \text{对不可逆过程} \quad (15 \cdot 1b)$$

也就是说, 对于一个孤立系, 熵总是要趋于极大。因此作为状态函数的熵, 它可以预示孤立系中过程进行的方向。

由于熵可看作系统混乱(或无序)程度的量度, 式(15.1)也表明, 孤立系最后自动达到的平衡态是混乱的均匀无序状态。由于过去有人把整个宇宙看成是一个孤立系, 他们便由此推得宇宙终归要趋于混乱均匀的热力学平衡态这一错误的热寂论。

在自然界中, 存在着大量与上述趋于混乱无序相反的过程。一个最明显的例子就是生物的进化过程。地球上生物在亿万年中的进化过程大体是:

无机物 → 简单有机分子 → 复杂的有机高分子 →
简单生物 → 高等动植物

从动力学或非平衡态热力学观点看, 这种变化表示生物进化过程中状态的质变, 也就是状态发生突变或出现分岔 (§6), 即通过对称破缺使生物系统进化偏离均匀无序状态而越来越有序化。这是由于生物在进化过程中, 它不是一个孤立系, 生物是随时要与外界交换物质和能量的开放系, 因此熵增加原理对生物的进化和发育不适用。

对于一个开放系, 其熵的变化 δS 可以分成两部分:

$$\delta S = \delta_i S + \delta_e S \quad (15 \cdot 2)$$

$\delta_i S$ 和 $\delta_e S$ 分别表示由系统内部过程引起的熵变化和系统与外界

交换能量及物质时引起的熵变化。显然， $\delta_e S$ 就是式 (15·1) 中的 δS ，即

$$\delta_e S \geq 0 \quad (15 \cdot 3)$$

如果

$$\delta_e S < 0 \quad \text{且} \quad |\delta_e S| > |\delta_i S| \quad (15 \cdot 4)$$

则

$$\delta S < 0 \quad (15 \cdot 5)$$

上式表示，如果开系在与外界交换物质和能量过程中获得足够大的‘负熵流’使得它的熵的总变化是负的，则此开系就有可能形成有序化结构。以普里戈京为首的布鲁塞尔学派把这种远离平衡态时形成的有序化结构称为耗散结构 (§ 6 末)，以别于平衡态时的有序结构 (如晶体)。各种生物体的复杂结构就是耗散结构的典型例子。自然界还有许多规则图形，即所谓空间有序状态也是自然作用形成的耗散结构，如天空中鱼鳞状云或带状云，许多矿石具有的层状或环状图案，木星大气层中的涡旋结构等等都是。当然这些空间有序结构既可以是空间周期结构，也可能是分形 (参考 § 17)。另一方面，各种时间上的周期过程和混沌 (混沌并不是像噪声那样完全无序!) 可看作是另一种类型的耗散结构，即时间有序结构。这种有序结构在自然界中也大量存在。许多生物就有各种节律 (即反复变化，其中的年周期和日节律自然是受以年为周期的气候变化和昼夜条件变化的影响)。如人体内分泌系统中各种激素往往就是脉冲释放的 (Rössler 1979; 刘秉正 1991)。生理上有的振荡却反面是病态，如癫痫病 (Kandel 1981; Schwartzkroin 1982) 和帕金森氏病 (一种手和头部震颤的病, Stiles 1976)。此外，像太阳黑子出现的周期性，地球上冰河期的反复出现，地磁南北极的反复对调，…许多国家经济危机和振兴的反复出现，等等，这些都很可能不是周期振荡，便是混沌。与稳定不变的定态

和噪声相比,它们都是具有不同程度有序性的耗散结构。当然,在人为条件下出现的有序结构也是耗散结构。如§5所述的化学振荡,在两水平平板间的流体〔即洛伦兹方程(9·1)描述的情形〕在适当条件(加热下板到适当温度)下对流形成的所谓贝纳德(Bénard)花纹,各种电子振荡器的振荡,等等。可见耗散结构是客观存在的很普遍现象。

除了系统必须是开放的才可能获得负熵流外,还需什么条件才可能使系统形成有序结构呢?为分析此问题,定义单位时间内系统内部不可逆过程引起的熵变化为熵产生 P

$$P = \frac{d_i S}{dt} \quad (15 \cdot 6)$$

则

$$P > 0 \quad (15 \cdot 7)$$

普里戈京等人证明(参看尼科利斯和普里戈京书第三章和第四章),当系统处于平衡态附近,广义流与广义力之间有线性关系,此时

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \text{定态时} \quad (15 \cdot 8a)$$

$$\frac{dS}{dt} < 0, \quad \text{偏离定态时} \quad (15 \cdot 8b)$$

根据§2关于稳定性的理论,此时可取熵产生 P 作为李雅普诺夫函数,§2的定理2成立,即平衡态附近的定态是渐近稳定的。因为在平衡态中,系统是均匀无序的,从连续性考虑,平衡态附近的定态也应是均匀无序的,既然它又是渐近稳定的,因此在平衡态附近,系统不可能在扰动或涨落作用下自发地离开均匀无序的定态而形成有序结构。这一结论当然也是人们早已熟知的事实。

在远离平衡态的区域(即状态变量同平衡态的差别很大的非线性区域),普里戈京等人证明,相对于定态的熵的二级偏差(称

为超熵)总是负的,即

$$\delta^2 S < 0 \quad (15 \cdot 9)$$

超熵对时间的导数称为超熵产生,其值可取不同符号,如取 $-\delta^2 S$ 作李雅普诺夫函数 (§ 2),于是有以下三种情形:

$$(1) \text{ 当 } \frac{d}{dt}(\delta^2 S) > 0 \text{ 时,定态是渐近稳定的} \quad (15 \cdot 10a)$$

$$(2) \text{ 当 } \frac{d}{dt}(\delta^2 S) < 0 \text{ 时,定态是不稳定的} \quad (15 \cdot 10b)$$

$$(3) \text{ 当 } \frac{d}{dt}(\delta^2 S) = 0 \text{ 时,定态是临界稳定} \quad (15 \cdot 10c)$$

定态取这三种情形的哪一种由系统的状态变量和动力学参量决定。在接近平衡态区域,由前面所述熵产生做判据,已知定态应是渐近稳定的。因此平衡态附近区域属于式(15·10a)的情形。当变量变化使状态远离平衡态时,条件(15·10a)不成立,系统可能越过式(15·10c)的情形面进入式(15·10b)的情形。这时均匀无序的定态变成不稳定的,从而可能通过分岔引起对称破缺 (§ 6)并出现有序结构(如极限环),即有序结构只可能在远离平衡态的非线性区域才可能出现。

总结以上分析可知,耗散结构只可能在开放系处于远离平衡态的非线性区域才能形成。

在此我们还想补充几句关于耗散结构与平衡态中的有序结构的区别。平衡态有序结构最典型的例子就是晶体。晶体的结构是由组成它的分子或原子的相互作用决定的。因此晶体的一些参数原则上是由组成它的分子或原子的特征量表出,如晶格常数就是分子或原子间距(微观长度, $\sim 10^{-10}\text{m}$)的标志。在晶体中,热运动作用与分子原子间相互作用比较极弱,即涨落作用极弱,它只是引起对平均值的偏差或校正。非平衡态情况完全不同,在分岔点(临界点)附近,涨落变得极大并可与平均值同数量级,它在

系统内引起长程关联。这种长程关联可使系统内各部分密切相关并自动相互组织起来,于是便可能形成有序的自组织,也就是耗散结构。所以耗散结构的形成是系统处于非平衡态时涨落起着决定作用的反映。耗散结构的一些特征主要由非平衡态运动方程中一些参数决定,因此其特征长度或时间(如空间周期和时间周期)一般都是宏观的,如米、厘米以及分秒等。

2. 信息熵

自从信息论建立后,关于熵的概念和定义得到了推广。信息的概念是与概率紧密联系的。如果一个消息报道一个概率很小的事件(如今天将有冰雹)发生了,可以认为,此消息提供的信息比一个概率较大的事件(如今天多云)发生时提供的信息要大。即消息消除的不确定性越大,它所包含的信息量也越大。或者说,概率小的事件包含的信息量大。因此如令 I 表示概率为 p 的事件的信息量,则

$$I = f(p) \quad (15 \cdot 11)$$

函数 f 的形式是我们要设法求的。

若一个消息由两部分组成,每一部分发生的概率分别为 p_1 和 p_2 ,如今天某飞机要起飞的概率为 p_1 ,该机在飞行中可能出现事故的概率为 p_2 ,该消息总的信息量(如消息报道该机出现飞行事故)应该是两部分事件的信息量之和,于是有

$$\begin{aligned} I_1 &= f(p_1); \quad I_2 = f(p_2) \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (15 \cdot 12)$$

$$p = p_1 p_2 \quad (15 \cdot 13)$$

从而

$$I = f(p) = f(p_1) + f(p_2) \quad (15 \cdot 14)$$

显然,满足式(15·13)和式(15·14)的函数 f 只能是对数,于

是有

$$I = -k \log p \quad (15 \cdot 15)$$

k 是正的常数。在对数前取负号是由于概率小的事件包含的信息量大, 而且概率 p 总是小于 1, 其对数总是负的。此外, 加上一负号便使得信息量 I 总是正的。这样只要消息减少了事件的不确定性, 所提供的信息量总是正的。而且如果事件确定要发生 ($p=1$), 消息提供的信息量便等于零, 这表明关于此肯定事件的消息没有任何价值。

如果一个消息系列是由 m 条消息组成, 这 m 条消息也可看作 m 个事件。每个事件出现的概率分别为 p_1, p_2, \dots, p_m 。每一结果所含信息量分别是 $-k \log p_1, -k \log p_2, \dots, -k \log p_m$ 。于是 m 次事件中各种结果可能出现的次数是 mp_1, mp_2, \dots, mp_m , m 次事件所含总信息量为

$$I_t = -mp_1 k \log p_1 - mp_2 k \log p_2 - \dots - mp_m k \log p_m$$

因此每一消息所包含的平均信息量为

$$I = I_t/m = -k \sum_{i=1}^m p_i \log p_i \quad (15 \cdot 16)$$

式 (15·15) 和式 (15·16) 中的常数 k 可以任意选定, 为方便计, 可以取为 1。于是一个概率为 p 的事件所含信息量为

$$I = -\log p \quad (15 \cdot 17)$$

概率分别为 p_1, p_2, \dots, p_m 的 m 个事件都发生 (或者说, 有概率分别为 p_1, p_2, \dots, p_m 的多种结果的一个事件发生) 时消息所含平均信息量为

$$I = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i \quad (15 \cdot 18)$$

以上诸式中的对数可以是任何数为底的对数。当以 2 为底时, 对数用 \lg 表示, 这时信息量的单位称为比特 (bit)。当取自然对数时,

则用 \ln 表示, 此时的信息量单位为奈特 (nat)。很明显

$$1 \text{ 奈特} = \log_2 e \approx 1.443 \text{ 比特} \quad (15 \cdot 19)$$

当一个事件出现 n 种结果的概率都相等时, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, 式 (15·18) 简化为

$$I = - \sum \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n \quad (15 \cdot 20)$$

很明显, 确定某一几何体或结构中一点的位置也包含一定的信息量 I , 此信息量的大小与集合或结构的维数有关。设确定点的位置的误差 (准确度) 为 ϵ , 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 要确定在一条轨道上某时刻运动点的位置准确到 $\pm \epsilon$ 的概率与 $1/\epsilon$ 成比例, 因此可以认为, 此时所需信息量与 $\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ 成比例。推广到 d 维空间, 信息量与误差的关系便是

$$I \propto d \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad \text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \quad (15 \cdot 21)$$

根据上式, 也可由信息量 I 定义所得信息维:

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \log p_i}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \quad (15 \cdot 22)$$

对于一个事件出现各种结果的概率都相等的情形, 将式 (15·20) 代入 (15·22) 并与式 (14·10) 定义的容积维 d_c 比较得到

$$d_I = d_c \quad (15 \cdot 23)$$

一般情形下 (Farmer 等, 1983)

$$d_I \leq d_c \quad (15 \cdot 24)$$

但实际上 d_I 和 d_c 差别极小, 通常可以忽略这种差别。

由以上诸式可以认为, 吸引子的维数是以一定精度确定系统在吸引子上代表点的位置所需的信息量。

上述结果自然也可用于分析系统有各种可能状态的情形。设

系统只有两种可能状态，而且处于两状态的概率相等。如一个粒子可以处于两个同样盒子中的一个，或掷硬币时两种可能的结果。因此时 $p=1/2$ ，由式 (15·17) 得确定系统处于某一状态所需信息量为

$$I = -\lg \frac{1}{2} \text{ 比特} = 1 \text{ 比特}$$

因此一比特也就是概率为 $1/2$ 的事件发生时消息所含信息量的大小。如果系统可以处于四个概率相等的状态，则确知系统处于其中一状态所含信息量为

$$I = -\lg \frac{1}{4} \text{ 比特} = 2 \text{ 比特}$$

当然，以上两结果也可由式 (15·18) 求得。如对于第二例子，四种状态就是四种概率相等的结果，即 $p_1=p_2=p_3=p_4=1/4$ ，因此由式 (15·18) 得

$$I = -\sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \lg \frac{1}{4} \text{ 比特} = 2 \text{ 比特}$$

由上因的例子可知， I 越大表示可能状态越多，随机性越大，人们对系统状态的了解越差。因此信息量 I 也可看作是人们对系统状态无知程度或混乱程度的量度。控制论的主要创立者维纳所以说：“信息量是一个可以看作概率的量的对数的负数，它实质上就是熵。”这样就把原来热力学中熵的概念推广了。信息论的主要创立者申农 (Shannon) 把式 (15·18) 所定义的信息量就称为信息熵。

3. 柯尔莫哥罗夫熵

柯尔莫哥罗夫 (Kolmogorov) 进一步把信息熵的概念精确化用来量度系统运动的混乱或无规 (无序) 的程度。考虑 d 维系统，把它的相空间分割为 N 个边长为 ϵ 的 d 维格子。当系统运动

时,它在相空间的轨道为 $x(t)$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)]$$

取时间间隔为一很小量 τ 。令 $p(i_0, i_1, \dots, i_n)$ 表示起始时刻系统在第 i_0 个格子中, $t=\tau$ 时在第 i_1 个格子中, \dots $t=n\tau$ 时在第 i_n 个格子中总的概率。根据式 (15·18), 确定系统将沿轨道 (i_0, i_1, \dots, i_n) (即依次在第 i_0, i_1, \dots, i_n 诸格子中, 轨道的精确度为 ϵ) 运动所需的信息量为

$$K_n = - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n}^N p(i_0, i_1, \dots, i_n) \log p(i_0, i_1, \dots, i_n) \quad (15 \cdot 25)$$

$K_{n+1} - K_n$ 便是知道系统是沿此轨道运动后, 要确定其在 $(n+1)\tau$ 时刻落在哪一个格子所需的附加信息量, 也就是由时刻 $n\tau$ 到时刻 $(n+1)\tau$ 的系统运动过程中损失的信息量 (注意: 系统沿轨道运动, 结果越来越确定, 其随机性或无序性越来越小, 从而它包含的信息量越来越小)。柯尔莫哥罗夫据此定义广义熵为单位时间内信息量的损失

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) \quad (15 \cdot 26)$$

也就是

$$K = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0, i_1, \dots, i_N}^{N-1} p(i_0, i_1, \dots, i_N) \log p(i_0, i_1, \dots, i_N) \quad (15 \cdot 27)$$

式中极限 $\epsilon \rightarrow 0$ 是取在极限 $N \rightarrow \infty$ 之后, 它使 K 之值实际与分格无关, 如取 $\tau=1$, 则极限 $\tau \rightarrow 0$ 可省去。这样定义的 K 就称为柯尔莫哥罗夫熵或 K 熵。

为了分析柯尔莫哥罗夫熵怎样表示系统运动的无序程度, 我们讨论简单的一维情形。设起始时刻 ($t=0$) 系统在第 I_0 小格中

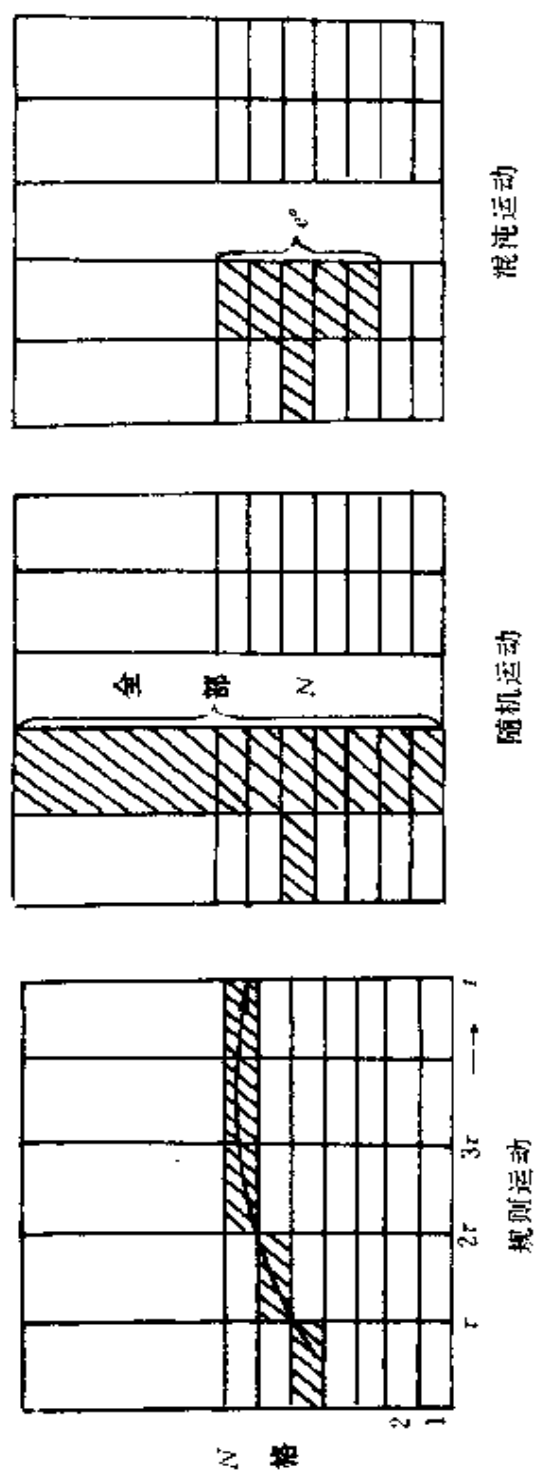


图 15.1

$$p(i_0)=1, \text{当 } i_0=I_0$$

$$p(i_0)=0, \text{当 } i_0 \neq I_0$$

由于运动性质的不同,在下一时刻系统可能处于不同数量的格子中(即可在不同数量的格子中找到系统),如图 15-1 所示。暂设 $t=\tau$ 时系统的状态可能扩散到 m 个格子中且概率相等,则

$$\begin{aligned} p(i_0, i_1) &= \frac{1}{m} p(i_0) && \text{当 } i_1 \text{ 属于这 } m \text{ 个格子} \\ &= 0 && \text{当 } i_1 \text{ 不属于这 } m \text{ 个格子} \end{aligned}$$

同样有

$$p(i_0, i_1, \dots, i_N) = \frac{1}{m} p(i_0, i_1, \dots, i_{N-1}), \text{当 } i_N \text{ 属于 } m \text{ 个格子中}$$

$$p(i_0, i_1, \dots, i_N) = 0, \text{当 } i_N \text{ 不属于 } m \text{ 个格子中}$$

于是

$$\begin{aligned} & - \sum_{i_0 i_1 \dots i_N} p(i_0, i_1, \dots, i_N) \log p(i_0, i_1, \dots, i_N) \\ &= - \sum_{i_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_{N-1}} \sum_{i_N} \frac{1}{m} p(i_0, i_1, \dots, i_N) \\ & \quad \log \frac{1}{m} p(i_0, i_1, \dots, i_N) \\ &= - \sum_{i_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_{N-1}} p(i_0, i_1, \dots, i_{N-1}) [-\log m \\ & \quad + \log p(i_0, i_1, \dots, i_{N-1})] \\ &= - \sum_{i_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_{N-2}} [2p(i_0, i_1, \dots, i_{N-2}) \log m \\ & \quad - p(i_0, i_1, \dots, i_{N-2}) \log p(i_0, i_1, \dots, i_{N-2})] \\ &= \sum_{i_0} N p(i_0) \log m - \sum_{i_0} p(i_0) \log p(i_0) \\ &= N \log m - 0 \end{aligned}$$

因此由式 (15·27) 得到

$$K = \log m \quad (15 \cdot 28)$$

对于三种不同性质的运动于是有

(1) 规则（轨道）运动

因为每一时刻系统的状态是确定的，所以 $m=1$ ，从而由式 (15·28) 得到

$$K = 0 \quad (15 \cdot 29)$$

(2) 随机运动

此时 $m=N$ 。注意到 $N \propto \epsilon^{-1}$, $\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ ，从而

$$K \rightarrow \infty \quad (15 \cdot 30)$$

(3) 混沌运动

根据式 (14·22)，相空间轨道要按指数形式分开。在一维情形下， $m \sim e^\sigma$ ，从而

$$K = \log e^\sigma = \sigma \quad (15 \cdot 31)$$

由此可见，可以根据柯尔莫罗夫熵 K 取值如何来判断系统运动的性质或无规（随机性）的程度： K 等于零表示系统作完全规则（决定性）的运动； K 取有限正值表示系统作具有部分（或受约束的）随机性的混沌运动； K 趋于正无穷大时表示系统作完全无规的随机运动。正因为如此，人们才把式 (15·26) 或 (15·27) 定义的 K 也称为一种熵。

4. 柯尔莫哥罗夫熵与李雅普诺夫指数的关系

既然信息量 I 、特别是柯尔莫哥罗夫熵与李雅普诺夫指数 σ 都可表征系统运动是规则的还是无序的，可以推测，它们之间应该存在关系。事实上，一维运动的式 (15·31) 已经指出了这一点。

再考虑一维迭代映象的情形。设我们把变量 x 变化区域分成 n 等分，且 x 在各等区间内的概率相等，此概率应等于 $1/n$ 。根据式 (15·20)，当知道 x 在某一区间内时，我们获得的信息量为

$$I = - \sum \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n \quad (15 \cdot 32)$$

减小 n 自然减小了所获得的信息量。映射过程相当于把变量变化区域扩大 $F'(x)$ 倍, 把原来划分的区间大小 $(\frac{1}{n})$ 也扩大 $F'(x)$ 倍变为 $\frac{1}{n} F'(x)$, 如图 15-2 所示。因此经过一次迭代, 信息量减少

$$\begin{aligned} \Delta I &= \sum_{i=1}^{n/F'} \frac{F'(x)}{n} \log \frac{F'(x)}{n} + \log n \\ &= \log |F'(x)| \end{aligned} \quad (15 \cdot 33)$$

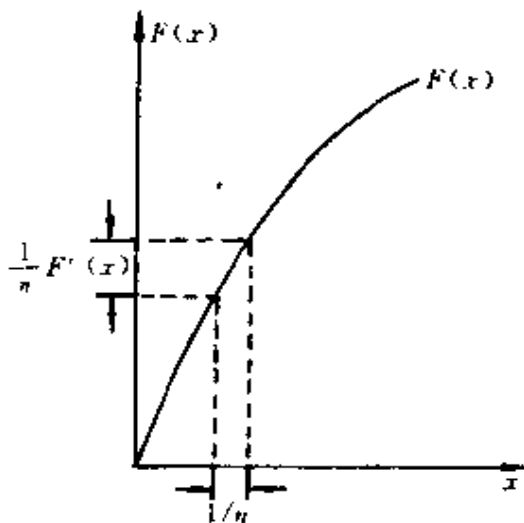


图 15-2

上式对多次迭代自然也适用, 由此便得到多次迭代过程中平均每次迭代的信息量损失

$$\overline{\Delta I} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |F'(x_i)| \quad (15 \cdot 34)$$

根据前面的讨论, $\overline{\Delta I}$ 也就是柯尔莫哥罗夫熵。将上式与式 (14 · 20) 比较, 可看出两式是一致的, 因此李雅普诺夫指数就

是迭代过程中信息量的损失,也就等于系统的柯尔莫哥罗夫熵:

$$\sigma = \overline{\Delta I} = K \quad (15 \cdot 35)$$

上式与一维运动的式 (15 · 31) 一致。

对于多维运动,信息量的损失也是由于运动过程中相体积扩张的结果。但由于这时不同方向的李雅普诺夫指数 σ_i 不同,各方向的扩张程度不同。如在某一时刻一个半径为 ϵ 的小球形相体积经较长时间后将演化为 d 维椭球,椭球各半轴长为

$$\epsilon_i(t) \sim \epsilon e^{\sigma_i t} \quad (15 \cdot 36)$$

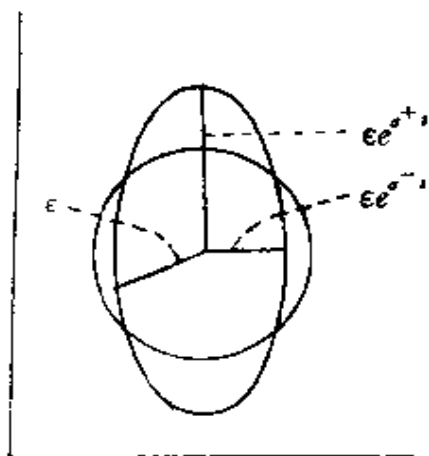


图 15-3

图 15-3 所示是二维情形。令 σ_i^+ 和 σ_i^- 分别表示各大于零和小于零的李雅普诺夫指数,则各 σ_i^+ 的方向椭圆半轴大于 ϵ ,而各 σ_i^- 的方向椭圆半轴小于 ϵ 。因此只有各 σ_i^+ 的方向相体积才扩大并使信息量减小;各 σ_i^- 方向则对信息量无贡献。

所以推广式 (15 · 31) 可以认为,在多维情形下,作为信息量损失速率的柯尔莫哥罗夫熵应取下面的形式:

$$K = \int \rho(x) \sum \sigma_i^+ dx \quad (15 \cdot 37)$$

式中 $\rho(x)$ 是相空间中吸引子的态密度, $\sum \sigma_i^+$ 是对所有大于零的李雅普诺夫指数求和。由于 σ_i 都是对长时间求平均的结果,在一般情形下, σ_i 应与 x 无关。因此

$$K = \sum \sigma_i^+ \int \rho(x) dx = \sum \sigma_i^+ \quad (15 \cdot 38)$$

式 (15 · 31)、式 (15 · 35) 和式 (15 · 38) 就是一维运动、一维

映象和多维运动下柯尔莫哥罗夫熵与李雅普诺夫指数之间的关系。

对于一个吸引子，其所有李雅普诺夫指数之和应小于零（表示总的是收缩吸引趋势）。但是作为混沌的奇怪吸引子，至少有一个正的李雅普诺夫指数 σ_1 ，因为只有正的 σ^+ 才能使轨道不稳而发散使吸引子变得奇怪。由式 (15·38) 可见， $K > 0$ 就表示一定存在有大于零的李雅普诺夫指数。因此我们仍得到与前面类似的结论：奇怪吸引子就是 K 具有有限正值的吸引子。

最后我们还可指出，李雅普诺夫指数或柯尔莫哥罗夫熵可用来估计混沌运动中状态可预言的时间长短。

对于规则(轨道)运动，当初始状态已知时，人们可以预言任何时刻系统的状态。对于混沌运动，由于其对初始状态的敏感性 (§ 9)，人们难于对系统的状态作出预言。如图 9-2 所示，两开始极靠近的状态，时间不长时，两轨道大体很相近，可以认为系统的轨道是确定的，从而还可以对运动作出预言。时间越长，两轨道越来越发散分离，从而对状态的预言也就变得越来越不可能了。很明显，这种使轨道相互分离的趋势就是上节和本节所说的相体积的扩张。

对于一维运动，可以取满足下式的 t 作为对状态可否预言的分界时间（设 t_c 为一临界时间， $t < t_c$ ，状态大体还可预言； $t > t_c$ ，对系统状态只能作概率描述）

$$\begin{aligned} \epsilon e^{\sigma t_c} &= 1 \\ t_c &= \frac{1}{\sigma} \log \frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \quad (15 \cdot 39)$$

对于多维运动，可以推广上式，即根据式 (15·38) 用 K 代替 σ ，于是得到作规则运动的时间极限

$$t_c = \frac{1}{K} \log \frac{1}{\epsilon} \quad (15 \cdot 40)$$

式(15·39)和式(15·40)中的 ϵ 可看作是确定系统状态的精度,它对 t_c 的影响是对数形式,不如 K 的影响大。所以运动越混乱(K 越大),对运动状态可预言的时间 t_c 越小。

总结以上分析可见:

(1) 柯尔莫哥罗夫熵 K 表示在运动过程中,系统信息量损失速率;

(2) 对于一维运动, K 就等于李雅普诺夫指数;对于多维运动, K 等于各正的李雅普夫指数之和;

(3) K 也可以作为系统混乱(无规)程度的量度:对于规则运动, $K=0$;对于完全无规的随机运动, $K \rightarrow \infty$;对于混沌运动, K 取有限的正值;

(4) 对于混沌运动,在一定的时间间隔 t_c 内,其运动可近似地看作是可预言的(规则的),此时间间隔与 K 成反比。

§ 16 保守系统中的随机运动

到此为止,我们主要是讨论耗散系统中的混沌运动,因此其在相空间的体积才收缩成奇怪吸引子。既然保守系统在相空间中的体积不变,它不会形成奇怪吸引子。那么它有无可能也不作规则运动而出现随机性呢?

自从17世纪牛顿建立了经典力学基础以来,人们一直认为,力学系统服从拉普拉斯决定论。即当初始条件确定了,力学系统就将按确定的轨道运动,从而人们可对系统的运动作出预言。天体力学就是这样计算并预言行星和月球的运动。即使在此遇到使

人为难的三体或多体问题，人们仍然在经典力学的基础上创立了摄动（微扰）理论，解决了计算中的某些困难，并据此预言了海王星和冥王星的存在。因此过去人们一直认为，即使是相互作用的多体，它们也是在作规则运动而无随机性。

然而统计物理中的各态历经说或系综平均原理却要求系统的运动不能局限于相空间的规则轨道上。即统计物理是建立在随机性的基础上的。因此在这样的基本问题上存在着两种对立的认识。也可以说，这样两种截然不同性质的运动，其发生的条件有何不同，长期以来并不清楚。直到本世纪五六十年代，由于柯尔莫哥罗夫（Kolmogorov）、阿诺德（Arnold）和莫塞（Moser）等人的工作，才使人们明确了保守系统除了可以作规则运动外，在一定条件下有的系统的运动确实有随机性，即可能出现混沌。本节就是要简要地讨论此问题。

1. 可积系统

首先我们回顾一下经典力学中关于可积系统的主要结论。一个具有 n 个自由度的系统的运动可以用下述哈密顿方程描述：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16 \cdot 1)$$

式中 q_i 和 p_i 分别为广义坐标和广义动量， $H = H(p_i, q_i)$ 是系统的哈密顿函数。在 H 不显含时间时，它实际是一运动积分（常数）并等于系统的总能，这时的系统便是保守系统。

如果存在一个正则变换：

$$\begin{aligned} q_i, p_i &\rightarrow J_i, \theta_i \\ H(p_i, q_i) &= \mathcal{H}(J_i, \theta_i) \end{aligned} \quad (16 \cdot 2)$$

使得在新的坐标 (J_i, θ_i) 系中, \mathcal{H} 与 θ_i 无关而只是 J_i 的函数

$$H = \mathcal{H}(J_1, J_2, \dots, J_n) \quad (16 \cdot 3)$$

则此时哈密顿方程简化为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, \dots, J_n) \\ \dot{J}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} = 0 \end{aligned} \quad (16 \cdot 4)$$

积分上式即得

$$\begin{aligned} \theta_i &= \omega_i t + \theta_i(0) \\ J_i &= J_i(0) \end{aligned} \quad (16 \cdot 5)$$

θ_i 和 J_i 分别称为角度变量和作用变量。通常称满足式 (16·3) 或式 (16·4) 的系统为可积系统, 否则即称为不可积系统。由式 (16·5) 可知, 可积系统有 n 个运动积分 J_i 。知道了这 n 个运动积分, 运动方程的解就可以用它们表示, 因此可积系统的运动总是确定的。

作为例子, 考虑 n 维无耦合线谐振子 (或 n 个相互独立的线谐振子)。此时

$$H = \sum \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \quad (16 \cdot 6)$$

作正则变换

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2\omega_i} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \\ \theta_i &= \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\omega_i}{2J_i}} q_i \right) \end{aligned} \quad (16 \cdot 7)$$

其逆变换为

$$q_i = \sqrt{\frac{2J_i}{\omega_i}} \cos \theta_i$$

$$p_i = - (2\omega_i J_i - 2\omega_i J_i \cos \theta_i)^{1/2} = - \sqrt{2\omega_i J_i} \sin \theta_i$$
(16 · 8)

于是

$$\mathcal{H} = \sum \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = \sum \omega_i J_i$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i$$

$$\dot{J}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} = 0$$
(16 · 9)

所以

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_i(0)$$

$$J_i = J_i(0)$$
(16 · 10)

因此谐振子是可积系统。当 $n=1$ 时，这就是大家熟知的一维谐振子，其运动在相空间 (p, q) 的轨迹为椭圆〔图 14-1 (a)〕。当 $n>1$ 时，在 $2n$ 维相空间的运动轨迹是 n 维超椭球面。作适当坐标变换（如令 $Q_i = \sqrt{\frac{\omega_i}{2}} q_i$ ； $P_i = \sqrt{\frac{1}{2\omega_i}} p_i$ ），则这些椭圆和超椭球分别退化为圆和超球面。

对于一般的可积系统，只要其运动是有界的，它一定也是周期的。因此通常也称角度变量 θ_i 为循环坐标， ω_i 便是周期运动的频率。一般可积系统与 n 维谐振子的区别仅在于后者的频率 ω_i 是常数，而前者的 ω_i 一般是作用量 J_i 的函数。根据类似 § 10 的分析， $n=1$ 时，系统在 2 维相平面的轨迹为一圆（在适当选取相平面的坐标系），圆半径由作用量 J 决定。 $n=2$ 时，轨迹是 4 维相空

16-1)。依此类推, $n \geq 3$ 时, $2n$ 维相空间中的轨迹是 n 维环面, 环面各半径分别由作用量 J_i 决定。但此时的环面便无法形象地表示出来了。

在 $2n$ 维相空间中, 等能面 $H=E=\text{常数}$ 自然是 $2n-1$ 维, 但可积系统的运动却限制在 n 维环面上。当 $n \geq 2$ 时, 运动的环面只是等能面的一部分, 而不是分布在整个等能面上。因此可积系统的运动不符合统计物理中关于随机运动的微正则系综的基本原理 (系统在等能面上各处的概率相等)。这也表明, 可积系统的运动是规则的和确定的, 没有什么随机性可言。

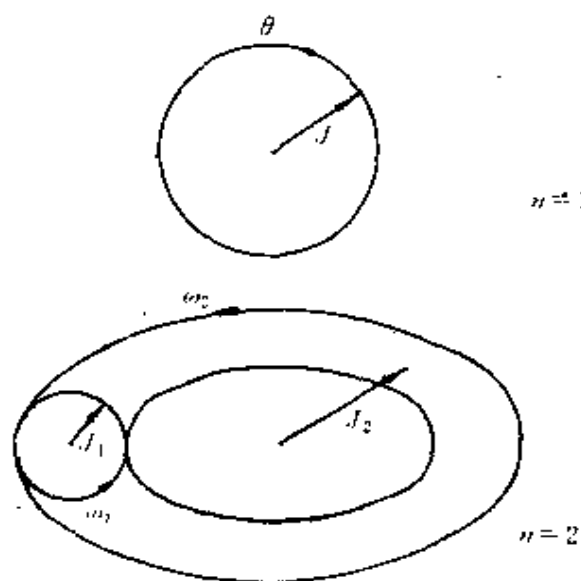


图 16-1 可积系统

2. KAM 定理

对于不可积系统，情况又如何呢？它们是像可积系统那样也限在 n 维环面上作规则运动，还是不限于 n 维环面甚至带有随机性呢？关于这个问题的答案，是柯尔莫哥罗夫 (Kolmogorov) 于 1954 年首先提出的，随后阿诺德 (Arnold, 1963) 和莫塞 (Moser, 1967) 对柯尔莫哥罗夫的回答进一步给予了证明。这就是以他们三人姓名字头命名的 KAM 定理。由于此定理的证明涉及一些繁琐的数学推导^{*}，故此现在只介绍其结果。

KAM 定理：设不可积系统的哈密顿函数可写成如下形式：

$$H = H_0 + \epsilon H_1 \quad (16 \cdot 11)$$

式中 H_0 是可积的， ϵH_1 是微扰（摄动）。如果

- (1) 微扰很小（此时系统称为近可积系统）；
- (2) 可积的 H_0 的 n 个频率 ω_i 的雅可比行列式不等于零：

$$\frac{\partial (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial (J_1, J_2, \dots)} \neq 0 \quad (16 \cdot 12)$$

则不可积系统 H 的运动仍限于 n 维环面上。

条件 (16·12) 实际上表示各频率之间不相关（或非共振），也就是说，各频率之比与有理数差别较大。

满足 KAM 定理条件的不可积系统的运动所限制的 n 维环面自然同可积系统 H_0 运动的 n 维环面有所差别。 ϵH_1 越大，差别也越大。但这样限制在 n 维环面上的运动毕竟还是规则的（仅是 $2n-1$ 维等能面的一小部分区域）。诚如巴列斯库 (Balescu, 见所著《Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics》，1975) 所指出的，KAM 定理使天体力学家高兴，却使统计物理学家失

^{*} 可参阅 Lichterberg 和 Lieberman 著：Regular and Stochastic Motion。

望。因为统计物理学家认为没有相互作用的理想系统虽然不会趋于平衡，只要计入无限小的相互作用，系统就可能趋于平衡。但是 KAM 定理却指出，无限小相互作用的系统的运动仍可能限于 n 维环面上，它与理想系统的情况很接近，因此不可能在 $2n-1$ 维等能面上求平均（除非 $n < 2$ ）。即统计物理学中的微正则系综的基本假设不成立。

由此可见，不可积系统要出现随机性，还得从 KAM 定理不成立的情形来寻找。也就是说，要从它成立的两条件得不到满足的情形来寻找随机性。我们首先着重分析第二条件（16·12）成立与否的问题。

3. 庞卡莱-柏克霍夫 (Poincare-Birkhoff) 定理

为分析形象计，最好用庞卡莱映象并先讨论 $n=2$ 的情形。取 p_2 和 q_2 为常数的 (p_1, q_1) 平面为庞卡莱截面。对于可积系统 H_0 ，它在此庞卡莱截面上的截迹为一圆，圆半径可取等于 J_1 。 H_0 在

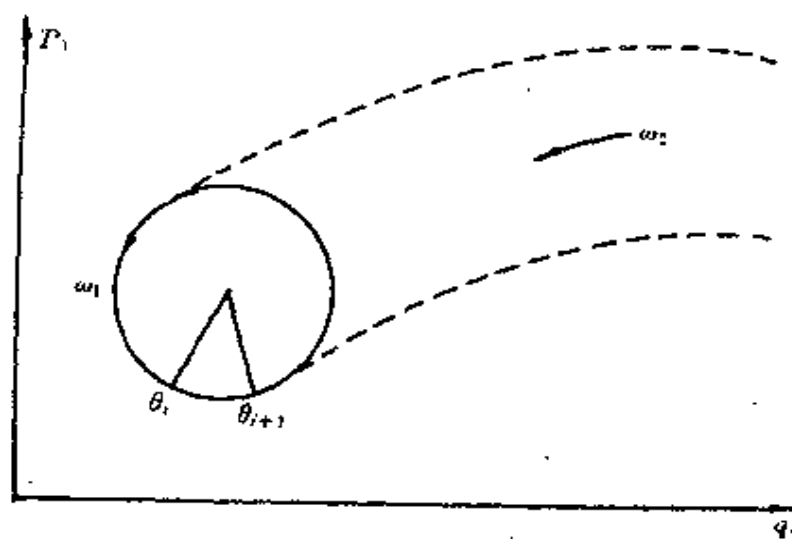


图 16-2

卡莱截面上的映象为 (图 16-2)

$$r_{i+1} = r_1 \quad (16 \cdot 13)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

或

$$\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (16 \cdot 14)$$

T 表示 H_0 的庞卡莱映象, 式中频率比 (即转动数 α) ω_1/ω_2 与圆半径有关, 因

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\partial H_0(J_1, J_2)}{\partial J_1} / \frac{\partial H_0(J_1, J_2)}{\partial J_2} = f(J_1, J_2)$$

因 $H_0(J_1, J_2) = E$, 故 $J_1 = J_2(J_1)$, 从而

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = f(J_1, J_2) = F(J_1) = F(r) \quad (16 \cdot 15)$$

当条件 (16 · 12) 不成立, α 为有理数时:

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{g}{h}$$

(g 和 h 均为整数), 则

$$T^h \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{cases} r_i \\ \theta_i + 2\pi \frac{g}{h} h = \theta_i + 2\pi g \end{cases} \quad (16 \cdot 16)$$

即环上任意点 (r_i, θ_i) 都是 T^h 的不动点。

现在考虑微扰 ϵH_1 的作用, 此时庞卡莱映象应为

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + \epsilon f_1(r_i, \theta_i) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + 2\pi \alpha(r_i) + \epsilon f_2(r_i, \theta_i) \end{aligned} \quad (16 \cdot 17)$$

或

$$\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix} = T_\epsilon \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (16 \cdot 18)$$

T_ϵ 是考虑微扰后 H 的庞卡莱映象, f_1 和 f_2 由 H_1 决定。对于不同的 r , T_ϵ 作用结果自然不同。试分析三个相邻不同圆上的点的庞

卡莱映象 (图 16-3), 设中间的圆 C 的转动数为

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{g}{h}$$

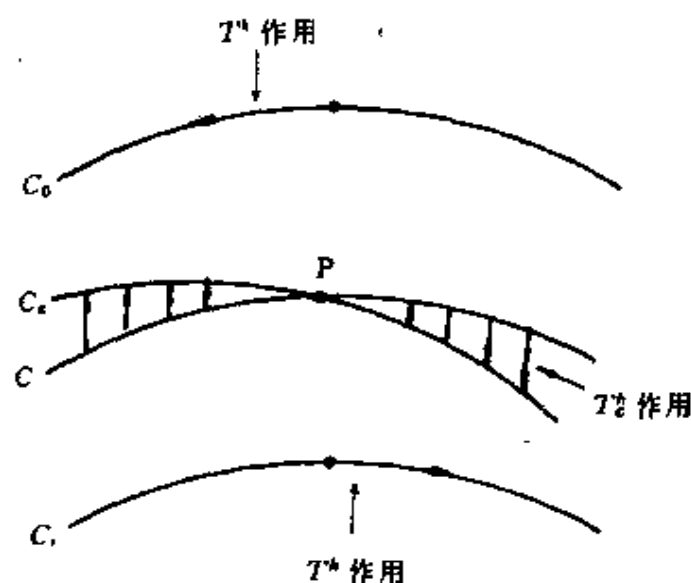


图 16-3

对于外圆 C_0

$$\alpha > g/h$$

对于内圆 C_i

$$\alpha < g/h$$

因为 T^h 保持 C 上的点不动, 因此它要使 C_0 上的点逆时针方向转动, 而使 C_i 上的点顺时针方向转动。把微扰考虑进来, 由 T^h 不可能使 C 上所有点都保持不动。设 C 上的 P 点在 T^h 作用下保持不动。由于 H_0 和 H 都是保守系统, 它们在相空间的体 (面) 积都应保持不变, 即 T 、 T^h 、 T_i 和 T^h 的作用都应保持庞卡莱截面上截迹的面积不变, 于是圆 C 在 T^h 作用下将变成 C_0 。设

$$T_1^h(C_1) = C_1^h \quad (16 \cdot 19)$$

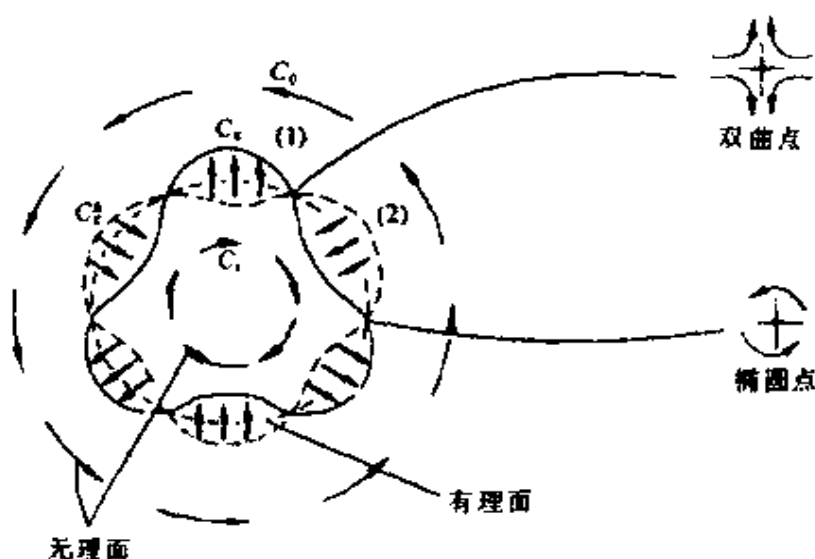


图 16-4

C_1^h 与 C_1 面积相等，它们必在偶数个点相交（图 16-4），这些点就是 T_1^h 的不动点。 C_1 上其他点在 T_1^h 作用下的变化如图中箭头所示。不动点附近不在 C_1 上的点在 T_1^h 作用下的变化如图中虚线所示，即 C_1 和 C_1^h 的交点（ T_1^h 的不动点）是交替地为椭圆点（中心点）和双曲点（鞍点），椭圆点被附近的一些闭曲线所包围。

由此可见，当转动数为有理数〔条件（16·12）不成立〕时，即使微扰将使环面严重变形，但总有偶数个点保持不动。这就是庞卡莱-柏克霍夫（Poincaré-Birkhoff）定理（1935 年）。

T_1^h 继续作用结果又如何呢？椭圆点附近是被一些封闭曲线所包围，这些闭曲线的转动数 α 又有有理数和无理数之分。 α 是有理数〔即 KAM 定理第二条件（16·12）不满足〕的闭曲线（环）又

将像刚才所说的 C_i 那样, 在 T_i^* 映象下 (代表微扰作用下的运动) 出现一些被小环所包围的椭圆点和同样数目的双曲点 [图 16-5 的 (a) 到 (b)]。再一次 T_i^* 映象, 每一个椭圆点附近又重复这一过程 [图 16-5 的 (b) 到 (c)]。如此下去, 随着时间的演进, 便出现了无穷层次的自相似结构。

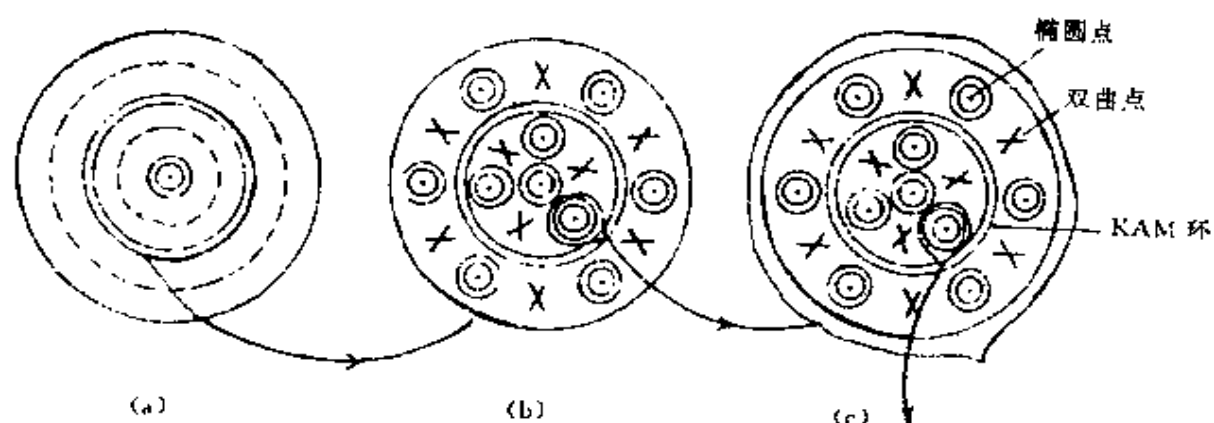


图 16-5 转动数 α 为有理数的环的演化以及新产生的椭圆点和双曲线图形所显示的自相似性

再看双曲点附近的情形。双曲点是稳定分界线 H_s 和不稳分界线 H_u 的交点 [图 16-6 (a)]。每一分界线延伸后自然不会与其自身相交, 因否则在一定的初始条件下系统的运动就不可能是唯一的。 H_s 经无数次折迭后可以与另一 H_u 相交 [图 16-6 (b)], 这样的交点称为单褶点 (homoclinic point)。实际上这样的单褶点有无穷多个。于是由双曲点及其附近发出的轨道具有极复杂的结构。

由此可见, 当转动数 α 为有理数 (或接近有理数) 时, 也就是 KAM 定理满足的第二条件 (16·12) 得不到满足时, 随着时间的演化, 运动变得越来越复杂: 椭圆点附近的有理环面一次一次演变为新的小环面和双曲点, 双曲点附近发出的轨道具有极不规则

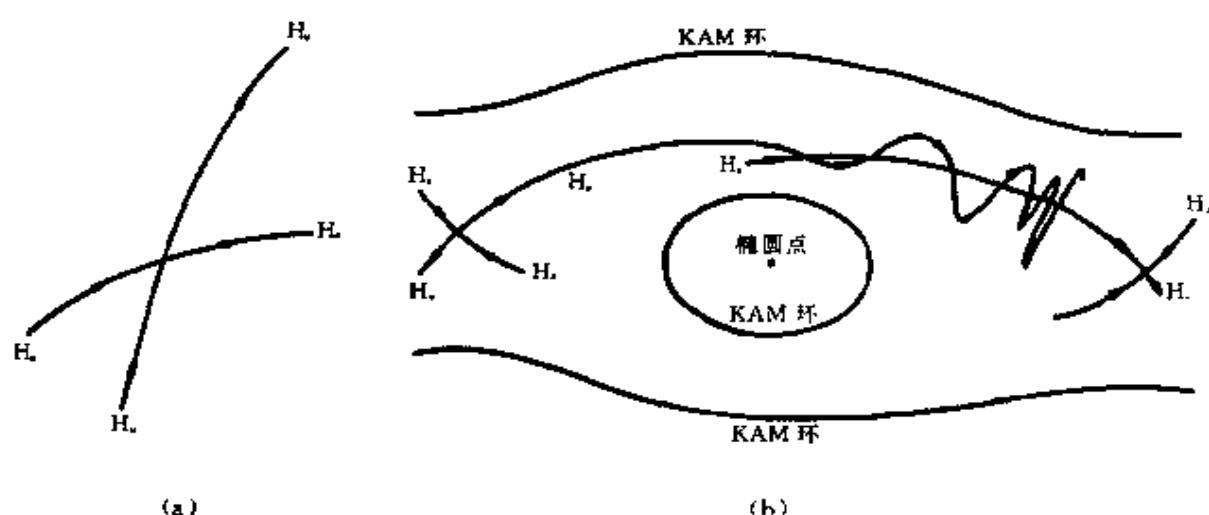


图 16-6 双曲点和单褶点

的形状，这些轨道把椭圆点附近的环面包围成一些岛屿，而轨道自身又被限制在一些所谓 KAM 环面之间（图 16-7）。

不可积保守系统在不满足 KAM 定理第二条件（16·12）时（即在频率共振或接近共振时）运动的这种复杂性在很久以前就已为庞卡莱（上世纪末）和柏克霍夫（本世纪二三十年代）所指出，现代计算机求解运动方程则进一步证明了此复杂性，并且明显而精确地给出演化情况和具体结构，图 16-7 即是一例。

4. 阿诺德（Arnold）扩散

但是上述分析是在 $n=2$ 的情形进行的。此时保守系统的等能面是 $2n-1=3$ 维。所有复杂的轨道都应在此三维等能面（体）上。因此可以想像，保守系统的等能面是被 KAM 环面所包围成被分割成若干部分。 $n=2$ 时的等能面可能就是图 16-1(b) 的二维环面

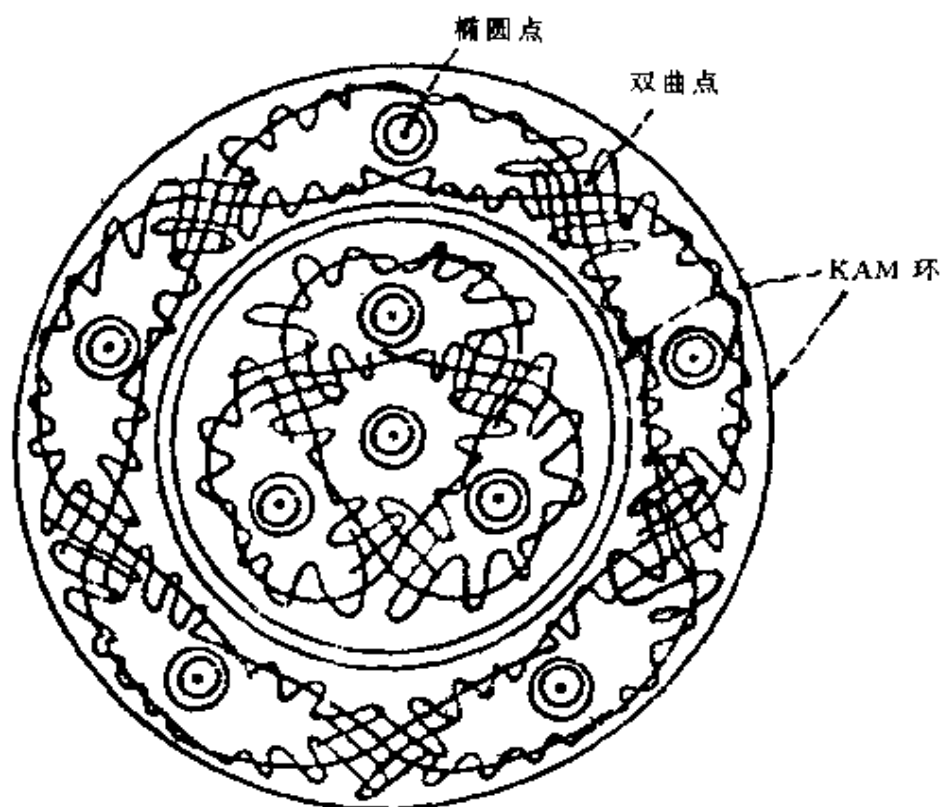


图 16-7 不可积系统

所包围的三维环体。由此也可见，即使不可积保守系统在共振条件下运动很复杂（图 16-7），但运动轨道毕竟还是被一些 KAM 环面所包围而限制在等能面（体）的一定区域内。从而虽然从局域看，运动轨道很复杂；但从整个空间总体看，各轨道还是限制在等能面的小范围内，即运动还是具有一定规则性和稳定性。所以在 $n=2$ 的情形还难于断言不可积保守系统要出现混沌（随机性）。

但是当 $n \geq 3$ 时，情况就不同了。如以 $n=3$ 为例，此时等能面是 $2n-1=5$ 维，而 KAM 环面是三维的。因此 KAM 环面不可能把等能面分割和包围住。这类似一些一维的直线可以把二维的等能面分割或包围〔图 16-8 (a)〕，但一维直线不能把三维等能面

(体) 分割和包围 [图 16-8 (b)]。因此 $n \geq 3$ 时各 KAM 环面之外的等能面 (体) 变成了单连通区, 称为阿诺德网。即由双曲点附近发出的复杂轨道可以在各 KAM 环面之间穿越而达到整个等能面 (体)。这种在各 KAM 环面之间穿越运动称为阿诺德扩散 (图 16-9)。因此, 对于 $n \geq 3$ 的不满足 KAM 定理第二条件 (16·12) 的不可积保守系统, 由于阿诺德扩散, 运动各轨道都将达到整个等能面, 这就是各态历经和随机运动, 而且这种随机运动具有无穷层次自相似结构。由确定性运动方程表征的这种具有自相似性的随机运动就是混沌。

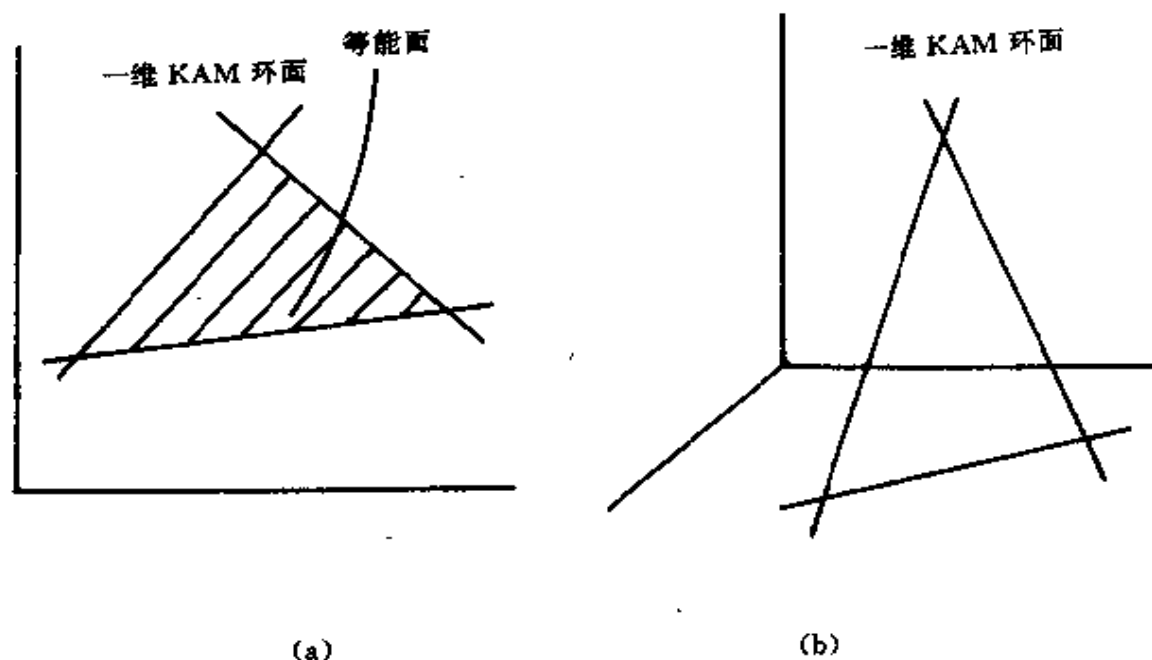


图 16-8

再看看 KAM 定理要求的第一条件。如果加大微扰, 计算发

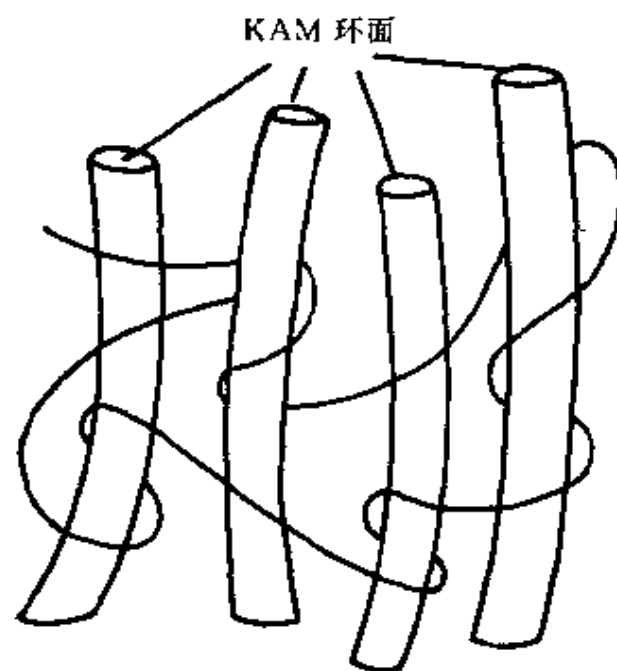


图 16-9 阿诺德扩散

现, 各 KAM 环面相互靠拢, 最后各 KAM 环面相接面遭破坏, 从而被这些环面分隔开的不规则运动层将融合在一起, 以至最后将充满整个等能面 (参考图 16-10 各图)。

由此可见, 对于保守系统, 除了可积系统和满足 KAM 定理条件的近可积系统外, 在 KAM 定理条件不满足的情形下, 系统的运动将是随机的混沌运动。

5. 实 例

埃农和海尔斯 (Heiles) 于 1964 年曾研究过两个线性谐振子为三次项所耦合的问题。此系统的哈密顿为 (两振子的质量均约化为 1)

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + (q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3) \quad (16 \cdot 20)$$

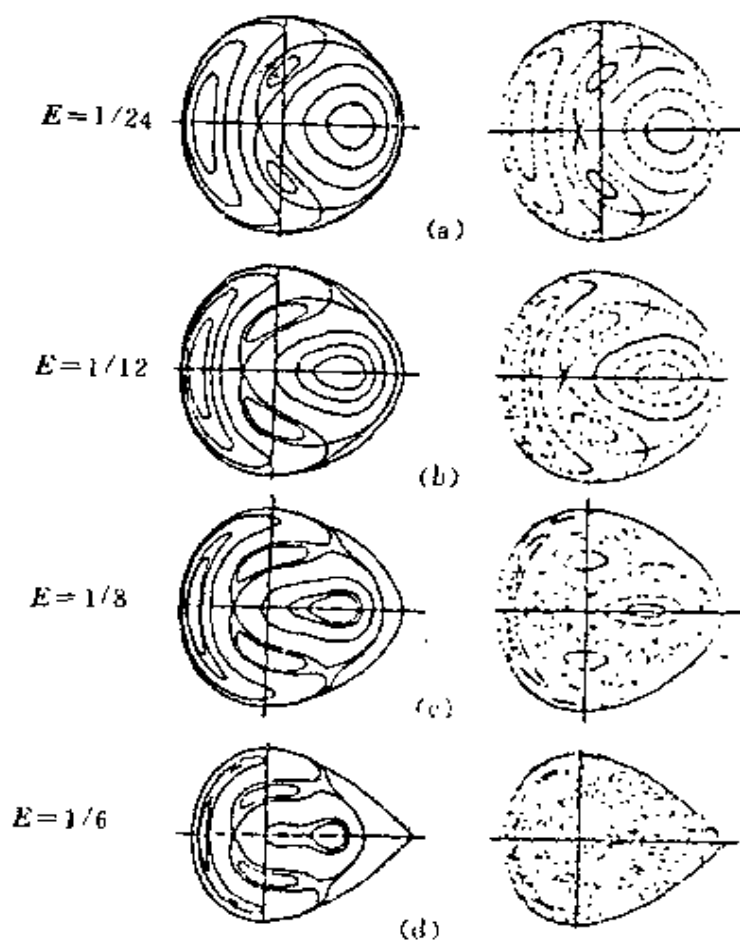


图 16-10 埃农和海尔斯振子

左侧和右侧分别是微扰理论计算结果
和计算机计算结果 (E 表示总能)

此时总能 E 即代表微扰的大小 ε 。计算指出 (Gustavson, 1966), 当 E 很小时 (如 $E=1/24$ 或 $1/12$ 时), 结果确如 KAM 定理所要求那样, 庞卡莱截面上是一些环面 (图 16-10 (a) 和 (b)), 这些 KAM 环面把运动分割在许多互不相通的区域 (层) 中。因此从总体看, 可以认为运动还是有一定的规则的。把 E 再加大如 $E=1/8$ 时, 有些环面被破坏, 同时形成围绕椭圆点的闭曲线构成五个岛屿。岛屿之间则是五个双曲点 (未画出)。

这些岛屿和双曲点便是由两振子频率处于共振或接近共振 [条件 (16·12) 不成立] 时形成的。在岛屿之外, 是一些表示无规运动的截点。可以认为, 此时是无规运动与规则运动共存。继续增大 E , 如图 16-10 (d) 是 $E=1/6$ 的情形, 各环面几乎都被破坏了, 各规则运动层融合在一起。整个截面都是无规分布的截点, 从而运动基本上是无规的随机运动了。

如前所说,过去一直认为,天体力学是规则运动和拉普拉斯决定论的典型领域。即使如此,天体力学也曾为多体问题的稳定性所困扰。伴随着数值计算方法和计算机的发展,人们也发现,即使是较简单的三体问题(不可积系统),其解也不一定是确定的。实际上,上面讲的 KAM 定理和在一定条件下 KAM 环面的破坏以及阿诺德扩散等情况对三体问题自然都适用,而且也确实发现某些三体问题出现了随机性。因此 1981 年在意大利召开的一次天体力学会上,天体力学家泽贝利 (Szebehely) 在列出了一系列根据后提出了这样一个疑问:天体力学是确定论的吗?

作为天体运动不稳定性和随机性的例子。我们可举出木星附近的小行星 (asteroids) 运动。人们发现,当小行星运行频率 ω 与木星运行频率 ω_J 之比为有理数时,即出现共振时, KAM 定理成立的第二条件 (16·12) 不成立。这样的小行星运动便是不稳定的混沌,从而使它们难于存在和被发现。观察发现,小行星数量确实存在所谓科克伍德 (Kirkwood) 间隙 (图 16-11)。

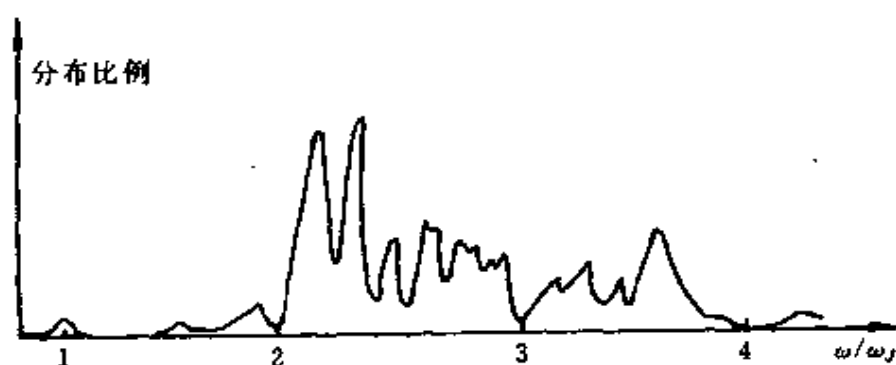


图 16-11 木星附近小行星的分布比例

土星光环是另一例子。光环、光环内的卫星和土星构成一不

可积多体系统。在共振条件下光环运动自然不稳定。观察发现,光环确被一些间隙所分隔〔称为卡西尼环缝 (Cassini division)〕,而土卫 7 的运动确是混沌。

此外,人们也认为某些天体的运动确具有混沌性质 (Kerr 1989; Laskar 1989; Sussman and Wisdom 1988)。

必须考虑运动不稳定性和混沌出现的另一典型例子是同步加速器和储存环中被加速粒子的运动。在加速器和储存环中,被加速粒子一方面沿轨道运动,其频率为 ω ; 另一方面,粒子还要受到各种作用 (粒子束中粒子之间相互作用和电磁场不尽规则的作用等,在储存环的对撞区则是粒子束之间对撞的 δ 函数形式的作用) 使它们运动偏离预定轨道,并在轨道的垂直截面上的运动有另一频率 ω_0 。粒子束沿轨道的规则运动表示它是可积系统,使它在垂直于轨道方向运动的作用则是微扰。由于后一作用的非线性,使人们必须考虑粒子束运动的稳定性是否会出现混沌的问题,因为这将严重影响粒子的规则轨道运动和寿命 (粒子在加速器和储存环中可能要绕行 10^{11} 周!)。因此如何避免共振和阿诺德扩散 (粒子的运动不是简单的二维,而是三维的), 已成为加速器和储存环设计时应仔细考虑的一个问题。

综上所述,除了耗散系统的运动可能收缩成奇怪吸引子而出现混沌外,保守系统也不都是作规则运动; 不可积系统在不满足 KAM 定理两条件的情形下,也会出现随机性 (混沌运动), 而且也会出现无穷层次的自相似结构。

§ 17 分 形

以上各节讨论的内容主要都是一个或多个变量如何随时间变化的问题, 我们还没有考虑一些实际存在的空间效应, 如物质

(或电荷和能量等)在空间的分布和流动(如扩散和对流等)。这反映在数学上就是我们只用到常微分方程或离散映象,而没有涉及有散度、梯度和旋度之类空间效应的偏微分方程,因此所谓具有分维的自相似结构也只是对相空间的奇怪吸引子而言的,而不是指真实空间的分布结构。§ 14 所述的康托尔集合和席尔宾斯基图案等五个图形(图 14-2~图 14-5)则可以是真实空间中的结构。除了这些理想的结构外,自然界某些实际结构和图形,如多孔材料结构、雪花图案、闪电的树状径迹、以至松花蛋上的松花图案等等,也都像前几节所述混沌那样,既具有一定的无规(随机)性,同时又是具有分维的自相似结构* 这就是所谓分形(fractal)结构。本节对此作扼要介绍。

1. 分 形

数学家曼德勃罗(Mandelbrot)在 70 年代首先提出了分形的概念并对其几何性质进行了较深入的研究。我们现在仅从物理角度介绍几种重要的分形结构,而不拟过多地涉及分形的定量分析,更不拟涉及分形的数学理论以及近年迅速发展的多重分形(或多标度分形, multifractal)的许多问题。

(1) 无规凝聚

电解时,电解液中的金属离子要向阴极沉积。如果阴极取适当形状(如针尖形),附着在阴极上的金属将从一处向四周不断增大,但很可能不取规则对称的形状。这是可以理解的,因为当阴

* § 15 提到的自然界中存在的规则结构(如鱼鳞云和带状云、矿石的层状结构等)可能是空间周期分布的结构。但实际上它们也可能不是完全周期性的分布,而是具有一些随机性的自相似结构,如云层就是。Hentschel 和 Procaccia 1984 年曾算出云层的维数在 2.37 至 2.41 之间,而云的界的维数是在 1.37 至 1.41 之间,看来这类云更像是分形。

极上附着的金属取某种形状时, 随后一个金属离子将沉积在其上哪一点是具有一定的无规(随机)性, 从而这种过程称为无规凝聚(Random aggregation)。这样, 凝聚的金属表面便不可能是完全规则对称的了。随着时间的增长, 凝聚的金属便可能形成树枝状之类图案。图 17-1 就是电解使锌微粒在针尖状阴极周围的二维空间生长形成的图案, 其上面各图是在不同时间生长的情况。

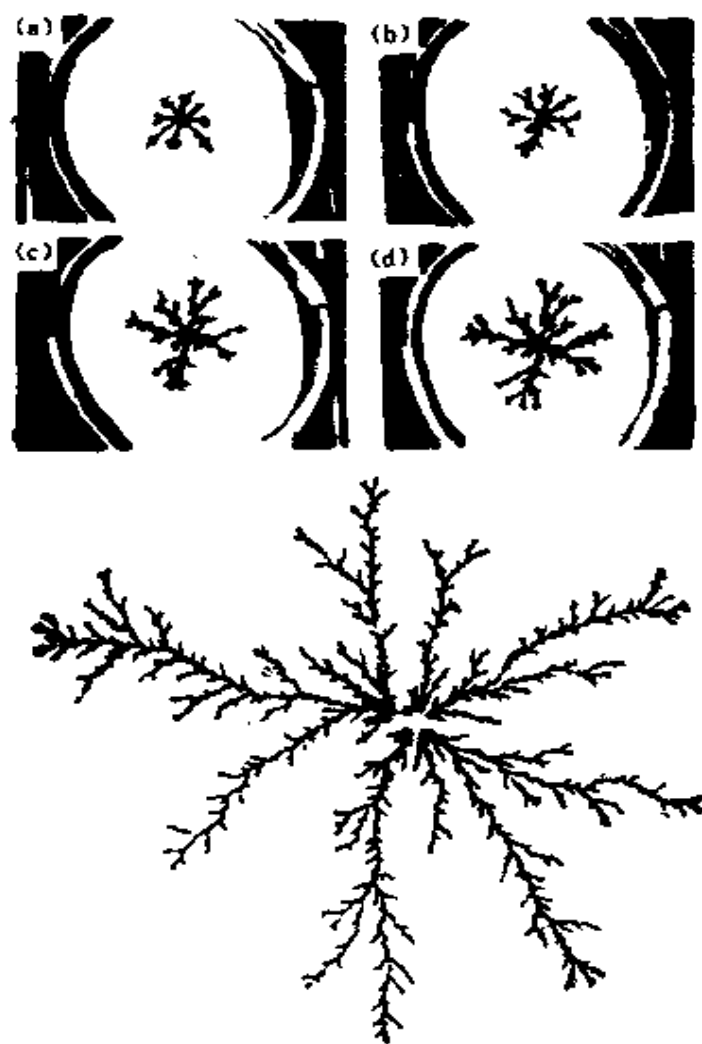


图 17-1 电解锌时在针尖状阴极周围形成的树枝状结构

闪电的径迹具有类似的性质和图形。

在煤烟粉尘中，碳微粒相互接触可凝聚成较大的碳粒，其他碳微粒与此碳粒的某部位接触又被凝聚在上面。由于接触部位的无规性，在碳粒增大过程中便可形成表面具有某种形状的微粒集团。

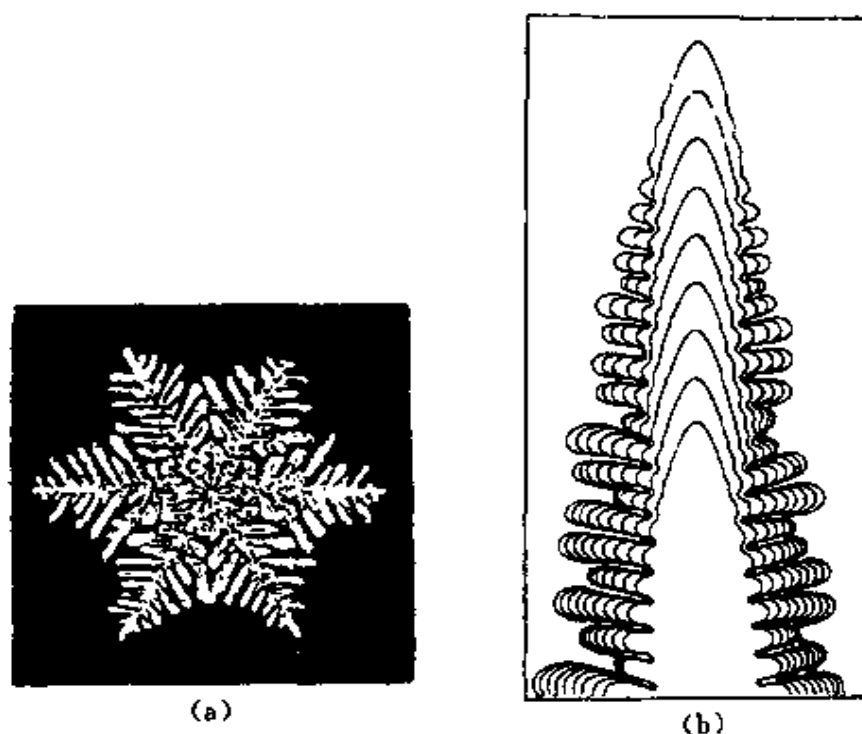


图 17-2

(a) 在过饱和水蒸汽中形成的雪花 (b) 在 NH_4Br 过饱和液中生长的树枝晶

雪花图案是无规凝聚的又一例子，图 17-2 (a) 是人工在过饱和水蒸汽中形成的雪花图案。此外，像树枝晶体生长〔图 17-2 (b)〕、高分子聚合物和生物大分子（如核酸和蛋白质）的链状结构、细胞增殖与分化形成的各种生物器官的各种结构和形态，都可看作是无规凝聚形成的。如血管、神经细胞的树突、神

经细胞组成的神经网络、肺部的支气管树、心脏中希氏束和浦肯野纤维组成的导电系统、肠壁绒毛、肝脏里的胆管、植物的叶脉、蕨类植物形态和树木的分枝形态等等都是。

(2) 无规界面网络

人们早就知道,大量金属都是多晶结构〔参考图 17-3 (a)]其晶粒的排列是无规的但又具有一定的自相似性。同样,铁磁材料的磁畴排列也是无规的〔参考图 17-3 (b)]。此外,像某些合金、物理吸附涂层和化学吸附涂层等都具有类似的结构。我们称这类既无规又有自相似性的界面结构为无规界面网络 (Random network of interfaces)。

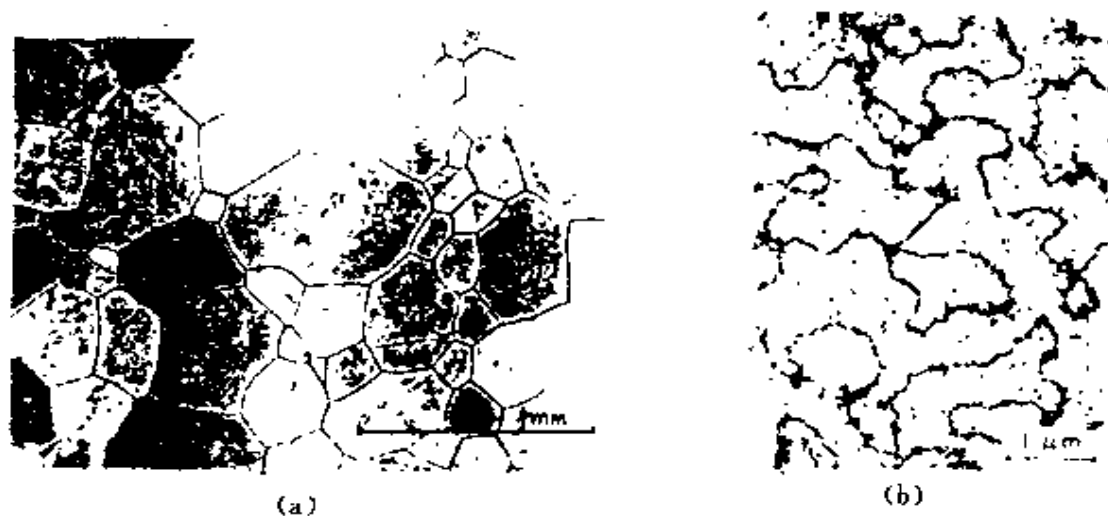


图 17-3

(a) 铝的多晶结构 (b) Fe—Al 合金的磁畴

像多晶体和铁磁材料磁畴这类无规界面网络结构的形成,一般都是在相变温度以下(如经粹火等热处理)的远离热力学平衡条件下实现相变的。在最后达到的平衡态中,可能存在不止一种的有序结构。因此趋向平衡的有序变化过程实际上也就是这些有

序结构在相互竞争中成长的过程。从而最后的状态便是不同有序结构共存的状态。这些有序结构的成长固然受热力学规律特别是表面物理和稳定性理论等支配，但界面网络的具体形式，不可能由这些定律和方程所能完全决定。因为系统内部和环境的涨落，特别是初始状态涨落的逐次不断放大，必然要影响各有序结构的大小、形状以至界面网络的形状。因此界面网络的无规性是状态存在涨落的必然结果。当然，这种无规性完全不影响系统按系综平均的一些性质。

(3) 多孔材料

多孔材料 (Porous materials) 与无规界面网络的界面结构有相似之处。某些岩石 (如砂岩)、煤和陶器等属于这类材料。多孔材料吸附水时，就具有导电性。而岩石的导电性又是找地下水、石油和某些矿物资源的重要手段之一。因此研究多孔材料的分形结构和其分维，对指导实际地质工作也是很有意义的。

(4) 粗表面

自然界和实际生活中存在许多粗糙表面，如月球上的麻脸表面，地球上各种地貌 (山峦起伏、沙丘……)，许多物体的表面，金属断裂后的断裂面，等等。显然，表面越粗糙，其实际 (有效) 面积也越大。当用不同标尺测量一个粗糙表面的面积时，其结果将随标尺的大小不同而不同，这一性质表明粗糙表面具有分维、表面也是分形结构 (见后)。

增大物体表面粗糙性以增大其有效面积往往具有很重要的实际意义，如在化学反应中增加参与反应的物质特别是催化剂的有效面积对增大反应速率是极重要的。电极表面的粗糙程度还影响电极——电解液之间的低频阻抗。使材料具有大量孔隙和皱褶是增大有效面积的极有效方法之一，活性炭被广泛用作吸附材料，道理即在于此。

(5) 渗流集团 (Percolation cluster)

渗流现象的提出是源于金属粒子与绝缘粉末的源合体的导电性问题。当金属成分低于某一阈值(约占体积的 30%)时,系统不导电;当金属成分高于此阈值时,系统开始导电,而且导电率随金属成分增加而急剧上升。这种现象还可能在某些无序固体的金属—半导体转变中起作用。

渗流现象自然与这类材料的结构(金属粒子在绝缘粉末中的分布)有关。一种数学模型为:设粒子是分布在规则的方形网格(如二维情形下的围棋盘)上,每一格点有被金属粒子占住或空着的两种可能,设它们的概率分别为 p 和 $1-p$ 。 p 自然与导电粒子的密度有关,与相邻格点是否被占住无关。当两相邻格点都被导电粒子占住时,这两点间就是可导通的或可流通的。否则就是不通的,这样被导电粒子占有的格点有可能是孤立的。也可能组成二个、三个、四个……相互连通的集团,有 s 个相连格点被导电粒子占住的集团称为 s 集团。很明显, s 集团的数目既与整个网格的大小有关,又与 p 有关。 p 小到接近于零时,大多数被占住的格点将是孤立的, s 大的集团不可能存在,因此这时主要只是 $s=1$ 的集团。 p 增大, s 大的集团出现的可能性增大。 p 接近 1 时,所有被占住的格点将被连通而组成一大的($s \rightarrow \infty$)集团,它从整个网格的一边一直延伸到另一边,这时整个网格才是导通的。可见,对于大的网格来说,仅当有一个 s 趋于 ∞ 的集团(∞ 集团)出现,它才是可导通的。所以 $s \rightarrow \infty$ 的集团就是**渗流集团**。图 17-4 就是在二维四方网格上模拟得到的渗流骨架(backbone)。 p 比 1 小一些时(如 $p=0.6 \sim 0.8$),除存在 s 为有限整数的集团外,也可能同时出现 $s \rightarrow \infty$ 的渗流集团。因此可以认为,存在一个 p 的临界值 p_c ,当 $p < p_c$ 时,不存在渗流集团;只有当 $p > p_c$ 时,才可出现渗流集团。所以临界值 p_c 就相当于相变点,可见,上述数学模型(所谓位点

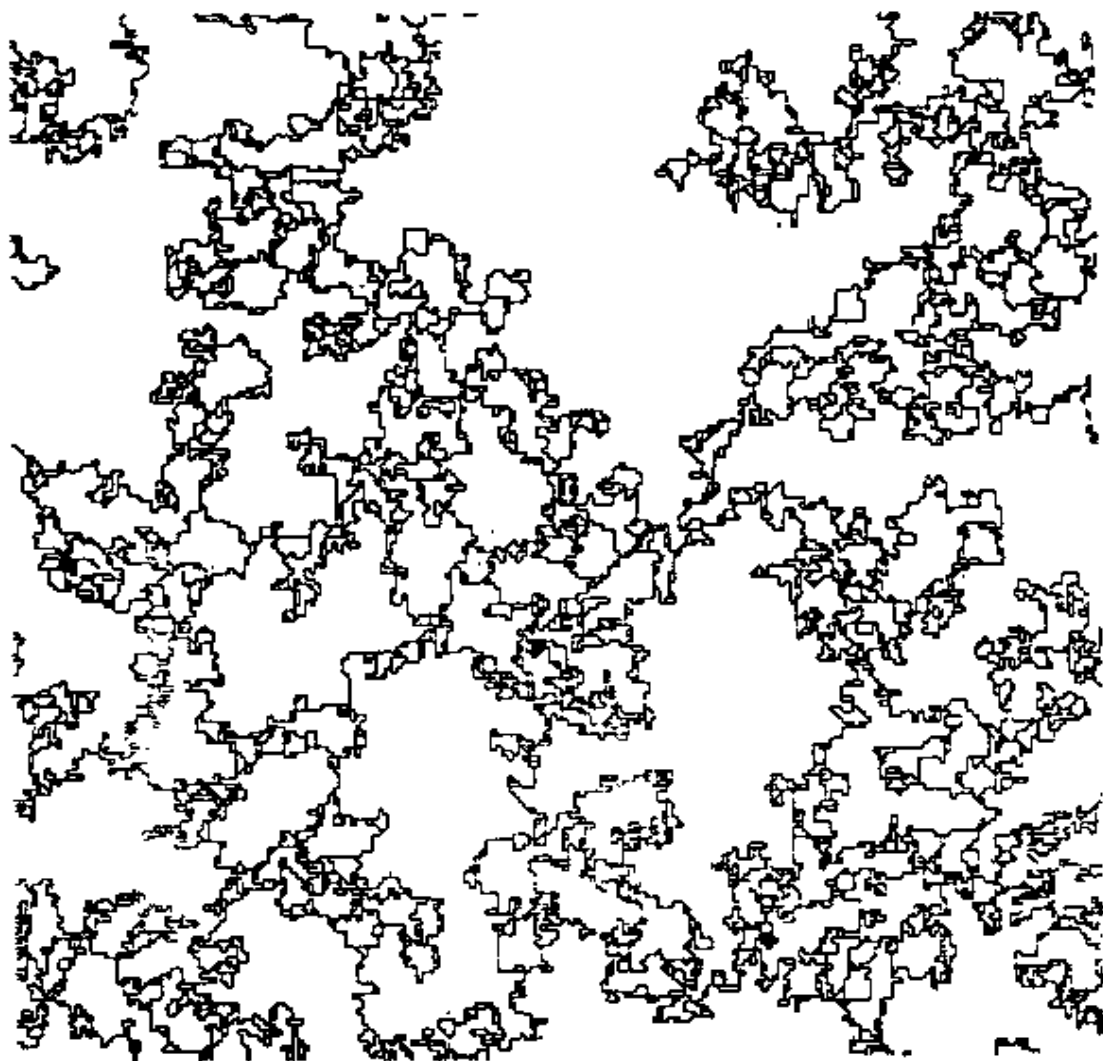


图 17-4 二维方形网格上的渗流骨架

渗流模型) 结果与上面讲的实验观察到的渗流现象相符。据此模型, 还算出了 $p > p_c$ 时导电率为

$$G(p) \propto (p - p_c)^\mu$$

此处 $\mu = 1.2$ (对于二维网格) 和 $\mu = 1.7$ (对三维网格)。同时还求出了渗流网络的维数 d , 结果 d 是与真实空间的维数 D 有

关的分数。如 $D=2$ 时, $\alpha=1.9$; $D=3$ 时, $d=2.5$ (不同人计算结果 d 稍有不同)。

(6) 粘性指。将一种低粘滞性的流体注入高粘滞性流体中, 在一定条件 (由两流体的粘滞系数和表面张力系数, 注入速度等决定) 下, 其界面可能形成手指状图形。这就是粘性指 (Viscous fingering)。图 17-5(a) 和 (b) 分别是空气注入甘油和水注入一种高粘滞溶液中形成的粘性指。

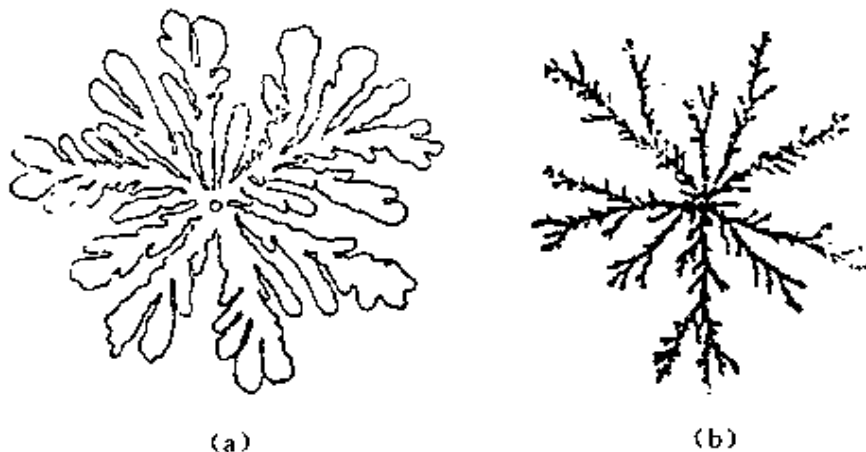


图 17-5 粘性指

(a) 空气注入甘油 (b) 水注入高粘滞溶液

可以看出, 粘性指与无规凝聚的树枝状结构相似。实际上它们的机制也确相似, 都可以用类似的模型 (如下面讲的 DLA 模型或 DBM 模型) 模拟得到。

油田注水是石油开采中的一项重要措施。如果注水出现粘性指, 则开采效果将大受影响。因此改变工艺参数 (如注水压力和注水位置等) 避免粘性指的出现, 对开采效果有很重要意义。

2. 分形和混沌

上述一些结构和图形, 有的是凝聚成具有复杂结构或表面的

集团（如碳黑），有的是树枝图案，有的则是网状结构。也还有其他一些形式，如起伏的沙丘、麻脸状的月面、曲折的海岸线（见下面）和各种地理上的分界线和材料断裂时的表面和裂纹（大 Z 字形套小 Z 字形），等等。虽然它们的形态各异，但是却有着共同的特点，这就是：每一结构或图形的整体或其一部分虽不像 § 14 的康托尔集合等那样各部分具有严格相似的形状，但毕竟具有明显的自相似性，即从统计意义上说（从总的形状看而不是从具体细微末节看），每一结构或图形在某一尺度上的形状与其更大或更小尺度的形状相似。这种统计意义上的自相似性有时被称为无规自相似性，而像康托尔集合等那样严格的自相似性则被称为有规自相似。所谓分形，就是具有某种（有规的或无规的）自相似性的结构或图形*。当然，我们在本节只讨论具有无规自相似性的分形。

以前各节讨论的混沌是由决定论方程得到的具有随机性的时间上的非周期过程。本节讨论的分形则是空间中的结构或图形，其成长过程固然也遵从一些决定论方程，如粒子或电荷之间相互作用规律和粒子的运动方程、热力学方程以及表面物理某些规律等，但同时其自身还遵从随机性规律，这是两者不同之处。然而混沌与分形也有一些共同之处：（1）它们都是非线性方程所描述的非平衡过程及其结果；（2）混沌运动的随机性与初始状态的涨落密切相关（参考 § 9 和图 9-1），分形结构的具体形状或其无规性也密切与初始状态的涨落有关；（3）混沌运动的奇怪吸引子和分形结

* 更普遍的分形定义还应包括所谓自仿射分形，即其子集（一部分）在仿射变换下与原集合全等的集合称为分形。或者说，分形是其子集在不同方向以不同倍数放大与原集合全等的集合。当各向放大倍数都相等时便是自相似分形。本书正文是采用了常的自相似分形概念。

构都具有自相似性。实际上,混沌运动也就是具有不同时间标度的无规自相似性。这种自相似性表明两者都具有标度不变性或标度对称性,即它们没有特征时间或特征长度,或者说改变测量单位或标度时,其结果不变* (参考 § 12)。这从理论上说,也就是它们都可以用重正化群处理。因此如果把混沌广义地看作是具有自相似性的随机过程和结构,则分形也可看作是一种空间混沌。反之,由于混沌运动(服从决定性方程的决定性混沌!)具有在时间标度上的无规自相似性,它也可看作是时间上的分形。

由此还可以看出,无论是混沌还是分形,从它们具有自相似结构看,它们都并不是完全随机无序的,而是在一定程度上有序的(参考 § 15),只是不是周期性的有序。即混沌不是时间上的周期性有序,分形不一定是空间上的周期性有序。§ 15 谈到耗散结构是远离平衡态时的有序结构,这除了是指具有时间上周期性有序结构(如极限环型振荡)和空间上周期性有序结构(如某些生物组织)外,自然也应包括非周期性的混沌和分形。实际上,自然界存在的一些时间上振荡过程(如 § 15 提到的某些生物节律和地磁南北极对调现象等)和空间上的规则图形和结构(如 § 15 提到的某些云的规则结构和矿石的层状结构等),到底是周期性的还是非周期性的(混沌和分形),还有待进一步探讨。如有人(Chillingworth, 1980)分析认为,地磁南北极对调就是混沌现象。

还要指出,人(或其他生物)的许多组织或器官具有分形结构,这极有利于其工作。比如,循环系统中虽然大小血管总体积

* 当然,只有具有无穷层次自相似性的结构才具有真正的标度不变性(标度对称性),也才真正没有特征长度。但是自然界实际存在的各种分形结构,大都只具有统计自相似性,而不具有严格的无穷层次自相似性。也就是说,它们只在一定的无标度区才具有自相似性。因此严格说,这些分形结构不是没有特征长度的。

不到人体体积的 5%，但血管的树状分形结构使它能延伸到几乎与所有组织的细胞直接接触（最多不差三四个细胞）而且有巨大的表面积，从而使此循环系统能极有效地工作。肺支气管树及其终端分布的分形结构使得肺叶的体积虽不大，但肺的总有效面积却比网球场还大，从而使肺吸收氧的本领达到极大。此外，这类分形结构如部分出现故障，也不致影响全局工作，这也有利于人提高生存的能力。

另一方面，混沌已是许多生理系统工作的普遍特性。因为较之稳定定态和极限环型振荡，具有随机性的混沌可以在较广泛的条件下（如动力学方程中的参数可在较大范围取值）出现的运动状态，它具有较高的适应性，从而可使人（和其他动物）能应付一些不可预见的可变环境。如正常人安息时的脑电图是混沌的，各种精神（思维）活动脑电图则是在此混沌背景上加上其他图象，而癫痫病人在发病时的脑电图反而是非常规则地具有周期性。又如有人根据对许多人的测量发现，健康人的白细胞数目随时间涨落具有混沌特性，而白血病患者白细胞数却是周期变化的。再如近年一些人观测发现，健康人心脏跳动与其说是周期过程，严格说应是混沌的。

因此可以说，生命体中存在的大量分形结构和混沌过程是生物进化过程中选择适应的反映。

3. 分形结构的分维

大家都熟悉，没有自相似性的普通曲线的维数是 1，没有自相似性的普通曲面的维数是 2，等等。但是根据 § 14 关于维数的新定义和实际测量分析，具有自相似性的各种分形的维数不同于对应的没有自相似性的几何体（或集合）的（拓扑）维数。因此一般分形大都具有非整数维（也不绝对如此，见后面）。

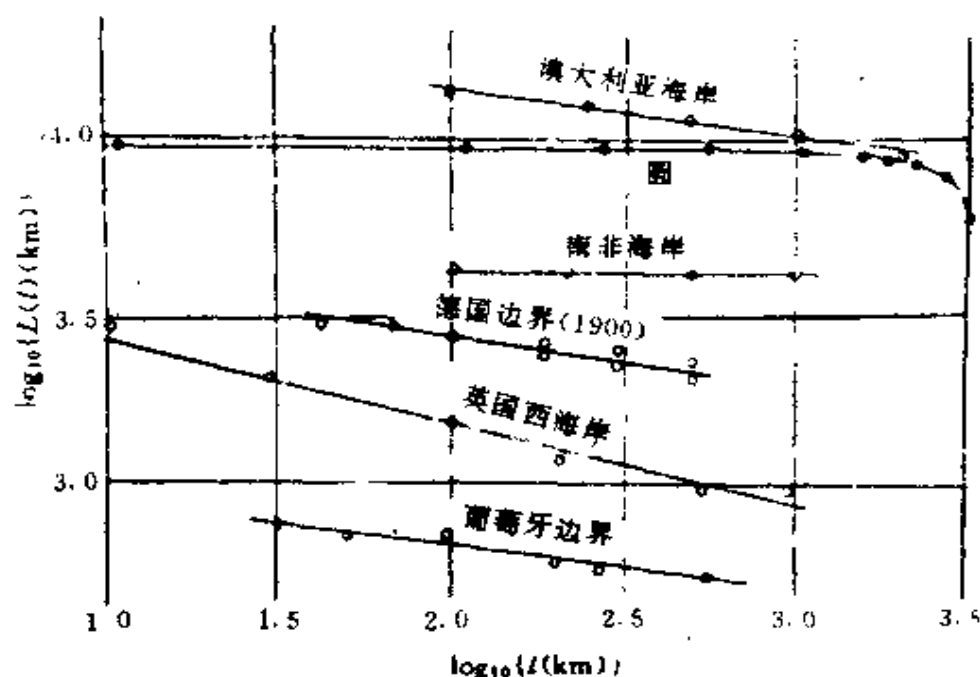


图 17-6 海岸线长度 L 与测量标尺 l 的关系

早在分形概念提出以前的 20 年代, 李查森 (L. F. Richardson) 在分析了大量数据后发现, 不同的人给出的同一海岸线或同一边界线的长度的数值不一样, 有时可相差 20%。曼德勃罗认为, 这是由于海岸线 (或边界线) 长度 L 与测量所用标尺 l 大小有关, 标尺越小, 测量结果越长。曼德勃罗分析了李查森搜集的测量数据后取 $\ln L$ 和 $\ln l$ 分别做纵横坐标画出 $\ln L - \ln l$ 曲线, 结果如图 17-6 所示。这些关系曲线大体都是直线, 斜率都是绝对值小于 1 的负数。这表示 L 和 l 的关系可表为

$$\ln L = \ln a + (1-D)\ln l, D > 1$$

也就是

$$L = al^{1-D}$$

对于普通的曲线(如圆),维数 $d=1$, l 极小时 L 趋于一固定值 L_0 。这就要求上式中 $D=d$, $a=L_0$ 。因此上式应为

$$L = L_0 l^{1-d} \quad (17 \cdot 1)$$

从而

$$\ln L = \ln L_0 + (1-d) \ln l \quad (17 \cdot 2)$$

这样求得的海岸线的维数一般在 1.1—1.5 左右,如英国和挪威的海岸线维数分别是 1.3 和 1.52。

一个地区(如岛屿或一个省、一个国家,等等)的边界和河流等都与海岸线类似,即它们都具有曲折的形状。而且如果取它们某一小部分放大后仔细观察,可以发现,它们在小尺度下仍然是曲折的。正是由于这种不同层次的曲折(无规自相似性),才引起用不同标尺测量结果不同。因此海岸线或地区边界的分维正是由于它们具有无规自相似性引起的。比如,科赫雪花的分形结构可以看成是“粗糙而生动的海岸线模型”(曼德勒罗语)(参考图 16-4 下部)。

由于边界具有分维,自然也影响到地区而积的测量数值,曼德勒罗曾给出了地区边界的周长 L 和维数 d 、地区面积 A 与测量标尺 l 之间的关系:

$$L(l) = Cl^{1-d} A(l)^{d/2} \quad (17 \cdot 3)$$

式中 C 为常数。上式也适用于一条河流流域的面积 A 与其中最长河流的长度 L 之间的关系。

为了测量某结构或物体(包括海岸线、河流、地区边界、地区而积、云层、树木或其他分形结构)的“大小”或维数,通常可将平面(或空间)分成大量等而积(或体积)的小网格(如正方形或立方体),数出分形结构所占非空网格数 N , N 的大小既由

分形结构决定, 也与每个网格的线度 l 的大小有关。根据式 (14·5) 和 (14·10) 应有

$$N(l) \propto \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^d} \quad (17 \cdot 4)$$

$$d = \lim_{l \rightarrow 0} \ln N(l) / \ln \left(\frac{1}{l} \right) \quad (17 \cdot 5)$$

如有人测得雨云边周的维数是 1.35, 又有人测得人的动脉的分维是 2.7。

任意一个表面都有一定程度的粗糙, 其面积自然与测量标尺有关, 这已直接在分子水平得到证实。将同样大小的分子吸附在表面上形成单分子层。表面面积与分子大小和被吸附分子数都成正比。实验发现, 这样测得的表面面积与所用分子大小有关, 由此还测得许多物体或表面的维数都在 2 与 3 之间 (Avnir 等, 1984)。

克叶 (Kaye, 1984) 测得碳黑的细微粒剖面的维数是 $d = 1.18$ 。普菲夫等人 (Pfeiffer 等人, 1983) 测多孔吸附材料粗表面的维数时, 是让表面吸附一单分子层。测出吸附的分子数 N 与分子平均半径 r , 根据关系 $N \propto r^{-d}$, 可求出多孔材料的维数。用这种方法求得碳黑的分维是 2.25。

魏茨和奥利佛力亚 (Weitz 和 Oliveria, 1984) 则利用透射电镜 (TEM) 研究了金的胶态细粒的凝聚。图 17-7 上图就是这种凝聚集团的电镜照像。集团中金细粒大小是均匀的。魏茨和奥利佛力亚测量了像中各小集团的线度 L 并数出其中金粒数 N , 画出 $\ln(N) - \ln(L)$, 这样得到一直线 (下图), 其斜率为 1.75, 根据

$$N \sim L^d \quad (17 \cdot 6)$$

得到金细粒的胶态集团分形的分维是 1.75。

施塔普列顿 (Stapleton) 及其合作者 (1980 和 1985) 用类似

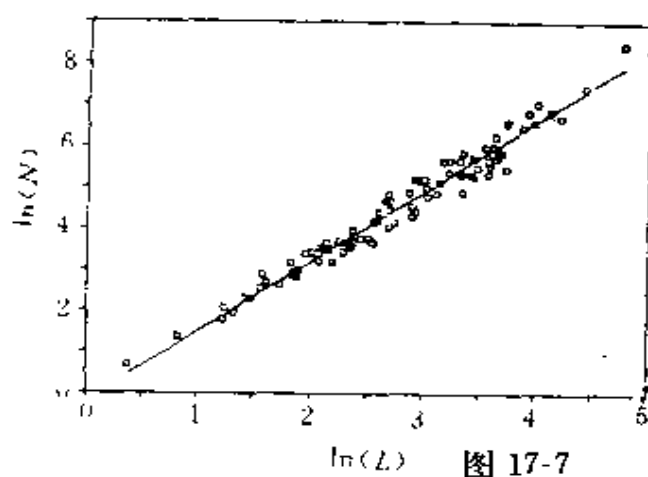
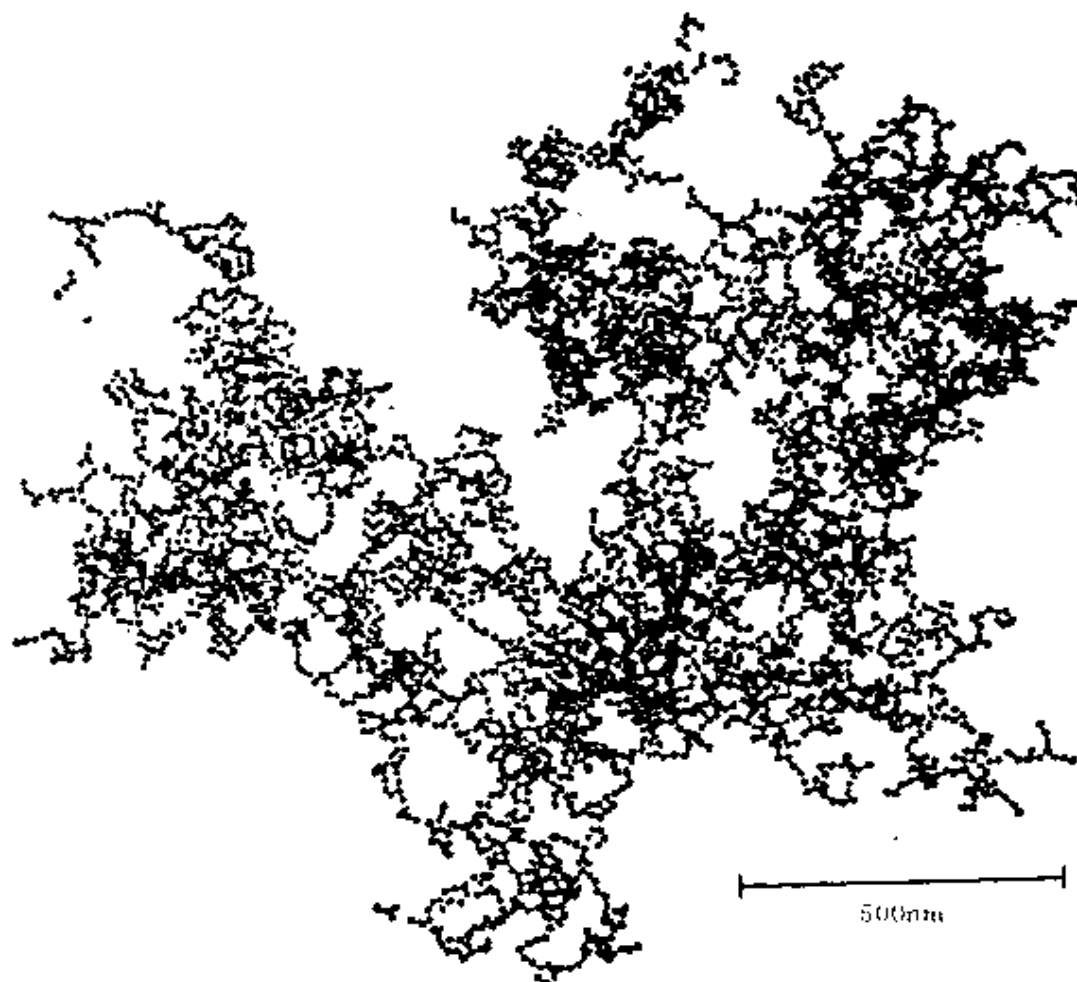


图 17-7

上图：金细粒的电镜像；

下图：数出上图中线度为 L 的集团中金粒数 N ，画出 $\ln(N)-\ln(L)$

方法测得多种蛋白质高分子骨架的分维。他们用半径 $R=ml$ 画同心圆 (l 是长度单位, m 是整数) 并数出在各圆中的碳分子数 N 。同样根据

$$N \sim R^d \quad (17 \cdot 7)$$

可求得各蛋白质的维数。但是这样简单测出的维数与长度单位 l 的大小有关。施塔普列顿等人改变 l 的大小直到得到最小的维数值, 这才是蛋白质高分子骨架的分维。结果它们在 1.2 至 1.8 之间。

也有人利用扫描电镜 (SEM) 测量多孔材料断裂面的分维, 得到砂岩的分维为 2.5~2.9。此外, 一些人也利用光和 X 射线的散射测得某些分形结构的维数, 这样测得硅粒的胶态集团的分维是 2.1, 褐煤的分维是 2.5。

综上所述, 具有自相似结构的分形与相应的没有自相似的几何体 (或集合) 的维数确实不同。曲线 ($d=1$) 具有自相似性 (如海岸线) 后, 其维数大于原来的 1。一个面有起伏 (如山地) 时, 其维数也大于原来的 2 (曼德勃罗认为不规则起伏表面的维数是 2.5)。另一方面, 一线段被分割挖空面具有自相似性时 (如 § 14 所述的康托尔集合), 维数变得小于原来的 1; 一个面被分割挖空变为具有自相似性图形时 (如 § 14 所述席尔宾斯基垫片和科赫雪花图案等), 维数也小于原来的 2; 面三维立体被分割挖空后 (如砂岩等多孔材料等), 其维数也小于原来的 3。所以分维的大小反映了分形结构所占空间的程度: 分形结构的维数越大, 空间被它占有的部分越大, 从而其结构越致密。

4. 无规行走和自回避无规行走

关于分形结构生长的理论研究, 近十年来有不少人做了许多工作, 也取得了可观的成就。下面两小节我们将仅就与无规凝聚

有关的问题略加介绍。

无规行走和自回避无规行走都是描述某些实际过程的模型，无规凝聚就是这样的实际过程。

无规行走 (Random walk, 简称 RW) 指一个人从某点出发无一定方向地行走，也就是说，他每次走动的方向是无规的 (随机的)，与前一次行走方向完全无关。

无规行走可以模拟某些实际过程，布朗运动可以看作是无规行走的典型例子。前面讲的一些无规凝聚也可近似地看作无规行走。如高分子聚合物，如果分子链之间没有相互作用，则分子链的排列便可近似地看作无规行走。

可以用下面简单的方法求无规行走的维数。设行走者从原点出发，他们走 N 步后离原点的总位移为

$$R = \sum_{i=1}^N r_i \quad (17 \cdot 8)$$

式中 r_i 表示第 i 步行走的位移。由于无规性，平均总位移应等于零： $\langle R \rangle = 0$ 。因此只能用均方位移 $\langle R^2 \rangle$ 来量度总的移动距离。因为

$$R^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2 + \sum_{i \neq j}^N r_i \cdot r_j \quad (17 \cdot 9)$$

设每次行走的距高都等于 a ： $r_1 = \dots = r_i \dots = r_j \dots = a$ ，在上式取平均时

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i \neq j} r_i \cdot r_j \right\rangle &= \left\langle \sum r_i r_j \cos r_i \cdot r_j \right\rangle \\ &= a^2 \langle \cos(r_i \cdot r_j) \rangle = 0 \end{aligned}$$

最后等式的成立仍是由于无规性使任意两次位移之间夹角余弦的平均为零。于是对式 (17·9) 取平均得

$$\langle R^2 \rangle = Na^2 \quad (17 \cdot 10)$$

或

$$N = \langle R^2 \rangle / a^2 \quad (17 \cdot 11)$$

因为 $[\langle R^2 \rangle]^{1/2}$ 表示实际行走的平均位移, 它可看作无规行走的范围 (也就是无规凝聚集团大小), 而每次行走距离 a 则可看作测量单位。于是将式 (17·11) 与式 (14·8) 比较可知, 无规行走轨迹 (或布朗运动轨迹) 的维数等于 2。此结果与真实 (欧氏) 空间是几维的无关, 即不管布朗运动是在平面上进行还是在空间中进行, 其轨迹的维数都是 2, 它也不像一般曲线那样是一维的。

在此也可看出, 虽然我们在前面说到, 分形是具有自相似的分维结构, 但如认为无规行走轨迹也是分形, 则此分形仍具有整数维。也就是说, 虽然一般说来, 分维大多数都是非整数的, 但也不是绝对如此, 只是其值与分形所在的真实空间的维数并不一定相等。

此外, 对于许多实际结构来说, 上述无规行走模型也过于简单。以高分子聚合物为例, 分子链的堆砌固然具有无规性, 但新增分子链不能与原来的重叠。即无规行走必须避开已经到过的点, 这就是自回避无规行走 (Self-avoiding random walk, 或 SAW)。

当欧氏空间为一维时, SAW 问题很简单, 即行走只能按一固定方向进行而不能折返。当欧氏空间维数为 2 ($D=2$) 时, SAW 可以模拟高分子聚合物被表面吸附的情形, 此时理论算得 SAW 的维数 $d=4/3$ 。当欧氏空间维数为 3 ($D=3$) 时, $d=5/3$ 。这可以看作是高分子聚合物自身的维数。施塔普列顿及其合作者 (1980, 1985) 根据一些蛋白质高分子的结构测出它们的维数都在 1.2 与 1.8 之间, 如免疫球蛋白分子的维数是 1.7, 这比 RW 给出的 2 要小, 而与 SAW 的结果相符。

把高分子聚合物溶于溶剂时, 高分子要卷曲成接近球形, 溶液的粘度与球半径有关。实验测得, 粘度与高分子的分子量的乘幂成正比, 乘幂的指数 ν 大致在 0.6~0.8 之间。理论分析得到, 指

数 ν 与维数 d 互为倒数。RW 和 SAW 给出 ν 分别是 0.5 和 0.6。可见对于高分子聚合物, SAW 比 RW 更符合实际一些。

以上关于 SAW 与 RW 相比 d 要小些而 ν 要大些,这表明由于自回避,SAW 结构比 RW 结构要松散一些,它不如 RW 结构紧凑。

5. 分形凝聚生长的计算机模拟

由于计算机的强大功能,使得人们得以利用它模拟关于分形结构的生长,并据以分析检验生长机制的理论是否正确。我们介绍几个这方面的工作。

(1) DLA 模型

1981 年魏顿 (Witten) 和桑德 (Sander) 首先提出了有限扩散凝聚 (Diffusion-limited aggregation, 简称 DLA) 模型,并用此模拟煤烟尘等的无规凝聚。他们是在二维方形网格(他们用三角形网格也得到同样结果)进行模拟的。初始状态是在网格的中央放第一微粒(种子),第二微粒放在离中央较远的任意格点上并进行无规行走。如果第二微粒走至第一微粒相邻的四个格点之一,它就被吸附在上面形成一个二粒子集团。如果第二微粒走至网格的周边,它就被移走而消失。同样引入第三微粒,当它走至二粒子集团的六个相邻格点之一时,它就被吸附而形成三粒子集团;当第三粒子走至周边时,它也被移走。如此下去,最后网格中央便形成了大量微粒的凝聚集团。图 17-8 是用 3600 个微粒模拟所得到的凝聚结构,这与图 17-1 实验观察到的结果符合得很好。利用密度相关函数可求得此二维欧氏空间的 DLA 模型的维数是 1.66,三维空间中的 DLA 模型的维数是 2.5。这种维数低于实际欧氏空间维数的松散树状结构的形成,其物理机制是所谓屏蔽效应:开始时由于随机性,某一方向的小枝出现了,接着来的微粒

被其尖顶部吸附的概率要远大于其侧部，这类似于电极的尖端效应。因此凝聚便以树枝状形式发展。

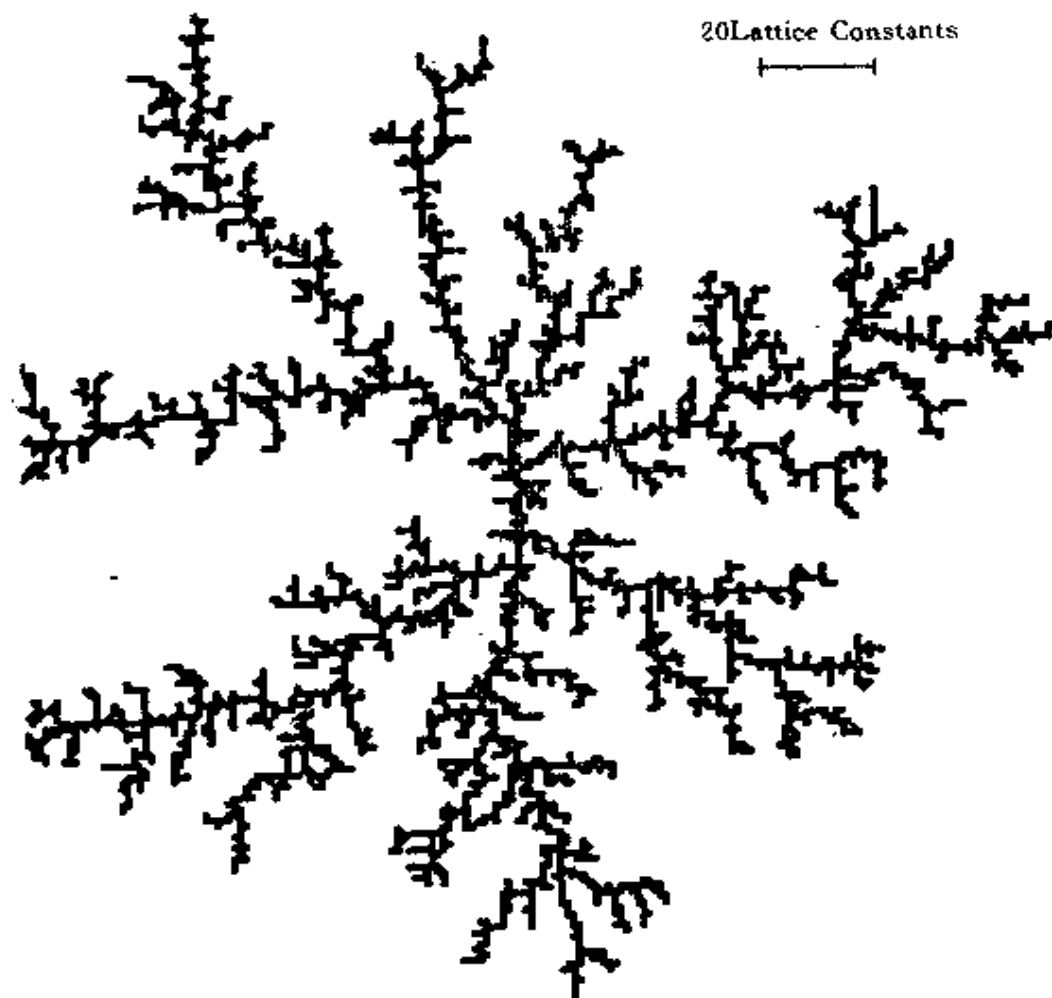


图 17-8 DLA 在二维方形网格上模拟无规凝聚的结果

(2) DEM 模型

伏斯 (Voss) 于 1984 年提出了一个关于树状电沉积模型 (Dendritic electrodeposition model, 简称 DEM)。在电沉积过程中, 设初始时生长点位于水平轴上, 粒子 (金属离子) 在上半平

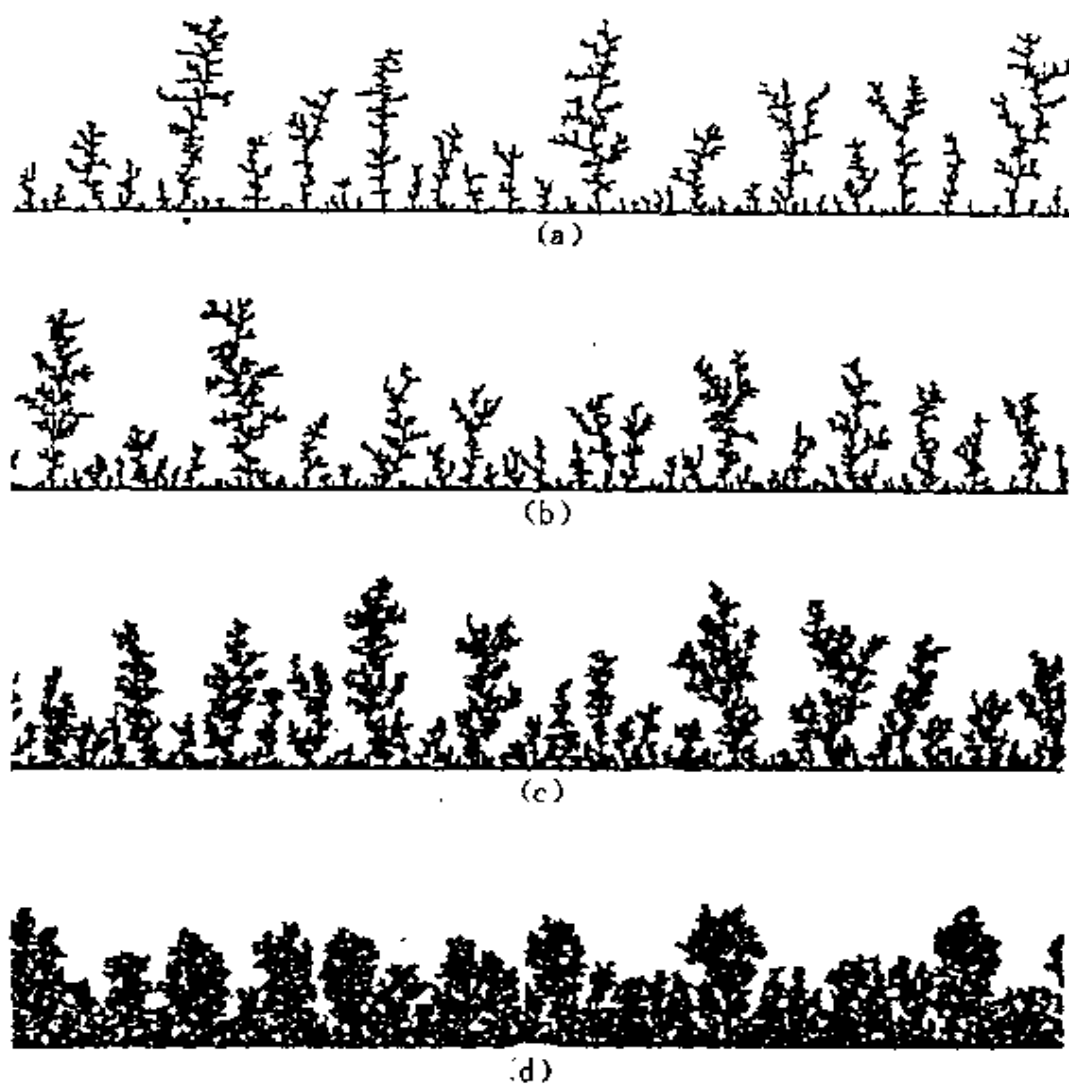


图 17-9 DEM 模拟沿水平轴生长的树枝结构

(越往上的图吸附概率越大)

面作无规行走。设粒子运动时不相互结合，只有当粒子与生长点接触时，它才以一定概率被吸附。如此沉积的粒子沿水平轴向上逐步生长并形成树枝状结构。图 17-9 就是以不同吸附概率模拟出的树枝状结构。

(3) DBM 模型

1984 年尼迈尔(Niemryer)等人得出了一个与 DLA 模型相似的电介质击穿模型(Dielectric breackdown model, 简称为 DBM)。设两电极的电势分别取恒定值 φ 和 φ_{∞} 。当电极附近电场超过某一定值时, 电介质中的少数载流子便在电极处凝聚并形成与电极等电势的导电成分。此导电成分的存在进一步增强了其周围的电场而导致新的载流子的出现和凝聚, 于是电极附近便形成了导电集团。这种导电成分的聚集和附近电场的增强两种相互促进的作用使导电成分的聚集雪崩式地发展, 从而出现了闪电形式的分形结构。

尼迈尔等人也是在二维正方形网格上模拟此过程。在电介质中, 电荷密度为零, 电势满足拉普拉斯方程。

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (17 \cdot 12)$$

设格点的晶格常数归一化为 1, 则上式变为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = & [(\varphi_{i+1,j}) + (\varphi_{i-1,j}) - 2\varphi_{i,j}] \\ & + [(\varphi_{i,j+1}) + (\varphi_{i,j-1}) - 2\varphi_{i,j}] = 0 \end{aligned} \quad (17 \cdot 13)$$

整理后得

$$\sum_s \varphi_{i+s} - 4\varphi_i = 0 \quad (17 \cdot 14)$$

边界条件可归一化为

$$\begin{aligned} \varphi_{\infty} &= 1, \text{ 在无穷远处的电势} \\ \varphi_0 &= 0, \text{ 在电极和附着的导电集团上} \end{aligned} \quad (17 \cdot 15)$$

集团邻近格点上的载流子附着在集团上的概率 p_i 是场强 $(\nabla \varphi)_i$ 的函数, 较简单的形式是

$$p_i \propto \frac{1}{N} (\nabla \varphi)_i \quad (17 \cdot 16)$$

N 是归一化因子, 以使 $\sum p_i = 1$ 。在一般情形下, 可取



图 17-10

(a) DBM 模型计算机模拟 (5000 步) 结果。 $d=1.75 \pm 0.02$

(b) 放在 0.3 mPa 的 SF_6 中的玻板表面放电的时间累积照像。

电极为圆形, 脉冲电压为 $30\text{kV} \times 1\mu\text{s}$, $d=1.7$

$$p_i \propto \frac{1}{N} (\nabla \varphi)^2 \quad 17 \cdot 17$$

式 (17·14)、(17·15) 和 (17·17) 就是 DBM 模型的基本方程。利用这些方程即可进行计算机模拟。当 $\eta=1$ 时, 尼迈尔等人得到图 17-10 (a) 的树枝状图形, 计算其分维得到 $d=1.75$ 。此结果与实验观察到的电介质中放电现象 (图 17-10 (b)) 符合得很好。令 $\eta=0$ 而且生长点仅限于集团枝梢的端点, 得到 $d=5/3$, 这与自回避无规行走结果一致。这是可以理解的, 因为根据式 (17·17), $\eta=0$ 表示 p_i 与方向无关, 所以这就是自回避无规行走。

(4) 集团-集团凝聚模型

米金 (Meakin, 1983) 认为, 在凝聚过程中, 不能认为最初

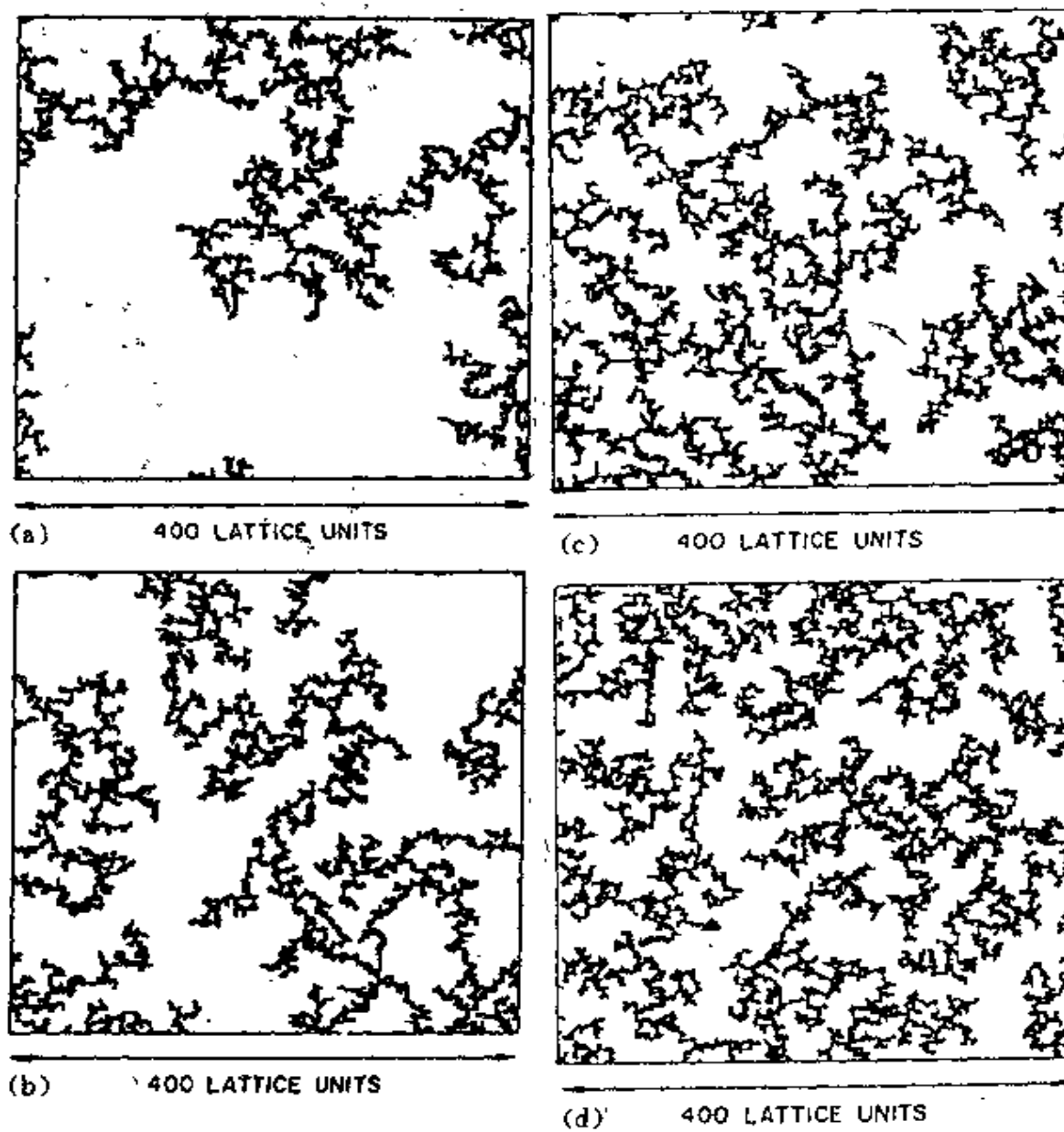


图 17-11 二维方形网格上模拟集团-集团凝聚模型

各图的总粒子数依次为 10 000, 15 000, 20 000 和 25 000, $d=1.4$

只有一个微粒当种子，而应是许多微粒同时作无规行走，一旦两微粒相遇就可形成集团。集团也可作无规行走，两集团相遇也可结合成更大的集团，这就是集团—集团凝聚模型 (Cluster-cluster aggregation model)。米金在 400×400 的二维网格上用计算机模拟了不同微粒密度下这一模型。当微粒总数分别为 10 000、15 000、20 000 和 25 000 时，所得结果分别如图 17-11 (a)、(b)、(c)、(d) 诸图所示。米金还求得在二维欧氏空间中，此模型的维数是 $d=1.4$ ；在三维欧氏空间中， $d=1.8$ 。这些都比 DLA 模型的 (1.66 和 2.5) 要小。这表明集团—集团凝聚模型的结构要比 DLA 的更松散些。这也是可以理解的。因为新的集团比单个粒子更难于接近已有的结构（结构对集团的屏蔽作用大于对单个粒子的），故与单粒子比较，集团与集团之间更难于形成紧密结构。

习 题

1. 什么是混沌？它有哪些特征？混沌到底是有序的还是无序的？
2. 是不是所有非线性微方程都可以有混沌解？
3. 有哪些通向混沌的道路？在倍周期分岔通向混沌的分岔图中，周期带和混沌带大体是如何分布的？其无穷层次自相似结构是怎样的？
4. 李-约克定理所说“周期三意味着混沌”具体含意是什么？
5. 何谓切分岔？切分岔是怎样出现混沌的？
6. 分析系统振荡特性通常有哪几种方法？如何根据这些方法的结果判断系统运动的性质？
7. 形式上相似的差分方程和微分方程（如逻辑斯谛映象和逻辑斯谛方程）的解和奇点（定态或不动点）是否相似或相同？为什么？
8. 混沌的普适性和标度性的意义是什么？
9. 二维离散映象跟一维映象相比，有什么重要差别？
10. 何谓圆映象？它为什么能表示偶合振荡？
11. 何谓奇怪吸引子？它奇怪在哪里？
12. 举出几种推广的维数的定义？
13. 李雅普诺夫指数的定义是怎样的？如何利用它对运动的性质作出判断？
14. 开系熵的变化与闭系有何重要差别？
15. 何谓耗散结构？试举出几种自然界或社会现象中耗散结构的例子。
16. 何谓熵产生和超熵产生？如何用它们判断平衡态和远离平衡的定态的稳定性？
17. 柯尔莫哥罗夫是如何将熵的定义推广的？如何用柯尔莫哥罗夫熵表征系统运动的特征？
18. 何谓可积系统、近可积系统和不可积系统？它们在相空间的轨迹都是怎样的？

19. 保守系统在什么情形下可能出现混沌?

20. 何谓分形?它有什么特点?分形与混沌之间有无联系或相似之处?举出一些物理、生物和地理等方面的分形的实例。

21. 在跳球实验中,设桌面的振动位相为 φ_n , 振动方程为

$$z_n = A \sin \varphi_n = A \sin \omega t_n$$

令球第 n 次碰桌后向上速度为 V_n , 则跳球实验可用以下映象表示:

$$V_{n+1} = \alpha V_n + K \sin \varphi_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + V_{n+1}$$

式中 α 和 K 均为常数。

(1) 试根据力学知识说明上式的正确性;

(2) α 和 K 与哪些物理因素有关。

22. 考虑下面的微分方程

$$\dot{x} = -y + \mu x - \mu x \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\dot{y} = x + \mu y - \mu y \sqrt{x^2 + y^2}$$

取庞卡莱截面为 $y=z=0$ 的平面, 结果如何?

23. 为了看出在迭代映象产生混沌时对初始条件也是敏感依赖的。可在逻辑斯谛映象 (11.5) 中, 令参数 μ 取给定值 (如 $\mu=3.0$), 以 x 的任意极靠近的三个初始值 (如 $x=0.1$, $x=0.10000001$, $x=0.10000001$) 分别进行迭代, 依次求出 $n=1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 50, 51, 52, \dots$ 时 x 的值 (可在一般微机上进行)。比较 n 一定时, 此三个靠近的初始值迭代的结果。可以清楚看出, 当 n 很大时, 由三个不同初值得到的 x 值差别是如何巨大的。

24. 计算逻辑斯谛映象中一点周期和二点周期时的李雅普诺夫指数。分析 $\mu=1, 2, 3, 1+\sqrt{5}$ 等值时李雅普诺夫指数 (与图 14-8 比较), 由这些值各说明系统运动的性质。

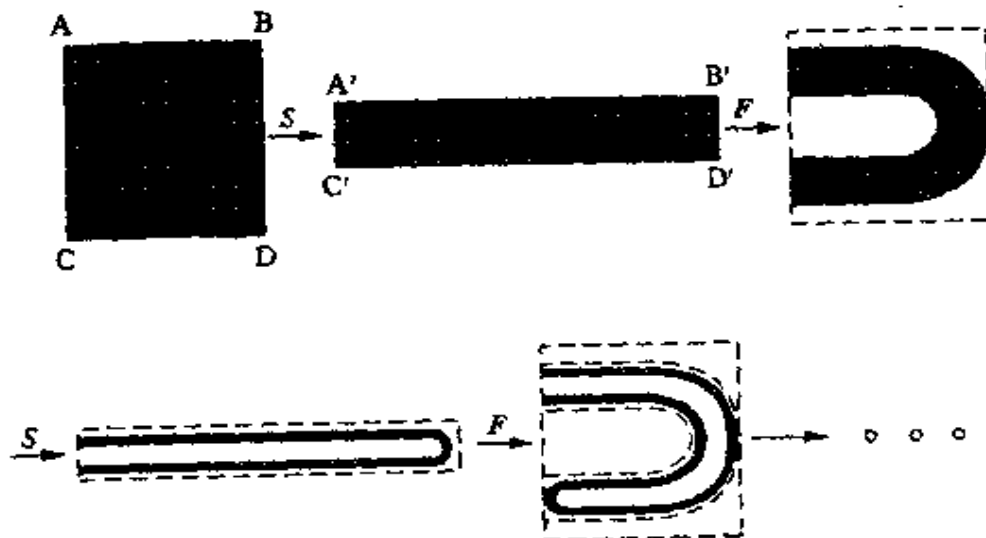
25. 三角映象 (或帐篷映象) 的定义如下

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2\mu x_n, & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2\mu (1 - x_n), & \text{当 } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(1) 求 $\mu < \frac{1}{2}$ 时的不动点并判断其稳定性;

- (2) 求 $\mu > 1/2$ 时的不动点并判断其稳定性;
 - (3) 求 $\mu > 1/2$ 时的李雅普诺夫指数;
 - (4) 由以上结果可进一步导出什么结论?
 - (5) 在 (1) 和 (2) 两种情况下, 信息的变化如何?
26. 求埃农映象 (12·33) 的不动点。

27. 为了形象地显示伸长 (或压缩) 与折叠两过程结合使系统对初始条件敏感地依赖, 从而可能出现混沌, 斯梅尔 (Smale, 1963, 1967) 提出了所谓马蹄形映象: 一个边长为 1 的正方形沿 x 方向伸长为 2 同时沿 y 方向压缩为 $1/2\alpha$ ($\alpha > 1$), 此变换用 S 表示。然后将所得结果折叠起来装进原来大小的正方形 (此变换记为 F)。这两变换合记为 f , 即 $f = F \cdot S$ 。将所得结果



题图 2-1

依次施行同样变换 f (见题图 2-1, 这类似做面包或馒头时和面的动作) 有

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n$$

最后得到的吸引子 ($\alpha > 1$) 中, 原来相互靠近的两点现在就不知相距怎样了。

- (1) 求此变换 A 的两个李雅普诺夫指数;
- (2) 求最后所得分形的维数。

第三章 混沌的一些实例

前面两章中我们已经提到一些非线性系统和混沌（以及分形）的实例。实际上，大量自然现象都遵从非线性规律，从而在它们当中可能出现混沌（或分形）也是很自然的。不仅如此，许多社会现象也遵从非线性规律，诸如人类社会的发展，人口或经济的增长，以至就业机会的变化和股票行情的变化等等，其准确地定量分析，无不需非线性理论。实际上，许多自然现象中的周期过程或节律，有的可能是极限环型振荡，有的实际是混沌或分形。我们不可能比较全面地触及非线性理论在各个方面的应用，而只拟就物理学、化学和生命科学三方面中涉及混沌的几个问题加以介绍。

§ 18 固体物理中的混沌

固体物理中有大量过程遵从非线性规律，因此其中存在许多非线性振荡和混沌运动。我们现在只择其数例略加介绍。

1. p-n 结

半导体是一种高度非线性物质，在 § 9 和 § 10 中我们已提到用变容二极管或隧道二极管可以比较容易地显示混沌。不少人在这方面做了很出色的工作。1984 年范布斯柯克 (Van Buskirk) 和杰弗里斯 (Jeffries) 对硅单晶掺杂后形成的 p-n 结进行了比较全

面系统的研究，现在扼要地介绍他们的工作。

Si 经掺杂后，由于电子和空穴的扩散，平衡时，结两端出现

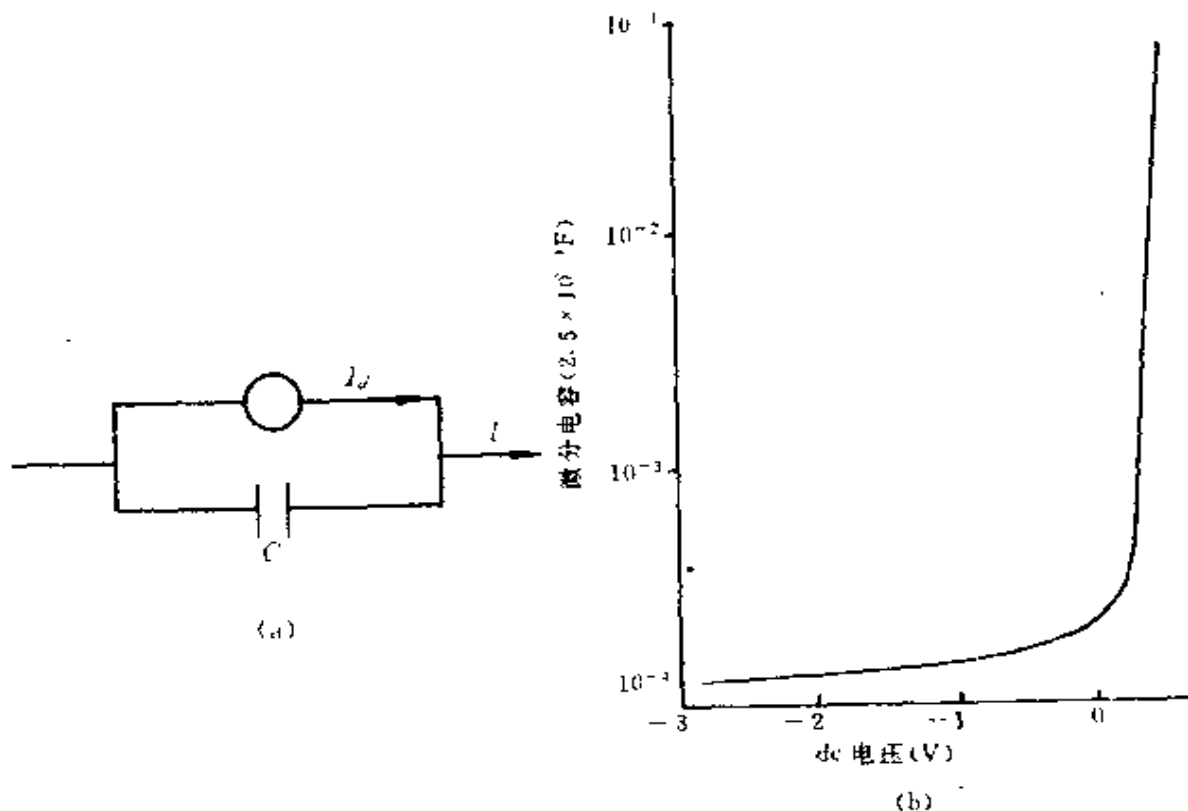


图 18-1 p-n 结的等效电路和 $C(V)$

(a) p-n 等效电路 (b) p-n 电容 $C(V)$

电位差 Φ ，并形成一电容，于是 p-n 结可用图 18-1 (a) 的等效电路表示。测得的结电容 C 与电位差 V 的关系如图 18-1 (b) 所示，可以用公式表示如下：

$$C = C_j + C_s \quad (18 \cdot 1a)$$

$$C_j = C_{j0} (1 - V/\Phi)^{-1/2}, \text{ 当 } V < 0 \text{ 时} \quad (18 \cdot 1b)$$

$$C_j = C_{j0} \exp (V/\phi), \text{ 当 } V > 0 \text{ 时}, \quad (18 \cdot 1c)$$

将此 p-n 结通过 R 和 L 串接于外加交变电源 ($V_e = V_0 \sin \Omega t$), 则由基尔霍夫定律得

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \frac{V_e - RI - V}{L} \\ \dot{V} &= \frac{I - I_d(V)}{C(V)} \\ \dot{\theta} &= \Omega\end{aligned}\quad (18 \cdot 2)$$

根据式 (18 · 1), 结的有效电荷为

$$\begin{aligned}q(V) &= \int_0^V C(V) d(V) = \varphi C_{j0} [\exp(V/\varphi) - 1] \\ &\quad + 2\Phi C_{j0} (1 - \sqrt{1 - V/\Phi})\end{aligned}\quad (18 \cdot 3)$$

于是由式 (18 · 2) 得到 ($A_0 = V_0/L$)

$$\ddot{q} + a(q)\dot{q} - f(q) = A_0 \sin(\Omega t) \quad (18 \cdot 4)$$

式中非线性阻尼系数 $a(q)$ 和恢复力 $f(q)$ 分别为

$$a(q) = \frac{R}{L} + \frac{1}{C} \frac{\partial I_d}{\partial V} \quad (18 \cdot 5a)$$

$$f(q) = -\frac{1}{L} [V(q) + RI_d(V)] \quad (18 \cdot 5b)$$

方程 (18 · 4) 就是表征 p-n 结特征的非线性方程。

范布斯科克和杰弗里斯通过实验发现, 当交变电压的频率 Ω 固定在适当值时, 变化其幅值 V_0 , 通过 p-n 结的电流幅值 I_a 随交变电压幅值 V_0 的变化情况与图 11-7 的结果完全相似, 功率谱的测量也证实了由倍周期分岔进入混沌的道路。

范布斯科克和杰弗里斯还从数值积分、作分岔图和作庞卡莱映象等几个方面对方程 (18 · 4) 的解进行了多方面分析, 得到在 (A_0, Ω) 参数平面上不同振荡特性的分区图, 如图 18-2 所示。他们对 p-n 结实验也得到与此完全相似的分岔图 [这也证实了非线性方程 (18 · 4) 可以很好地表征 p-n 结的特性], 只是由于噪声的影响, 该图不如图 18-2 清晰。图 18-2 中数字 1、2、4、8 表示周

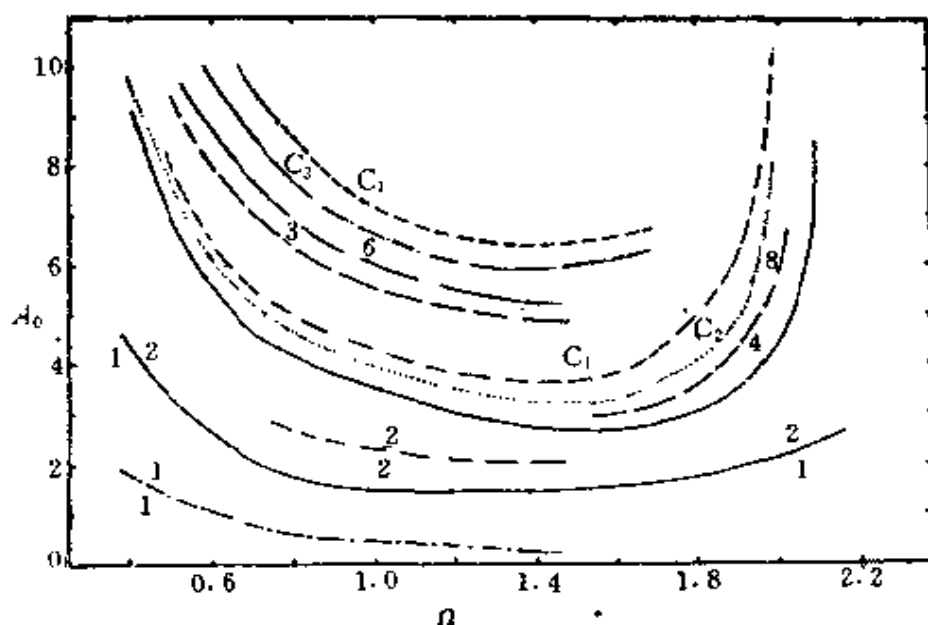


图 18-2 方程 (18·4) 解的特性在 (A_0, Ω) 平面上的分区 (C_1 、 C_2 和 C_3 分别代表 1I、2I 和 3I)

$$L=100 \text{ mH}, R=53 \Omega, a=0.45$$

期数 (1T、2T、4T、8T), C_1 、 C_2 和 C_3 分别表示 1I、2I 和 3I 混沌带 (参考图 11-7)。当固定 Ω 值 (如令 $\Omega=1.4$), 逐渐增大外加电压幅值 V_0 , 从图 18-2 可看出, 振荡由区域 1 依次进入 2、4、8, 这表示倍周期分岔过程。接着进入 2I 混沌带 (C_2) 和 1I 混沌带 (C_1), 再就是 3T、6T 和 3I, 最后 (经过危机, §11), 又进入 1I (C_1)。这些充分证实了 p-n 结振荡可以由倍周期分岔通向混沌, 而且混沌的分带和存在周期裕窗口等情况与单峰映象的结果 (图 11-7) 完全相似。

范布斯科克和杰弗里斯又用电阻将两个 p-n 结偶合起来实验。结果得到图 18-3 的分岔图。很明显, 此分岔图比典型的单峰映象的分岔图 (图 11-7) 要复杂, 因为现在是受迫的两个振子的

振荡,其庞卡莱映象是二维迭代映象。图 18-3 表示随着外加电压幅值 V_0 的逐渐增加,刚开始是一次倍周期分岔,但紧接着是分岔为准周期振荡(由相平面上的极限环分岔为二维环面,人们有时也把这种分岔广义地称为霍普夫分岔)。再接着又锁相(锁频)为两可公度的频率。继之是两个混沌带,最后又通过危机合并为一个混沌带。

仔细实验还得到整个偶合系统的振荡特性在 $(V_0, f_1 = \Omega/2\pi)$ 参数平面上的分区图,如图 18-4 所示。图中向下凹的大曲线是由 $2T$ 周期振荡向准周期振荡过渡的(广义霍普夫)分岔曲线。当两频率之比 f_1/f_2 是有理数 p/q 时,才可由 $2T$ 振荡进入锁相(振荡频率为 $f_2 = f_1 p/q$)。这就是阿诺德舌 (§ 12) 的舌尖。锁相这一些阿诺德舌。在阿诺德舌中可实现倍周期分岔,最后阿诺德舌之间重叠便出现了混沌。

范布斯科克和杰弗里斯还用二元二阶非线性微分方程组和二维迭代映象表征上述受迫偶合振子的振荡,也得到与实验一致的结果。

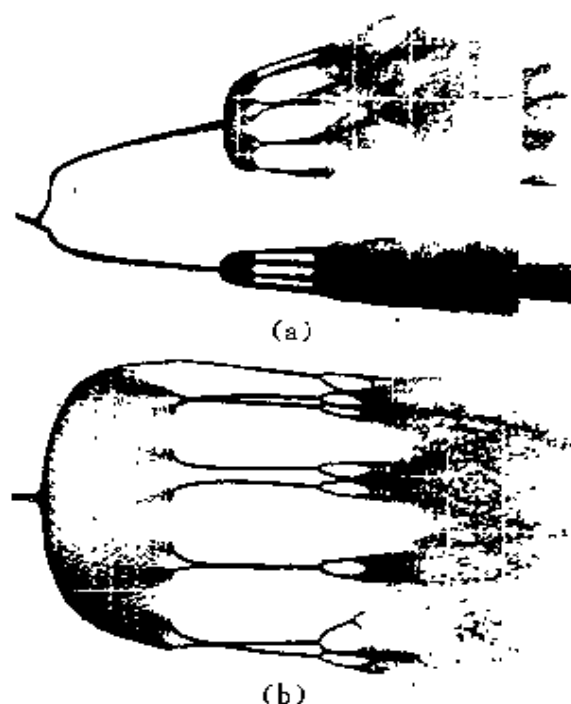


图 18-3 观察到的用电阻偶合的两个 p-n 结振荡的 I_n-V_0 分岔图

$$L=100\text{mH}, R=1200\Omega,$$

$$f=\Omega/2\pi=27.127\text{kHz}$$

2. 光电导体

光电导体工作时要求噪声很小,这自然就要求不出现混沌。但是人们却发现,光电导体无论是在直流电场下还是在交流电场下,都可以出现混沌。

泰兹渥斯 (Teitsworth) 和万斯特范尔 (Westervelt) 于 1983 年首先发现,超纯锗光电导体在液氮温度下,随着直流场强的增大可以出现倍周期分岔通向混沌。随后 (1984) 他们又发现,在交流电场下也可出现类似现象。图 18-5 就是他们对锗光电导体用不同交流电场所得到的结果,它们清楚地显示出由倍周期分岔通向混沌的过程,图 18-6 是用外加交变电压幅值 V_{ac} 和频率 f_{ac} 为参数画出的锗光电导体的不同响应区。

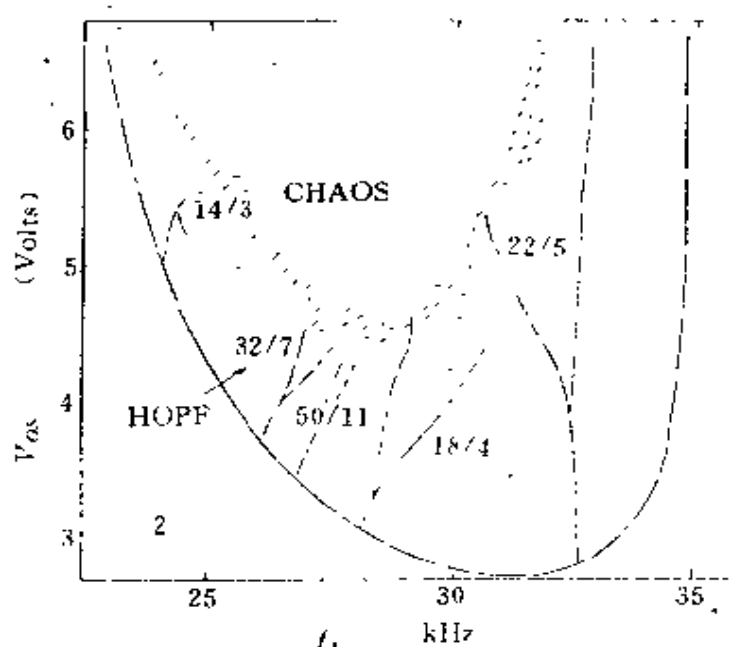


图 18-4 两个电阻用偶合的 p-n 结振荡特性在 (V_0, f_1) 参数平面上的分布

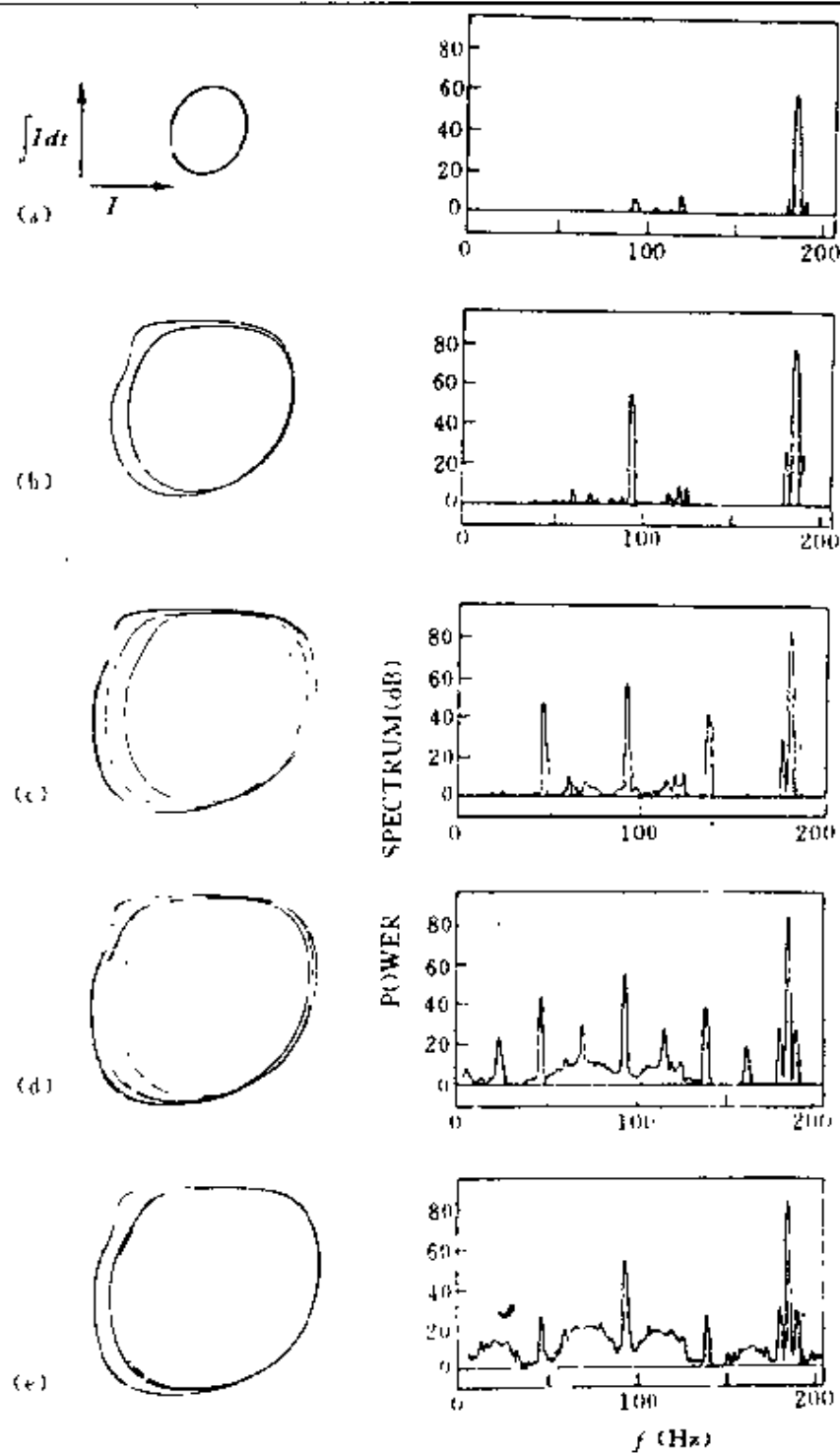


图 18-5 锗光电导体在不同交流电场 (由上往下增加) 下的相图 (左) 和功率谱 (右)

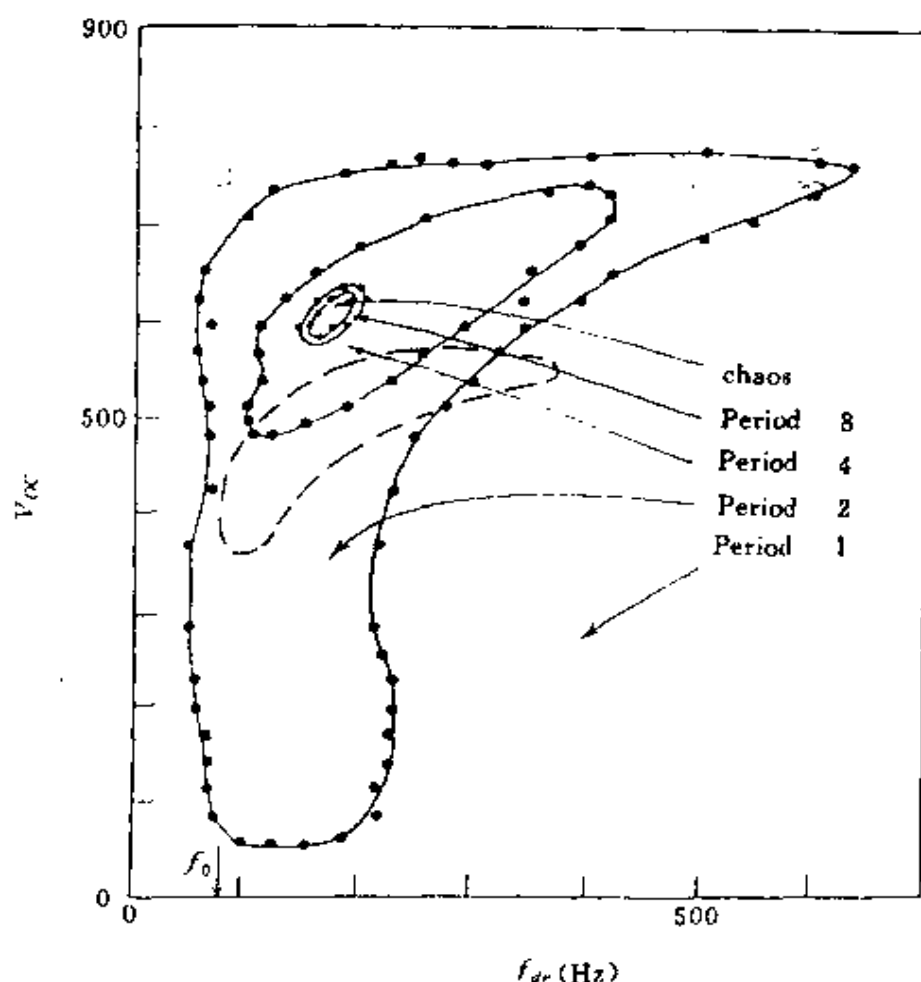


图 18-6 锗光电导体在交流电场中不同响应的分区

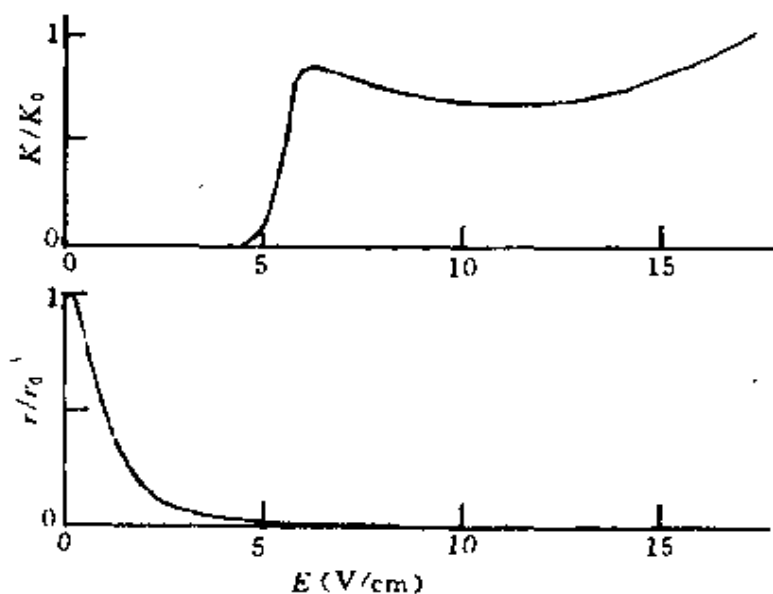
为了解释上述实验现象，泰兹渥斯等人（1984）又提出了下面的速率方程模型：

$$\dot{p} = \gamma(a - a_s) + p\kappa(a - a_s) - rpa_s \quad (18 \cdot 6a)$$

$$\epsilon \dot{E} = J_{ex} - epv \quad (18 \cdot 6b)$$

$$p = a_s - d \quad (18 \cdot 6c)$$

$$J_{ex} = J_0 + \Delta J \sin(2\pi f_{dr}t) \quad (18 \cdot 6d)$$

图 18-7 光电导体 $\kappa(E)$ 和 $\gamma(E)$ 对场强的依赖关系

$$\kappa = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}/\text{sec}, \gamma_0 = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}^3/\text{sec}$$

此模型出发点是，空间电荷注入和碰撞电离使电荷储存在受主能级上。式中 p 表空穴浓度， a 是受主总浓度， a_* 是电离受主浓度， γ 是空穴产生率， $\kappa(E)$ 和 $\gamma(E)$ 分别表与场强有关的碰撞电离率和复合（俘获）率。因此式 (18·6a) 右边第一、二两项分别表示的热激发引起的空穴产生率和碰撞电离引起的空穴产生率，第三项表示空穴与受主复合引起的损失率。式 (18·6b) 就是安培定律，因 ϵE 是位移电流 (ϵ 是介电常量)， J_{ext} 是外电流（密度），而 $V(E)$ 是空穴的平均漂移速率。 d 是施主浓度，故式 (18·6c) 表示空间电荷的中性。式 (18·6d) 中的 J_0 是外加电流的平均值（直流成分）， f_a 是外加交流电流的频率， ΔJ 是其幅值。

由于 $\kappa(E)$ 和 $\gamma(E)$ 都强烈地随场强 E 变化（图 18-7），方程

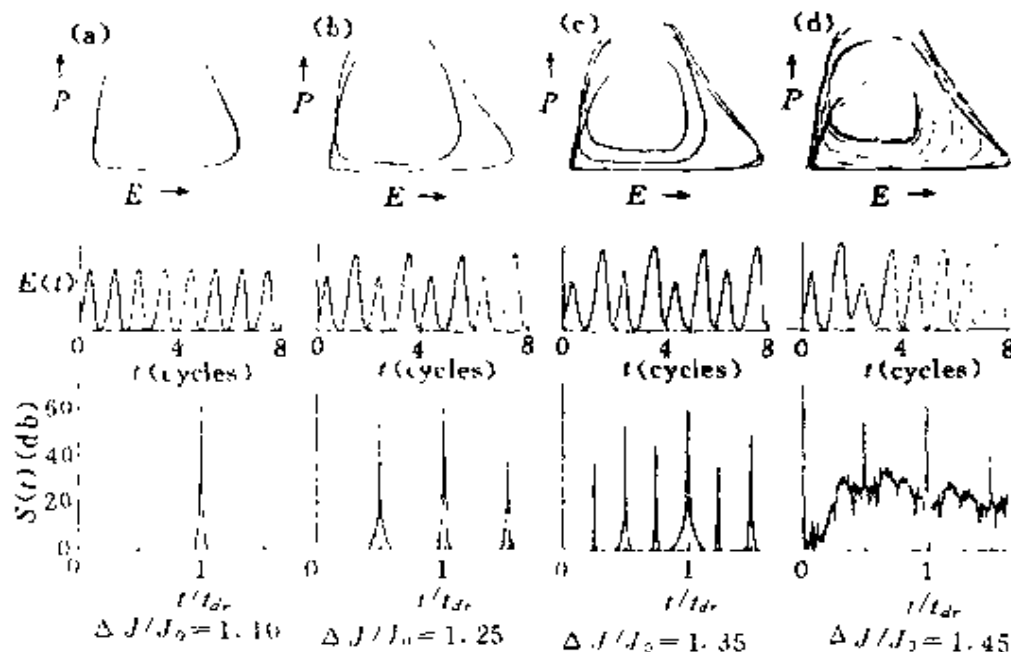


图 18-8 方程 (18·6) 的解

上行是相空间的吸引子；中行是 $E(t)-t$ 曲线；下行是功率谱，

其中 0db 对应于 $1 \times 10^{-7} \text{V}^2 \text{cm}^{-4} \text{Hz}^{-1}$ 。

参数取值： $a=10^{11} \text{cm}^{-3}$ ； $d=2 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$ ； $\gamma=10^{-4} \text{sec}^{-1}$ ；

$J_0=1.3 \times 10^{-7} \text{A/cm}^2$ ； $B=10 \text{meV}$ ；

$\epsilon=16$ ； $f_{dr}/f_0=1.45$ ； $f_0 \simeq 6422 \text{Hz}$

(18·6a) 是非线性的，方程 (18·6a) 和 (18·6b) 表示非线性阻尼振子方程，其中 $E(t)$ 和 $p(t)$ 分别像机械振动中的位置和动量。让各参数取适当值（相当于超纯锗在 4.2K 下），泰兹渥斯和万斯特范尔解方程 (18·6) 得到图 18-8—图 18-10 的结果。图 18-8 上行是相平面中的吸引子，中行是 $E(t)-t$ 曲线，下行是功率谱，它们都清楚地显示出在不同 $\Delta J/J_0$ 下由倍周期通向混沌的情形。图 18-9 左边是 $p-E$ 平面上的频闪采样，右边是 E 的极大值的反复映象，它类似一维单峰映象（图 11-1）。图中存在的折叠

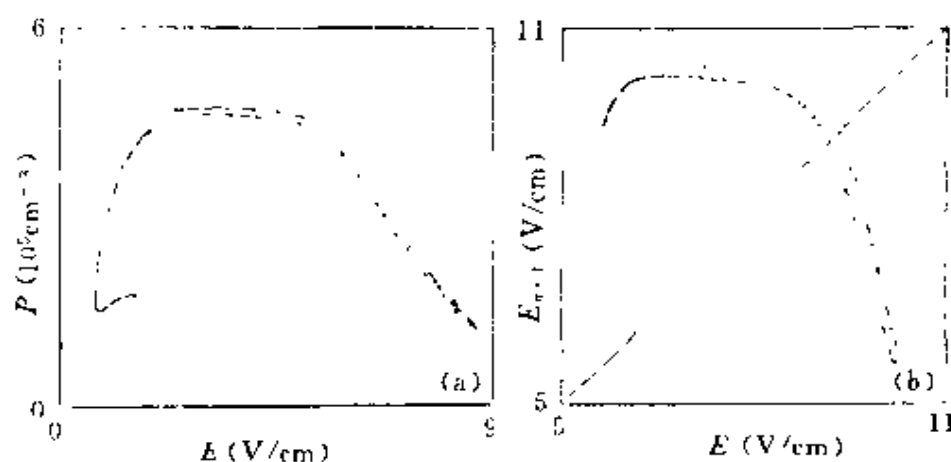


图 18-9 方程 (18·6) 的解的庞卡莱截面上的频闪图 (左) 和 E 极大值的反复映象 (右), $\Delta J/J_0 = 1.45$

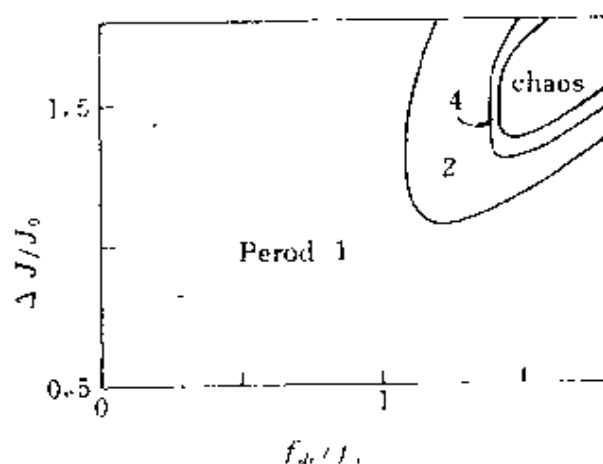


图 18-10 方程 (18·6) 不同性质的解在参数平面的分布

表明要出现混沌。图 18-10 表示不同性质的解在 (V_{ac}, f_{dc}) 平面上的分区。可以看出,此图与实验结果的图 18-6 大体上是相符的。由此可见,模型方程 (18·6) 确可反映光电导体的动态规律。

3. 电子-空穴等离子体

很早就有人指出, 如果沿锑单晶棒加顺着棒长方向的电场 E_0 和磁场 B_0 , 棒中电子-空穴 (e-h) 等离子体可能自动形成螺旋形的密度波 (图 18-11)。70 年代末和 80 年代初又有人指出, 这种等离子体的运动也可能出现混沌。赫尔德 (Held) 和杰弗里斯于 1984 年在液氮温度 (77K) 下对掺杂锑棒进行研究, 首先观察到在平行电场和磁场作用下, e-h 等离子体的运动既可由倍周期分岔通向混沌, 也可由准周期通向混沌。他们的装置大致如图 18-11 所示。1×1×10 mm³ 的锑棒两端分别实行 Li-扩散

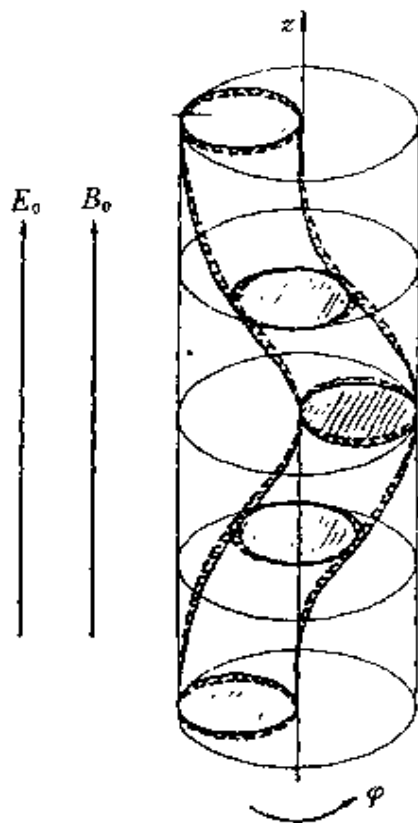


图 18-11 锑棒在平行的电场和磁场作用下可能出现等离子体螺旋形振荡

(电子注入) 和 B-注入 (空穴注入), 所加磁场为 $B_0 = 4\text{kG}$, 电场由棒两端通过一个 $100\ \Omega$ 电阻接到一可变 ($0 \sim 25\text{V}$) 直流电源提供。观察 $I(t)$ 和 $V(t)$ 随时间的变化, 得到图 18-13 所示结果。图中上行是 $I(t)-t$ 曲线, 中行是相平面 $[V(t), I(t)]$ 中的吸引子, 下行是 $I(t)$ 的功率谱。图中从左到右是依次增加 V_0 的结果。当 V_0 低于某一值 (如对于某一样品, 此值为 6V) 时, $I(t)$ 只有恒定的直流成分; V_0 超过此值, $I(t)$ 便开始振荡。图 18-13 (a) 是 $V_0 = 10.0\text{V}$ 时的情形, 它显示 e-h 等离子体以基频 $f_0 = 118\text{ kHz}$ 振荡。图

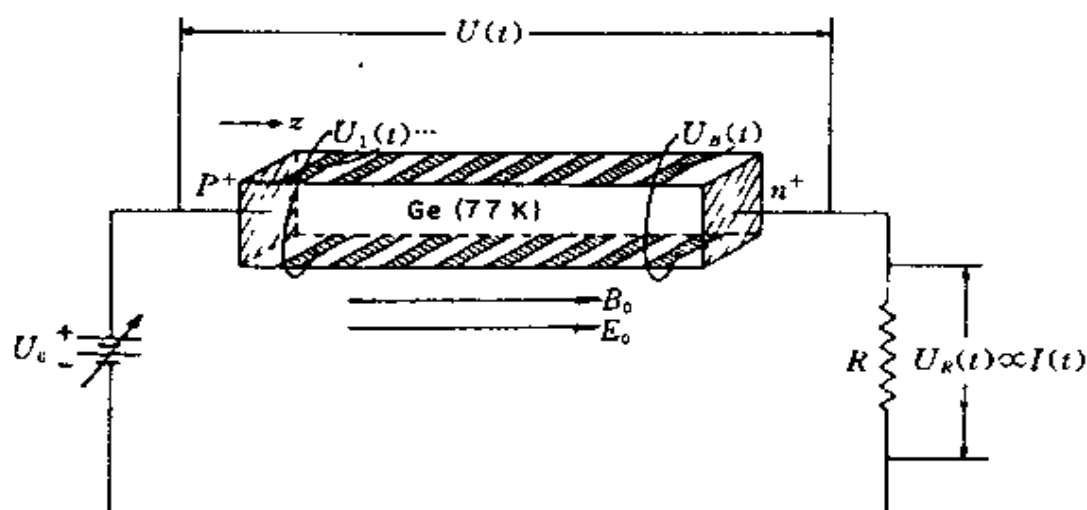


图 18-12 观察锗棒中 e-h 等离子体振荡的装置示意

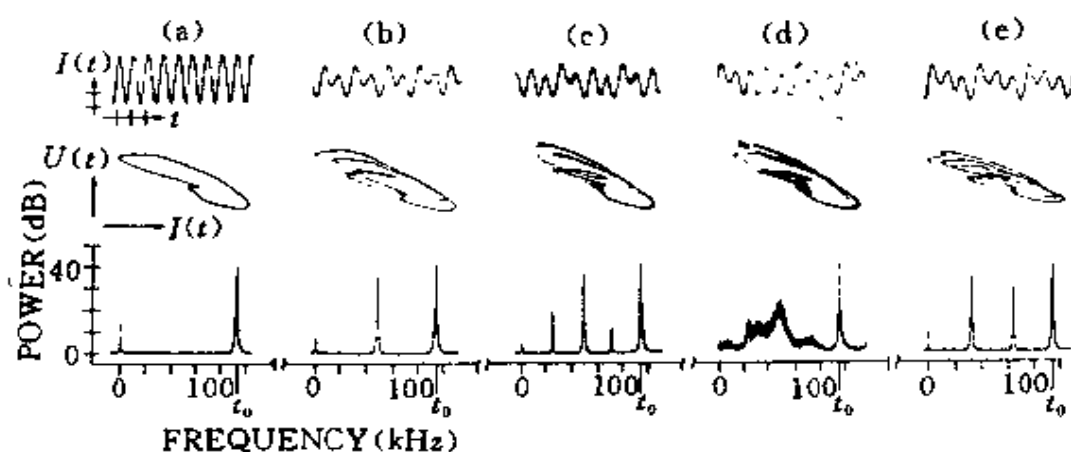


图 18-13 锗棒中 e-h 等离子体振荡由倍周期分岔到混沌

18-13(b)和图 18-13(c)表示电压 V_0 继续加大出现倍周期 ($f=f_0/2$ 和 $f=f_0/4$)。然后就出现混沌 [图 18-13(d)] 和 $f=f_0/3$ 的 3T 周期窗口 [图 18-13 (e)]。用振荡电流的极大值 I_m 作纵坐标、电压 V_0 作横坐标画分岔图和用 I_m 作反复(迭代)映象,都证实了此

结果。

赫尔德和杰弗里斯对另外的样品实验，也观察到由准周期振荡进入混沌。图 18-14 是赫尔德得到的 $I(t)$ 的功率谱（右）和 $I(t)$ 极大值的反复映象（左），它们清楚地显示了随着 V_0 的变化 e-h 等离子体振荡由准周期〔图 18-14(a)~(c)〕过渡到混沌〔图 18-14(d)~(f)〕。

以上实验结果确表明，半导体中的电子-空穴等离子体在平行电场和磁场作用下可产生振荡，而且可出现混沌。在出现混沌时测量其吸引子的分维，结果在 2.4~2.6 之间。

如果用许多探针同时测量锗棒各部位的 $V(r, t)$ ，则可测知 $V(r, t)$ 还具有空间相关性。当 e-h 等离子体处于周期振荡状态时，作为表征相关性的相关函数 $C(r)$ 之值与相干波的一样。当出现混沌时，空间相关性也随之受到破坏，相关函数 $C(r)$ 之值骤减。人们有时说，此时除存在时间混沌外，还出现了空间混沌（分形）。

赫尔德等人还提出了波一波相互作用的理论模型对上述观察到的现象予以解释，我们在此从略。

4. 约瑟夫森结

约瑟夫森 (Josephson) 于 1962 年发现，两超导体之间夹有极薄绝缘层的夹心结构（称为约瑟夫森结）存在超导电流的隧道效应，而且有些独特的规律（即所谓约瑟夫森效应）。目前约瑟夫森结已广泛用于 e/h 值或电压和磁场的精密测量，也可用作参量放大器。

但是 1977 年以来，人们陆续发现，约瑟夫森结作为参量放大器，随着增益的提高往往出现反常高的噪声。在 4K 时，其等效噪声温度可达 10^4K 。这样高的噪声无论如何也不能用各种已知的噪

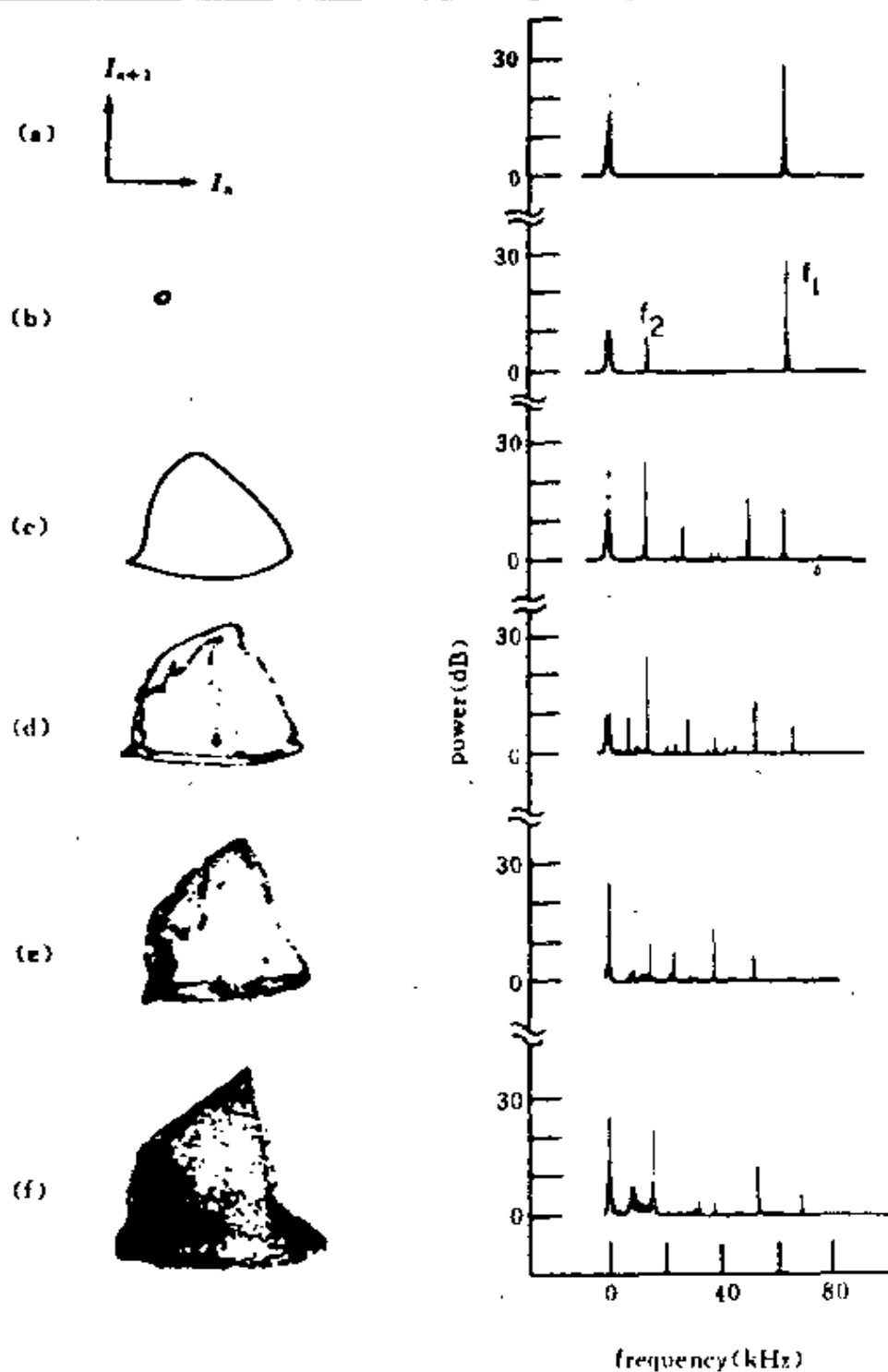


图 18-14 锗棒中 e-h 等离子体振荡由准周期进入混沌
 左边: I_n 的反复映象; 右边: I 的功率谱

声源所能说明。于是人们想到这可能是约瑟夫森结所固有的，即在约瑟夫森结中，超导电子的运动可能具有混沌的特性。

为了了解约瑟夫森结中是否可能出现混沌，我们先简要介绍其导电规律。现已普遍认为，超导电性是由于超导体中存在依靠声子（晶格振动）而相互吸引的电子对，这种电子对称为库柏对（Cooper pair）。在有超导电流时，所有库柏对相互关联，使电子对的质心以相同动量运动。因此电子对有确定的德布罗意波长，从而超导电子（库柏对）的运动如宏观量子流体。对于约瑟夫森结，其两侧电子的波函数 ψ_1 和 ψ_2 将互相耦合，薛定谔方程取如下形式：

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -e^* V \psi_1 + K \psi_2 \quad (18 \cdot 7a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = e^* V \psi_2 + K \psi_1 \quad (18 \cdot 7b)$$

式中 e^* 为超导电子电荷（实际上 $e^* = 2e$ ），取超导电子在结中间的势能为零，结两侧的势能分别为 $e^* V$ 和 $-e^* V$ ， K 表示结两侧波函数相互耦合强弱的常数，它与结的特性有关。令

$$\psi_1 = \rho_1^{1/2} e^{i\varphi_1}; \quad \psi_2 = \rho_2^{1/2} e^{i\varphi_2} \quad (18 \cdot 8)$$

ρ_1 和 ρ_2 为结两侧库柏对的浓度， φ_1 和 φ_2 为波函数的位相。将上式代入式（18·7）并令等式两边的虚部和实部分别相等得到

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi \quad (18 \cdot 9a)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi \quad (18 \cdot 9b)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \varphi + \frac{e^* V}{\hbar} \quad (18 \cdot 9c)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \varphi - \frac{e^* V}{\hbar} \quad (18 \cdot 9d)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (18 \cdot 9e)$$

φ 表示结两边函数的位相差。由上式得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e^* V}{\hbar} \quad (18 \cdot 10)$$

积分后得到 (考虑对于库柏对 $e^* = 2e$)

$$\varphi = \frac{2eV}{\hbar} t + \varphi_0 \quad (18 \cdot 11)$$

由式 (18 · 9) 还可求得超电流密度 (为简单计, 设约瑟夫森结绝缘层两侧是相同材料的超导体, 即 $\rho_1 = \rho_2$, 又根据电荷守恒: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$)

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{2K}{\hbar} (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \sin \varphi \\ &= J_c \sin \left(\frac{2eV}{\hbar} t + \varphi_0 \right) \end{aligned} \quad (18 \cdot 12)$$

$$J_c = \frac{2k}{\hbar} (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \quad (18 \cdot 13)$$

当 $V=0$ 时, 式 (18 · 12) 变为

$$J = J_c \sin \varphi_0 \quad (18 \cdot 14)$$

上式表示, 即使结两侧不存在电位差, 约瑟夫森结中也可存在一直流电流, 此电流的最大值 (临界值) 是 J_c 。这就是直流约瑟夫森效应。

当结两侧的电位差 V 不等于零时, 式 (18 · 12) 指出, 此时将有交变电流通过约瑟夫森结, 其频率为

$$\omega = 2eV/\hbar \quad \text{或} \quad \nu = 2eV/h \quad (18 \cdot 15)$$

这种在结电位差不为零时将出现交变电流的现象称为交流约瑟夫森效应。 ω 称为约瑟夫森频率, 其值通常在微波范围。如当 $V = 1 \mu\text{V}$ 时, $\nu = 483.6 \times 10^6 \text{Hz}$ 。当此高频电流通过约瑟夫森结时, 结将发射或吸收能量为

$$E = \hbar\omega = 2eV$$

的电磁波（光子）。当然，此电磁波的功率一般极小（ 10^{-12} 瓦左右），不易测量。如果准确测出 V 和 ν ，便可准确测出 e/h 。

如果用固定频率 ν_0 的微波照射约瑟夫森结，调节直流偏压 V ，每当

$$V = n \frac{h\nu_0}{2e}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (18 \cdot 16)$$

时，结中便出现直流成分电流，这是由于直流偏压所产生的超导交流与微波辐射场所引起的 n 次谐波有相同频率，它们叠加（干涉）便可产生一直流成分，于是在 $I-V$ 曲线上将出现一些电流小峰。实验已证实了这一点（由于外电路的原因，实际看到的是电流阶梯而不是小峰）。

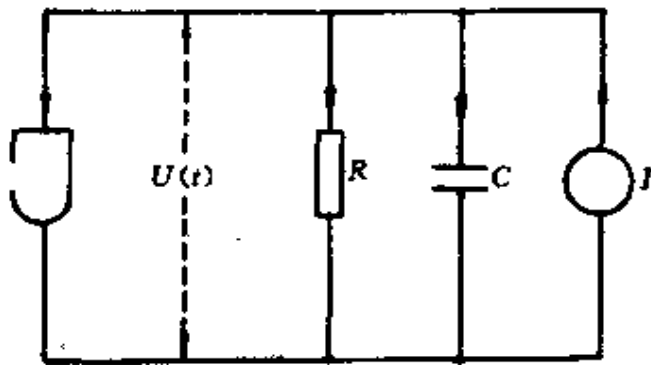


图 18-15 约瑟夫森结的电阻分路模型

对约瑟夫森结的分析，可以用图 18-15 的电阻分路结（resistively shunted junction，简称 RSJ）模型等效电路表示，即结可看作有一漏电阻 R 和结电容 C 与之并联。由于实用上的约瑟夫森结的阻抗远小于电源阻抗，因此可以认为，等效电路是

电流偏置的。由基尔霍夫定律可知

$$C \dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin\varphi = 1 \quad (18 \cdot 17)$$

I 是外加驱动电流。式 (18·17) 左边第一项表示通过 C 的位移电流，第二项是通过漏电阻电流，第三项就是式 (18·12) 给出的超导电流。考虑到结两侧的电位差 V 和位相差 φ 之间的关系式

(18·10), 方程 (18·17) 可化为

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\varphi} - \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi = I \quad (18 \cdot 18)$$

令

$$\omega_J = \left(\frac{2eI_c}{\hbar C} \right)^{1/2} \quad \tau = \omega_J t \quad G = 1/RC\omega_J \quad (18 \cdot 19)$$

ω_J 称为等离子体频率。用 τ 代替 t 作为新的自变量, 则方程 (18·18) 简化为

$$\ddot{\varphi} + G\dot{\varphi} + \sin \varphi = I/I_c \quad (18 \cdot 20)$$

如果考虑微波辐射, 设 A 和 ω_e 分别表示微波作用的振幅和频率, 由上式变为

$$\ddot{\varphi} + G\dot{\varphi} + \sin \varphi = I/I_c + A \sin \frac{\omega_e}{\omega_J} \tau \quad (18 \cdot 21)$$

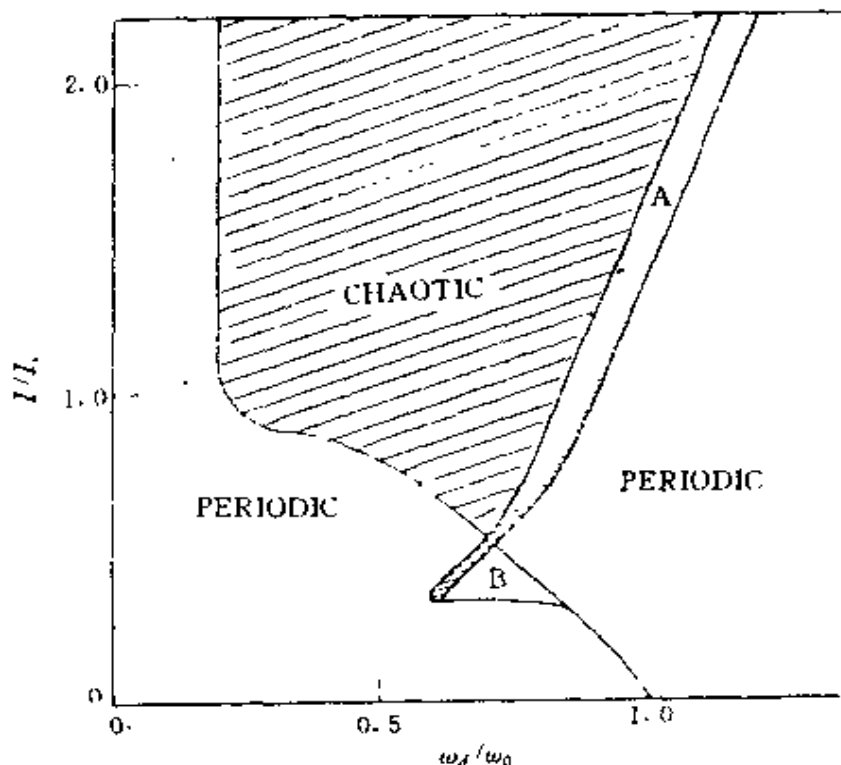


图 18-16 方程 (18·20) 不同解的分布

$R=4 \Omega$, $C=5 \text{ pF}$, $\omega_J=10^{10} \text{ Hz}$, $I_c=100 \mu\text{A}$, $G=5$, $I=I_0 \cos(\omega_d t)$

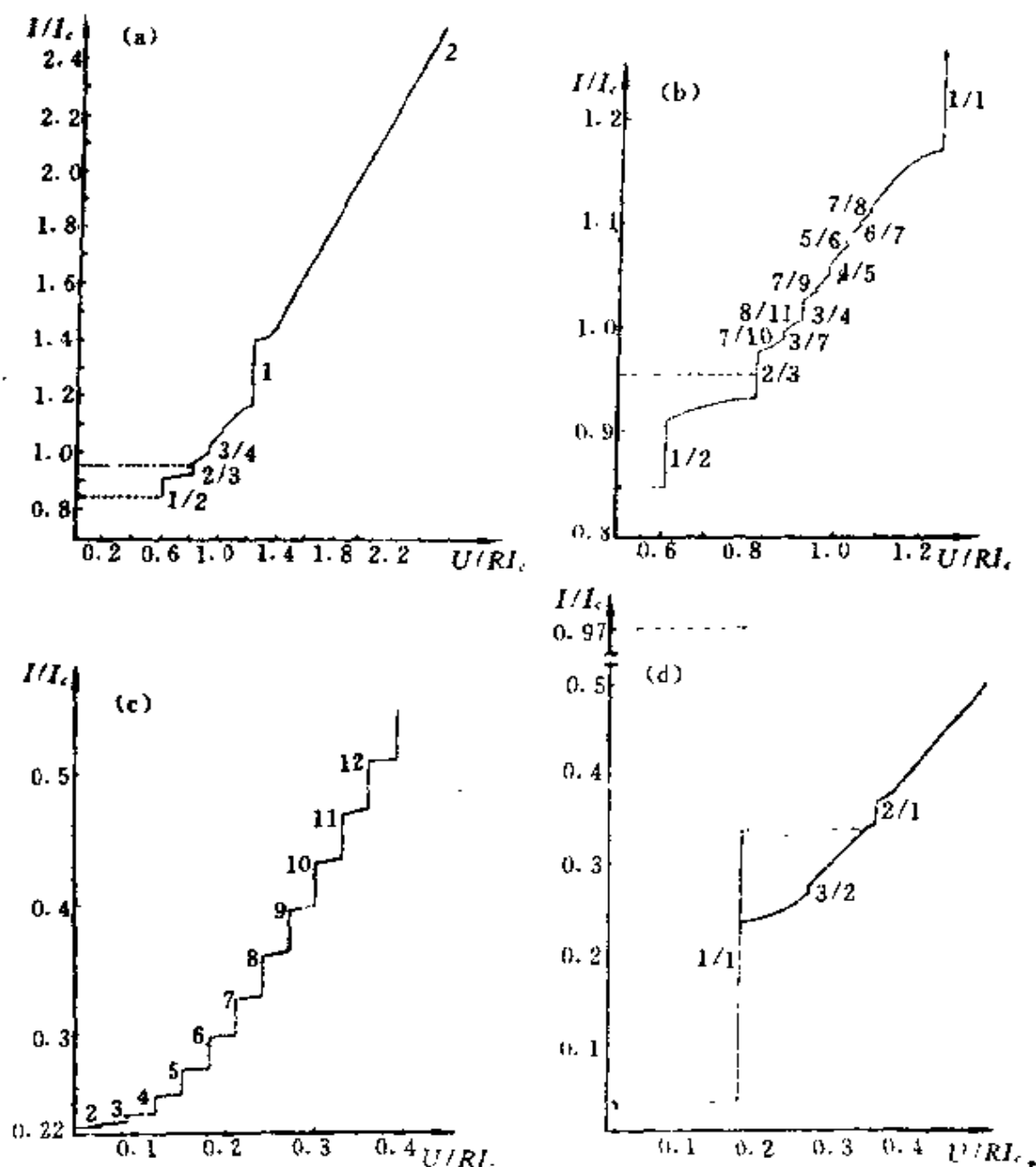


图 18-17 方程 (18·21) 解的魔梯

(a) $G \approx 1$, $A \approx 1$, $\omega_c/\omega_J \approx 1$ (b) (a) 的一部分放大(c) $G = 0.3$, $A = 0.8$, $\omega_c/\omega_J = 0.1$ (d) $G = 0.1$, $A = 1.0$, $\omega_c/\omega_J = 1.76$

方程 (18·20) 或 (18·21) 与受迫阻尼单摆运动方程相似。很

明显,它们是非线性的。对于不同的参数取值,方程(18·20)和(18·21)可能具有不同形式的复杂解。图18-16是赫柏曼(Huberman)和克拉奇菲尔德(Crutchfield)早期(1980)得到的在 $I=I_0 \cos(\omega_d t)$ 作用下方程(18·20)不同性质的解在参数平面上的分布。图18-17是在参数取适当值时方程(18·21)解的 $I-V$ 曲线,出现的阶梯表明微波作用确可使约瑟夫森结中的 I 和 V 形成魔梯 (§12)。方程(18·20)和(18·21)自然还可能存在混沌解。在 $I/I_c=3.8$ 和 $\omega_d/\omega_J=0.64$ 时,方程(18·20)解的功率谱和在 $(\phi, \dot{\phi})$ 平面上的奇怪吸引子都证明此时运动是混沌。以后又有一些人对RSJ模型进行了分析,也肯定了混沌的存在,只是情形要比图18-16复杂。

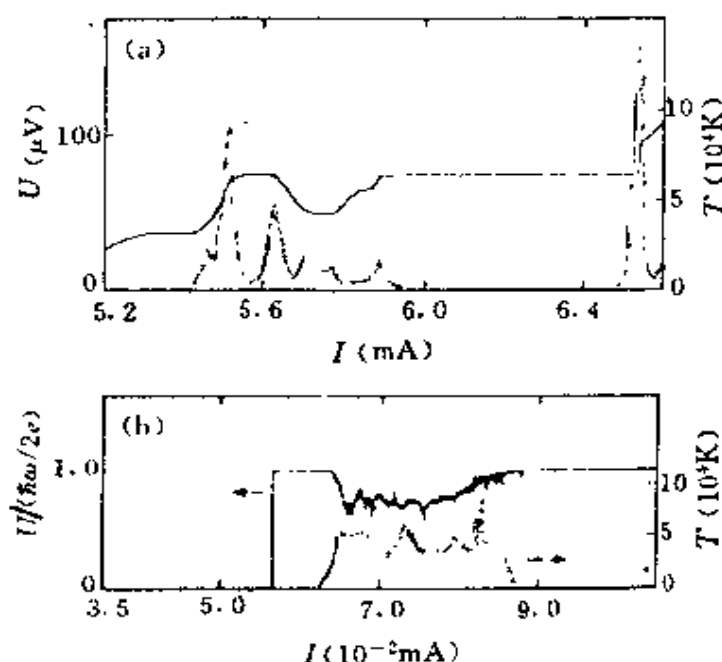


图 18-18 约瑟夫森结构的 $I-V$ 特性曲线 (实线)
和等效噪声温度 (虚线)

(a) Pb/Te/Pb 实验结果 (b) 方程 (18·21) 的计算结果

实验观察约瑟夫森结的动态特性有很大困难, 因为其特征频率太高。比较有效的方法是观察噪声的强度与频率分布。在方程 (18·21) 出现混沌解的情形下, 强烈的 (混沌引起的) 噪声使 $I-V$ 曲线的阶梯发生畸变甚至被破坏。图 18-18 (a) 是用 Pb/Te/Pb 结观察到的 $I-V$ 特性曲线 (实线) 和等效噪声温度 (虚线), 图 18-18 (b) 则是方程 (18·21) 的计算结果。可以看出, 理论与实验符合得很好。

此外, 还在约瑟夫森结上观察到间歇混沌, 由约瑟夫森结做成的超导量子干涉器件 (SQUID) 中也观察到混沌现象。对于这些, 我们只能从略了。

§ 19 光学双稳态和光学混沌

光学系统中的多重态 (主要是双稳态) 和输出不稳定性在激光被发现后不久就逐渐为人们注意到。理论和实验陆续指出, 激光输出可能出现不稳定现象。近十年来人们还不断观察到光学混沌。事实上, 在强光场中, 介质的介电常量和折射率不是常数自然要引起非线性效应。此外, 光学系统中还常常存在反馈作用。在这样的光学系统中引起多重态、自脉冲 (极限环型) 振荡以至混沌就很不足为奇了。

为了简单起见, 我们只准备用半经典理论讨论均匀加宽型激光器。关于光学双稳态和光学混沌的详细分析讨论, 读者可参考书末所引的某些原始文献或 Lugiato (1984)、Firth (1986)、Abraham (1988) 和 Moloney 与 Newell (1990) 等的综述文章。

1. 麦克斯韦-布洛赫方程

为简单计, 我们作以下假设和限制:

(1) 光学系统是一环形腔 (图 19-1)。这样, 光的传播便只是单向的行波, 而不像法布里-珀罗腔那样可以双向传播出现驻波的较复杂情形。

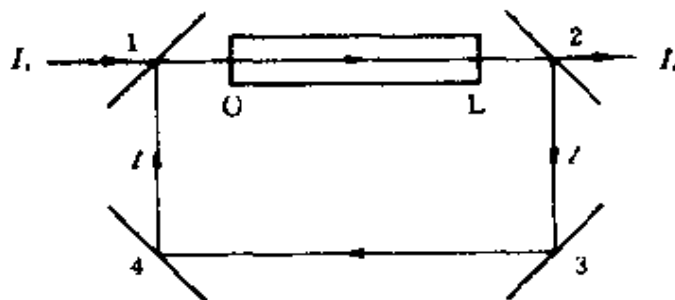


图 19-1 环 形 腔

I_i 和 I_t 分别为入射光强度和透射光强度

(2) 光的传播是平面波形式。即空间是横向均匀, 从而可以认为空间只有一个单一变量——沿传播方向的 z 轴。

(3) 作为腔中介质的原子只有两个能级且只存在单光子跃迁。这样介质原子只有一个 (中心) 跃迁频率 ω_0 (单模)。

(4) 光谱线只存在均匀加宽。即我们不考虑多普勒效应带来的影响 (非均匀加宽。)

在上述条件下, 光场与介质原子之间相互作用可以用下述半经典的 (根据经典电动力学和量子力学) 麦克斯韦-布洛赫方程 (M-B) 方程表述*:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial z} = -gP \quad (19 \cdot 1a)$$

* 我们略去此方程的推导, 关于此方程的推导和讨论可参考 Arecchi 和 Bonifacio (1965)、Haken (1970) 和 Gibbs (1985) 的书。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\mu}{\hbar} ED - [\gamma_{\perp} + i(\omega_a - \omega_0)] P \quad (19 \cdot 1b)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\mu}{2\hbar} (EP^* + E^*P) - \gamma_{11} (D - \frac{N}{2}) \quad (19 \cdot 1c)$$

式中 E 是电场强度的慢变幅值, P 是宏观极化强度的慢变幅值, D 是处于高低能级粒子数之差的一半 (表征粒子数反转的程度), E^* 和 P^* 分别是 E 和 P 的共轭量, μ 是原子偶极矩的模, ω_0 是入射光频率, γ_{11} 和 γ_{\perp} 分别是原子纵向和横向弛豫时间 T_1 和 T_2 的倒数 (即弛豫速率), $N(\omega)d\omega$ 是频率在 ω 与 $\omega+d\omega$ 之间的原子数, g 是由下式给出的耦合常数 (V 是试样体积)

$$g = \frac{4\pi\omega_0\mu}{V} \quad (19 \cdot 2)$$

设在图 19-1 的腔中, 镜 1 和 2 反射系数和透射系数都分别是 R 和 T ($R+T=1$), 镜 3 和镜 4 的反射系数为 1 ($T=0$), 则对于输出波场 E_T 、腔端波场 $E(0,t)$ 和 $E(L,t)$ 以及连续输入波场 E_I 之间还存在下列关系:

$$E_T(t) = T^{1/2} E(L,t) \quad (19 \cdot 3a)$$

$$E(0,t) = T^{1/2} E_I + R \exp(-i\delta_0) E(L,t - \Delta t) \quad (19 \cdot 3b)$$

式中 L 是试样的长度, $\Delta t = (2l+L)/c$ 是光从镜 2 经镜 3、镜 4 到镜 1 所需时间。

$$\delta_0 = (\omega_c - \omega_0) / \frac{c}{L} \quad (19 \cdot 4)$$

$L=2(L+l)$ 是腔的总长, ω_c 是最接近与入射光共振的腔频, 故 δ_0 表示腔失调参量。

麦克斯韦-布洛赫方程 (39·1) 就是描述单模均匀加宽行波激光腔的半经典方程, 式 (19·3) 则是它的边界条件。

M-B 方程中自然还应包括 E^* 和 P^* 的方程, 它们分别与式 (19·1a) 和式 (19·1b) 相似, 因此 M-B 方程实际是含有五个分

量的方程组, E 和 P 取复数形式表示系统存在吸收和色散两种效应。对于只有纯吸收效应的情形, 即入射光频 ω_0 等于原子频率 ω_a 时, $i(\omega_a - \omega_0) = 0$, E 和 P 可以取作实变量, 于是 M-B 方程 (19·1) 简化为

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial z} = -gP \quad (19 \cdot 5a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\mu}{\hbar} ED - \gamma_{\perp} P \quad (19 \cdot 5b)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} P - \gamma_{11}(D - \frac{N}{2}) \quad (19 \cdot 5c)$$

2. 光学双稳态

对于定态, $\dot{E} = \dot{P} = \dot{D} = 0$, 于是

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{g}{c} P = -\chi E \quad (19 \cdot 6)$$

式中

$$\chi(|E|^2) = \chi_a + i\chi_d \quad (19 \cdot 7)$$

是复介电系数, χ_a 和 χ_d 分别是其实部 (代表吸收) 和虚部 (代表色散)。

在方程 (19·1) 的情形下, χ 取如下的非线性形式:

$$\chi = \frac{\alpha(1 - i\Delta)}{1 + \Delta^2 + |E|^2/I_s} \quad (19 \cdot 8)$$

式中 α 是共振时 ($\omega_a = \omega_0$) 未饱和 ($|E|^2 \ll I_s$) 的线性吸收系数:

$$\alpha = \mu g N / 2\hbar c \gamma_{\perp} \quad (19 \cdot 9)$$

Δ 为原子失调参量, 即

$$\Delta = (\omega_a - \omega_0) / \gamma_{\perp} \quad (19 \cdot 10)$$

而 I_s 是饱和强度

$$I_s = \hbar^2 \gamma_{11} \gamma_{\perp} / \mu^2 \quad (19 \cdot 11)$$

因此

$$\chi_a = \frac{\alpha}{1 + \Delta^2 + |E|^2/I_i} \quad (19 \cdot 12a)$$

$$\chi_d = \frac{-\alpha\Delta}{1 + \Delta^2 + |E|^2/I_i} \quad (19 \cdot 12b)$$

考虑 E 是复量, 式 (19·6) 的解可写成如下形式:

$$E(z) = \rho(z) \exp[i\varphi(z)] \quad (19 \cdot 13)$$

将上式代入式 (19·5) 得到

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} &= \frac{d\rho}{dz} e^{i\varphi} + i\rho e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{dz} = -\chi E \\ &= -(\chi_a + i\chi_d)\rho e^{i\varphi} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{d\rho}{dz} = -\chi(\rho^2)\rho \quad (19 \cdot 14)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\chi_d(\rho^2)\rho \quad (19 \cdot 15)$$

令 I_t 和 I_i 分别表示透射 (输出) 光强度和入射光强度:

$$I_t = |E_t|^2, I_i = |E_i|^2$$

则透射率为

$$\mathcal{T} = I_t/I_i \quad (19 \cdot 16)$$

利用边界条件 (19·13) 得到透射率

$$\mathcal{T} = \frac{T^2}{(\eta - R)^2 + 4R\eta \sin^2\left\{\frac{1}{2}[\varphi(L) - \varphi(0) - \delta_0]\right\}} \quad (19 \cdot 17)$$

式中

$$\eta = \rho(0)/\rho(L) \geq 1 \quad (19 \cdot 18)$$

也可采用归一化的光强 X 和 Y :

$$Y = I_t/I_i, T = y^2 = \left(\frac{\mu E_i}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} T} \quad (19 \cdot 19a)$$

$$X = I_t/I_i T = x^2 = \left(\frac{\mu E_T}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} T} \quad (19 \cdot 19b)$$

式中 x 和 y 是相应的归一化场强。将式(19·12a)代入式(19·14)积分并利用式(19·18)得

$$X = \frac{2}{\eta^2 - 1} [aL - (1 + \Delta^2) \ln \eta] \quad (19 \cdot 20)$$

由式(19·12a)、(19·12b)、(19·14)和(19·15)得

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\chi_d/\chi_a \rho = \Delta/\rho$$

积分上式得

$$\varphi(L) - \varphi(0) = \Delta \ln \eta \quad (19 \cdot 21)$$

因为

$$\mathcal{J} = X/Y \quad (19 \cdot 22)$$

由式(19·20)——(19·22)得到

$$\mathcal{J} = \frac{T^2}{(\eta - R)^2 + 4R\eta \sin\left[\frac{1}{2}(\Delta \ln \eta - \delta_0)\right]} \quad (19 \cdot 23)$$

或

$$Y = \frac{X(\eta)}{T^2} \{(\eta - R)^2 + 4R\eta \sin\left[\frac{1}{2}(\Delta \ln \eta - \delta_0)\right]\} \quad (19 \cdot 24)$$

式(19·20)和(19·24)可看作是关于透射光强 X 与入射光强 Y 之间关系的参量方程。由于参量取值不同, $X-Y$ 曲线形式有所差异。图 19-2 是一些不同参数值下定态输出光振幅($x = \sqrt{X}$)和输入光振幅($y = \sqrt{Y}$)之间的关系。可以看出, 当 aL 和 T 取值均较小时, 输出光场可以出现三重态, 但是其中的中间态是不稳的(见下面, 也可参考 § 7)。因此三重态实际上是双稳态, 或者说, 透射光强与输入光强之间存在滞后现象(参考 § 7)。当参数取适当值时, 还可出现多重态(图 19-3)。

还可以通过色散介质的透射率 \mathcal{J} 与出射光强度 I_t 的关系看

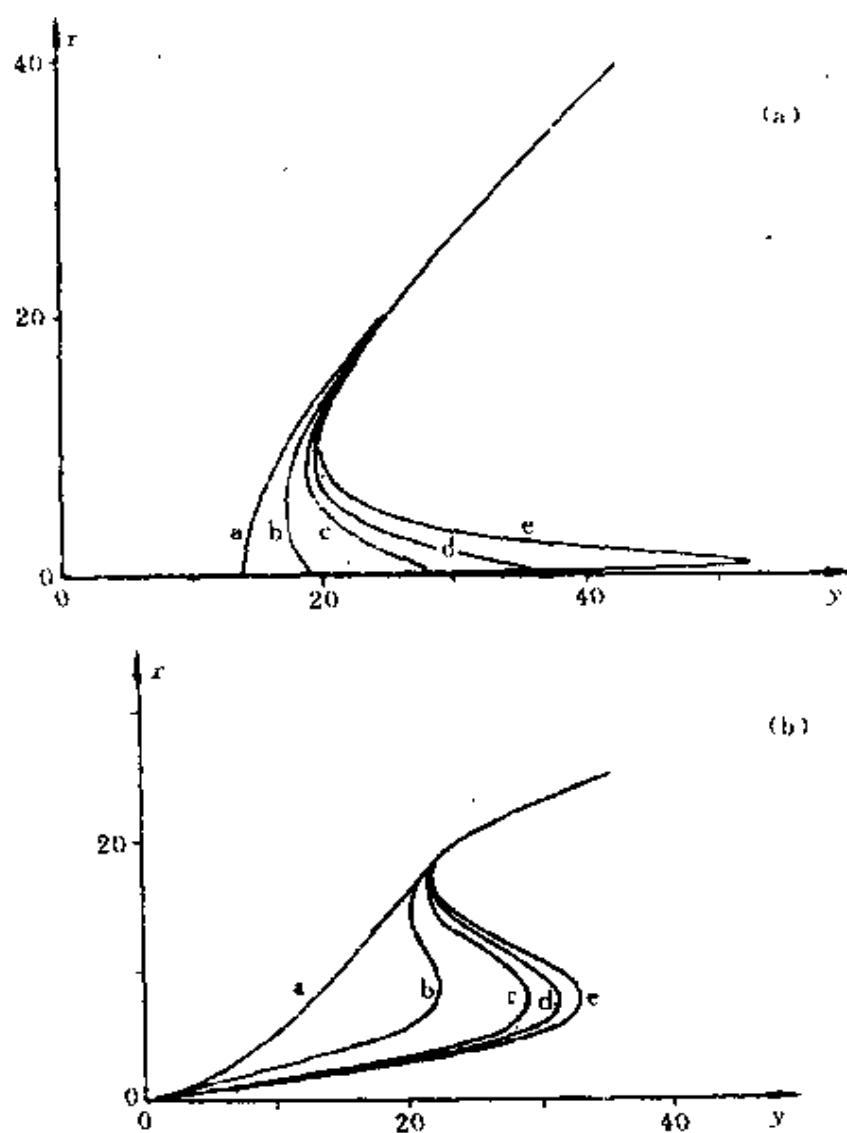


图 19-2 定态时输出光场 $x = \sqrt{X}$ 与输入光场 $x = \sqrt{Y}$ 的关系

曲线 a: $aL=100$, $T=1$ 曲线 b: $aL=50$, $T=0.5$

曲线 c: $aL=20$, $T=0.2$ 曲线 d: $aL=10$, $T=0.1$

曲线 e: 平均场理论计算结果

1) $c=50$, $\Delta=\theta=0$; 2) $c=50$, $\Delta=10$, $\theta=2.25$.

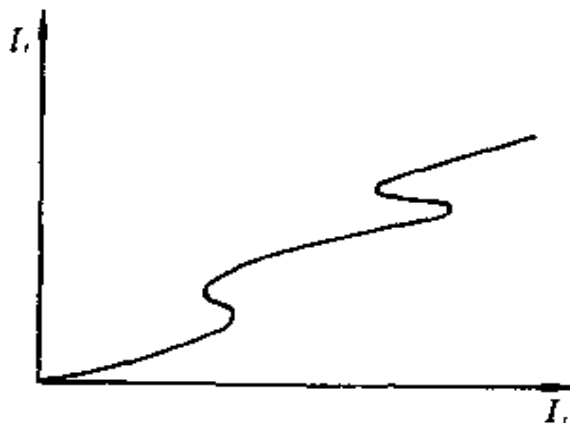


图 19-3 光学多重态

出光学双稳态是如何形成的。当光强较大时, 色散介质 (Kerr 介质) 的介质极化率可表为

$$\begin{aligned}\chi_a &= 0 \\ \chi_a &= c_1 + c_2 \rho^2\end{aligned}\quad (19 \cdot 25)$$

式中 c_1 和 c_2 是常量。由式 (19·14) 和 (19·15) 得

$$\begin{aligned}\varphi(L) - \varphi(0) &= -L(c_1 + c_2 \rho^2) \\ &= -L(c_1 + c_2 I_i / T)\end{aligned}$$

于是式 (19·17) 变为

$$\mathcal{J} = \frac{1}{1 + 4R \sin[\frac{1}{2}(\delta + \beta I_i)] / T^2} \quad (19 \cdot 26)$$

$$\delta = \delta_0 + c_1 L, \quad \beta = c_2 L / T$$

按定义 (19·16), $\mathcal{J} - I_i$ 为一些直线 (图 19-4), 直线斜率为 I_i^{-1} 。考虑色散的非线性 (19·25) 而得到的 $\mathcal{J} - I_i$ 关系式 (19·26) 为一曲线 (图 19-4)。因此定态时的 \mathcal{J} 和 I_i 关系是这些直线和曲线的交点。当入射光强度 I_i 很小时, 直线如图中的 a , 此时直线与曲

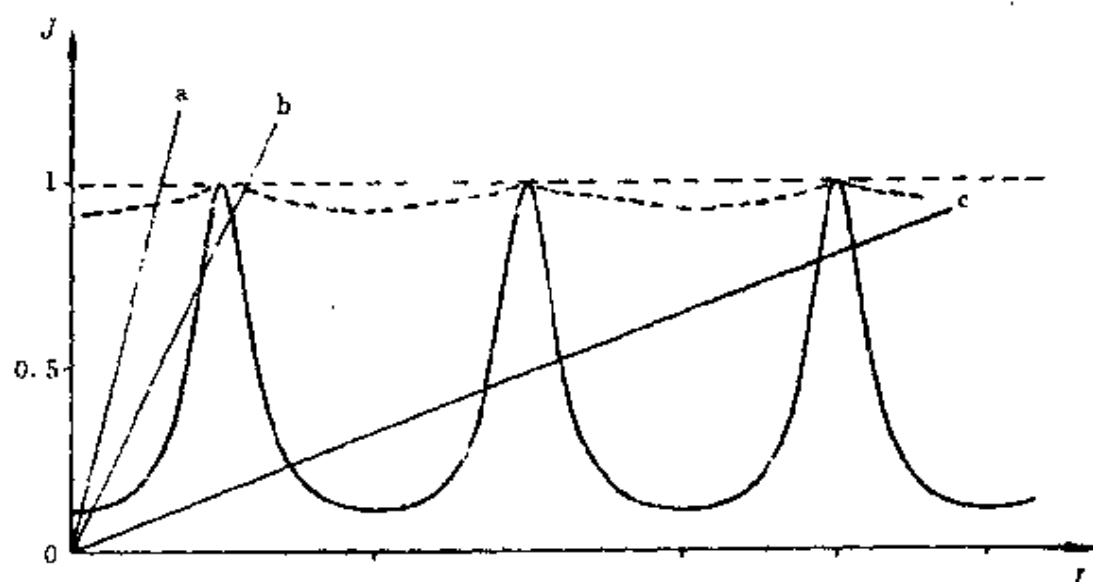


图 19-4 透射率与透射光强的关系

直线是 $J = I_T/I_i$, 曲线是式 (19·26), 它们的交点

就是定态 a、b 和 c, 表示三个不同入射光强 I_i

线只有一个交点, 即只有一个定态输出。增大 I_i , 直线如图中的 b, 这时直线与曲线有三个交点, 即出现三重态。当入射光强度 I_i 进一步增大时, 直线将如图中的 c, 也就是将出现多个交点, 所以会出现多重态。

当然, 曲线 (19·26) 的形状还与透射系数 T 等参量有关。如 T 越来越大 (R 很小, 光的反馈作用也随之很小) 时, 曲线变得越来越平坦 (图 19-4 中的点线), 它与直线 (19·16) 出现多个交点的机会越来越少。最后 (透射系数 T 极大, 反馈极弱) 就可能只出现一个交点。由此也可见, 多重定态 (包括双稳态) 是由反馈作用加上介质的非线性双重作用引起的。

由 §7 的讨论可知, 光学双稳态的存在表明对于一定的入射光强 I_i , 既存在一低输出光强 I_o , 也存在一高输出光强 I_o 。输出光

强取此二值的哪一个,由入射光强度 I_i 变化的具体情况决定,即输出光强可存在滞后现象 (§ 7)。这也表明,具有光学双稳态的器件具有记忆功能和开关功能。因此光学双稳态元件将被广泛应用于光学信息处理、光通讯以至用于制造光计算机。

3. 线性稳定性分析

我们自然还应该分析光学双稳态的稳定性问题,然后才好分析不稳定态存在时可能引起的现象。虽然稳定性分析以及稳定与否可能引起的现象都可以由解 M-B 方程直接得到,但也可以用 § 3 所述的线性稳定性分析法。为了物理意义比较直观,我们现在采用后者。

为简单计,我们只讨论纯吸收介质情形,即 M-B 方程取式 (19·5) 形式的情形。设下标 s 表示定态时的量,对定态量的微小偏离用小写字母表示,即

$$e(z,t) = E(z,t) - E_s(z) \quad (19 \cdot 27a)$$

$$p(z,t) = P(z,t) - P_s(z) \quad (19 \cdot 27b)$$

$$d(z,t) = D(z,t) - D_s(z) \quad (19 \cdot 27c)$$

将上式代入方程 (19·5) 得

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -c \frac{\partial e}{\partial z} - gp \quad (19 \cdot 28a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mu}{\hbar} (E_s d + D_s e) - \gamma_{\perp} p + \frac{\mu}{\hbar} e d \quad (19 \cdot 28b)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} (E_s p + P_s e) - \gamma_{\parallel} d - \frac{\mu}{\hbar} e p \quad (19 \cdot 28c)$$

令

$$q(z,t) = \begin{pmatrix} e(z,t) \\ p(z,t) \\ d(z,t) \end{pmatrix} \quad (19 \cdot 29)$$

则方程 (19·28) 可写成下述简单的矩阵形式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \hat{L}\mathbf{q} + \Psi_{NL} \quad (19 \cdot 30)$$

式中

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -g \\ \frac{\mu}{\hbar} D_s & \frac{\mu}{\hbar} E_s & -\gamma_{\perp} \\ -\frac{\mu}{\hbar} P_s & -\gamma_{\parallel} & -\frac{\mu}{\hbar} E_s \end{bmatrix} \quad (19 \cdot 31)$$

$$\Psi_{NL} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\hbar} ed \\ -\frac{\mu}{\hbar} ep \end{bmatrix} \quad (19 \cdot 32)$$

$\hat{L}\mathbf{q}$ 和 Ψ_{NL} 分别表示方程 (19·28) 或方程 (19·30) 中的线性部分和非线性部分。

在线性分析 (§3) 中, 方程 (19·28) 或 (19·30) 的特征方程为

$$\hat{L}Q_{nj} = \lambda_{nj}Q_{nj} \quad (19 \cdot 33)$$

此处特征值 λ_{nj} 有两个标志振荡模的下标: $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j=1, 2, 3$ 。 n 标志腔的振荡频率, $n=0$ 表示与入射光谐振的模。根据 §3 的讨论, 特征方程 (19·33) 的解 Q_{nj} 取指数形式, 线性方程的解则是诸 Q_{nj} 的线性叠加。显然, 只有当 $\text{Re} \lambda_{nj} \leq 0$, 定态才可能是稳定的。非线性方程 (19·30) 的解 $\mathbf{q}(z, t)$ 也可展成 Q_{nj} 的叠加, 但叠加系数 (振幅) 将是时间的函数。

我们讨论如下极限情形:

$$\alpha L \ll 1, T \ll 1 \quad (19 \cdot 34)$$

上式表示: (1) 光学腔长 L 极短, 以至光场可以认为是均匀的;

(2) 透射系数 T 极小, 正反馈极强, 易于激起振荡。这时可以证明 (Bonifacio 等, 1978, 1979), 方程 (19·33) 的特征值为

$$\lambda_{n1} = -i\alpha_n - \frac{cT}{\mathcal{L}} \cdot \left\{ 1 + \frac{2CY_{\perp} [\gamma_{\perp} (1-x^2) - i\alpha_n]}{(1+x^2) [(\gamma_{\perp} - i\alpha_n)(\gamma_{\parallel} - i\alpha_n) - \gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}x^2]} \right\} + 0(T^2) \quad (19 \cdot 35a)$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{1}{2} \left\{ \gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel} \pm \sqrt{(\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel})^2 - 4\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}x^2} \right\} + 0(T) \quad (19 \cdot 35b)$$

$$\alpha_n = 2\pi nc/\mathcal{L} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19 \cdot 35c)$$

$$C = aL/2T \quad (19 \cdot 35d)$$

$\mathcal{L} = 2(L+l)$ 为腔总长, x 是归一化透射光场的定态值。因为 n 标志振荡频率而 $n=0$ 表示谐振, 从式 (19·35) 可见, $n=1$ 的模主要由场量决定 (“场模”), 而 $n=2, 3$ 的模则是由介质原子的性质决定 (“原子模”)。

由于输出场强 X 是实变量, 因此有

$$\lambda_{-n1} = (\lambda_{n1})^*, \quad \lambda_{-n2} = (\lambda_{n2})^*$$

根据 § 3 的讨论, 只有对于所有的 n 和 j , $\text{Re}\lambda_{nj} \leq 0$, 定态才是稳定的; 反之, 只要有一个 $\text{Re}\lambda_{nj}$ 大于零, 定态就不稳定。由式 (19·35b) 可知, λ_{n2} 总是小于零, 只有 $\text{Re}\lambda_{n1}$ 才可能取正值。

对于谐振 ($n=0$) 的情形, 由式 (19·35a) 得

$$\lambda_{01} = -\frac{cT}{\mathcal{L}} \left[1 + 2C \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right] = -\frac{cT}{\mathcal{L}} \frac{dy}{dx} \quad (19 \cdot 36)$$

因此 $x=x(y)$ 曲线中具有正斜率的部分都是稳定的, 而具有负斜率的部分总是不稳的。

再看看非谐振情形。我们不拟就一般情形进行繁琐的论证, 只是指出, 对于较简单的 $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$ 的情形, 可以证明 (Bonifacio

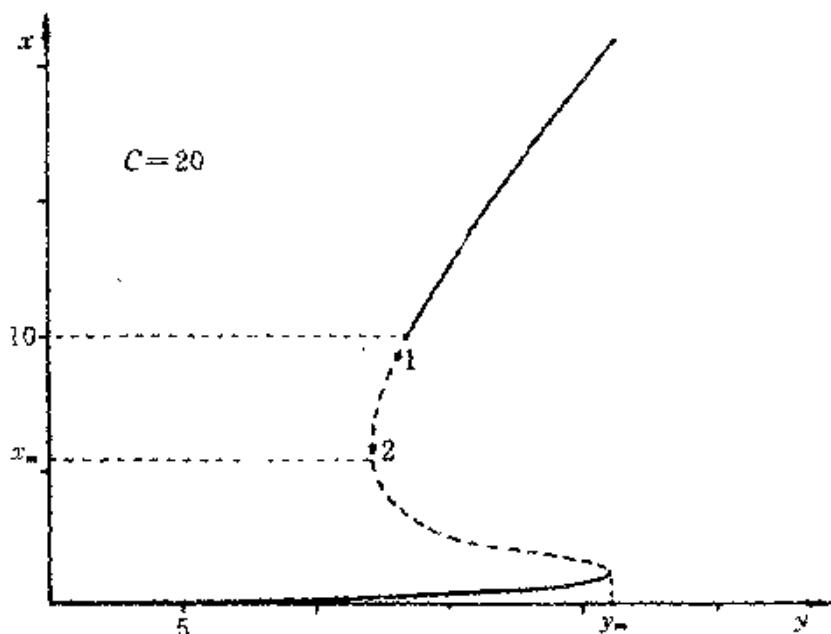


图 19-5 $aL \ll 1$, $T \ll 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ 情形下透射场

强 x 与入射场强 y 的关系

实线为稳定区, 虚线为不稳区。

等 1979): 当 $C < 2(1 + \sqrt{2})$ 时, 图 19-2 的滞后曲线具有正斜率的上下两支都是稳定的。但是当 $C > 2(1 + \sqrt{2})$ 时, 令

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \gamma[x^2 - C - 1 + \sqrt{C^2 - 4x^2}]^{1/2} \\ \alpha_{\min} &= \gamma[x^2 - C - 1 - \sqrt{C^2 - 4x^2}]^{1/2} \end{aligned} \quad (19 \cdot 37)$$

若诸 α_n 中至少有一个满足下列条件:

$$\alpha_{\min} < |\alpha_n| < \alpha_{\max} \quad (19 \cdot 38)$$

则在高透射的上支中的 $x < C/2$ 部分将是不稳的, 如图 19-5 中的上支的虚线部分。即 α_n 值的不稳区就是图 19-6 所示的 $\alpha_{\max}/\gamma - x$ 和 $\alpha_{\min}/\gamma - x$ 两曲线包围的区域。图 19-5 中标为 1 和 2 的两点分别与图 19-6 中标为 1 和 2 的两点对应。

因为 $\lambda_{-n} = (\lambda_n)^*$, 不稳频率(模)成对地出现在谐振频率

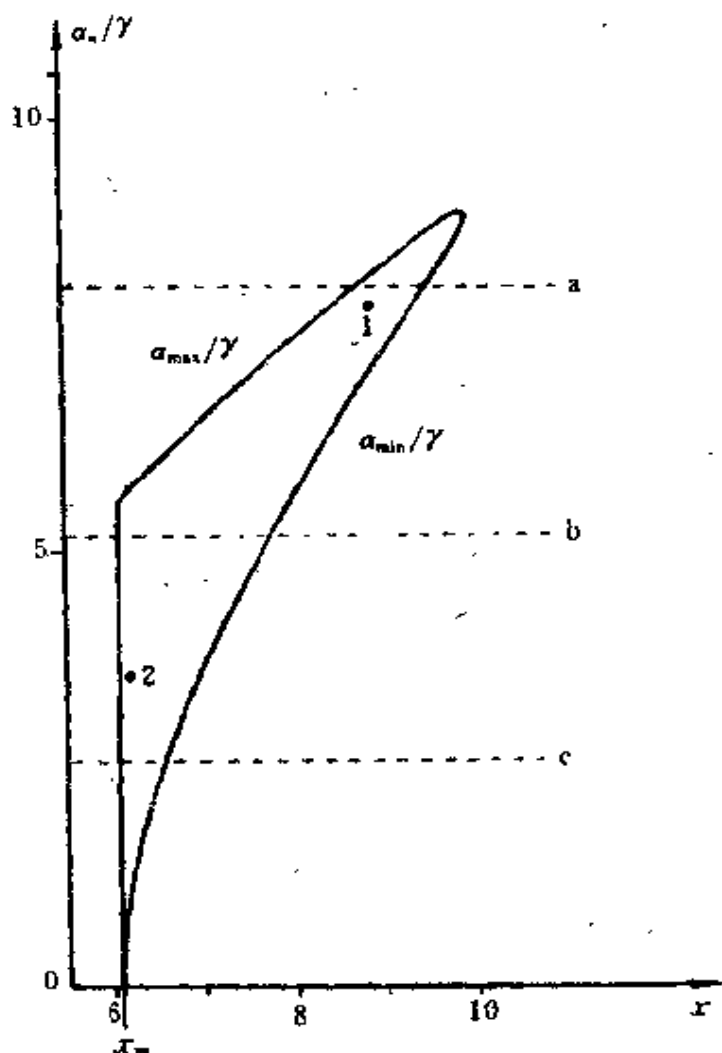


图 19-6 $\alpha_1/\gamma - x$ 平面中的不稳区 (曲线包

围部分) $aL \ll 1$, $T \ll 1$, $C = \frac{aL}{2T} = 20$

图中点 1 和点 2 分别对应于图 19-5 中的点 1 和点 2。

($n=0$) 的两侧, $\alpha_1 = 2\pi c/\omega$ 便是谐振模 ($n=0$) 与其最靠近的两个旁模的频率差。

4. 自脉冲和光学混沌

我们来讨论当系统具有如图 19-5 和图 19-6 这样的特性时可

能会出现什么现象。

如前所述,图 19-5 的下支和上支的稳定部分分别代表稳定的低强度和高强度的光。当系统处于上支的不稳区(不稳定态),根据 § 2 和 § 3 的讨论,可以出现以下三种情况:

(1) 系统将由此不稳定定态跃到稳定定态,即系统将“沉降”(precipitate)到低输出的下支。

(2) 系统进行极限环型周期振荡。这表示即使输入光是连续的,输出光将变成脉冲式的。这就是所谓“自脉冲”现象。脉冲周期的数量级为 \mathcal{L}/c (纳秒级),波形则与所包含的旁模数有关。在此情况下,此光学腔便可看成是一种把连续输入的光变成脉冲光的(全光学型的)转换器。

(3) 系统进入混沌状态,这就是光学混沌(optical chaos)。

如果输入光场较大使系统开始时处于图 19-5 中稳定的高输出上支,逐渐变小输入光强将出现什么现象呢?如果参量(如 \mathcal{L})取值使系统是沿图 19-6 的水平线 a 变化,当进入不稳区时,光场即刻按指数形式发展,很快就按极限环形式作周期振荡[图 19-7 (a)]或按混沌形式振荡。如果继续减小输入光强,使得工作点自图 19-6 的不稳区侧边界线穿出,系统又将回到稳定的连续输出状态。当参量值是使系统在图 19-6 的水平线 b 上工作(如增大 \mathcal{L})时,由 b 的右端稳定输出区域减小入射光强进入不稳区时,系统仍将进行振荡。但是继续减小入射光强达到 $x \leq x_m$,这时虽未破坏式 (19·38) 给出的不稳条件(即这时 α_n 没有大于 α_{max}),由于 x_m 是高透射上支的最小允许值,于是系统便沉降到低透射的下支上面[图 19-7 (b)]。对于水平线 c,由于不稳区很窄,系统进入不稳区后可能很快便沉降到低透射支上。

总之,高透射支上的不稳区是由于谐振模($n=0$)以外还存在不稳旁模($n \neq 0$)引起的,即系统的一部分能量由谐振模转移

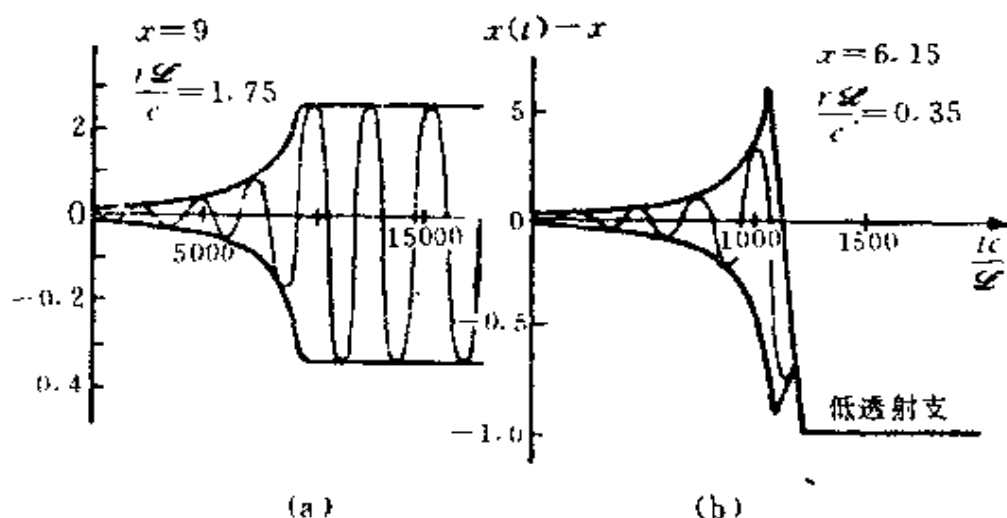


图 19-7 透射光场 $x(t)$ 与定态值 x 之差随时间的变化 ($T=0.1$)

(a) 自脉冲情形; (b) 沉降情形。

到旁模上去了。如果不稳旁模占优势, 系统便处于振荡状态 (极限环型或混沌); 如果谐振模占优势, 系统便沉降到低透射支上。

以上我们是为了简单而在一些假设和条件下推得光学腔中可能存在不稳定态从而可能出现振荡现象。实际上许多不满足这些假设或条件的情形中同样也可出现不稳和振荡。比如, 非均匀加宽情形和法布里-珀罗腔中也观察到振荡。已经证明 (Bonifacio 和 Lugiato, 1978), 对于 αL 和 T 取值不满足条件 (19.34) 时, $x-y$ 曲线上具有正的斜率部分也可以出现不稳定。此外, 也已证明 (Lugiato, 1980), 对于不是纯吸收的色散介质, 存在引起自脉冲的不稳态, 而且在没有滞后曲线的单态中也有不稳区段 (图 19-8)。这样, 色散介质便更易引起自脉冲。因为它不像双稳态那样引起自脉冲需较强的入射光使系统处于高透射区, 而且这时也不会沉降到低透射区。

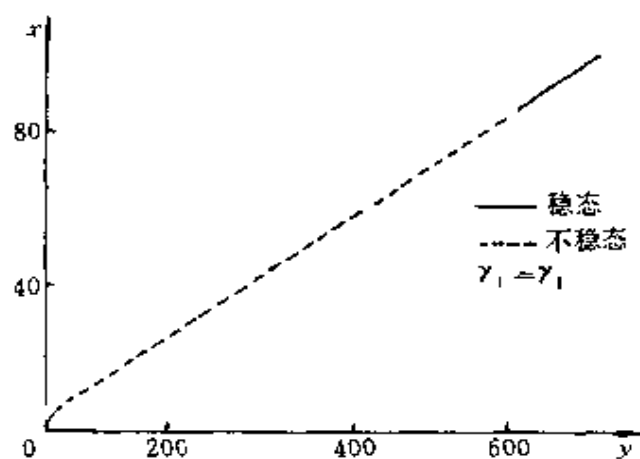


图 19-8 $C=30$, $\Delta=\theta=7$ 的色散介质的稳态和不稳态

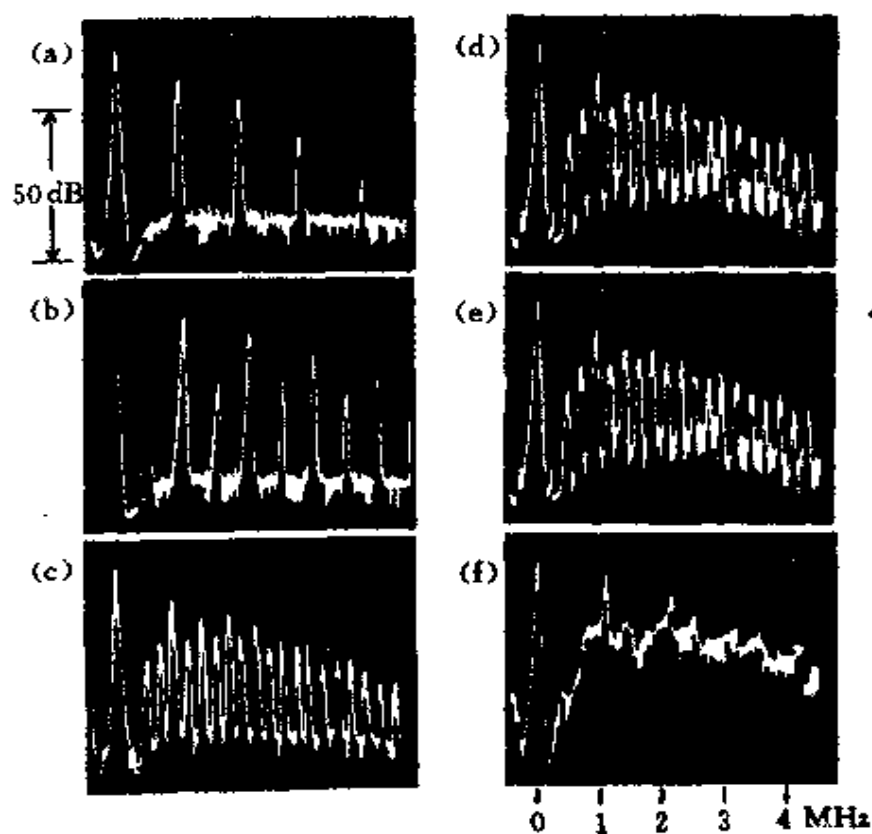


图 19-9 $^{15}\text{NH}_3$ 激光器的自脉冲

自上而下逐次减小失谐量由倍周期分岔进入混沌。

此外,在对光学腔进行理论分析中,可以用本节采用的微分方程,也可用延迟方程(高景岳等 1983, 1984),还可用差分方程(Ikeda, 1979)。这些方法自然并没有本质上的区别。

图 19-9 是韦斯(Weiss)等人(1985)用 $^{15}\text{NH}_3$ 做的远红外(FIR)激光器($8.15\mu\text{m}$)实验的结果。图中自上而下逐次减小失谐量,它表明自脉冲中由倍周期分岔进入混沌的过程。

§ 20 化学反应中的混沌

除了某些化学反应可以引起周期振荡外,某些化学反应也可能出现混沌。本节拟略加介绍。

1. B-Z 反应

在 § 5 中我们已谈到,由于许多化学反应的非线性,其中有的可能要引起振荡,近十余年来人们还发现有些化学振荡实际是混沌,而且可以在空间形成一些形式的波(如涡旋波)。例如, B-Z 反应就是如此。

在 B-Z 反应中,实际反应过程极复杂(可能包含有 20 个左右的反应),参与反应的化合物很多,通常都是让反应物以恒定速率输入到反应器中,充分搅拌反应器使反应均匀而观察反应随时间的变化。一般采用溴离子电极测量 Br^- 电位以表示 Br^- 浓度的变化。 Br^- 电极可直接接到计算机以实现自动纪录。特纳(Turner)和罗克斯(Roux)等人 1981 年实验时可使观察时间长达八小时,纪录点多达 16384 个。作为可调参数,他们选用反应物的停留时间 τ ($\tau = \text{反应器体积}/\text{流速}$),其值变化范围可从 0.5 到 4 小时。这样特纳等人得到图 20-1 的结果。图中 (a)、(b) 和 (c) (上、中、下三行)是分别对三个不同的 τ 值的实验结果。其

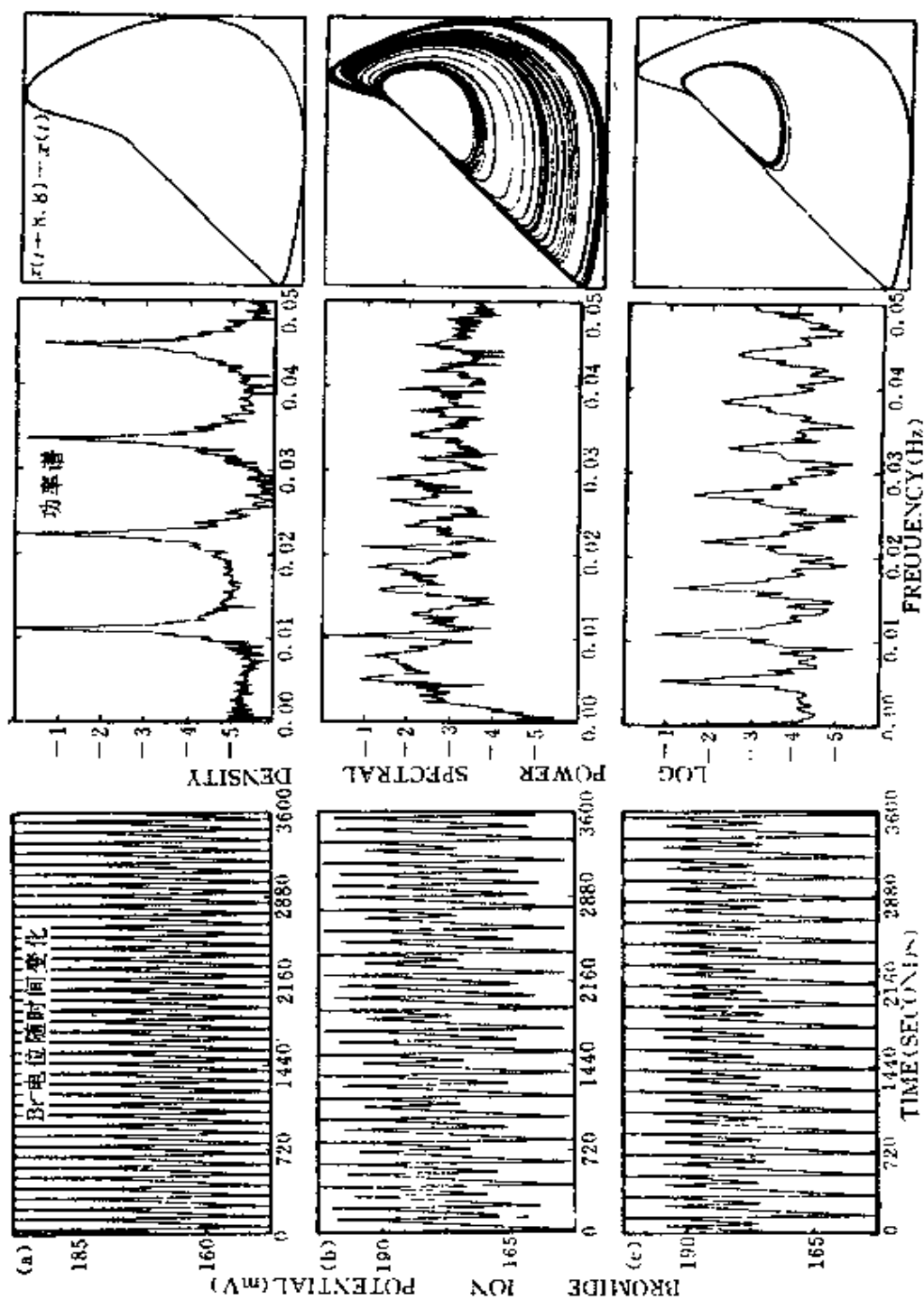


图 20.1 特纳等人 (1981) 关于 B-Z 反应的结果

(a)、(b) 和 (c) 分别对应于停留时间 τ 等于 0.49h、0.90h 和 1.03h。

中左三图是直接纪录 Br^- 电位随时间的变化, 中间三图是相应的功率谱, 右三图则是利用相空间重构法 (§ 10) 得到的相应的相平面上的 $x(t+T)-x(t)$ 曲线 ($T=8.8$ 秒)。当 $\tau=0.49$ 小时, 图 (a) 明确显示 Br^- 是以极限环形式振荡, $\tau=1.03$ 小时的图 (c) 也

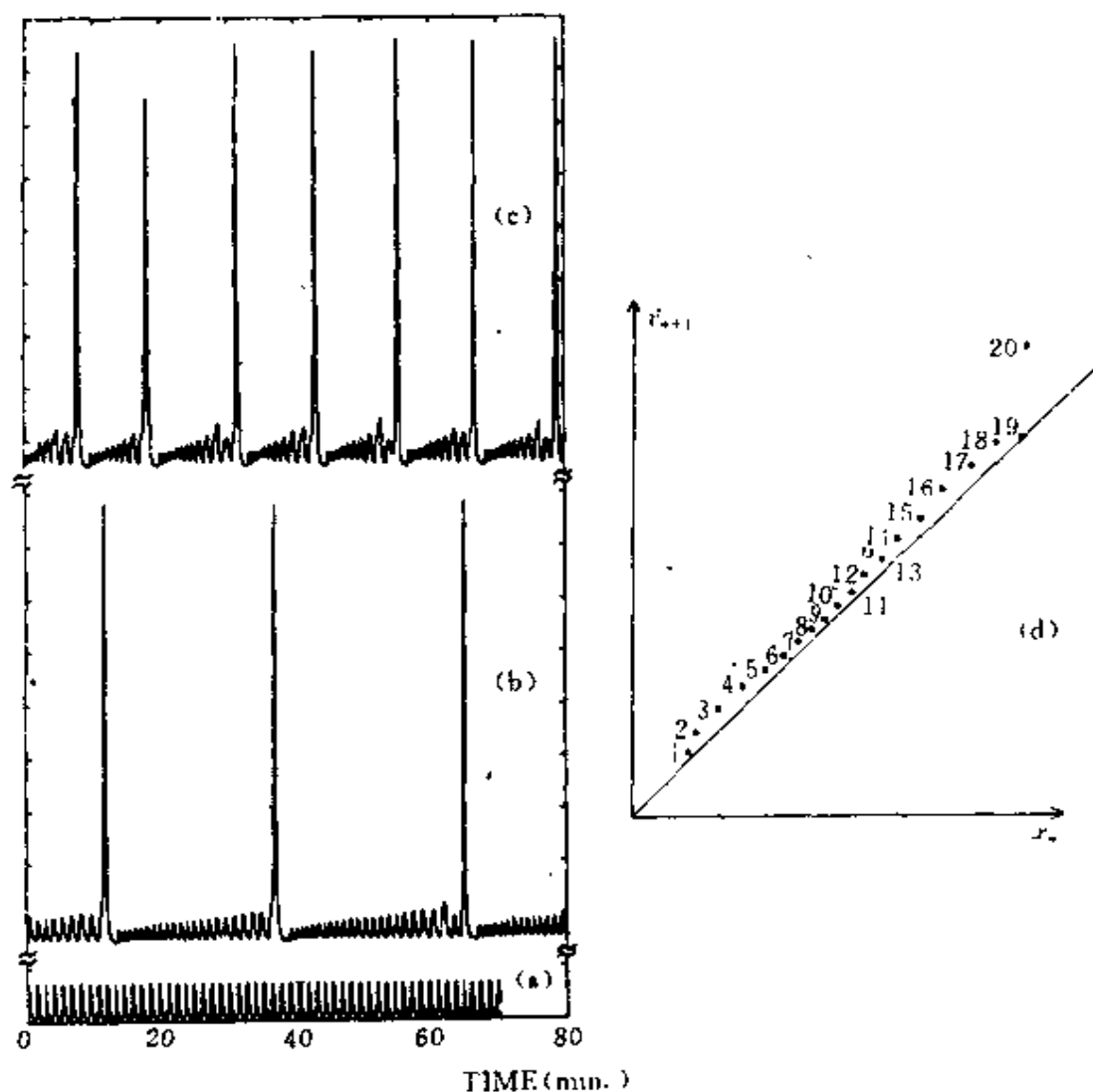
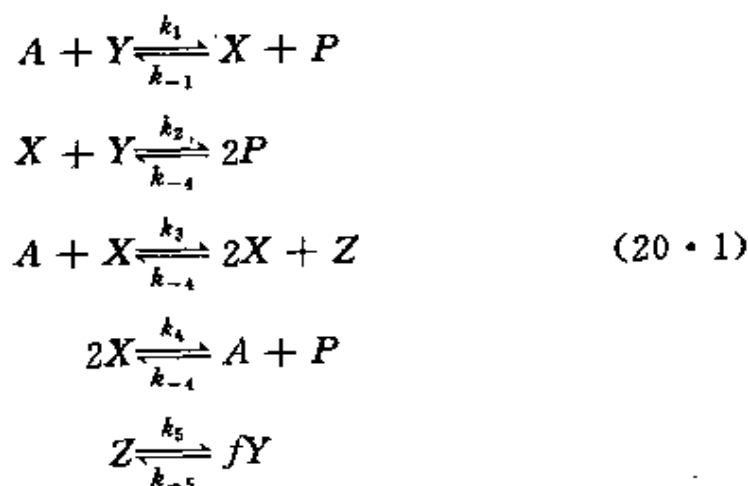


图 20-2 B-Z 反应中的间歇混沌

是周期振荡, 但周期加大一倍。 $\tau=0.90$ 小时的图(b)中的时间序列(左图)难于给出振荡性质的结论, 但(b)的功率谱和相平面曲线明确显示 Br^- 变化具有混沌的性质。

此外, 玻勉 (Pomeau) 和罗克斯等人还在 B-Z 反应中观察到间歇混沌, 如图 20-2 所示。图(a)、(b)和(c)都表示 $[\text{Ce}^{4+}]$ 随时间的变化, 它们分别对应于停留时间 τ 取 100 分、76 分和 35 分各值。很明显, 图(a)表示 $[\text{Ce}^{4+}]$ 作规则振荡。图(b)和图(c)则显示 $[\text{Ce}^{4+}]$ 每隔一段时间出现一次爆发(阵发)。图(d)是图(b)中相邻两次爆发值画成的离散映象图, 它清楚地示出间歇混沌是在切分岔附近发生的 (§ 13)。

罗克斯等人也提出了关于 B-Z 反应中出现混沌的理论分析。他们认为 Field 等人的俄勒冈振子模型中的反应〔见方程 (5.12)〕应该是可逆的, 即



相应的速率方程为 (为方便计, 他们取 $f=1$)

$$\begin{aligned}
 W_1 &= k_1 AY - k_{-1} XP \\
 W_2 &= k_2 XY - k_{-2} P^2 \\
 W_3 &= k_3 AX - k_{-3} X^2 Z \\
 W_4 &= k_4 X^2 - k_{-4} AP
 \end{aligned}$$

$$W_5 = k_5 Z - k_{-5} Y \quad (20 \cdot 2)$$

由此得到有关各变量变化的微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{X} &= W_1 - W_2 + W_3 - 2W_4 - X/\tau \\ \dot{Y} &= -W_1 - W_2 + W_5 - Y/\tau \\ \dot{Z} &= W_3 - W_5 - Z/\tau \\ \dot{P} &= W_1 + 2W_2 + W_4 - W_5 - P/\tau \end{aligned} \quad (20 \cdot 3)$$

式中 $A=0.06M$ ，各速率系数取值为

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.34M^{-1}s^{-1}; & k_{-1} &= 1 \times 10^4 M^{-1}s^{-1} \\ k_2 &= 1.6 \times 10^3 M^{-1}s^{-1}; & k_{-2} &= 5 \times 10^{-5} M^{-1}s^{-1} \\ k_3 &= 8 \times 10^3 M^{-1}s^{-1}; & k_{-3} &= 4.8 \times 10^{11} M^{-2}s^{-1} \\ k_4 &= 4 \times 10^7 M^{-1}s^{-1}; & k_{-4} &= 1.6 \times 10^{-10} M^{-1}s^{-1} \\ k_5 &= 90s^{-1}; & k_{-5} &= 1 \times 10^{-5} s^{-1} \end{aligned}$$

对不同的 τ 值，由式 (20·3) 计算得到的结果和预示混沌的存在定性地与上述图 20-1 的实验结果大体一致。但是罗克斯等人也发现， $B-Z$ 反应中周期与混沌在参数轴上出现的序列并不像前面几节理论所指出的那样是由倍周期分岔通向混沌，而是周期与混沌交替地出现。可以注意到，倍周期分岔通向混沌只是在一个参数变化其他参数适当选定的情况下的结果。如果增加可变化参数的数目，那么在参数平面（参考图 22-4）甚至参数空间中就可能划分成许多混沌区和周期区。适当选择某一参数变化，就有可能交替地穿过周期区和混沌区。 $B-Z$ 反应中出现的现象很可能是由此产生的。当然，是否如此，尚待进一步研究。

2. 受迫布鲁塞尔振子

§ 5 曾经介绍了布鲁塞尔振子的振荡性质。当对此振子加一

周期外力时,有可能出现混沌。富田久和等人于1978年对此作过研究。稍后(1982—1984)郝柏林等人又对此作了大量深入系统的研究,得到了一系列细致的结果。

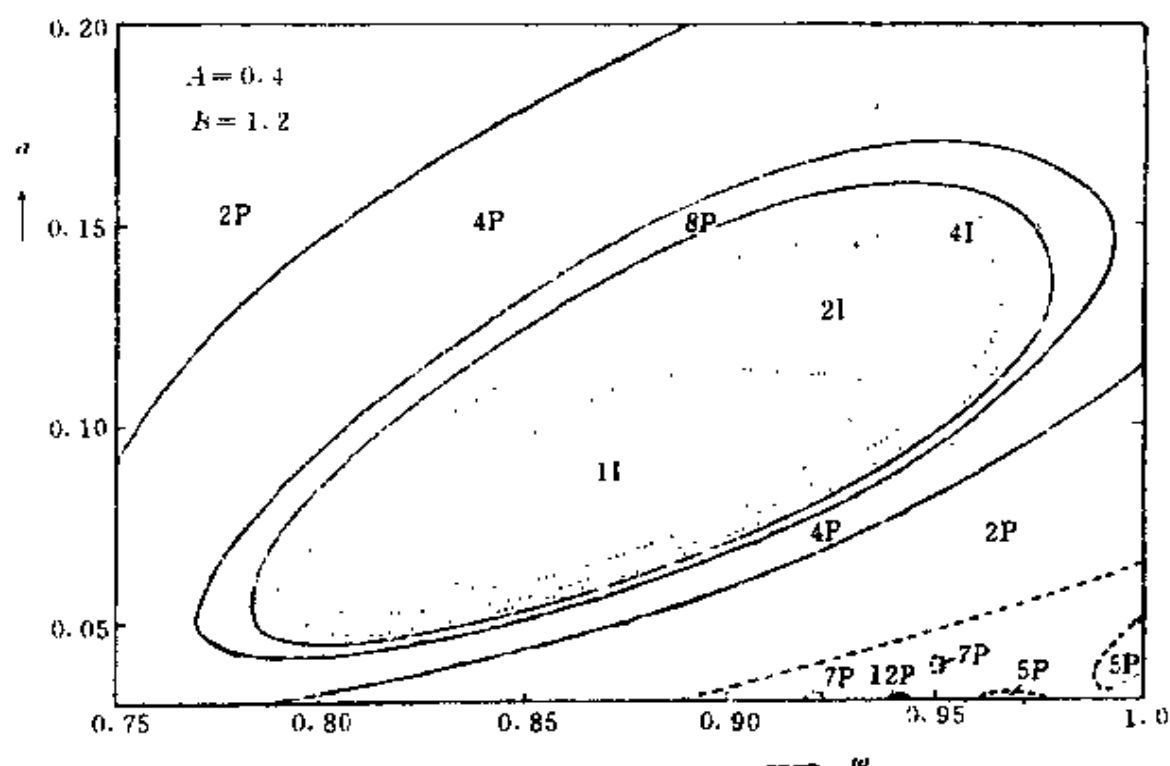


图 20-3 受迫布鲁塞尔振子 $a-\omega$ 平面分区图

加周期强迫作用后,布鲁塞尔振子的反应速率方程(5·33)变为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X^2 + X^2Y + a\cos\omega t \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y\end{aligned}\quad (20 \cdot 4)$$

上式自然也可写成下面的自治方程

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X^2 + X^2Y + aZ \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y \\ \dot{Z} &= -Z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= -\omega U \\ \dot{U} &= \omega Z\end{aligned}\quad (20 \cdot 5)$$

初始条件是 $U(0)=0, Z(0)=1$ 。郝柏林等人工作之一是取 $A=0.4, B=1.2$ 分析在 a 和 ω 取不同值时运动的性质, 这样就可以把 $a-\omega$ 平面划分为许多区域, 不同区域运动性质不同。图 20-3 就是他们的结果。为了清楚地看出此图的意义, 令 ω 取固定值 0.80, 改变 a 值, 就得到图 20-4 的分岔图。当 a 极小 (<0.008) 时, 振子以两个独立频率 (非线性布鲁塞尔振子的频率和外力频率 ω , 相当于 1P 轨道) 振荡。因为受迫布鲁塞尔振子实际上可看作两个振子的耦合: 方程 (20·5) 表示非线性布鲁塞尔振子和频率为 ω 的线性振子的耦合。当耦合作用 (用 a 表示) 极弱时, 两振子自当按各自的频率振荡。当 a 增至 0.008 时, 振子突然变到 2P 轨道, 然后逐次倍周期分岔而进入混沌带的反序 (8I, 4I, 2I)。由于图 20-3 中 $\omega=0.80$ 直线 (图中虚线) 偏于混沌区的左侧, 它没有穿过 1I 混沌带, 因此图 20-4 中只合并到 2I 混沌带为止。 a 继续增加, 振子的运动又依次由混沌带的正序列 (2I, 4I, 8I, ...) 进入

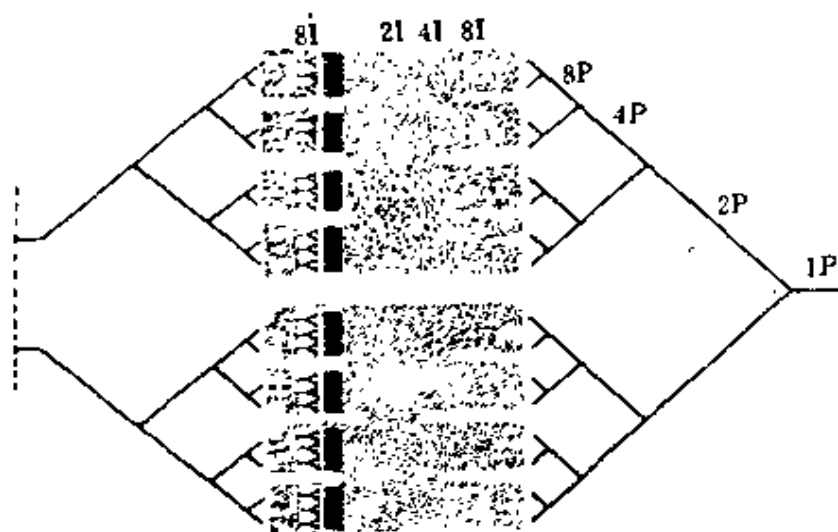


图 20-4 沿 $\omega=0.8$ 的分岔示意图 (未按比例)

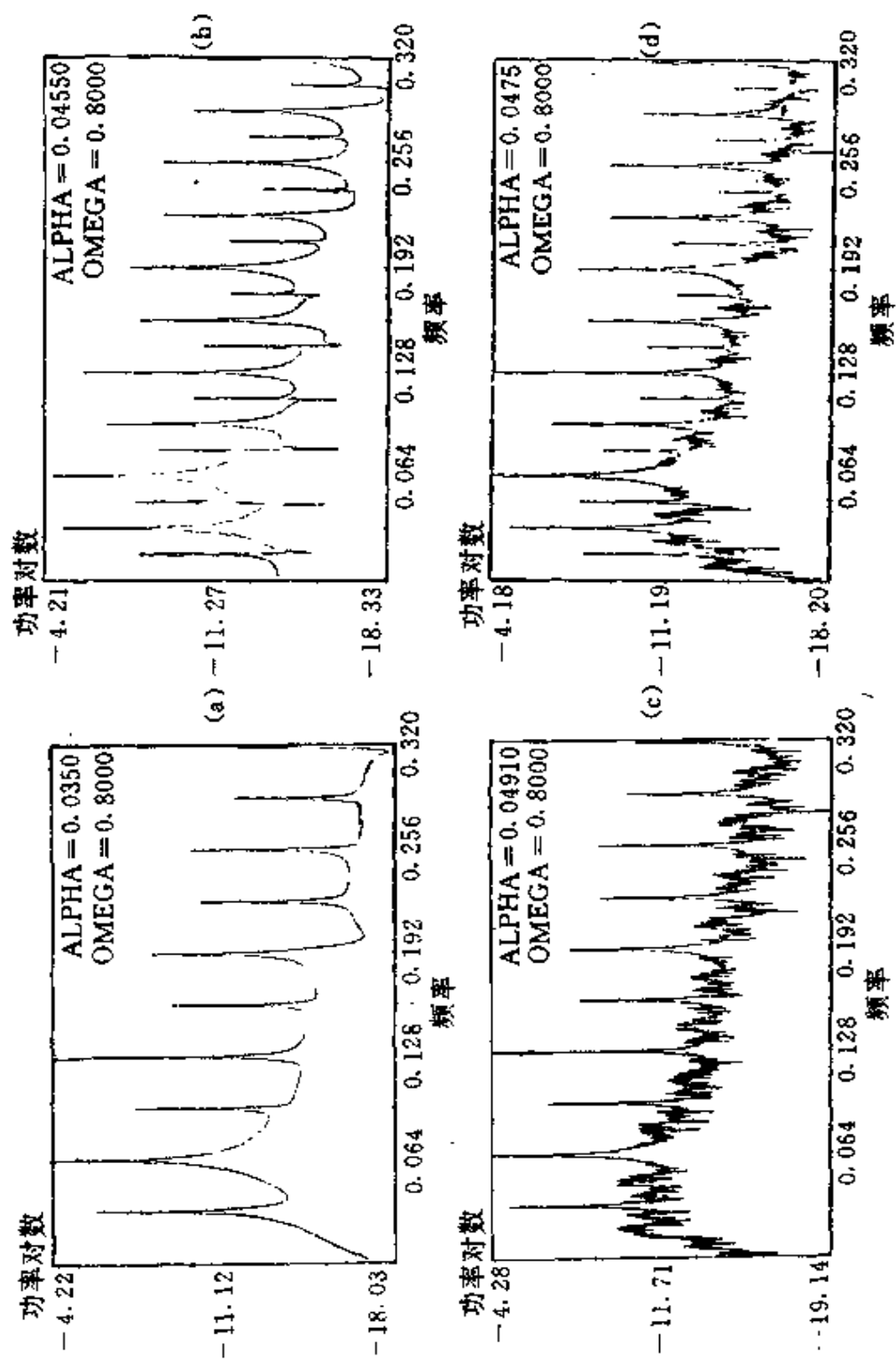


图 20-5 受迫布鲁塞尔振子的功率谱

(a) 4P (b) 8P (c) 4I (d) 8I

周期分岔的反序列 ($\cdots 8P, 4P, 2P$)。这表示耦合作用很强 (a 很大) 时, 系统锁频到外力的频率或其分频上。由此可见, 混沌的出现可看作非线性耦合振子系统在耦合作用适度 (不是极小也不是太大) 时两振荡相互强烈作用的产物 (参考 § 9)。

为了划出 $a-\omega$ 平面的分区图, 自然要求能很好地区别各不同周期轨道和混沌带。为此郝柏林等人采用了各种方法并进行综合分析。图 20-5(a)~(d) 分别是 4P、8P、4I 和 8I 的功率谱。很明显, 混沌带除了有噪声背景外, 还有与周期轨道对应的尖峰。这些尖峰反映了振子在混沌区内来回振荡的平均周期。图 20-6 是在 $X-Y$ 平面上的奇怪吸引子, 其中 1I 的吸引子是单连通区, 2I 和 4I 的都是复连通。很明显, 振子在这样有限的吸引区内运动, 必然要来回振荡。连通区越复杂, 来回一次的平均时间 (平均周期) 越长。

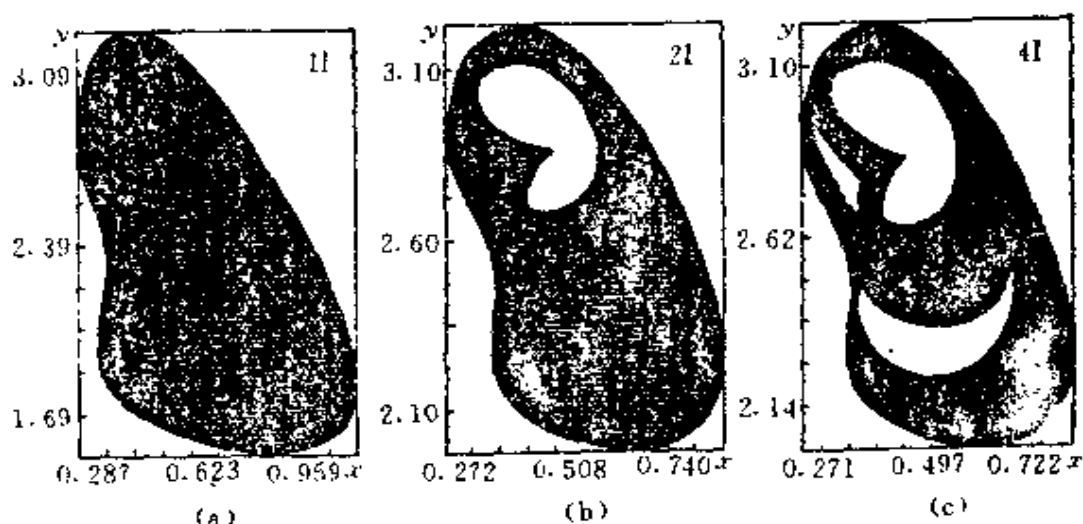


图 20-6 受迫布鲁塞尔振子的奇怪吸引子

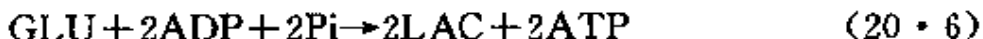
3. 生化反应中的振荡和混沌

除了以上介绍的两种化学反应外, 在生物化学反应中还发现

一些振荡和混沌现象，我们举出其中较突出的二种：

(1) 糖酵解

这是指的动物体内葡萄糖 (GLU, 由各种碳水化合物转化而成) 在缺氧 (剧烈运动时或高山环境) 下经过一系列复杂的酶促反应后转化为乳酸 (LAC) 并产生高能化合物三磷酸腺苷 (ATP) 的过程。此复杂的生化反应总的效果可简单表示为



式中 ADP 为二磷酸腺苷, P_i 为磷酸。由于 ATP 是向各种组织 (如脑、肌肉、心脏等) 提供活动能量的重要能源物质, 因此糖酵解是动物新陈代谢过程中重要的提供能量的生化反应。在此复杂的酶促反应中, 一些酶的活性受反应产物的影响, 其中有的是激活作用, 有的则是抑制作用。也就是说, 参与糖酵解过程中的各组分组成了一个复杂的反馈系统。人们 (Goldbeter and Lefever 1972, Boiteux et al, 1975. 参考尼科利斯和普利戈京书 § 14 · 3) 曾用简单模型模拟糖酵解过程, 其方程为

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sigma_1 - \sigma_m \Phi \\ \dot{r} &= \sigma_m \Phi - k_r r \\ \Phi &= \frac{ae(1+ae)(1+r)^2 + Lbace'(1+ace')}{L(1+ace')^2 + (1+r)^2(1+ae)^2} \end{aligned} \quad (20 \cdot 7)$$

式中 α 和 r 分别表示 (归一化的) 葡萄糖浓度和 ADP 浓度, 其余均为常系数。

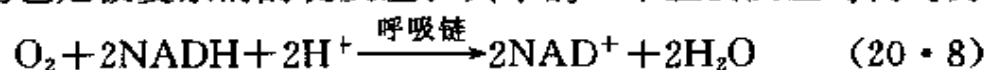
当各参数取适当值时, 方程 (20 · 7) 有极限环解, 得到的 ADP 等物质随时间振荡, 结果大体上与观察到的结果一致。

1984 年人们发现, 如果周期地供给葡萄糖 [用酵母菌的无细胞抽提液放在特制容器内实验。周期供氧相当于在方程 (20 · 7) 第一式中加一周项], 结果发现, 在适当的参数范围内出现了周期

分岔与混沌。

(2) 过氧化物酶-氧化酶反应。

人体所需能量或储能物质 ATP 主要还是靠呼吸过程中糖在细胞内的有氧氧化提供,特别是休息时或活动不剧烈时更是如此。有氧氧化也是极复杂的酶促反应。其中的一个主要反应可简写为



式中 NADH 和 NAD^+ 分别是还原型烟酰胺腺嘌呤核苷酸和氧化型烟酰胺腺嘌呤核苷酸。上述 NADH 氧化反应可使葡萄糖氧化成丙酮酸或使 ADP 变成 ATP。

上述反应(20·8)的一种中间过程是反应先生成过氧化物 H_2O_2 , 然后此过氧化物在过氧化酶作用下才生成水。人们发现 (Olsen 和 Degn, 1977, 1978), 这种过氧化酶-氧化酶反

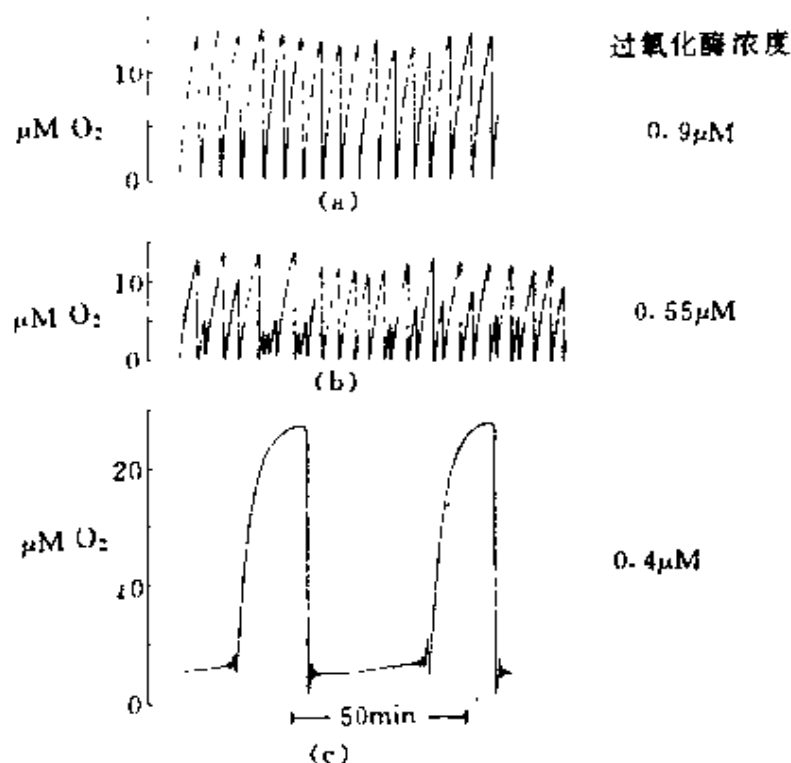


图 20.7 NADH 氧化过程中出现的振荡和混沌, 纵轴是 O_2 的浓度 (μM)

应 (20·8) 可以出现振荡。用辣根过氧化酶 (horseradish peroxidase) 作催化剂, 并用其浓度当控制参量进行实验。改变过氧化酶浓度, 用光谱很易测得 O_2 浓度。图 20-7 就是奥尔森 (Olsen) 于 1983 年得到的在三种不同的过氧化酶浓度下 O_2 的变化曲线。可以看出, 当过氧化酶浓度较高或较低时, O_2 浓度是规则振荡 [图 20-7(a) 和图 20-7(c)]。当过氧化酶浓度取适当值 [0.55 μM , 图 20-7 (b)] 时, 振荡不规则。为了判断此不规则振荡是噪声还是混沌, 奥尔森把图 20-7(b) 各极大值依次 (共 3000 次) 作离散映象 (参考 § 10 所述相空间重构法), 这样得到图 20-8 的结果, 此图所示的奇怪吸引子表明, 不规则振荡实际是混沌。

奥尔森提出了一个关于此反应的简单模型。他认为此反应主要由以下几步组成:

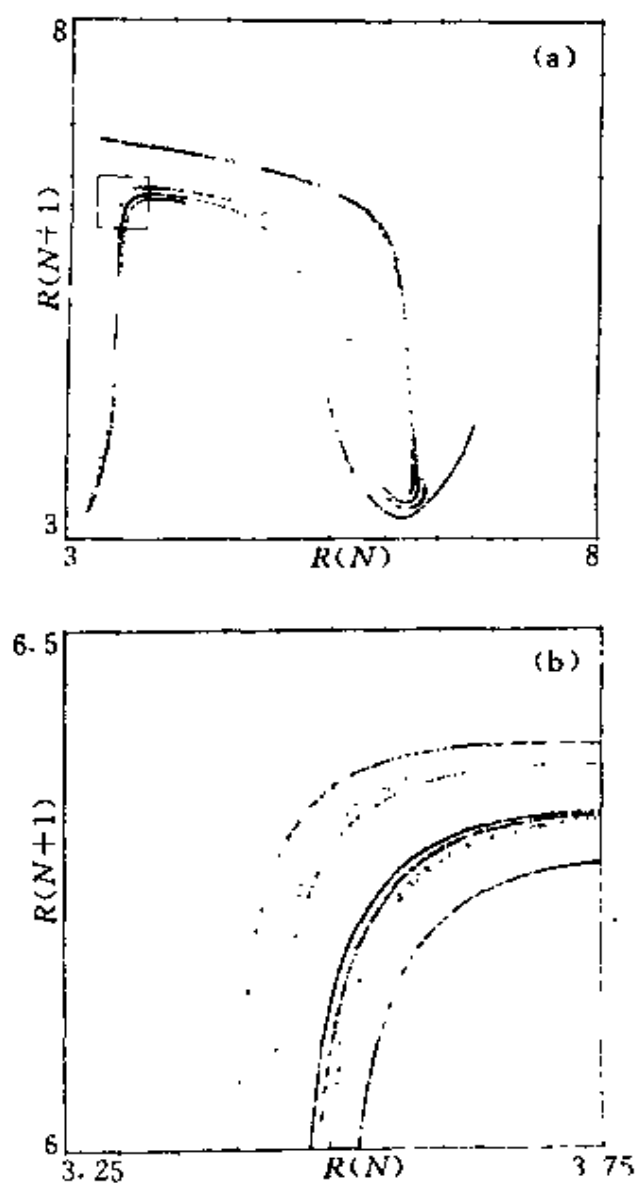
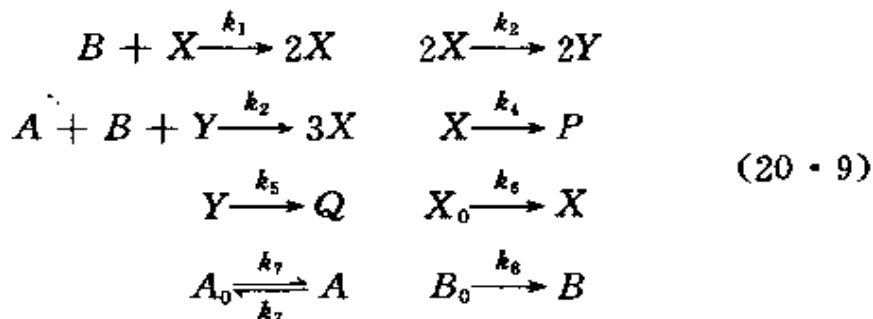


图 20-8 图 20-7 (b) 的离散映象, 其中 (b) 是 (a) 中小方块的放大



式中 A 和 B 分别表示 O_2 和 $NADH$ 浓度, A_0 和 B_0 是它们的稳定输入量, X 和 Y 是作为反应中间产物的两种自由基, X_0 是自由基 X 的缓慢自发形成量, P 和 Q 均为产物。由以上反应即得反应速率方程

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= k_7(A_0 - A) - k_3ABY \\
 \dot{B} &= k_8B_0 - k_1BX - k_3ABY \\
 \dot{X} &= k_1BX - 2k_2X^2 + 3k_3ABY - k_4X + k_6X_0 \\
 \dot{Y} &= 2k_2X^2 - k_3ABY - k_5Y
 \end{aligned} \quad (20 \cdot 10)$$

适当选取参数值, 奥尔森得到与图 20-7 极相似的结果, 这表明此模型大体上是正确的。

许多生化过程存在振荡和混沌已陆续地被发现, 这可能在生命现象中具有很重要的意义: (1), 有些过程 (如糖酵解) 在振荡 (周期振荡或混沌) 情形下的能量利用率高于定态情形下。而且处于各种振荡状态的参数取值范围广泛, 这表明生物具有在较广泛的条件下工作的能力。因此生物采取振荡形式的生化反应, 正是生物长期进化适应环境要求的结果; (2), 生物体的某些节律现象可能与生化反应的振荡或混沌形式有关。

除了生化反应中存在振荡和混沌外, 在无机化学反应中也已发现有振荡和混沌。

§ 21 可兴奋细胞的振荡和混沌

可兴奋 (excitable) 细胞是指在外界刺激下状态 (通常是用细胞膜内外电位差标志, 简称膜电位) 可发生显著变化的细胞。细胞受刺激前后的状态分别称为静息状态 (rest state) 和兴奋状态 (excited state 或 stimulated state)。可兴奋细胞在动植物中都有, 如动物中的神经轴突和各种肌肉, 植物中某些藻类 (如丽藻) 和含羞草等。而哺乳动物的心肌更是不需刺激可以自动交替地处于静息和兴奋两状态 (振荡) 的自动兴奋细胞。举凡肌肉的动作、感觉的传递和心脏的搏血功能等就是依靠细胞的可兴奋性。可见可兴奋细胞对动物活动和生存的重要性。本节拟对典型的可兴奋细胞——神经细胞工作过程中出现的振荡和混沌予以介绍。

1. 霍治金和赫胥黎的工作

比较起来, 枪乌贼巨轴突 (轴突是神经细胞的主要组成部分) 最为粗大, 便于插入电极进行测量研究, 因此它成为了最早也是研究得最多的可兴奋细胞。五十年代霍治金 (Hodgkin) 和赫胥黎 (Huxley) 对枪乌贼巨轴突进行了大量的经典性研究工作。这些工作奠定了神经冲动和传导的实验和理论基础。这不仅对各种神经轴突具有普遍意义, 同时也揭示了各种可兴奋细胞的一些共同基本规律。

神经细胞 (其主要部位是轴突) 在静息时 (未受刺激时) 内部相对于膜外具有负电位, 其值约为 -90mV 至 -60mV 之间, 因细胞而异。此电位称为静息电位 (rest potential), 人们通常称此时细胞处于极化状态。当细胞受到的刺激超过某一定的阈值得, 电

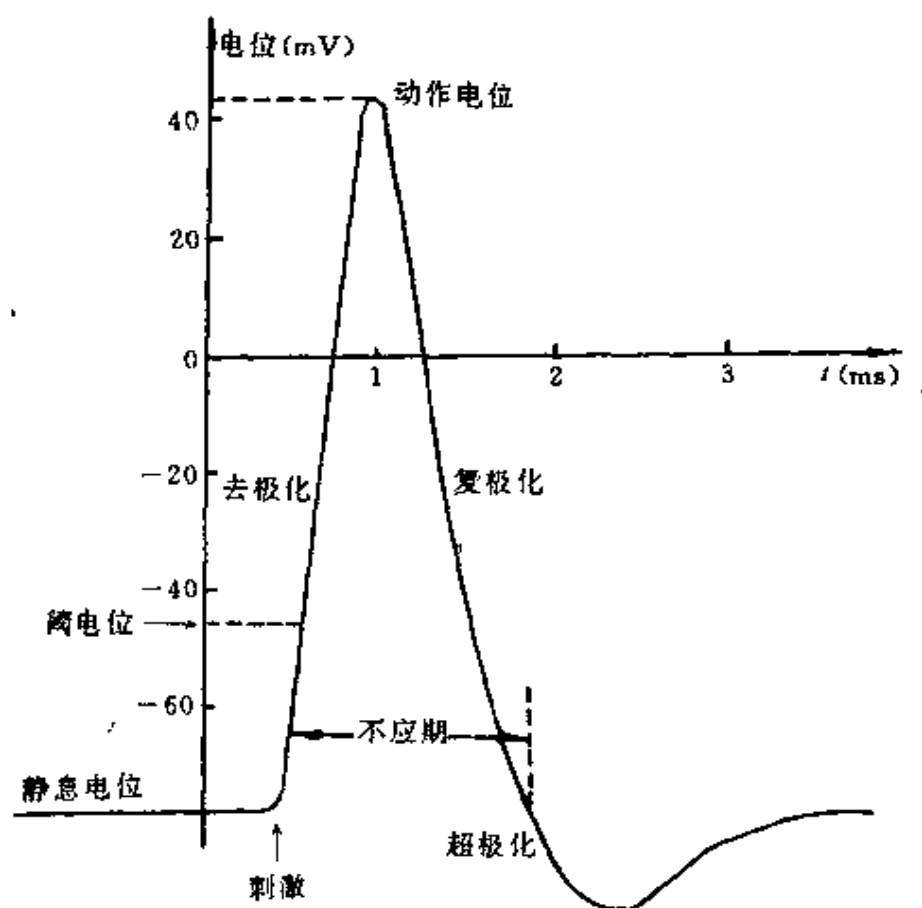


图 21-1 可兴奋细胞受刺激时电位变化

位将发生突变而形成一正的脉冲(图 21-1)。脉冲幅值称为**动作电位**(action potential),其值与刺激强弱无关,大约在 $+30\text{mV}$ 至 $+60\text{mV}$ 之间。此脉冲沿神经传导到大脑就引起对刺激的感觉。

由于轴突只可能处于静息电位或动作电位这两种可能的状态,因此它实际上是双稳态并具有全或无的特点。

经过大量实验和分析,霍治金和赫胥黎确认神经轴突膜上具有二种主要让金属离子通过的通道, K^+ 通道和 Na^+ 通道(实际上钙离子通道也很重要,特别是对各类肌肉细胞)。此外,膜中也还有次要的让其他离子通过(形成所谓漏电流)的通道。因此轴突膜可用图 21-2 的等效电路表示,图中各通路中等效电池的电动势

是膜内外各离子浓度差引起的浓差电动势。

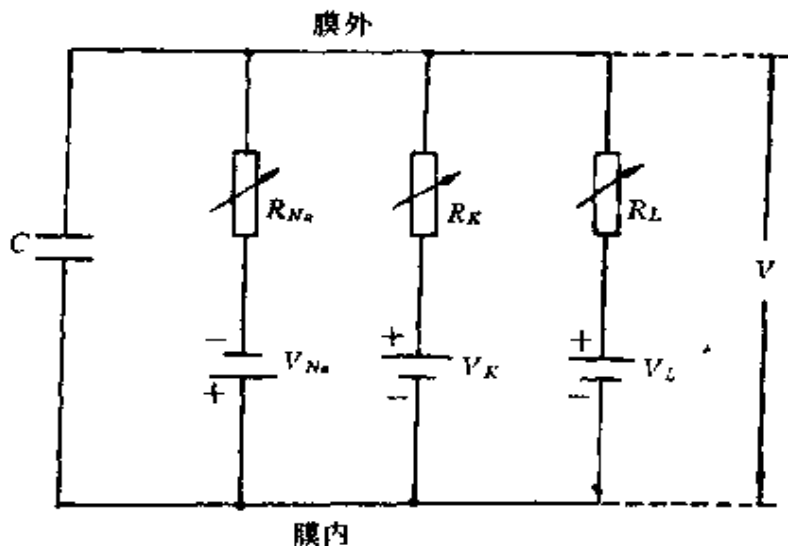


图 21-2 可兴奋细胞的等效电路

霍治金和赫胥黎研究发现, K^+ 通道和 Na^+ 通道的电导不是恒定的, 它们强烈地依赖于膜电位。这是由于两通道中存在着几个为膜中有机分子所控制的开关, 开关打开或关闭的概率与膜电位有关。由此并为了很好地拟合实验结果, 霍治金和赫胥黎提出了如下的描述神经轴突电位变化的四个变量的微分方程组:

$$I = C \frac{dV}{dt} + \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_L (V - V_L) \quad (21 \cdot 1a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \quad (21 \cdot 1b)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \quad (21 \cdot 1c)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h \quad (21 \cdot 1d)$$

式中

$$\alpha_n = 0.01(V + 10) / (\exp \frac{V + 10}{10} - 1) \quad (21 \cdot 2a)$$

$$\beta_n = 0.125 \exp(V/80) \quad (21 \cdot 2b)$$

$$\alpha_m = 0.1(V + 25) / \exp\left(\frac{V + 25}{10} - 1\right) \quad (21 \cdot 2c)$$

$$\beta_m = 4 \exp(V/18) \quad (21 \cdot 2d)$$

$$\alpha_h = 0.07 \exp(V/20) \quad (21 \cdot 2e)$$

$$\beta_h = \left(\exp \frac{V + 30}{10} - 1\right)^{-1} \quad (21 \cdot 2f)$$

I : 膜电流 (密度), 向内为正 ($\mu\text{A}/\text{cm}^2$)

V : 膜电位 (mV)

C : 膜电容 ($\mu\text{F}/\text{cm}^2$)

$V_{Na} = \frac{RT}{F} \ln([Na^+]_e/[Na^+]_i)$: 膜内外 Na^+ 浓度差引起的浓差电位 (Nernst 电位或可逆电位)

$V_K = \frac{RT}{F} \ln([K^+]_e/[K^+]_i)$: 膜内外 K^+ 浓度差引起的浓差电位。

V_L : 其他通道各种离子引起的有效可逆电位。

n : K^+ 通道中每个门开通的概率, 这样的门有四个;

m : Na^+ 通道中每个门开通的概率, 这样的门有三个;

h : Na^+ 通道中另一种门开通的概率, 这样的门只一个。

$\bar{g}_K, \bar{g}_{Na}, \bar{g}_L$: 都是常数, 表示各通道的最大电导。

从等效电路 (图 21-2) 看, 式(21-1a) 的成立是显然的, 式(21·1b)~式(21·1d) 可分别看作是对概率 n 、 m 和 h 的主方程 (n 、 m 和 h 均大于零小于 1), 其中 α_i 和 β_i 都是依赖于电位 (差) 的系数。这些依赖关系就是式(21·2), 它们所取的形式是为了拟合实验结果而定的。

式(21·1) 称为霍治金-赫胥黎方程, 简称 H-H 方程。霍治金和赫胥黎用式(21·1) 和式(21·2) 很好地表征轴突电位变化的规律。此外, 他们还导出了刺激引起局部电位跃变沿神经的传导方程。

2. 神经轴突中的振荡和混沌 (相原等人, 1984)

曾经有不少人研究了以轴突为代表的各种可兴奋细胞在不同条件下电位变化的情况。有的发现在周期外力〔式 (21·1a) 中 I 是周期函数〕作用下, 神经轴突和丽藻均可振荡甚至出现混沌。也有的发现, 可兴奋细胞在适当条件下 (如浸入适当的盐溶液中) 可自行振荡或出现混沌。现在我们只介绍相原 (Aihara) 等人的工作, 他们从对枪乌贼巨轴突的实验研究和解霍治金-赫胥黎方程两方面证实了轴突中可能发生振荡和混沌。

相原等人将 $H-H$ 方程修改为下面的形式:

$$C \frac{dV}{dt} = I - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_L (V - V_L) \quad (21 \cdot 3a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \Phi[(1-n)\alpha_n(V+\Delta V) - n\beta_n(V+\Delta V)] \quad (21 \cdot 3b)$$

$$\frac{dm}{dt} = \Phi[(1-m)\alpha_m(V+\Delta V) - m\beta_m(V+\Delta V)] \quad (21 \cdot 3c)$$

$$\frac{dh}{dt} = \Phi[(1-h)\alpha_h(V+\Delta V) - h\beta_h(V+\Delta V)] \quad (21 \cdot 3d)$$

式中

$$\Phi = 3^{(T-6.3)/10} \quad (21 \cdot 4)$$

$$\Delta V = -9.32 \ln([Ca]_e/41.8) \text{ mV} \quad (21 \cdot 5)$$

Φ 表示温度偏离 6.3°C 时引起的改正系数, ΔV 表示膜外液中 Ca^{2+} 等二价离子浓度的有效浓度 $[Ca]_e$ 引起的电位变化。 $[Ca]_e = [Ca] + \frac{3}{5} [Mg]$ 。

相原等人发现, 适当地选择外液成分可使轴突发生自持 (即 $I=0$ 时) 振荡。他们一次实验让轴突内部 K^+ 和 Na^+ 浓度分别维持 400mM 和 50mM , 外液由 $1:3.5$ 的自然海水 (含有 460mM 的 Na^+ 、 10mM 的 K^+ 、 10mM 的 Ca^{2+} 和 53mM 的 Mg^{2+}) 和 550mM

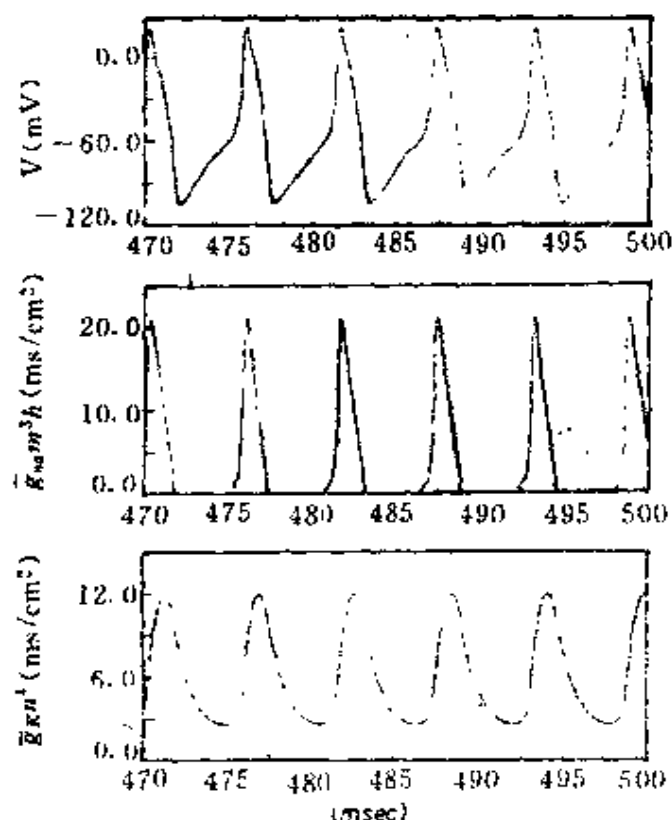


图 21-3 轴突的自持振荡〔解 H-H 方程得到的电位(V)钠导 ($\bar{g}_{Na}m^3h$) 和钾导 (\bar{g}_Kn^4) 随时间的变化〕

$$\bar{g}_{Na}=120.0\text{ms/cm}^2, \bar{g}_K=36.0\text{ms/cm}^2, \bar{g}_L=0.3\text{ms/cm}^2$$

的 NaCl 溶液配成, 这样外液的 K^+ 、 Na^+ 、 Ca^{2+} 和 Mg^{2+} 的浓度分别是 2.22mM、530mM、2.22mM 和 11.78mM, $V_K=-125.05$ mV, $V_{Na}=56.85$ mV, V_L 的值正好是使静息电位是 -60mV。实验观察到自持振荡。解方程 (21·3), 结果也得到自持振荡 (图 21-3), 振荡频率 f_N 为 176.6Hz, 幅值 (极小到极大) 为 126.9mV。

相原等人又在上述条件下加周期性刺激, 即令

$$I = A \sin 2\pi f_s t \quad (21 \cdot 6)$$

把 A 和 f_s 取作可调参数, 解方程 (21·3), 结果如图 21-4~21-6 所示。在各图中, (a) 表示电位随时间的变化 (下半部是外加周期

刺激 I), (b) 是在 $(m^3h) - V$ 相平面上用频闪采样得到的结果 (采样周期等于外力周期 $T_s = 1/f_s$), (c) 是用 § 10 所述相空间重构法得到的结果。

图 21-4 各分图都显示此时振子是按第三分频 (3P) 振荡 (振荡频率 f_N 等于 $f_s/3$, 即系统锁频到外力的第三分频上)。

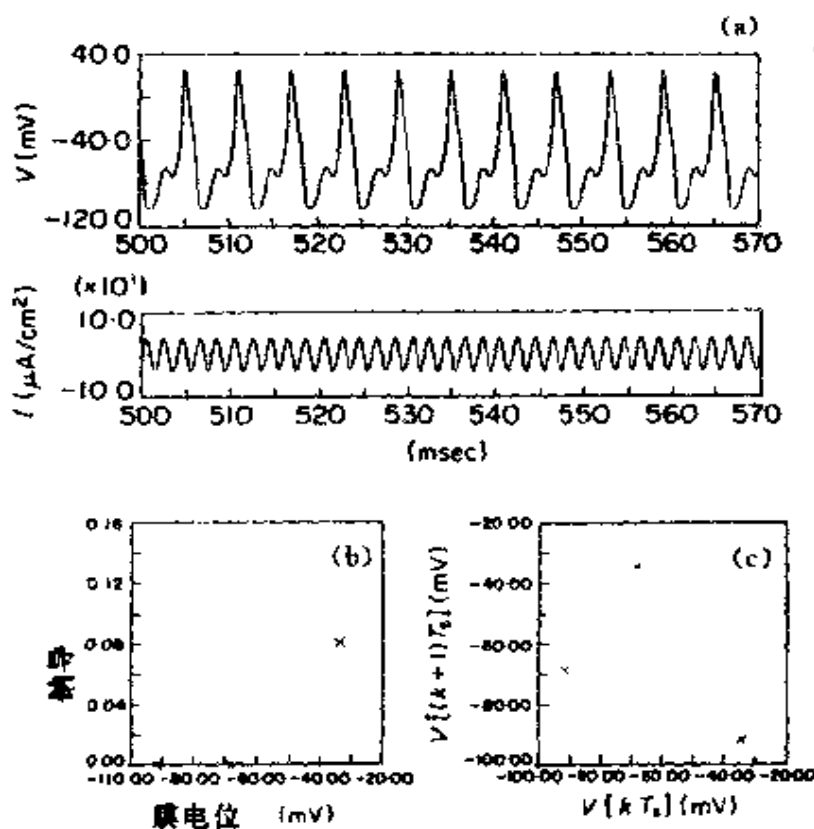


图 21-4 受迫 H-H 振子的 1/3 次分频 (3P) 振荡

$$A = 40.0 \mu A/cm^2, f_s = 500.0 \text{ Hz}$$

图 21-5 是 f_s 比 f_N 低很多时的结果。此时两种采样法 [图 (b) 和图 (c)] 都得到闭曲线, 这表示振荡是准周期的。在 f_s 接近 f_N 或比 f_N 大很多时, 也可以得到这样的结果。

图 21-6 则明确显示振荡是不规则的, 而相图上的采样点也显示是奇怪吸引子。因此这时的振荡是混沌。相原等人对巨轴突的

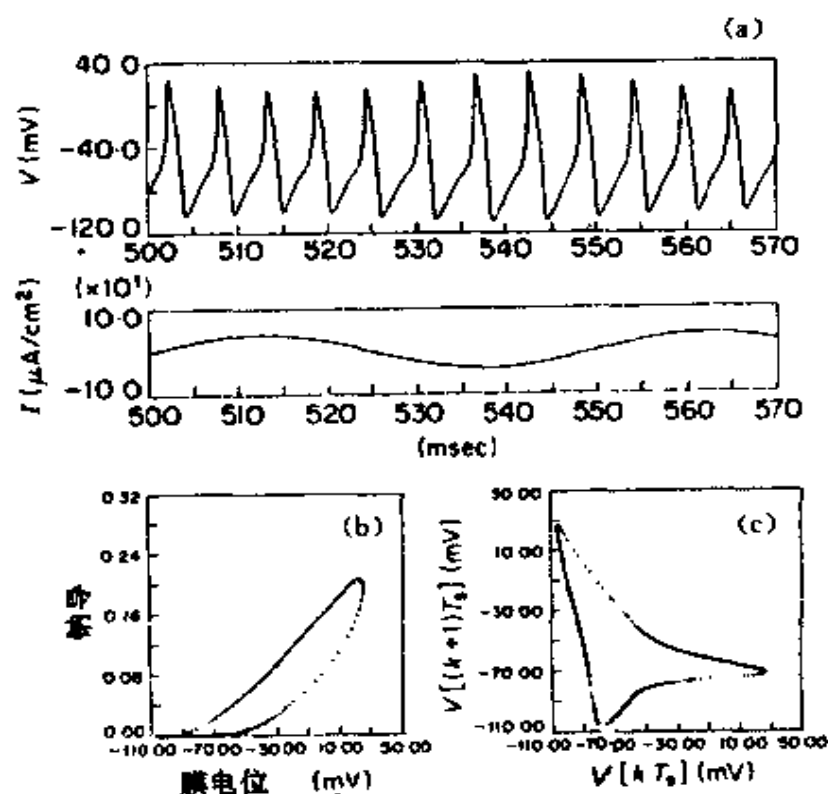


图 21-5 受迫 H-H 振子的准周期振荡

$$A = 40.0 \mu\text{A}/\text{cm}^2, f_s = 20.0 \text{Hz}$$

实验观测, 也得到类似的结果。这也表明方程 (21·3) 可以很好地表征巨轴突的特性。

图 21-4~图 21-6 也大致指出了可能是由倍周期分岔通向混沌。图 21-7 则更明显地指出了这一情况。这时维持 f_s 等于 100Hz 不变, 改变 A , 可以依次得到 1P、2P、4P 和混沌。相原对巨轴突的实验 (f_s 维持等于 100Hz, A 由 $70\mu\text{A}/\text{cm}^2$ 变到 $40\mu\text{A}/\text{cm}^2$), 也观察到如下的序列: 1P→2P→4P→8P→16P→混沌→12P→24P→混沌。

另一通向混沌的道路是间歇混沌。图 21-8 是对巨轴突实验观察的结果。图中上行是 $V-t$ 图, 图 (c) 中每隔 50ms 左右间歇式

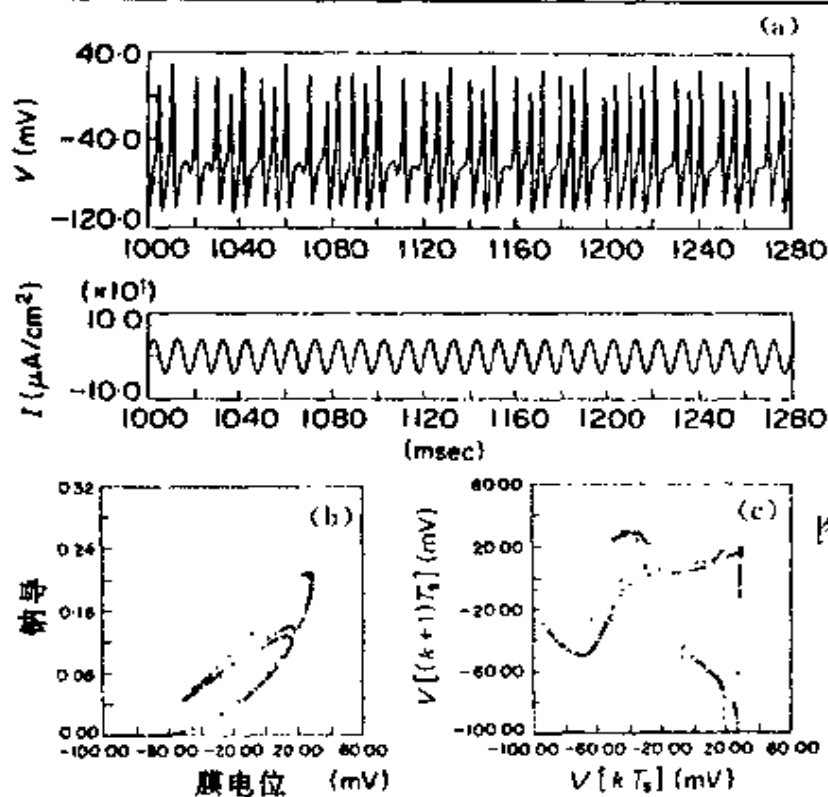
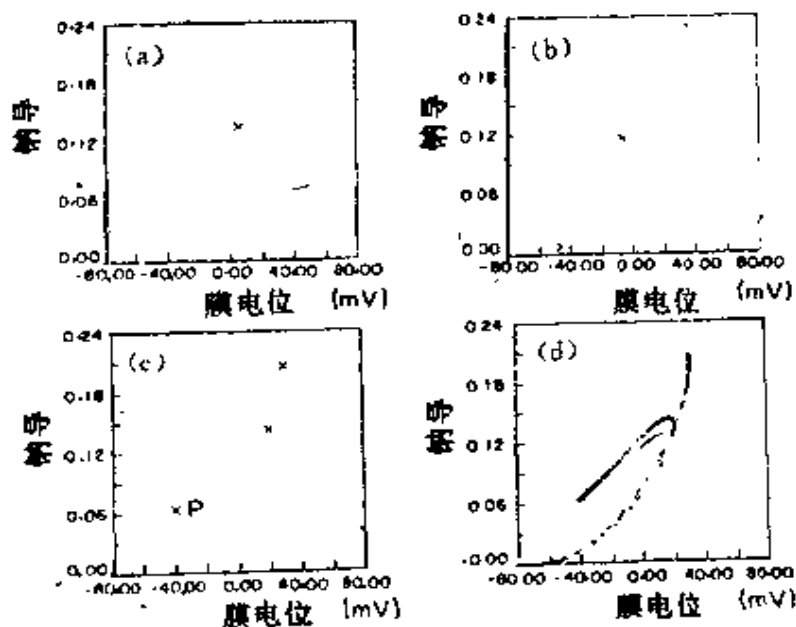


图 21-6 受迫 H-H 振子的混沌振荡

$A = 40.0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$,
 $f_s = 100.0 \text{ Hz}$

图 21-7 $(m^3h)-V$ 相平面上的频闪采样 $f_s=100\text{Hz}$,

(a) $A=70 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, 基谐振 (1P); (b) $A=43 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, 1/2 分谐振 (2P);
 (c) $A=41.6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, 1/4 分谐振 (4P); (d) $A=41.3 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, 混沌

地出现一次不规则振荡就是间歇混沌。图21-9是在 $f_s = 300.3\text{Hz}$ 时稍许改变 A 得到的频闪采样图。 $A = 102.04 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ 时结果为 (a)，它表示 $1/3$ 分谐振 ($3P$ 周期)，当 A 稍许变小一点 ($A = 102.031 \mu\text{A}/\text{cm}^2$) 时，结果是 (b)，即出现了混沌，电位的时序图也说明了这一情况。这与李天岩和约克猜测 (“周期 $3P$ 意味着混沌”，参考 § 11) 也是一致的。

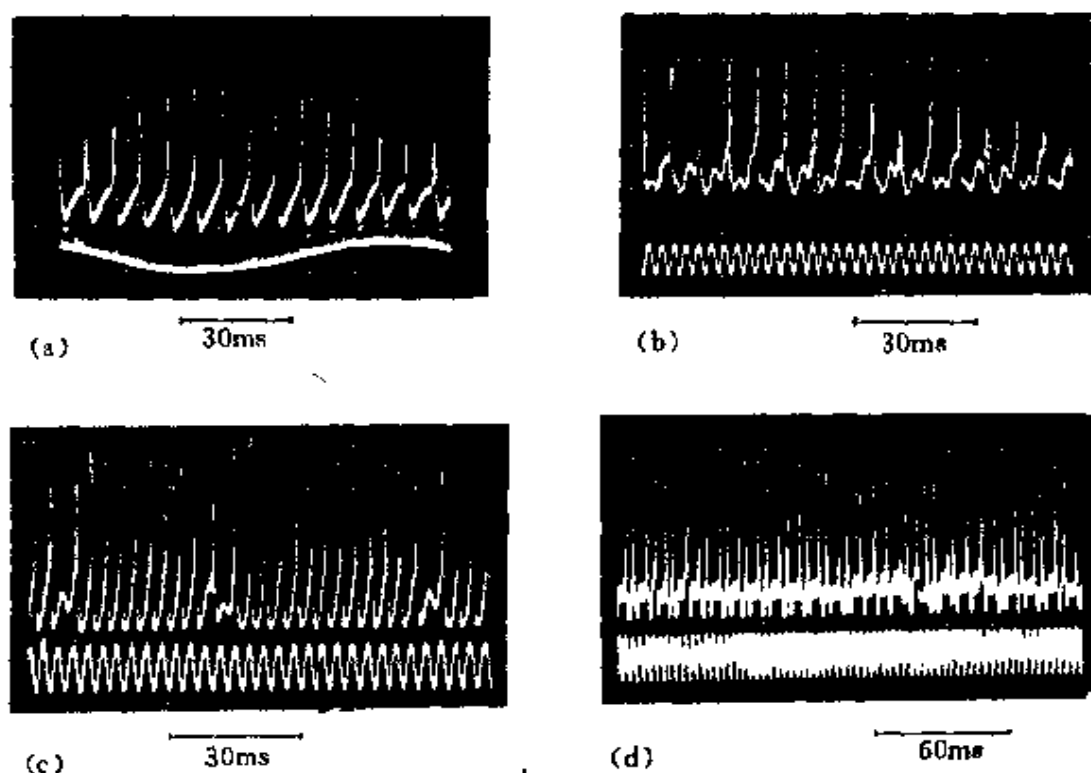


图 21-8 外加周期电流对巨轴突的作用

上图是膜电位，下图是外加电流。(a)、(b)、(c) 和 (d) 各图中外加激励频率 f_s 和轴突自然频率 f_N 分别为 (a) $f_s = 20\text{Hz}$, $f_N = 146\text{Hz}$; (b) $f_s = 328\text{Hz}$, $f_N = 136\text{Hz}$; (c) $f_s = 303\text{Hz}$, $f_N = 228\text{Hz}$; (d) $f_s = 332\text{Hz}$, $f_N = 220\text{Hz}$

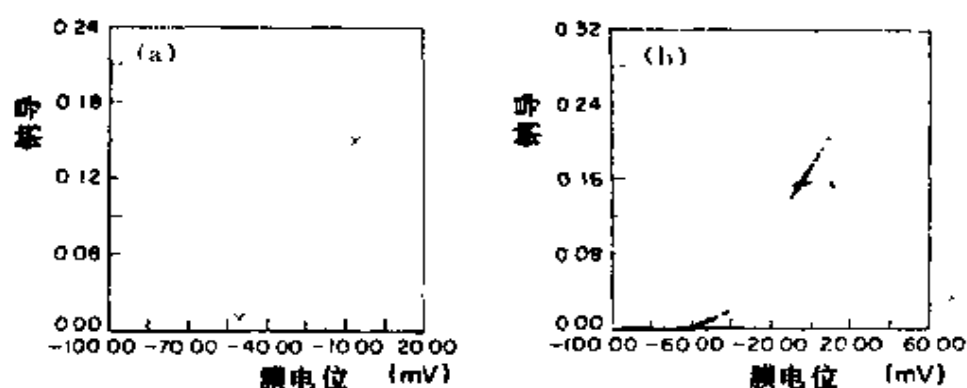


图 21-9 3P 附近的间歇混沌

(a) $A=102.4 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ (b) $A=102.031 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ $f_s=300.3 \text{ Hz}$ $f_s=300.3 \text{ Hz}$

最近米斯及其合作者 (Mees 等, 1992) 又对没有出现自持振荡 (处于静息电位下) 时的枪乌贼巨轴突加周期性刺激, 结果也出现混沌。

3. 柴 (Chay) 模型

柴 (1984) 建立了可兴奋细胞的另一个模型。在此模型中, Na 通道中的钙离子流起着重要作用。柴认为, 细胞膜上主要是三种通道: 可让 Na^+ 和 Ca^{2+} 通过的通道、K 通道和电导不依赖于电压但依赖于膜内钙离子浓度 $[\text{Ca}]_i$ 的钾通道。因此这个模型有可能更适合于钙离子起着重要作用的各类肌肉细胞和胰岛 β 细胞。

在无外界刺激下 ($I=0$), 此模型方程为:

$$\frac{dV}{dt} = g_I m_\infty^3 h_\infty (V_I - V) + g_{Kv} n^4 (V_K - V)$$

$$+ g_{Kc}^* \frac{C}{1+C} (V_K - V) + g_L^* (V_L - V) \quad (21 \cdot 7a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau} \quad (21 \cdot 7b)$$

$$\frac{dC}{dt} = \rho [m_\infty^3 h_\infty (V_c - V) - k_c C] \quad (21 \cdot 7c)$$

上面的第一式右边四项分别表示 Na^+ - Ca^{2+} 通道中的电流 (除以膜电容, 下同)、电导依赖于电位的钾通道电流、电导不依赖于电位但依赖于 $[\text{Ca}]_i$ 的 K 通道电流和漏电流。式中 V_K 和 V_L 意义同前, V_r 表示 Na^+ - Ca^{2+} 通道的可逆电位, g_r^* 、 g_{Kv}^* 、 g_{Kc}^* 和 g_L^* 分别表示各通道的最大电导 (除以电容), m_∞ 和 h_∞ 为 Na^+ - Ca^{2+} 通道中两种门打开的概率, 在此设为常数。方程 (21·7b) 表示依赖于电位的 K 通道门开通概率的变化规律, τ 是弛豫时间, n_∞ 是 n 的稳定值。 Ca^{2+} 在膜内部分地与某些分子结合, C 表示总浓度 $[\text{Ca}]_i$ 除以离解常数。方程 (21·7c) 表示膜内 Ca^{2+} 浓度变化规律。 V_c 是 Ca^{2+} 的可逆电位, 式中右边第一二两项分别表示进出膜的 Ca^{2+} 流, ρ 为常数。

方程 (21·7) 只有三个变量, 可算得上是描述可兴奋细胞的最简单方程, 柴适当选取诸参数值, 而把 g_{Kc}^* 看作可调参数, 当 g_{Kc}^* 取 10s^{-1} 、 10.7s^{-1} 、 10.75s^{-1} 、 10.77s^{-1} 和 10.65s^{-1} 诸值时, 分别得到 1P、2P、4P、8P、12P 诸分谐振, 当 $g_{Kc}^* = 11\text{s}^{-1}$, 出现混沌。图 21-10 是柴求得的当 $g_{Kc}^* = 11\text{s}^{-1}$ 时的结果。

可见柴的模型是一个变量数目少的比较简单面能引起自持振荡和混沌的模型。尽管此模型还有不足之处 (如三种通道的形式未得到证实, 理由似乎也欠充, 三个变量可能也不够, 等等), 但提出这样简单的可兴奋细胞自持振荡和混沌模型是很有意义的, 因为这对解决肌肉痉挛, 心肌自持振荡和心律不齐等问题至少会有所启发。

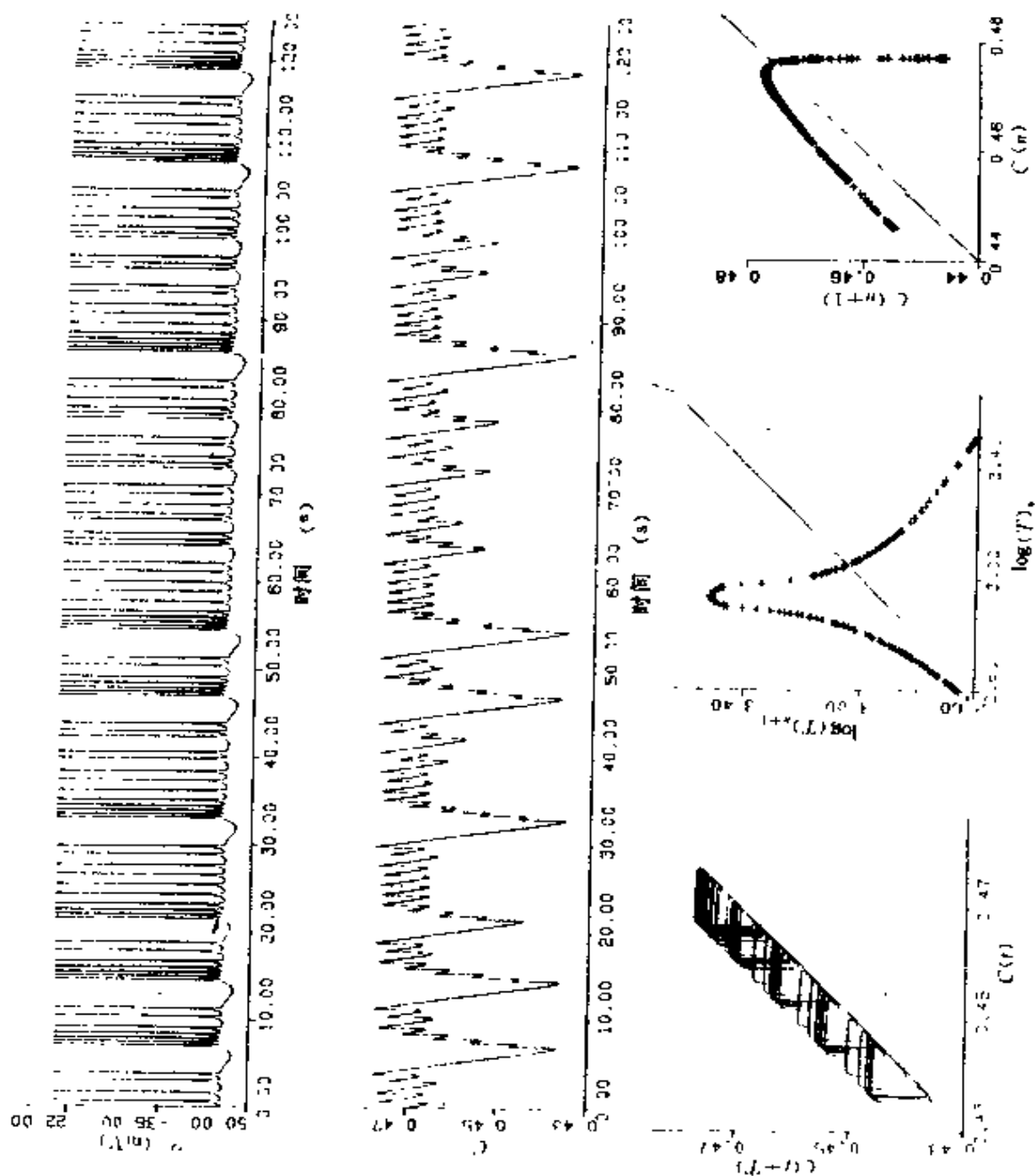


图 21-10 柴得到的可兴奋细胞的混沌图

§ 22 心脏的搏动

本节拟研究心脏搏动过程中其电振荡的特性。

1. 概 述

心脏的搏动表明它是一个振荡系统。其中心室肌膜(内外)电位(差)振荡一次的波形如图 22-1 所示。与神经轴突比较,心肌出现动作电位(去极化)的时间很短(图中 0 相)而且有一明显的超射(overshoot)(图中 1 相),随后出现一平台(plateau, 图中 2 相)后才开始复极化(图中 3 相)。每出现一次动作电位,就引起一次心肌收缩(搏动)。图中 4 是心肌的静息状态(舒张期)。

心脏的搏动具有自律性(intrinsic rhythmicity)或自动性(automaticity),即其振荡并不是由于外加周期刺激才形成的。如切断连接心脏的神经,甚至把心脏摘除放在培养液中,都仍然观察到它的搏动。因此心脏可看作是一相对独立的振荡系统。

从图 22-1 所示的心脏的弛豫振荡看,它具有高度的非线性。1928 年范德波尔就是用非线性电路模拟心脏搏动并提出了有名的范德波尔方程(1·21)

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (22 \cdot 1)$$

在 § 4 中已知,改变参数 α 之值,可得到大体上像心脏的振荡。

但是范德波尔方程不能准确表示心脏振荡图形的细节(如超射)以及各相时间的相对长短。为了更准确地表示心脏的搏动,菲茨赫(FitzHugh)对范德波尔方程进行了修改,提出了所谓玻恩霍菲—范德波尔(Bonhoeffer-Van der Pol) (BVP) 方程(或 FitzHugh-Nagumo 方程),其形式为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3/3 - y \\ \dot{y} &= c(x + a - by)\end{aligned}\quad (22 \cdot 2)$$

式中 x 表示心肌细胞的膜电位, y 为与心脏每搏动一次后恢复期大小有关的变量, a 、 b 和 c 都是常数。

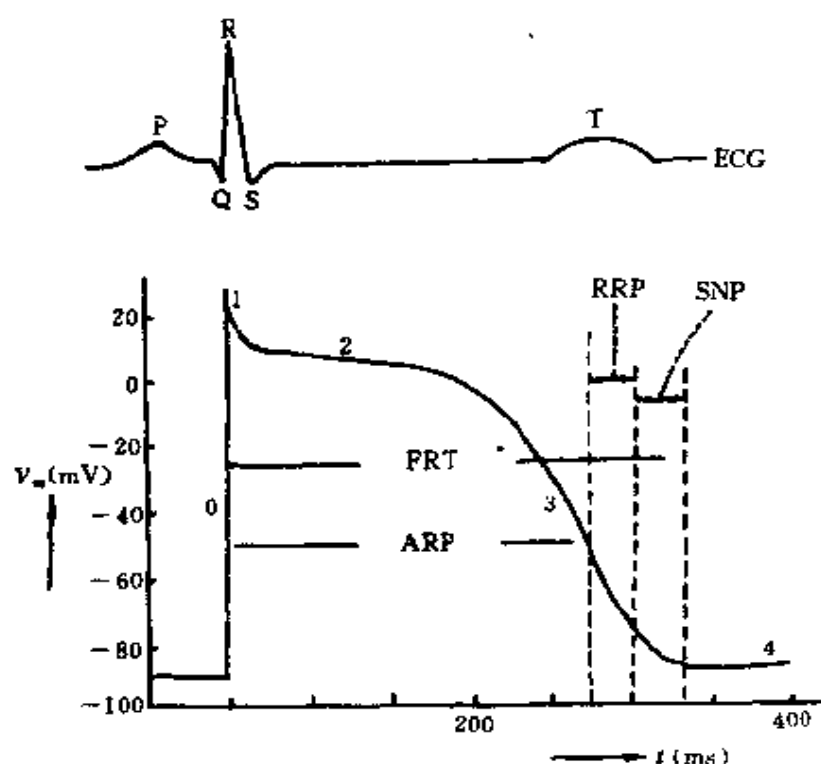


图 22-1 心肌的电位变化与典型的心电图

FRT: 完全恢复期; ARP: 绝对不应期 (此时对任何刺激无反应); RRP: 相对不应期 (此时对小刺激无反应); SNP: 超常期 (此时易于去极化)
上图是体表测得的心电图 (ECG), P 波相当于心房兴奋 (去极化), QRS 对应于心室兴奋, T 对应于心室复极化

然而即使是 BVP 方程, 它也只是把心脏整体作为一个振荡系统进行唯象的描述。它既没有顾及心脏各部位在振荡过程中波形不同和所起的不同作用, 也没有涉及振荡产生的实质。实际上, 现已很清楚, 心脏中能自发引起振荡的兴奋灶或起搏点

(Pacemaker) 不止一处。右心房上端静脉窦部的窦房结 (SA) 是心脏的最主要振源, 它引起的振荡就是正常人的所谓窦性心律, 其频率大约是 (静息时) $60 \sim 100 \text{ 分}^{-1}$ 。此外, 房室交界处的房室结 (AV) 和再下面心室上的浦肯野 (Purkinje) 纤维等都可能是潜在起搏点 (搏源), 它们振荡的固有频率都较低, 分别是 $60 \sim 80 \text{ 分}^{-1}$ 和 $30 \sim 40 \text{ 分}^{-1}$ 。因此严格说, 整个心脏实际应看成是由多个振子耦合而成的复杂振荡系统。当然, 在正常情形下, 窦房结的电振荡起着支配作用, 它所产生的兴奋 (动作电位) 依次传导至结间束、房室结、房室束和浦肯野纤维而引起整个心房和心室的肌细胞发生兴奋, 从而引起心脏的机械收缩。所以通常健康人的心律是窦性心律。当窦房结出现故障或其他部位成为不可忽视的振源 (称为异位起搏点, ectopic center) 或兴奋传导通路出现阻滞等问题时, 心脏搏动功能即将出现病态; 如各种心律失常、心动过速、心动过缓和心动不规则。

分析心脏的振荡, 最根本的办法是研究心肌细胞兴奋的起源。这就是类似上节研究神经轴突那样, 分析研究心肌细胞各离子通道中离子流的特点和规律。曾经有不少人仿霍治金和赫胥黎的工作对心肌进行了研究。1977 年毕勒 (Beeler) 和路特 (Reuter) 根据霍治金和赫胥黎理论, 建立了一个专用于哺乳动物的心室肌动作电位的数学模型。他们的方程如下:

$$C\dot{V} = -(i_{K1} + i_{K1} + i_{Na} + i_s - i_{Kr}) \quad (22 \cdot 3)$$

$$C\dot{a}_i = -10^{-7}i_s + 0.07(10^{-7} - Ca_i)$$

$$\dot{y} = (y_\infty - y) / \tau_y$$

$$\tau_y = 1 / (\alpha_y + \beta_y)$$

$$y_\infty = \alpha_y / (\alpha_y + \beta_y)$$

$$i_{K1} = 0.35 \{ 4 [\exp(0.04(V + 85))] - 1 \} / \exp[0.08(V_m +$$

$$53)] + \exp[0.04(V + 53)]) + 0.2(V + 23)/(1 - \exp[-0.04(V + 23)])]$$

$$i_x = \bar{i}_x x$$

$$\bar{i}_{Na} = (4m^3 h j + 0.003)(V - E_{Na})$$

$$\bar{i}_r = 0.8\{\exp[0.04(V + 77)] - 1\}/\exp[0.04(V + 35)]$$

$$i_i = g_i d f(V - E_i)$$

$$E_i = -82.3 - 13.0287 \ln Ca_i$$

$$C = 1 \mu F/cm^2; \quad E_{Na} = 50mV$$

$$\alpha_y, \beta_y = \{c_1 \exp[c_2(V + C_3)] + c_4(V + c_5)\} / \exp[c_6(V + c_3)] + c_7\}$$

式中 i_k 、 i_{x1} 、 i_{Na} 和 i_i 分别表示与时间无关的 K^+ 流、依赖于时间的 K^+ 流、 Na^+ 流和 Ca^{2+} 流， y 表示 m 、 h 、 j 、 d 、 f 和 x 诸量。关于 y 的微分方程中的系数 α_y 和 β_y 对电位 V 的依赖关系式中的系数 $c_1 \sim c_7$ 随各 α_y 和 β_y 而不一样，毕勒和路特适当选取了这 $2 \times 6 \times 7 = 84$ 个系数之值，由上述方程组得到自持振荡解，如图 22-2 所示，其形状与图 22-1 极相似。可见 B-R 方程可以较好地描述心室肌兴奋过程。

此外，还有一些人在窦房结和浦肯野纤维所引起的振荡方面也做过一些研究。但是到目前为止，即使人们对心脏的搏动规律和实质已有很多了解，也明确了它是一个复杂的非线性耦合振荡系统。人们还没能对每各起搏点都建立起准确的振荡方程，自然也没有在此基础上建立统一的心脏的振荡方程。而且可以想象，即使建立了这样的方程，它们一定也是很复杂的，并会含有大量待定的参数。因此现在人们仍只能用一些唯象的或半定量的近似方法或用电子学振荡电路模拟的方法分析研究心脏的振荡。其中采用较多的是所谓位相转移函数 (PTC) 法，我们在下面略加介绍。

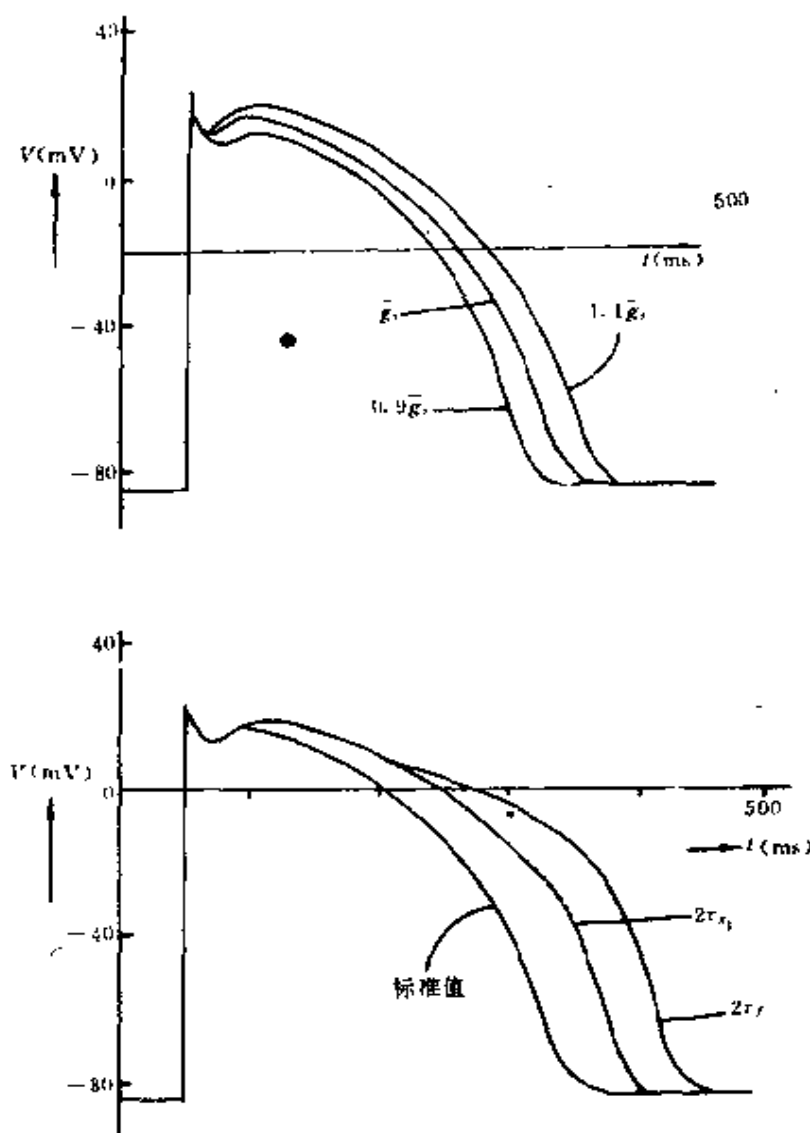


图 22-2 B-R 方程计算结果

2. 圆映象和位相转移函数法

一个振子(可以是心脏的一个起搏点,也可以是整个心脏)的振荡可以用某一变量(如心肌细胞内外的电位差 V)或一些变量随时间的周期变化表示。当振子不受任何外界影响时,每一确定时间便有一确定位相。设振子的固有周期为 T_0 ,则在时刻 t 的位相为

$$\varphi = t/T_0 \pmod{1} \quad (22 \cdot 4)$$

此处 mod1 (即以 1 为模) 表示位相 φ 的周期为 1 (而不是 2π)。当振子受到外界刺激 (脉冲扰动) 时, 在一般

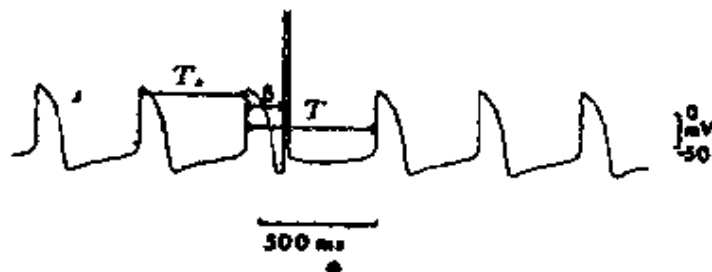


图 22-3 一个脉冲刺激引起的振荡变化

情况下, 如果刺激不是极强, 振子便不会脱离其极限环振荡的吸引流域。这时刺激只能改变一下振荡的位相, 振子接着将恢复原来的振荡 (回到原极限环上)。设振子在位相为 φ 时受到外界刺激, 其位相变为一个新的值 φ' , φ' 自然与 φ 有关, 因不同时期对刺激的反应很不一样 (参考图 22-1), 如在绝对不应期中, 刺激完全不引起反应。因此

$$\varphi' = g(\varphi) \quad (22 \cdot 5)$$

$g(\varphi)$ 称为位相转移函数或位相转移曲线 (phase transition curve), 简称 (PTC)。由于心肌振荡形式很复杂, 不同时刻刺激效果大不一样。因此 g 是极复杂的函数。设刺激引起振荡一次持续时间变为 T (如仅一次刺激, 经过 T 时后, 周期仍迅速恢复为 T_0 , 见图 22-3), 因为 $T=T_0$ 时, φ' 应等于 φ , 故 φ' 与 T 的关系为

$$\varphi' = g(\varphi) = \varphi - \frac{T - T_0}{T_0} \quad (22 \cdot 6)$$

因为 T 可以由实验测得, 由上式便可定出 PTC。当然, 如果刺激不足以引起振子振荡, 则式 (22·5) 和式 (22·6) 便不成立。

如果刺激是周期性的, 其周期为 t_i , 这时每次刺激将落在振子的不同位相上。设 φ_i 和 φ_{i+1} 分别为第 i 次刺激前后振子的位相, 因为 $t_i = T_0$ 时, φ_{i+1} 应等于 $g(\varphi_i)$, 于是

$$\varphi_{i+1} = g(\varphi_i) + \frac{t_i}{T_0} = f(\varphi_i) \quad (22 \cdot 7)$$

上式就是振子在周期扰动下的庞卡莱映象,也就是 § 12 所说的圆映象(圆周上的点都映象到圆周上)。利用这种映象或 PTC,可以研究在周期扰动下振子振荡的特性(见下一小节)。

由式(22·7)可知每次扰动引起的位相移动为

$$\Delta\varphi_i = g(\varphi_i) + \frac{t_i}{T_0} - \varphi_i \quad (22 \cdot 8)$$

N 次扰动引起的位相移动则为

$$\sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i = f^{(N)}(\varphi_i) - \varphi_i$$

于是平均每次扰动引起的位相移动为

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f^{(N)}(\varphi_i) - \varphi_i}{N} \quad (22 \cdot 9)$$

α 就是转动数。

设在 N 次扰动(时间间隔为 Nt_i)中振子正好发生了 M 次振荡:

$$\sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i = M \quad (22 \cdot 10)$$

$$\alpha = M/N \quad (22 \cdot 11)$$

根据式(11·32),如果这时下式也得到满足:

$$|f^{(N)'}(\varphi)| = \prod_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_i} < 1 \quad (22 \cdot 12)$$

这样就可以得到稳定的 M 周期振荡,其振荡周期为

$$T = Nt_i/M \quad (22 \cdot 13)$$

此时的圆映象将是 M 个稳定点。振子的振荡是 N/M 锁相,即转动数取有理数 M/N 对应于 N/M 锁相。当转动数取无理数时,周期刺激便使振子作准周期振荡。

3. 格拉斯 (Glass) 等人工作

从 1980 年开始,格拉斯等人将大小约 $100 \sim 200 \mu\text{m}$ 的鸡胚心

用组织液培养,它仍可以自行搏动,其周期 T_0 为 $0.5 \sim 1.0$ s。对此插入微电极。加以脉冲电刺激同时测其电位变化。改变刺激的大小(幅值 A)和周期 t_s ,可测得不同 A 和 τ ($\tau = t_s/T_0$) 时电位变化规律并求得 $N:M$ 。为了拟合实验结果,格拉斯等人提出了一个关于 PTC 的经验公式:

$$g(\varphi) = \varphi - C \exp[-(\varphi - \varphi_{\max})^2/\sigma^2] - \frac{S(\varphi - 1)\varphi^n}{\theta^n + \varphi^n} \quad (22 \cdot 14)$$

$$C = 0.125 + 0.025\bar{A}; \quad \bar{A} = 50A$$

$$\varphi_{\max} = 0.34 + 0.12 \times 2^{-\bar{A}}$$

$$\sigma^2 = 0.04 \times 2^{-\bar{A}}; \theta = 0.34 + 0.48 \times 2^{-\bar{A}};$$

$$n = 1.875 \times 2^{\bar{A}}; S = 0.092$$

这样便可以极据所得振荡性质把 $A-\tau$ 平面划分成许多不同区域,如图 22-4 所示。

综合实验观测和理论分析可以得到以下结果:

(1) 图 22-4 表明,各锁相区都是尖形向下的阿诺德舌 (§ 12)。通常容易观察到的稳定锁相都是转动数 α 是简单的整数比,它们都是出现在 A 不太大也不太小的情形。图 22-4 上部和下部就是在不同锁相区观测到的振荡曲线。 M 和 N 太大的锁相没有观察到,这主要是由于这样的锁相区极窄而实验时的噪声无法避免。

(2) 当 A 特别小时,稳定锁相的可能性也越小。 $A \rightarrow 0$ 时鸡胚心只能在 $\tau = M/N$ 诸点上锁相,这表示耦合作用极弱时,刺激不易控制振子实现锁相,这时心脏主要处于准周期振荡(图 22-4 中的 Q 区)状态。增大 A (增强耦合作用),锁相区加宽,锁相的可能性增大。但只有当外力周期等于或接近固有周期的整数倍(τ 等于或接近整数,即共振条件)时,也才易实现锁相(参考图 22-4)。

当 τ 偏离整数较大时, 振荡将进入多个锁相区和准周期密集并重叠的区域, 这时振荡将变得很复杂而出现混沌。

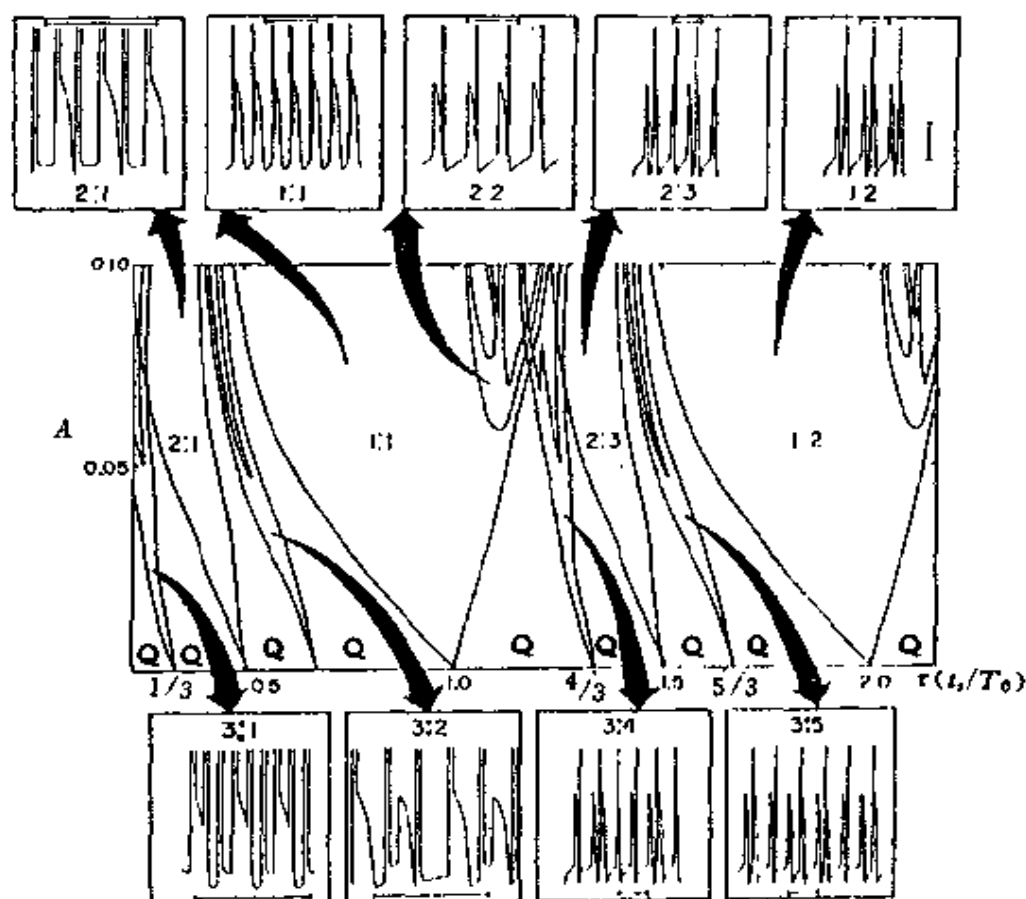


图 22-4 鸡胚心实验结果

中图: $A-\tau$ 平面按振荡性质区分, 比例数字表示锁相区, Q 表示准周期区。

上图和下图为振荡波形。

(3) 由参数 A 和 τ 都一定时测得的振荡曲线利用式 (22·6) 可求得 $g(\varphi)$ (PTC), 从而可画出庞卡莱映象曲线 $\varphi_{i+1}-\varphi_i$ 。图 22-5 右边一侧各图中的点就是这样得到的, 实线是由式 (22·14) 计算结果。由这些图一方面可以看出, 式 (22·14) 较好地拟合了实验结果; 另一方面, PTC 不是单调函数, 也不是单峰的。PTC 的

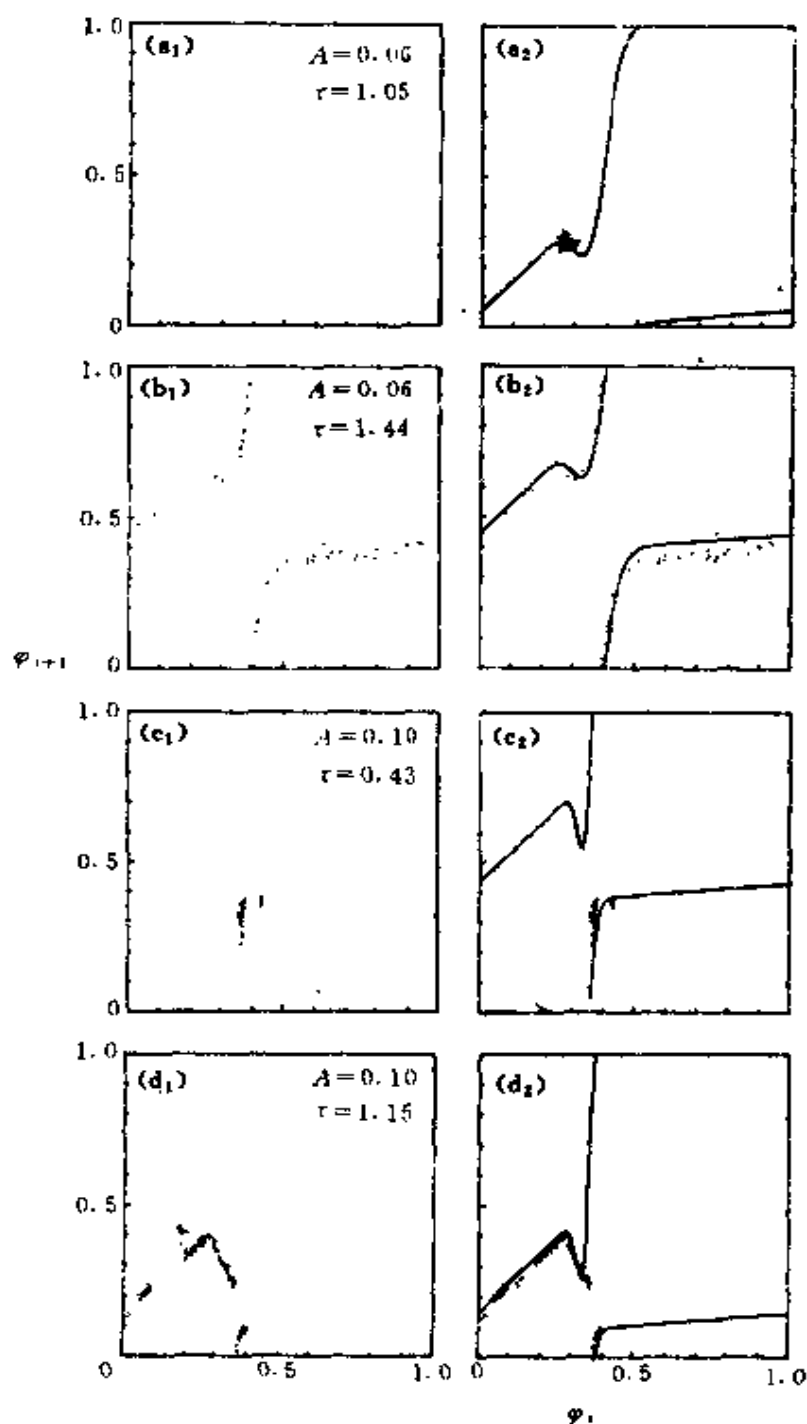


图 22-5 鸡胚心实验的庞卡莱映象

实线: (22.14) 计算结果; 点: 实验结果

不同形状就可以说明不同的 A 和 τ 下的不同结果。

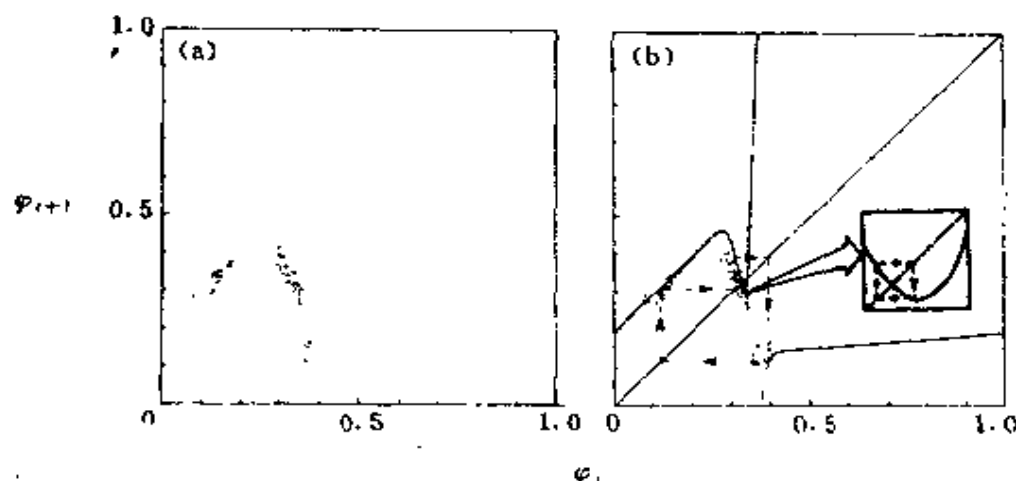


图 22-6 双稳周期的庞卡莱映象 ($A=0.10$, $\tau=1.19$)

首先看一下 A 较大 τ 取适当值时为什么不同锁相区可能重迭并出现混沌。图 22-6 是与图 22-5 (d) 相似的情形, 只是 $A=0.10$, $\tau=1.19$ 。图 22-7 是在此条件下得到的三种不同的实验结果。由 § 11 所述作图法并对比图 11-1 和图 13-2 可知, 这时有两个稳定周期共存: 1P 周期 [对应图 22-6(b) 中的上支极小处附近的映象] 和 3P 周期 [对应图 22-6 (b) 中的下支拐弯处所示的切分岔映象], 它们分别表示 1:1 锁相和 3:4 锁相。这时即使条件 (参数值) 相同, 但可以得到不同的振荡: 振荡可以是 1:1 锁相 [图 22-7 (a)] 也可以是 3:4 锁相 [图 22-7 (b)], 还可以是两种锁相的混合 [图 22-7 (c)]。最后这种情况是微小的扰动使鸡胚心在两种锁相之间跃迁, 从而使振荡不规则而成为混沌。

(4) 在图 22-5 (a) 的情况下, 实验点分布比较集中, 其形状类似单峰映象的图 11-1。因此在本图的参数值附近可能出现锁相和倍周期分岔。图 22-8 是当 A 固定取值 0.10, 改变 τ 值得结果。这表示倍周期分岔通向混沌的道路。由于大周期锁相区可能

极窄, 噪声的存在使得许多大的倍周期一般不能被观测到, 从而一般不能观测到全部倍周期分岔序列。

(5) 图 22-5 (b) 的情形表示 PTC 曲线延伸到整个 φ 取值范围。这使映象变得比图 22-5 (a) 时复杂得多。从图 22-4 看, 这时 A 和 τ 的取值正好在准周期区 (Q 区) 之上许多狭窄锁相区密集和重迭处。因此微小的扰动可以使系统在这些周期轨道之间跃迁, 故振荡是混沌 (图 22-9)。可以把这时的混沌看作是由准周期振荡道路得到的。

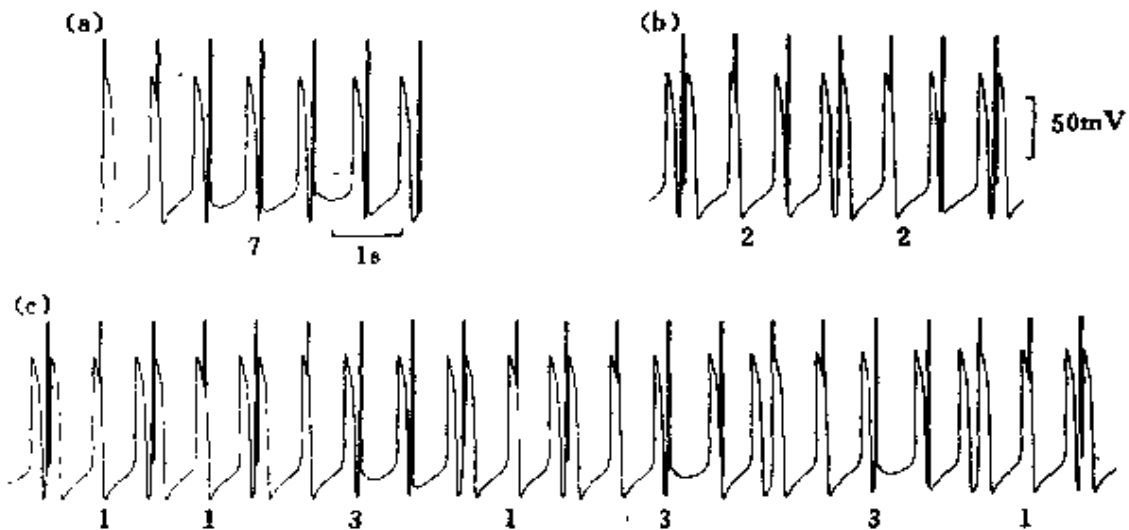


图 22-7 与图 22-6 对应的不同形式振荡

(a) 1:1 锁相 (b) 3:4 锁相 (c) 混沌

(6) 图 22-5 (c) 情形是在切分岔附近, 它出现在 (A, τ) 平面 (图 22-4) 中 1:1 锁相区左侧 (高频侧) 与 3:2 锁相区 (3P) 靠近处。因此这时可能出现间歇混沌。图 13-7 就是当 $A=0.06$ 和 $\tau=0.75$ 时的结果。

4. 上述关于鸡胚心实验结果和理论分析可以启发人们对心脏活动及心律失常的分析。如前所述, 心脏中存在不止一处的起搏点。这种多处起搏点的存在, 其有利之处是当窦房结出现故障不

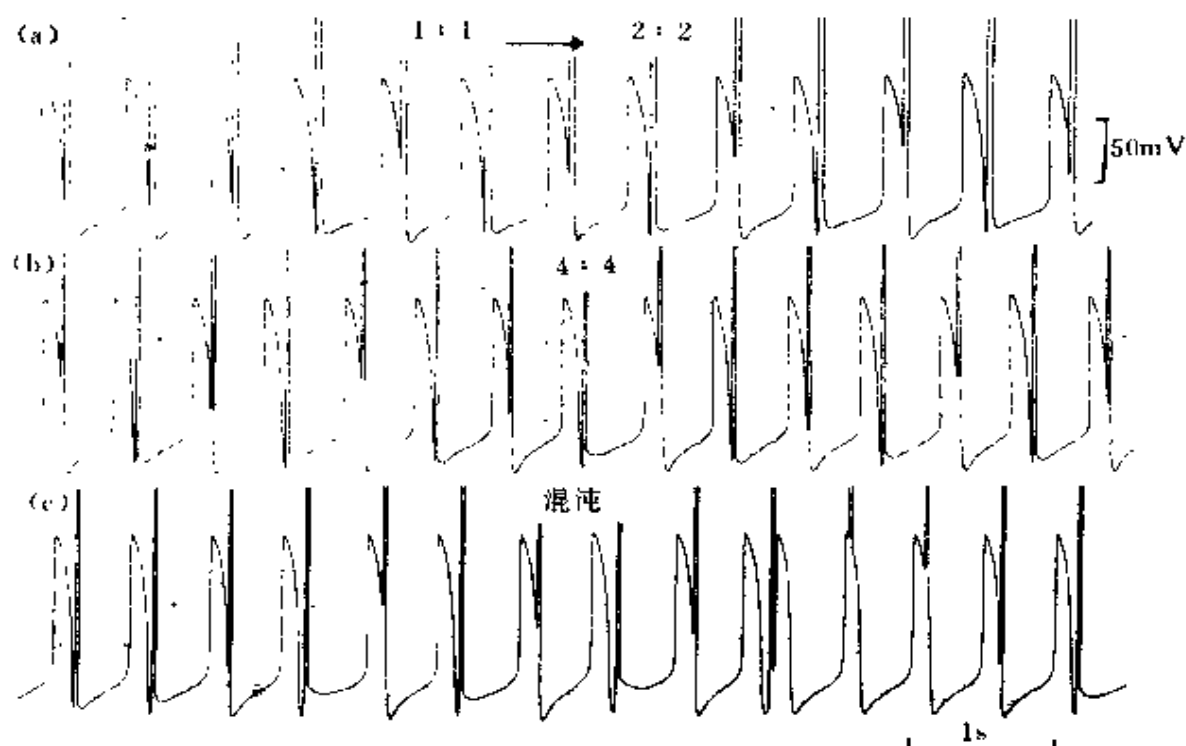


图 22-8 鸡胚心实验中由倍周期分岔通向混沌

$A=0.10$, τ 分别为 1.06、1.04 和 1.06, 其中 (a) 是一个样品; (b) 和 (c) 是另一样品。



图 22-9 $A=0.06$, $\tau=1.44$ 时出现的混沌

能工作时, 房室结的起搏可以使心脏的搏血功能得以维持 (即使是病态的)。当潜在起搏点自律性增强而成为异位起搏点时, 不管窦房结自律性降低还是不降低, 都将使心律不再是窦性心律, 从

而出现各种心律失常或心律不齐 (arrhythmias)。例如心房扑动 (atrial flutter) 就是在心房或房室交界区某局部出现了一个异位起搏点, 造成每分钟 200~300 次的比较规则的兴奋。心房纤颤 (房颤, atrial fibrillation) 是心房出现了多个异位起搏点, 它们互不同步而有不同的不应期, 这样就引起不规则的兴奋, 节律高达每分钟 400~600 次。如果异位起搏点出现在心室 (希氏束或浦肯野纤维), 同样地将引起心室扑动和室颤, 它们的出现都是严重的病态。特别是多个异位起搏点引起的室颤, 其振荡急速 (每分钟 200~500 次) 而微弱, 使心室完全失去搏血功能, 从而可立即导致死亡。

如何分析这类心律失常呢? 一种观点认为它们是由于心脏中某些传导兴奋的通道受到阻滞或异位起搏点引起的振荡沿某些闭合通道循环传导而引起的。也有的认为, 心脏是一耦合振荡系统, 但可以近似地把异位起搏点引起的振荡看作是要分析的振子的振荡, 而把窦房结的作用看或是对它的周期驱动。这样便可采用上面的方法。由上而的分析可知, 由于参数的稍许变化, 可能出现各种形式的振荡。心脏正常工作时, 其振荡是在图 22-4 的 1:1 锁相区, 即心脏的振荡是窦性心律。在其他参数取值下, 振荡由 1:1 锁相进入其他区域, 从而出现心律失常。但是近年戈德伯格 (Goldberger) 和韦斯特 (West) 等人实测后认为, 心脏正常工作时, 不是处于规则的锁相状态, 而是混沌。相反, 一些心力衰竭人死前数分钟以至数月的心跳反而变得极规则。对于纤颤, 由于它是起因于多个不同步的异位起搏点, 其类似图 22-4 那样的 $A-\tau$ 图一定要复杂得多, 振荡自然也是极复杂的。一般认为, 纤颤就是混沌。有人用模拟法测得多振子耦合系统在高频作用下出现纤颤前, 先有倍周期分岔。但也有人测出心脏纤颤的功率谱中有一些尖峰而认为纤颤不一定是混沌。看来关于各类心脏振荡性质还有待进

一步分析研究。

除了上面讲的格拉斯等人的研究方法外,也有人把心室的振荡用毕勒-路特方程表示,把窦房结对它的作用看成周期驱动。耶森(Jensen)等人(1984)在B-R方程中加正弦型强迫项,然后求解,并分析其功率谱和计算其李雅普诺夫指数,结果证明存在锁相和混沌。童勤业等人(1992)则研究了B-R方程在不同条件(如不同外加电流 i_{ex})下的解,结果也发现可出现分岔和存在混沌解,他们还试图用此说明某些心律失常现象。有些人(Honerkamp, 1985; West 等人, 1985)则把心脏看成非线性耦合振荡系统,然后研究其振荡特性,在不同参数值和条件下,也得到极限环型解或混沌解,从而也可说明心脏振荡的一些特性和某些心律失常现象。

当然,所有这些研究都是在对复杂的心脏振荡系统做了大量简化下进行的。它们能说明的问题都有其局限性。因此如何更准确地描述心脏的振荡,还须做大量深入细致的研究。

§ 23 生态系统的振荡和混沌

我们已介绍过两种生态学模型:单一种群的逻辑斯谛模型(§ 11)和捕食者-猎物的洛特卡-伏尔泰拉模型(§ 1和§ 3)。但是这两个模型都嫌过于简单,难于表述生态系统的复杂性。本节拟进一步介绍这方面的问题。

1. 没有世代交叠的单一种群

§ 11谈到没有世代交叠的单一种群的繁殖要用差分方程形式(离散映象)表示,其一般形式是〔式(11·1)〕

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (23 \cdot 1)$$

其平衡点（不动点）所满足的条件是〔式（11·6）〕

$$x^* = F(x^*) \quad (23 \cdot 2)$$

梅（May）和奥斯特（Oster）（1976）总结了对这类没有世代交叠种群的研究，列出了如表 23-1 所示几种可以考虑的模型。

表 23-1 没有世代交叠单一种群的模型

代号	$F(x)$	平衡点 x^*
A	$x[1+r(1-x/K)]$	K
B	$x \exp[r(1-x/K)]$	K
C	$\lambda x(1+ax)^{-\beta}$	$(\lambda^{1/\beta}-1)/a$
D	$\lambda x^{1-b} \quad (x > \epsilon)$ $\lambda x \quad (x < \epsilon)$	$\lambda^{1/b}$

将模型 A 的 $F(x)$ 与式（11·5）比较，可以看出，它实质上就是逻辑斯谛模型。此模型有一严重不合理处是：当种群数量超过 $K(1+r)/r$ 时，下一代 x 就成为负值（灭绝），这显然是不合理的。其他三种模型没有此问题，它们中的 x 一般可能在某些上下界之间变动，因此看来要比模型 A 合理些。

模型 B 在生物学中有较广泛合理的种群世系繁殖的基础，其成员消亡不是像模型 A 那样与 x^2 成比例，而是与 $\exp(-ax)$ 有关，这比较符合在高密度下存在流行病（epidemics）之类因素的调节作用。图 23-1 就是在不同参数下由模型 B 得到的种群密度 N/K 与时间（或世代数 n ）的关系。可以看出，此结果与 § 11 所述逻辑斯谛模型结果类似，即参数变化时，可由稳定平衡点〔图 23-1(a)〕而倍周期分岔到二点周期〔(图 23-1(b))〕、四点周期〔图 23-1(c)〕最后进入混沌〔图 23-1(d)~(f)〕。

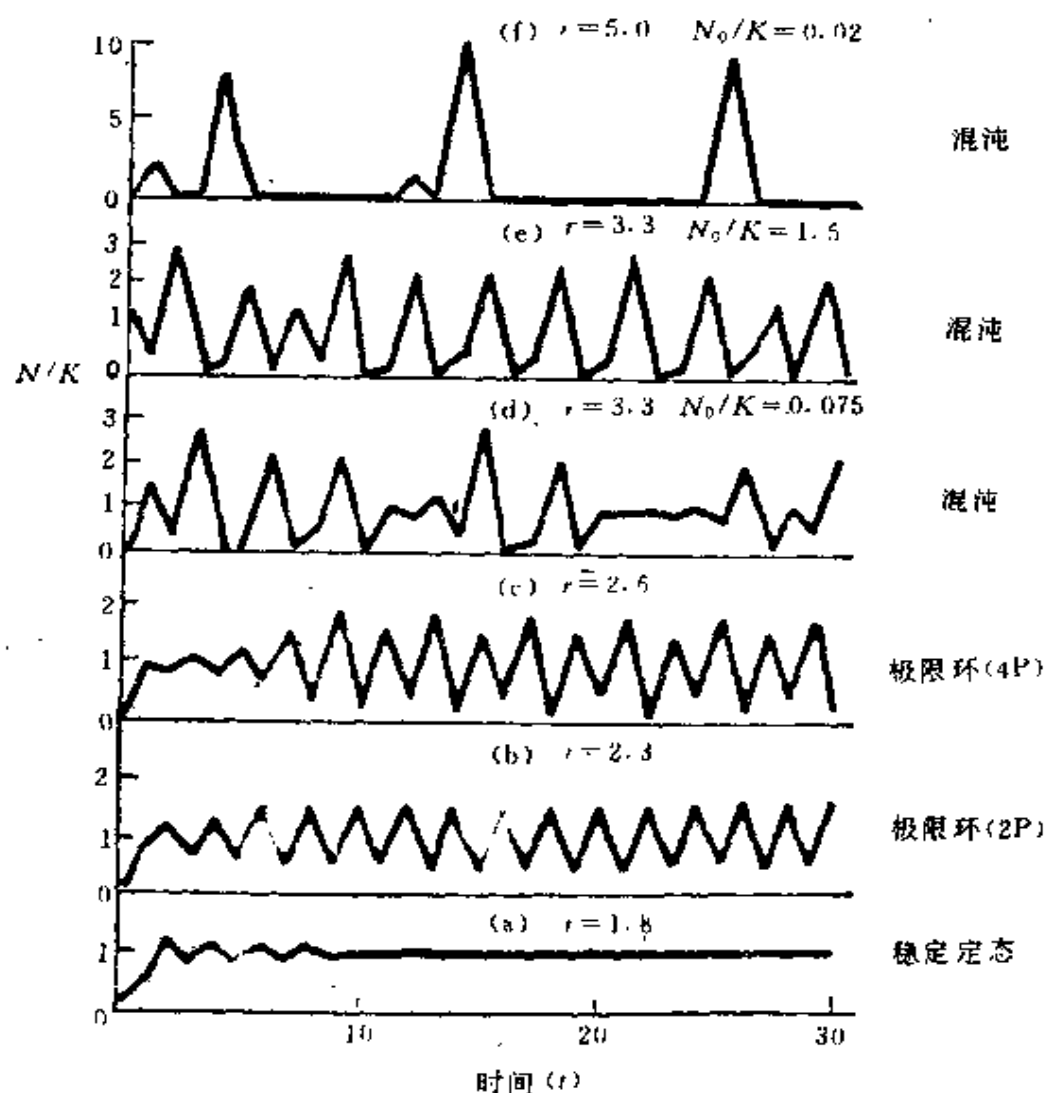


图 23-1 表 23-1 中模型 B 在不同参数下的振荡解

模型 C 曾被哈塞尔(Hassell)等人(1976)用来分析具有季节性繁殖的昆虫(如科罗拉多薯甲虫)在野外和实验室培养的观察数据,结果大体上相符。当参数 α 、 β 和 λ 取值不同时,可得到稳定平衡值、阻尼振荡、极限环型振荡、最后由倍周期而进入混沌。

模型 D 适合于分析与密度有关的数据的经验方法,这种经验

方法是作 $\ln(x_n/x_{n+1}) - \ln x_n$ 曲线, b 表示所得到的回归线的斜率。此模型 $F(x)$ 不是解析函数。当 $b < 2$ 时, 它有一个平衡点; 当 $b > 2$ 时, 即直接得出混沌解, 中间没有周期解。

2. 考虑时滞的单一种群模型

上面考虑的是没有世代交叠的种群问题。实际上许多种群是世代交叠的。这时表示种群繁殖规律的差分方程应由连续变化的微分方程所代替。如与表 23·1 中模型 A 和模型 B 对应的差分方程应分别改为下面的微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(1 + r \left(1 - \frac{x}{K} \right) \right) \quad (23 \cdot 3)$$

$$\frac{dx}{dt} = x \exp \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) \right] \quad (23 \cdot 4)$$

但是在上面的这些函数 $F(x)$ 和方程中, 各种影响繁殖率的因素都被认为是瞬时立即作用的, 实际情况却不尽然。例如: 生物生殖都要经历一段发育成熟时期, 某些环境因素的影响要隔一段时间才起作用。如高密度时生殖率下降, 但到影响成熟成员减少也还需一段时间, 等等。即在函数 $F(x)$ 或方程中, 某些影响因素应有一时间延迟或时滞 (time lag)。因此实际的微分方程应该是延迟的。如方程 (23·3) 应改为下式才更合理:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left[1 + r - r \frac{x(t-T)}{K} \right] \quad (23 \cdot 5)$$

此处 T 即表高密度造成的生殖率下降到成员成熟之间这段时间滞后。

单变量的延迟方程可以看成是无穷阶的自治方程或多变量自治方程组, 因为利用泰劳展开

$$\begin{aligned} x(t-T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-T)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \\ &= e^{-T \frac{d}{dt}} x(t) \end{aligned} \quad (23 \cdot 6)$$

因此延迟方程的解自然可能与相应的非延迟方程的解完全不同,通常总是要复杂得多,而且很容易出现分岔和混沌。举一个简单例子,考虑方程

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2T}x \quad (23 \cdot 7)$$

很明显此方程的解是随时间指数衰减的:

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\pi}{2T}t\right) \quad (23 \cdot 8)$$

但如果是延迟方程

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2T}x(t-T) \quad (23 \cdot 9)$$

其解却是周期的:

$$x = x_0 \cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right) \quad (23 \cdot 10)$$

延迟方程已在一些生理过程中得到广泛应用,如血细胞系统和内分泌等类型的反馈调节系统的模型中都已用到,而且很容易就得到振荡解和混沌解。在人口问题上也有人推得要用延迟方程表述。

我们考虑一个须鲸类种群的例子。须鲸种群数量的变化可用下而的方程表述:

$$\dot{N} = -\mu N + v\hat{N}(1-N^Z) \quad (23 \cdot 11)$$

式中 N 即 $N(t)$, $\hat{N} = N(t-T)$, v 是每头鲸的出生率, μ 是死亡率, Z 是一经验常数。

方程(23·11)有一非平凡的平衡点:

$$N^* = [(a-1)/a]^{1/Z} \quad (23 \cdot 12)$$

a 为一无量纲系数,它表示出生率与死亡率之比:

$$a = v/\mu \quad (23 \cdot 13)$$

为了种群能存在下去,自然要求 $a \geq 1$ 。

对平衡点 N^* 进行线性稳定性分析。令

$$N = N^* + x \quad (23 \cdot 14)$$

将 x 代入方程 (23 · 11) 用泰劳展开保留 x 的线性项, 则线性方程的解一般取如下形式 (§ 3)

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} \quad (23 \cdot 15)$$

式中

$$\lambda = -\mu - [(v - \mu)Z - \mu]e^{-\lambda T} \quad (23 \cdot 16)$$

引入无量纲因子

$$\Lambda = \lambda / \mu \quad (23 \cdot 17)$$

$$\tau = \mu T$$

并令

$$b = (\alpha - 1)Z - 1 \quad (23 \cdot 18)$$

代替式 (23 · 16) 得到关于 Λ 的超越方程

$$\Lambda = -1 - be^{-\Lambda \tau} \quad (23 \cdot 19)$$

在无时间延迟的情形, $T = 0$, $\tau = 0$

$$\Lambda = -1 - b = -(\alpha - 1)Z < 0 \quad (23 \cdot 20)$$

即 Λ 取值是在其复平面的左半部实轴上 (实部小于零), 因此无延迟时, 平衡态 N^* 是稳定的。

当 T 和 τ 由 0 逐渐增加时 (存在延迟), Λ 取值逐渐向虚轴靠近。当 Λ 取值越过虚轴时, 便出现霍普夫分岔: 系统由稳定定态过渡到极限环型振荡。因此分岔出现在

$$\Lambda = iy \quad (23 \cdot 21)$$

将上式代入方程 (23 · 19) 得到在分岔处

$$\begin{aligned} -1 &= b \cos(y\tau) \\ y &= b \sin(y\tau) \end{aligned} \quad (23 \cdot 22)$$

由此消去 y 得到出现分岔时的时间延迟 τ 的临界值:

$$\tau_c = \frac{\pi - \cos^{-1}(1/b)}{(b^2 - 1)^{1/2}} \quad (23 \cdot 23)$$

因此平衡态 N^* 的稳定要求为

$$\tau < \tau_c \quad (23 \cdot 24)$$

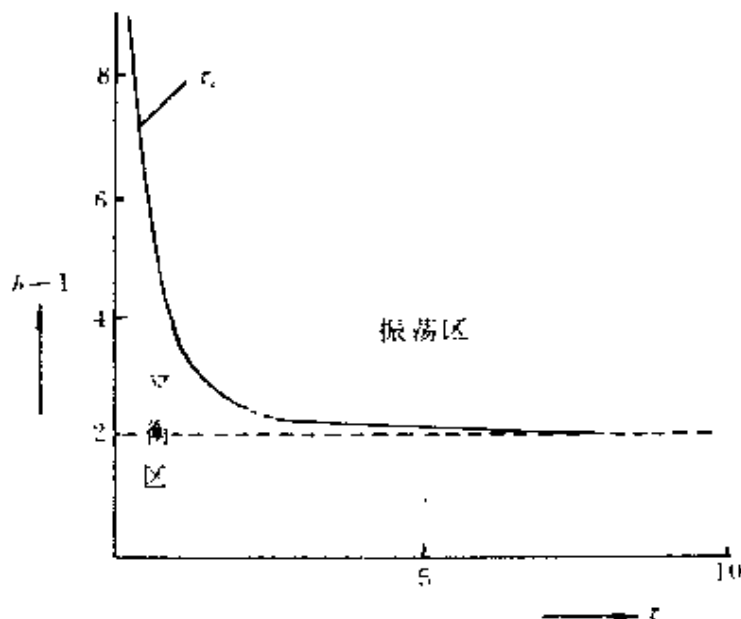


图 23-2

此条件可用参数平面表示如图 23-2。由图可见，当

$$b < 1 \quad (23 \cdot 25a)$$

即

$$(\alpha - 1)Z < 2 \quad (23 \cdot 25b)$$

时，平衡态 N^* 总是稳定的。这时种群有稳定数量 N^* 。对须鲸种群，类型的数据是 $\alpha \approx 1.2$ ， $Z \approx 2.4$ ，从而

$$b \approx -0.5$$

当 $\tau > \tau_c$ 时，平衡态失稳。设刚开始出现振荡时，其周期为 T_0 ，则

$$\mu T_0 = 2\pi / y$$

由此得

$$T_0 = \left[\frac{2\pi}{\pi - \cos^{-1}(1/b)} \right] T \quad (23 \cdot 26)$$

式中的 b 由式(23·23)给出。

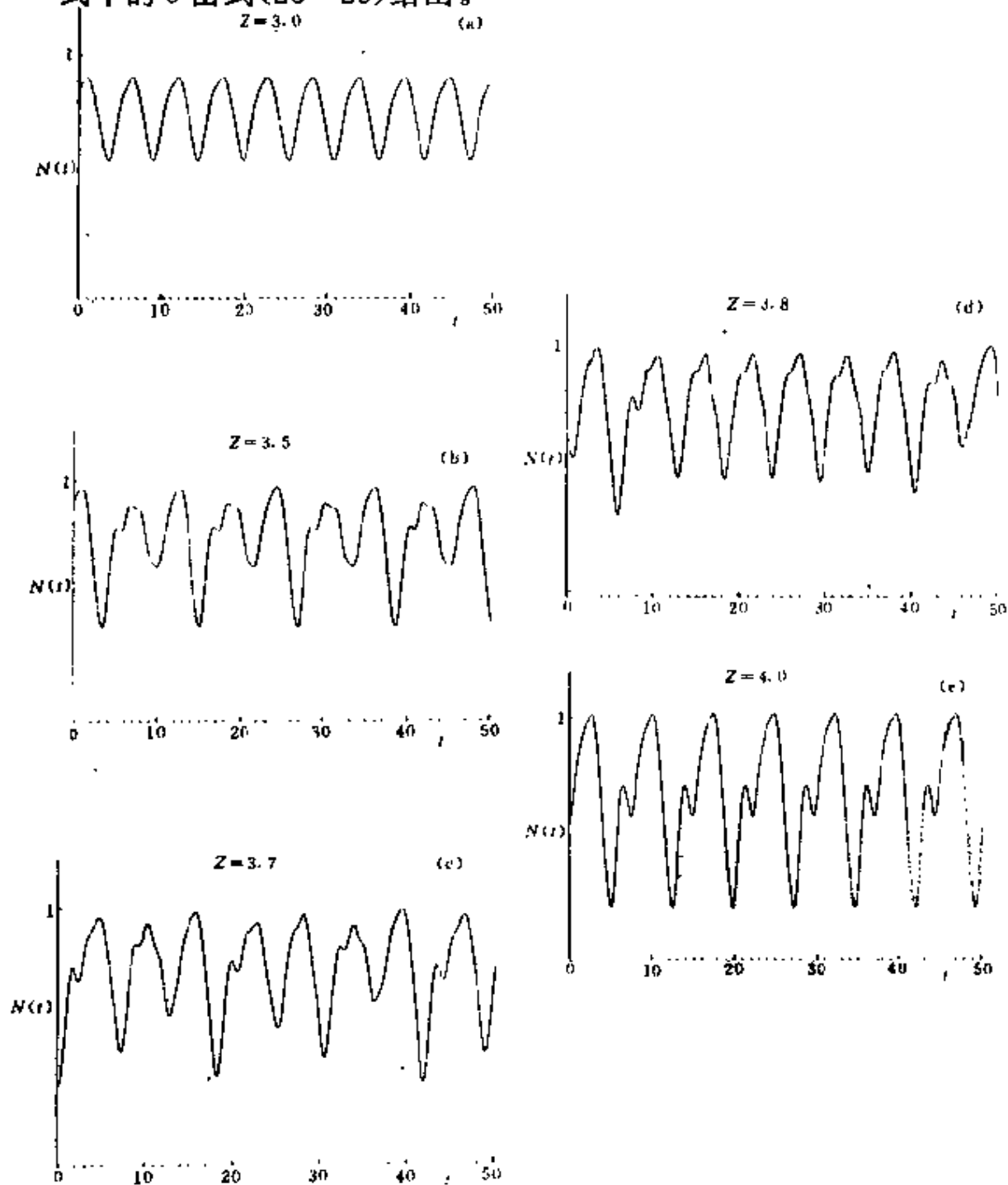


图 23-3 方程 (23·11) 的解

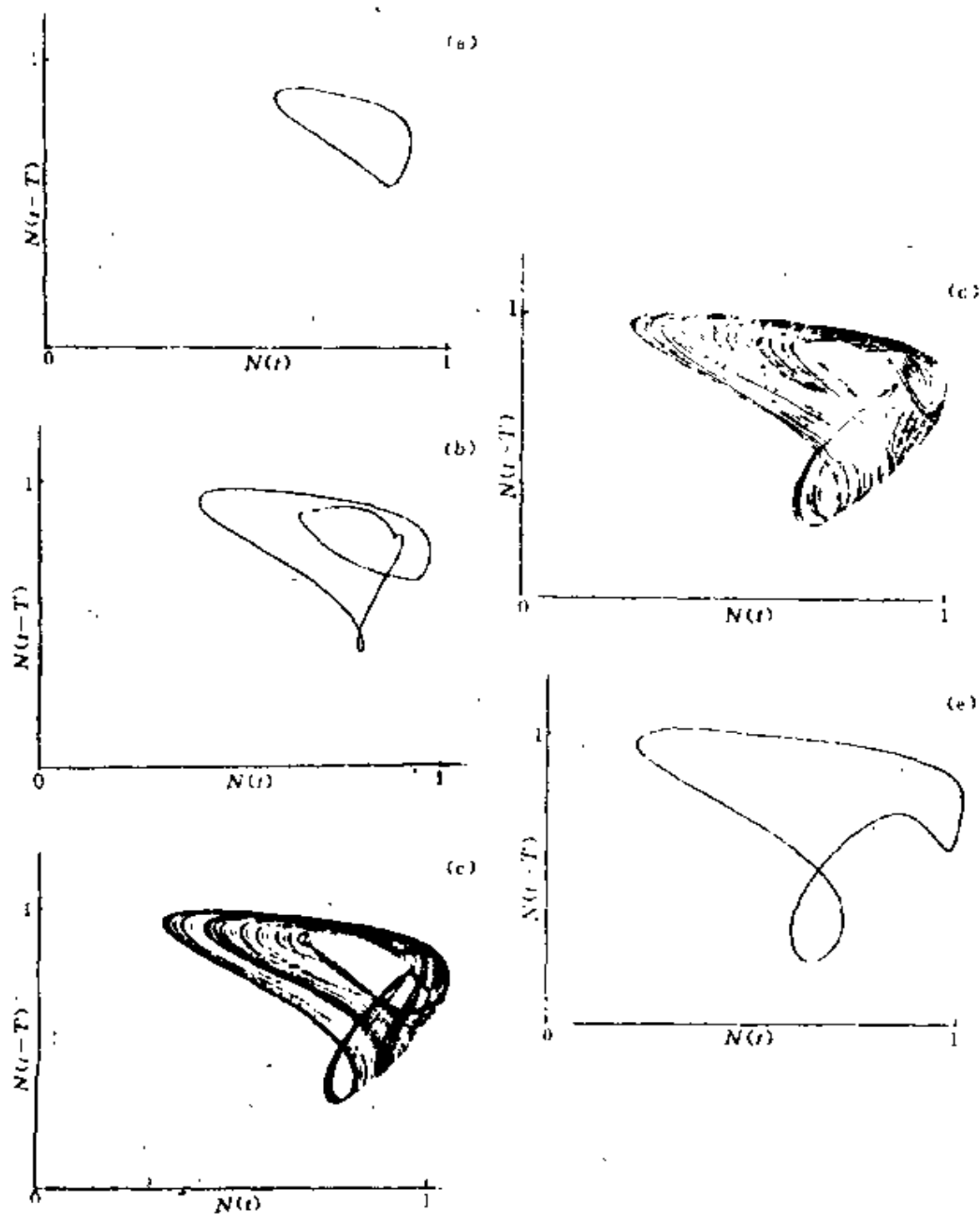


图 23-4 方程 (23·11) 解的 $N(t-T)-N(t)$ 各图分别与图 23-3 各图对应。

图 23-3 给出当 $T=2$, $\mu=1$, $\nu=2$, Z 分别取 3.0、3.5、3.7、3.8 和 4.0 时的 $N(t)-t$ 曲线。图 23-4 是相平面中的相应的 $N(t-T)-N(t)$ 轨道 (§ 10 的相空间重构法)。由这两图可以看出, 它们中的 (a) 表示 1P 振荡, (b) 是 2P 振荡, (c) 和 (d) 都是混沌。在 $Z=3.5$ 和 3.7 之间还可以找到 4P、8P 和 16P 振荡。因此可以说随着 Z 的增大, 延迟方程 (23·11) 的解可以由倍周期分岔通向混沌。此外, 唯一奇特的是混沌后面又出现周期振荡 (两图中的 (e))。对于这种延迟方程出现的奇特性, 目前了解得还很不够, 如还不能断定是否是反倍周期分岔。

3. 洛特卡-伏尔泰拉方程的推广

§ 1 和 § 3 讨论的洛特卡-伏尔泰拉方程 (1·44) 是关于捕食者-猎物两个种群共存的模型。这样的模型似乎也显得过于简单。例如当捕食者不存在时 ($Y=0$), 猎物将无限制地按指数规律增长。一般说来, 这当然是不合理的, 实际上, 如 § 11 在推导方程 (11·4) 时所述, 猎物有自身病老死亡, 特别是环境和食物的限制, 在密度大时同一种群内部的相互竞争要使猎物数量受到限制。考虑到这一因素, 洛特卡-伏尔泰拉方程 (1·44) 应改为

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cxy = ax\left(1 - \frac{b}{a}x\right) - cxy \quad (23 \cdot 27a)$$

$$\frac{dy}{dt} = exy - fy \quad (23 \cdot 27b)$$

a 表示猎物的自然增长率, b/a 表示环境的承载力。

方程 (23·27) 的奇点除原点 (0,0) 外, 另一是 $C\left(\frac{f}{e}, \frac{a}{c} - \frac{bf}{ce}\right)$ 。

令

$$x = X - \frac{f}{e} \quad (23 \cdot 28a)$$

$$y = Y - \left(\frac{a}{c} - \frac{bf}{ce} \right) \quad (23 \cdot 29b)$$

得到方程(23·27)在C点附近的线性化方程

$$\dot{x} = \frac{bf}{e}x - \frac{cf}{e}y \quad (23 \cdot 29a)$$

$$\dot{y} = \left(\frac{a}{c} - \frac{bf}{ce} \right)x \quad (23 \cdot 29b)$$

由此得(§3)

$$T = -bf/e < 0$$

$$\Delta = \frac{cf}{e} \left(\frac{a}{c} - \frac{bf}{ce} \right) > 0$$

由§3的分析可知C点是稳定焦点。这表示捕食者和猎物两种群都将有稳定的数量,即通常所说的捕食者和猎物达到生态平衡。

还有不少人提出了关于捕食者—猎物(或寄生物—宿主)的一些模型,其中有些得到了某些有意义的结果,我们在此不一一列举了。

除此以外,具有三个以上种群共存的比较复杂的生态系统的动力学规律自然要采用更复杂的数学表达式,如三个以上变量的常微分方程组、多变量差分方程组(离散映象)以至偏微分方程组和微分积分方程或延迟的微分方程。一些研究者利用这些表达式得到过某些生态系统种群变化的值得考虑的结果。其中一种具有普遍适用而形式又比较简单的方程是将改进的洛特卡-伏尔泰拉方程(23·27)推广写成下面的微分方程组〔吉尔宾(Gilpin)模型〕:

$$\dot{x} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j), i = 1, 2, \dots, n \quad (23 \cdot 30)$$

或

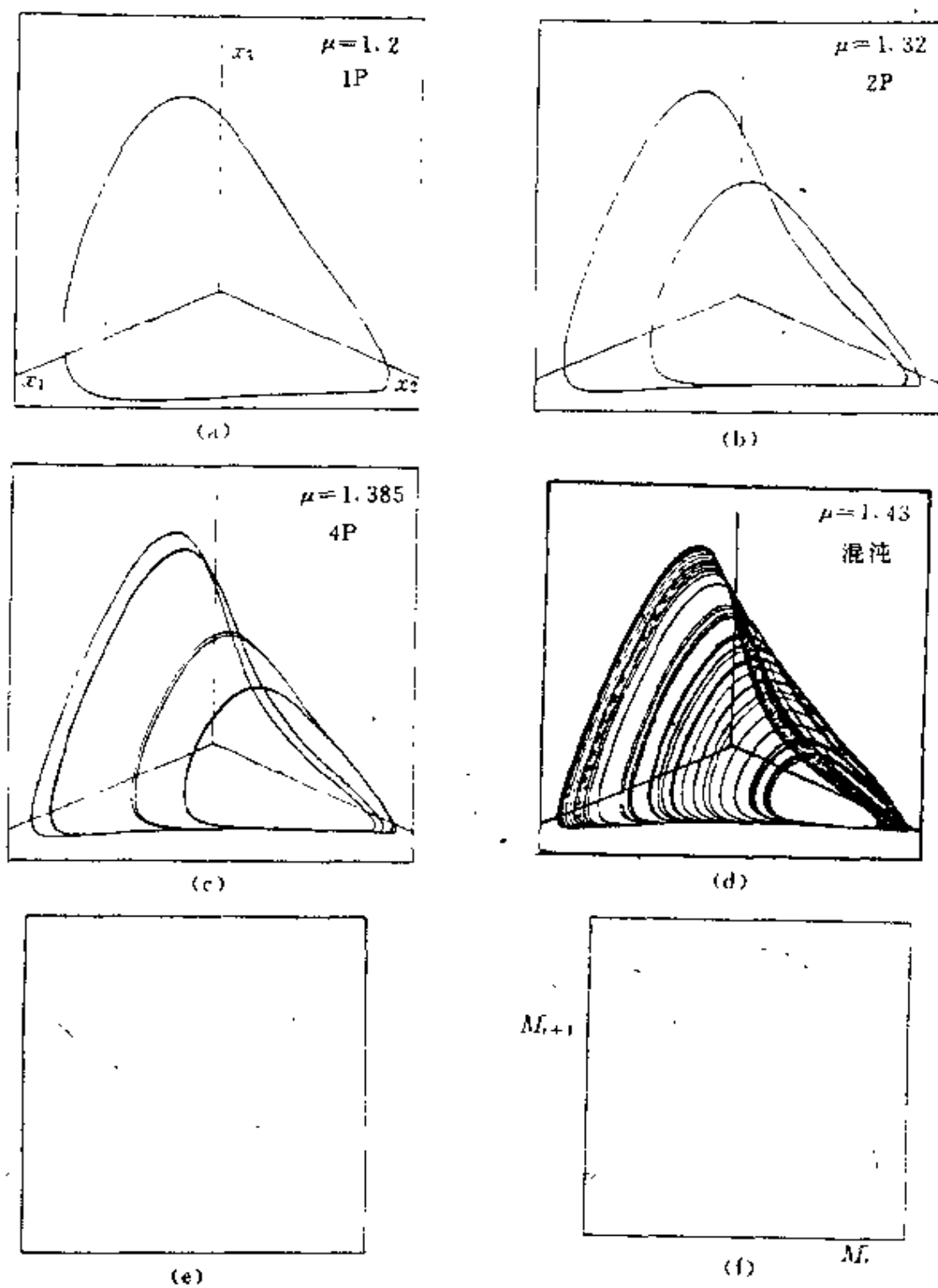


图 23-5 吉尔宾模型的倍周期分岔到混沌

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}(1 - x_j), i = 1, 2, \dots, n \quad (23 \cdot 31)$$

上述两方程组可以描述各种形式相互竞争或作用的 n 个种群的生态学问题。这些种群可以是多个捕食者和多个猎物，也可以是几种昆虫共存。还可以是几种植物在同一地区生长，如此等等。

对于只有三个种群（一种捕食者，二种猎物）的生态系统，方程(23·31)简化为

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^3 a_{ij}(1 - x_j), i = 1, 2, 3 \quad (23 \cdot 32)$$

矩阵元 a_{ij} 自然与系统的环境和各种群繁殖速率、死亡速率以及相互作用等有关。一组典型的数据是

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & -0.1 & 0.1 \\ \mu & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (23 \cdot 33)$$

其中 $a_{13} = \mu$ 表示与第一、三两种群之间相互作用有关的参数，现

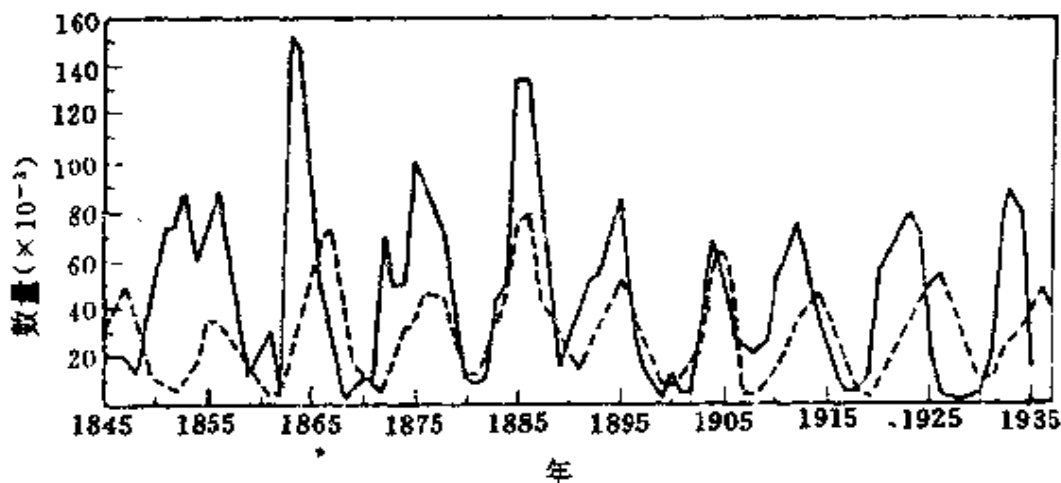


图 23-6 加拿大猞猁和野兔 90 年间数量变化

在取作是可调的。逐次改变 μ 值，利用矩阵 (23·33) 解方程 (23·32) 求得 $x_i(t)$ ($i=1, 2, 3$)，由此可画出三维空间轨道图 (图 23-5)。很明显，由于 μ 的变化，逐次出现一周期 [图 23-5 (a)]、

至于到底是哪些因素或其他种群影响猞猁的生存繁殖，目前还没有一致的看法。

§ 24 流行病学中的混沌

流行病发病率的问题与生态学密切相似。流行病学研究的一个重要方面是关于传染病在人类群体中传染的规律。传染病大致可分为两大类：一类是由病毒或细菌引起的感染，如肺结核、肝炎、小儿麻疹、腮腺炎和水痘等；另一类则是由外寄生虫引起的，如血吸虫病和钩虫病等。本节扼要介绍关于传染病感染率的一些规律。

1. 某些传染病感染率的简单模型

先研究某些传染病感染率按年龄的分布。有些传染病，如小儿麻疹，感染治愈后就可获得终生免疫而不至再感染；有些传染病，如乙型肝炎，感染病毒后就难以消除，即所谓澳抗阳性，很可能要维持终生。对于这两类传染病，在没有考虑注射疫苗获得免疫的情况下，人群大体可分为两类：未感染者和曾感染者。设这两类各占人群的分数为 x 和 y ，则

$$x + y = 1 \quad (24 \cdot 1)$$

又设在所研究的时间和地区范围内，出生、死亡和迁移引起的人群总数的变化可以忽略，则在一定地区内未感染者和曾感染者所占比例随时间的变化为

$$\dot{x} = -ax, \quad x(0) = 1 \quad (24 \cdot 2)$$

$$\dot{y} = ax = a(1-y), \quad y(0) = 0 \quad (24 \cdot 3)$$

式中 a 称为感染力(概率)。解(24·2)或(24·3)即得

$$y = 1 - e^{-at} \quad (24 \cdot 4)$$

上式既表示某一时期感染者所占分数, 同样也表示感染者按年龄的分布。图 24-1 和图 24-2 分别表示 1966 年浙江诸暨十岁以下儿童对麻疹曾患率和泰国曼谷 1971 年乙型肝炎病毒感染率按年龄的分布。可以看出, 此两曲线都大体与式 (24·4) 一致 (注意: 在此, 时间 t 与年龄是一致的!)。

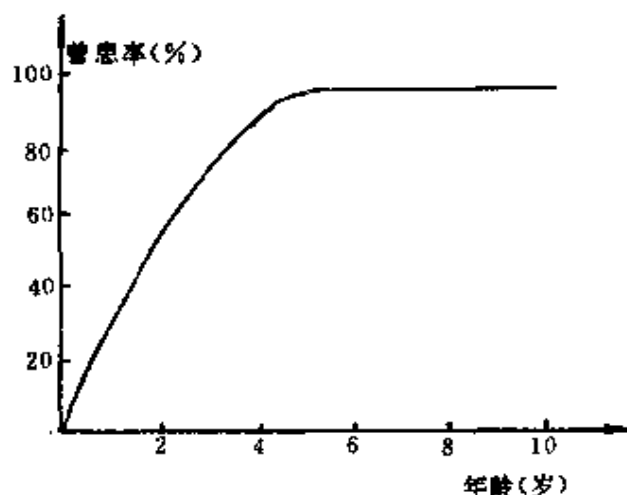


图 24-1

诸暨 1966 年关于麻疹患病率的调查

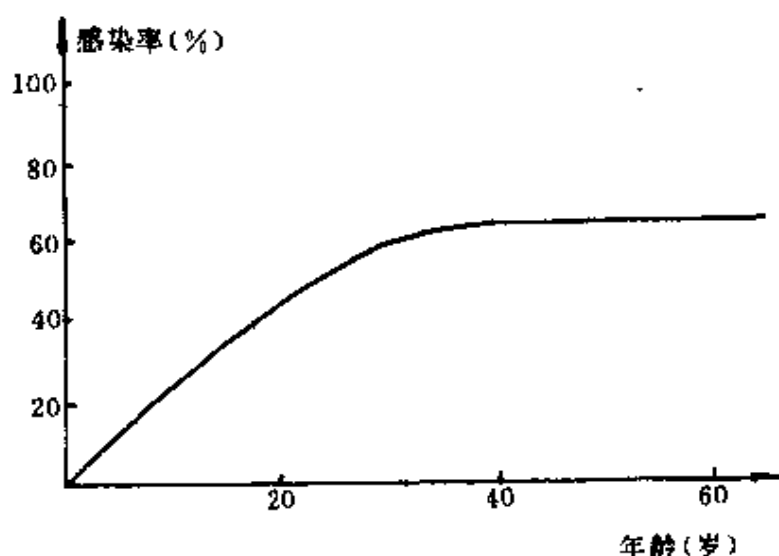


图 24-2 曼谷 1971 年乙肝病毒感染阳性率的调查

有一些传染病是可以治愈的, 如血吸虫病和沙眼等就是如此。对这类传染病, 人应区分三种类型: 从未感染者、现在感染者 (患者) 和曾经感染但已治愈者。设 x , y 和 z 分别表示某一地区人群中以上三种人在人群中所占比例, 并设感染治愈后不会再感

染（终身免疫，如前述的麻疹）。则

$$x + y + z = 1 \quad (24 \cdot 5)$$

$$\dot{x} = -ax, \quad x(0) = 1 \quad (24 \cdot 6a)$$

$$\dot{y} = ax - by, \quad y(0) = 0 \quad (24 \cdot 6b)$$

$$\dot{z} = by, \quad z(0) = 0 \quad (24 \cdot 6c)$$

a 的意义同前， b 表示恢复力（概率）或感染丧失比例系数。因为 $\dot{z} = -\dot{x} - \dot{y}$ ，一般只需考虑方程 (24·6) 的头两个方程就可以了。解此线性方程组得（设 $a \neq b$ ）

$$y = a(e^{-bx} - e^{-ax}) / (a - b) \quad (24 \cdot 7)$$

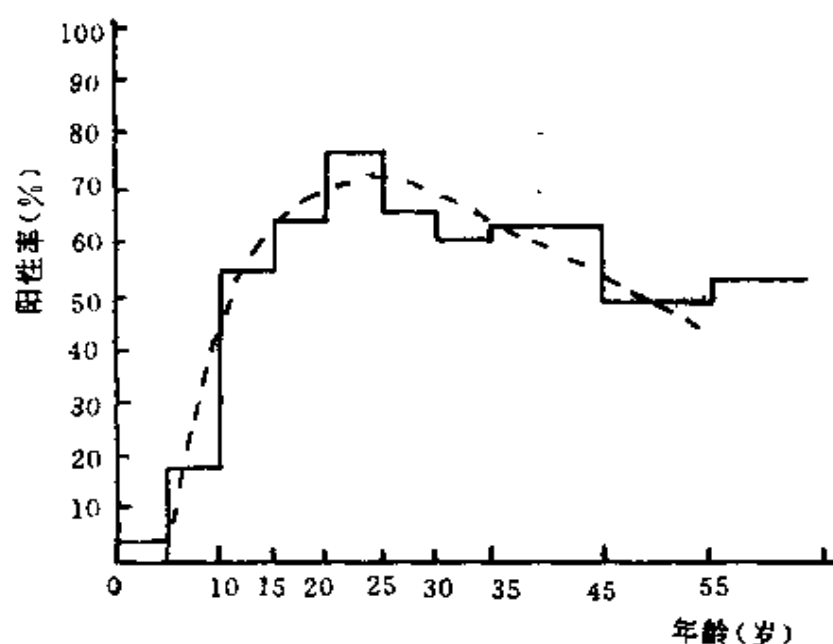


图 24-3 菲律宾某地区感染日本血吸虫病的年龄分布

实线是实际统计结果，虚线是的按式 (24·7) 计算结果。（假设 5 岁前不感染， $a=0.12$ ， $b=0.02$ ）

图 24-3 是菲律宾某地区感染日本血吸虫病的年龄分布。可以看出，理论与实测结果大体相符。

上面的模型对有些传染病是不适用的。因为有些传染病（如

鼠疫、霍乱、麻风病等)感染的可能性不仅与未感染人数有关,而且也与已有的患者数有关。所以对这类传染病,方程(24·6)中的 ax 项应为 axy 代替,于是对这类传染病,其模型方程应为

$$\dot{x} = -axy \quad (24 \cdot 8a)$$

$$\dot{y} = axy - by \quad (24 \cdot 8b)$$

$$\dot{z} = by \quad (24 \cdot 8c)$$

显然,方程(24·8a)和(24·8b)是洛特卡-伏尔泰拉方程(1·44)的一种退化形式。很易知道, x 轴上($y=0$)所有的点都是方程(24·8)的定态。也易推知,对于方程(24·8)的解应有

$$x + \rho \ln x + y = x_0 + \rho \ln x_0 + y_0 = \text{常数} \quad (24 \cdot 9)$$

$$\rho = b/a$$

x_0 和 y_0 分别是 x 和 y 的初值。由上式可得

$$y(x) = y_0 + x_0 - x + \rho \ln(x/x_0) \quad (24 \cdot 10)$$

对于不同的初态(x_0, y_0),解在相平面上的轨迹如图24-4所示。这些轨迹曲线的极大值都在 $x=\rho$ 处。由以上结果我们可以推知,这类传染病有以下两特点:

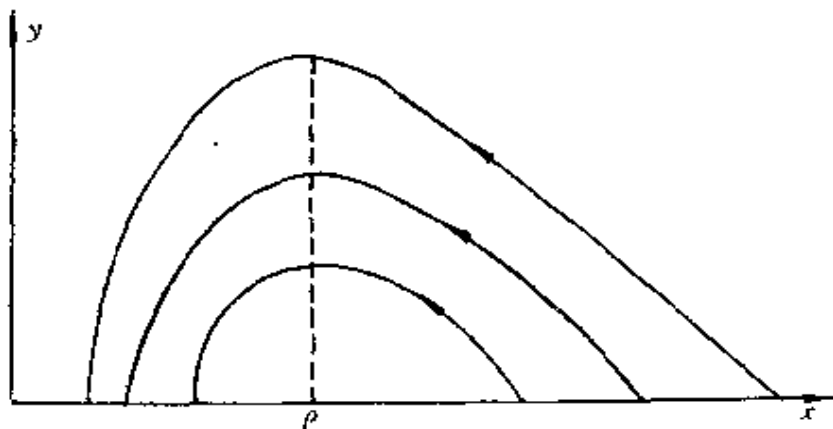


图 24-4 相平面上传染病的轨迹

(1) 阈值效应

由图 24-4 可见, 当 $x_0 < \rho$ 时, 患者 (y) 将逐渐减少。也就是说, 传染病得到控制。如果 $x_0 > \rho$, 则患者 y 将增加, 而未感染者 x 要减少直到 $x = \rho$ 。即传染病开始时将进一步流行, 然后感染才得以控制, 患者逐渐减少。所以 ρ 表示从未感染的人数的一个阈值, 它决定传染病是否将流行。对于一定的人群说, ρ 自然越大越好。这就要求感染力 a 尽量小些, 恢复力 b 尽量大些。

(2) 躲避效应

由式 (24 · 10) 可知, $y(0) = -\infty$, 即图 24-4 中各曲线都与 x 轴交于 $x > 0$ 处。这表示只要不存在患者 ($y = 0$), 人群就可以安全地躲避感染。

2. SEIR 模型

为了较准确地分析一些流行病的感染规律, 人们提出了一个比上面几个模型全面和复杂一些的模式, 这就是所谓 SEIR 模型。此模型认为一个人群中的成员可以分为四种: 从未感染者, 被感染但还不能感染别人者 (即所谓细菌或病毒携带者), 患者 (即能感染别人者), 康复者。令 S 、 E 、 I 和 R 分别表示以上四种人在总人口中所占比例, 于是

$$S + E + I + R = 1 \quad (24 \cdot 11)$$

又设: (1) 出生率和死亡率近似地都等于 μ ; (2) 被感染者转变为患者的概率为 r (r^{-1} 为潜伏期)。于是得到关于这一模型的微分方程组

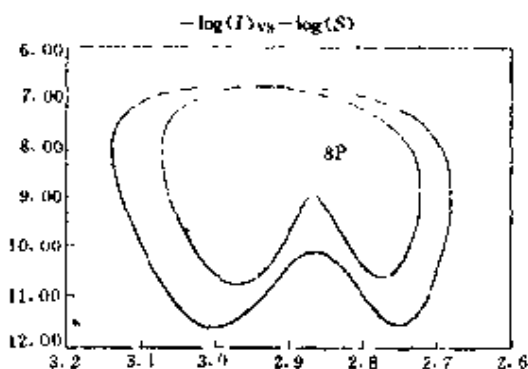
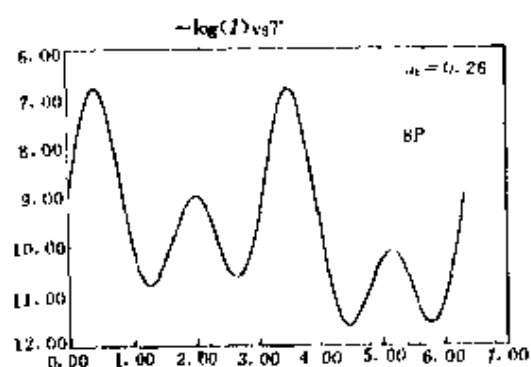
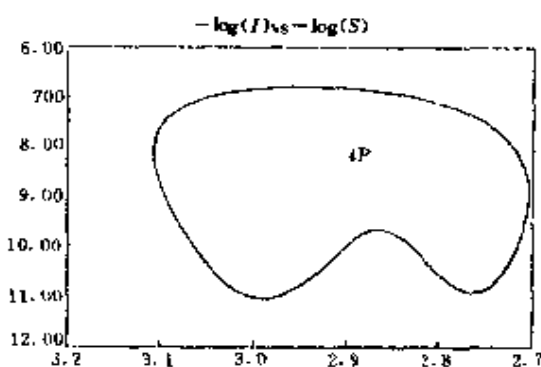
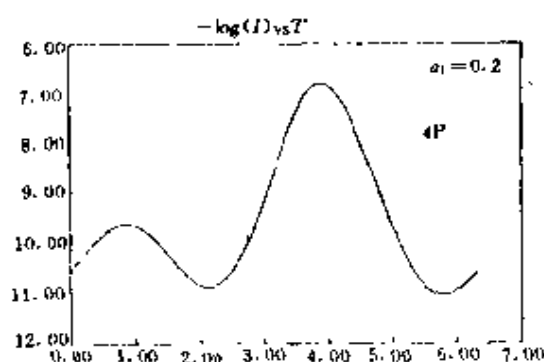
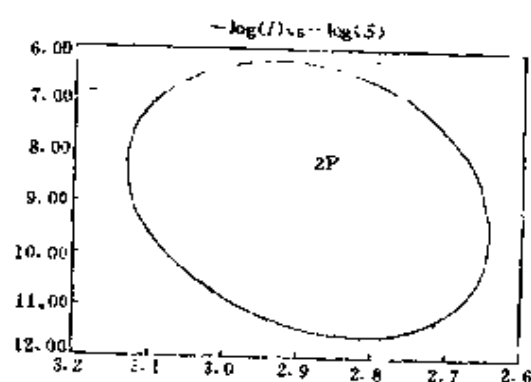
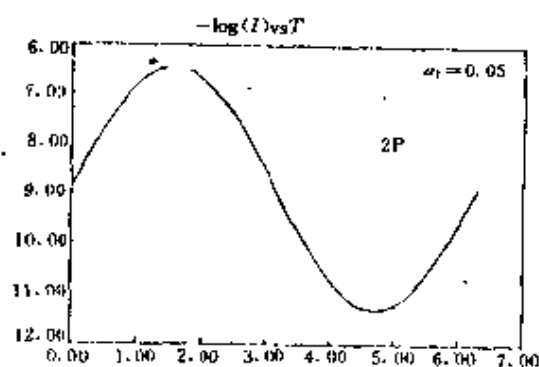
$$\dot{S} = \mu - aIS - \mu S \quad (24 \cdot 12a)$$

$$\dot{E} = aIS - rE - \mu E \quad (24 \cdot 12b)$$

$$\dot{I} = rE - bI - \mu I \quad (24 \cdot 12c)$$

$$\dot{R} = bI - \mu R \quad (24 \cdot 12d)$$

式中 a 和 b 的意义大体同前。由于条件 (24.11), 方程 (16.12) 只须分析求解其中的前三个方程即可。



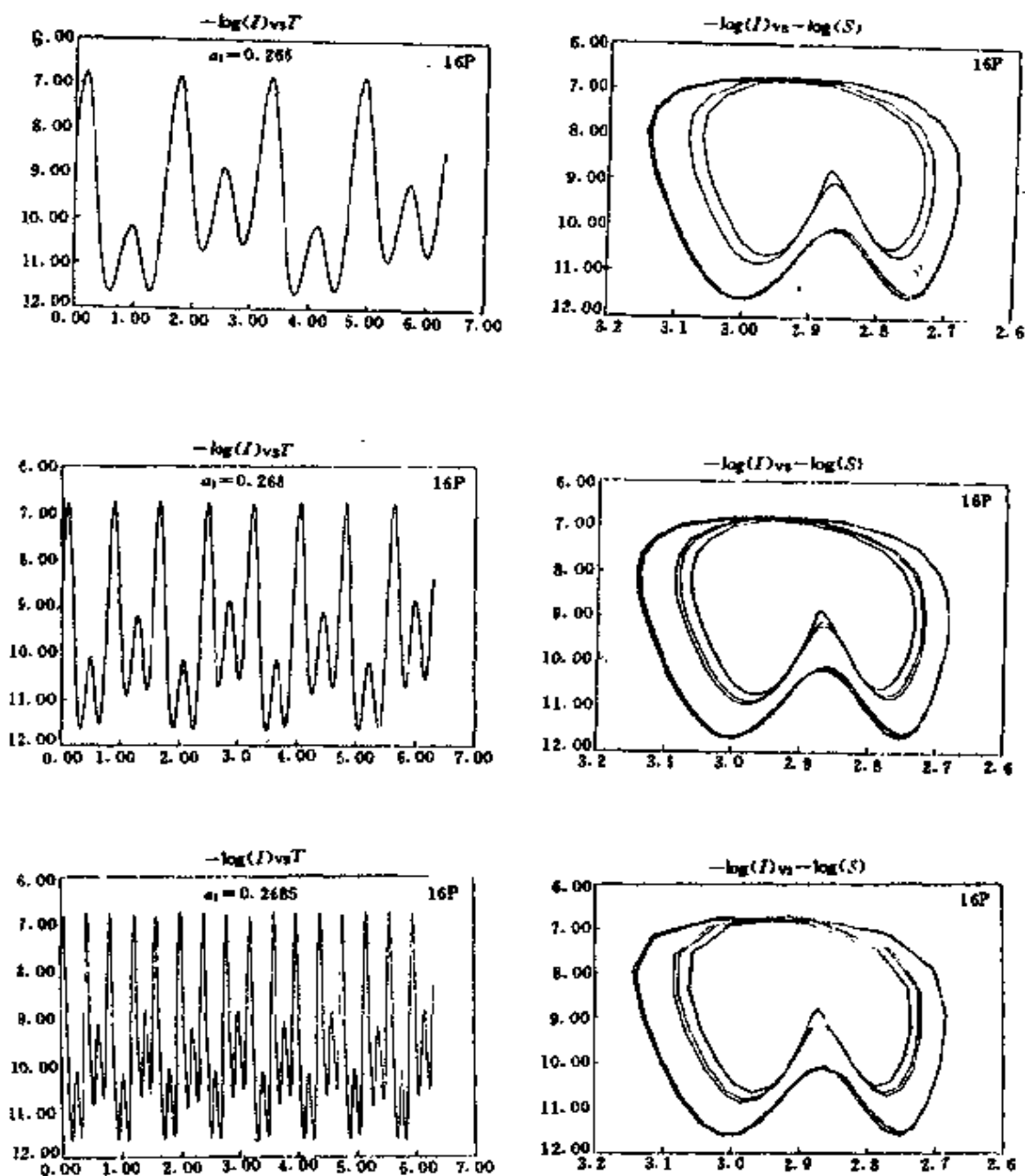


图 24-5 SEIR 方程的解

左边是 $-\log I - t$ 曲线，右边是 $\log I - \log S$ 曲线。 $\mu = 0.02 \text{ 年}^{-1}$, $r = 35.84 \text{ 年}^{-1}$, $b = 100 \text{ 年}^{-1}$, $a_0 = 1800 \text{ 年}^{-1}$ 。

方程 (24·12) 的解是稳定定态。这表示发病率是稳定的。但是许多传染病特别是一些小儿传染病 (如麻疹和腮腺炎等) 却表现出各年发病率有明显差别, 这就不符合稳定定态的结论。一些人认为, 这是因为实际感染力 a 不应当看作常数, 它往往是与季节有关, 如麻疹就是在冬季最易感染。因此对这类流行病来说, 感染力 a 应该是以年为周期而周期地变化:

$$a = a_0(1 + a_1 \cos \omega t) \quad (24 \cdot 13)$$

$$0 < a_1 < 1$$

$$T = 2\pi/\omega = 1 \text{ 年}$$

把上式代入方程 (24·12) 并适当地选取各系数值, 得到图 24-5 的结果。很明显, 随着感染力周期变化的振幅 a_1 逐渐变大, 依次出现 2P、4P、8P 和 16P 等周期轨道。这表明出现了倍周期分岔。

但是在各不同周期轨道中, 最大峰值却是相等的, 只是每隔一年的各小峰值 (它们比最大峰值约小二个数量级) 有些变化。因此阿荣 (Aron) 等曾 (1985 年) 猜想, 某些流行病 (如麻疹, 见下面) 的发病率有近似隔年出现高峰的变化, 其原因可能就在于季节影响使 SEIR 方程的解出现了倍周期分岔。

当然, 阿荣等也还发现, 进一步增大振幅 a_1 , 将由倍周期分岔而进入混沌, 这与 § 11 所述结果一致, 下面即将看到, 麻疹发病率确具有混沌特性。

3. 麻疹发病率的混沌特性

图 24-6 是 1928~1963 年 35 年间美国纽约和巴尔的摩两地麻疹发病率的统计资料。可以看出, 两地各年发病率差别都很大。如纽约最少年份 (1945) 只有 1870 例, 而最高年份 (1941) 却达 79 000 例。巴尔的摩最少也只有 88 例, 而最多达 18 612 例。

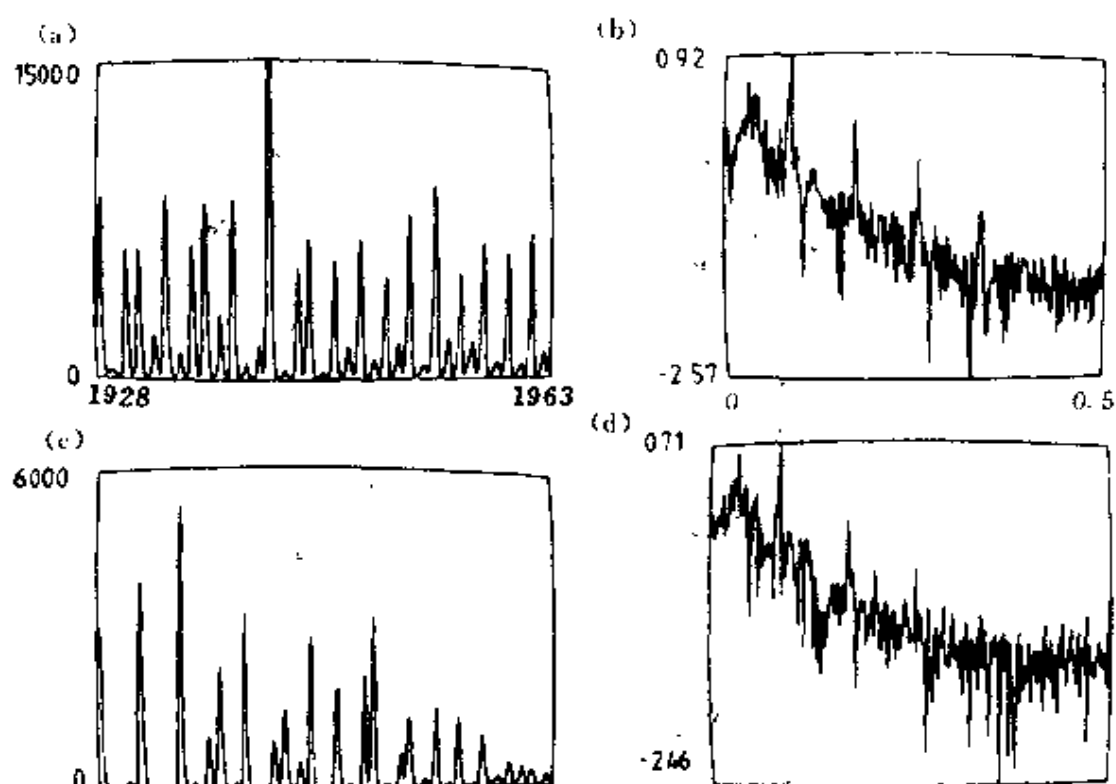


图 24-6 美国纽约 (上图) 和巴尔的摩 (下图) 麻疹发病率的统计 [(a) 和 (c)] 和相应的功率谱 [(b) 和 (d)] (纵坐标为功率对数, 横坐标为 $0 \sim 0.5 \text{ cps}$)

乍看这些结果 (图 24-6 左侧图), 既可能认为麻疹发病率是无规的随机过程, 也可能认为是有周期约为两三年的周期过程。为了搞清此发病率的性质, 夏菲 (Schaffer) 等人 (1984~1985) 对这些统计资料作了仔细分析。他们作了谱分析 (图 24-6 右图), 发现除了在周期约为一年处有峰值以及某些小峰 (只纽约有) 外, 主要是与随机过程对应的连续谱, 却没有与周期为两三年对应的谱线。夏菲等人又对图 24-6 (a) 和图 24-6 (c) 的数据适当进行光滑, 然后用相空间重构法 (§ 10) 进行分析。他们取 $n=1$, $m=3$, $T=3$ 月, 用各时间的发病率 $x(t)$ 、 $x(t+T)$ 和 $x(t+2T)$ 为坐标画

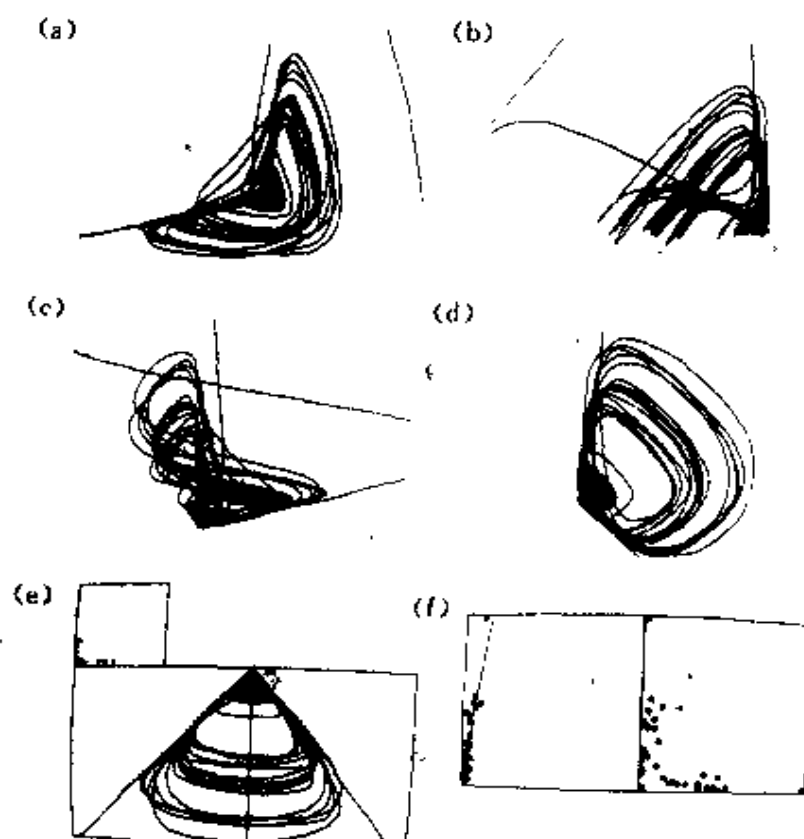


图 24-7 纽约麻疹病统计资料的相空间分析 (说明见正文)

图, 这样就分别得到图 24-7 和图 24-8。在这两套三维图中, (a)~(e)都是用此法重构的轨道图, 只是从不同方向透视的结果。可以看出, 这些轨道构成大体像是锥形的吸引子, 锥形的顶点在原点。图 24-7 (e) 大图是从上方看锥形。如果沿其中线垂直于纸面作庞卡莱截面, 所得截面两侧的截点大体上组成一 V 字形的两支, 如图 24-7 (e) 左上角小图所示。图 24-7 (f) 是图 24-7 (e) 左上角 V 字形中一支的放大, 其右图是其庞卡莱映象 $[x_{n+1}(t) - x_n(t)]$ 。它有一单峰, 从而也表示可以像 § 11 所述由倍周期分岔通向混沌。计算图 24-7 吸引子的维数得到的结果是 2.55, 其李雅普诺夫指数也是正的。这些都表明, 即使有随机性的噪声影响, 但仍可判

断出麻疹发病率确具有混沌性质，即它服从一定的规律，而不是完全随机的。至于此规律到底是 SEIR 方程还是其他方程，还有待进一步探讨。

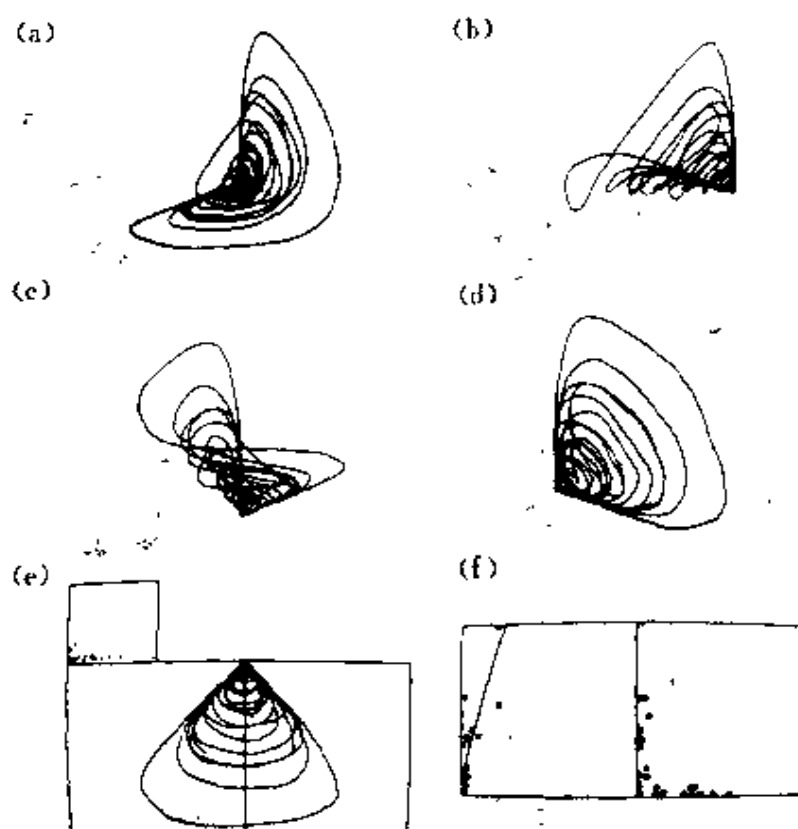


图 24-8 巴尔的摩麻疹病统计资料的相空间分析

4. 水痘的发病率和噪声影响

水痘和腮腺炎也有类似麻疹的发病纪录。图 24-9 (a) 是纽约市 1926~1963 年 35 年间水痘发病纪录，它以一年为周期而变化，但各年幅值不等。对它作类似图 24-7 和图 24-8 的处理得到图 24-9 的其他诸图。但是从图 24-9 (h) 可看出，其庞卡莱截面图不具有单峰映象那样规则形状。这表明它不像是混沌。

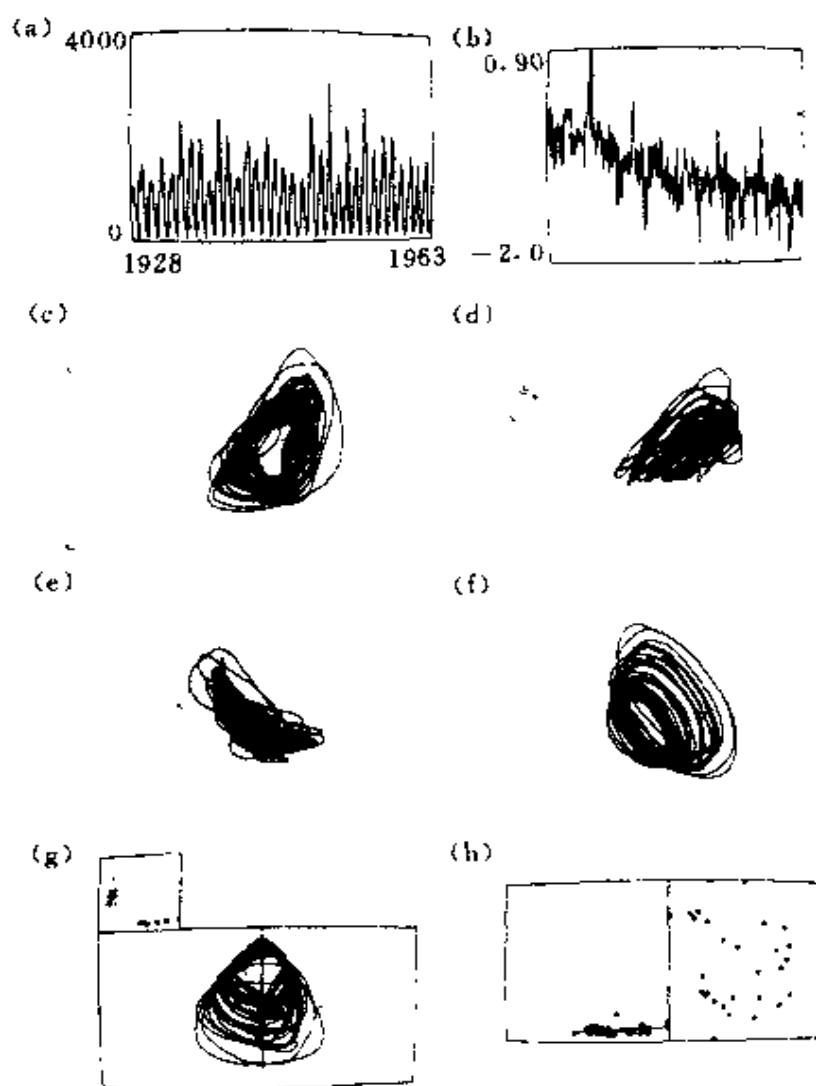


图 24-9 纽约市 1928~1963 年间水痘发病纪录

(a) 实际纪录; (b) 功率谱; (c)~(h) 同图 24-7(a)~(f)

为了分析噪声的影响以判断像水痘发病率这样的情况是否是混沌。夏菲等人提出, 对于简单的一维映象

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (24 \cdot 14)$$

可以把有噪声时的映象写为

$$x_{n+1} = (1+z)F(x_n) \quad (24 \cdot 15)$$

式中 z 是具有高斯分布的噪声作用, 其平均值在 $x=0$, 方差为 S^2 。

如取梅的模型 B (表 23 · 1)

$$F(x) = x e^{r(1-x)} \quad (24 \cdot 16)$$

当噪声的水平 S 分别取 0.05、0.10 和 0.20 时, 由式 (24 · 15) 便得到图 24-10 的结果。图中三行的噪声水平由上到下是逐步加强 (S 分别取 0.05、0.10 和 0.20), 每行从左到右四图表示在式 (24 · 16) 中参数 r 变化时分别得到的稳定点、二点周期 (2P)、四点周期 (4P) 和混沌。可以看出, 对于稳定点, 噪声的影响使得它变为一团模糊的云。但对周期运动和混沌, 只要噪声不很大, 人们仍能看出其轮廓。而且周期倍数越大 (以及混沌), 轮廓还越清楚一些。

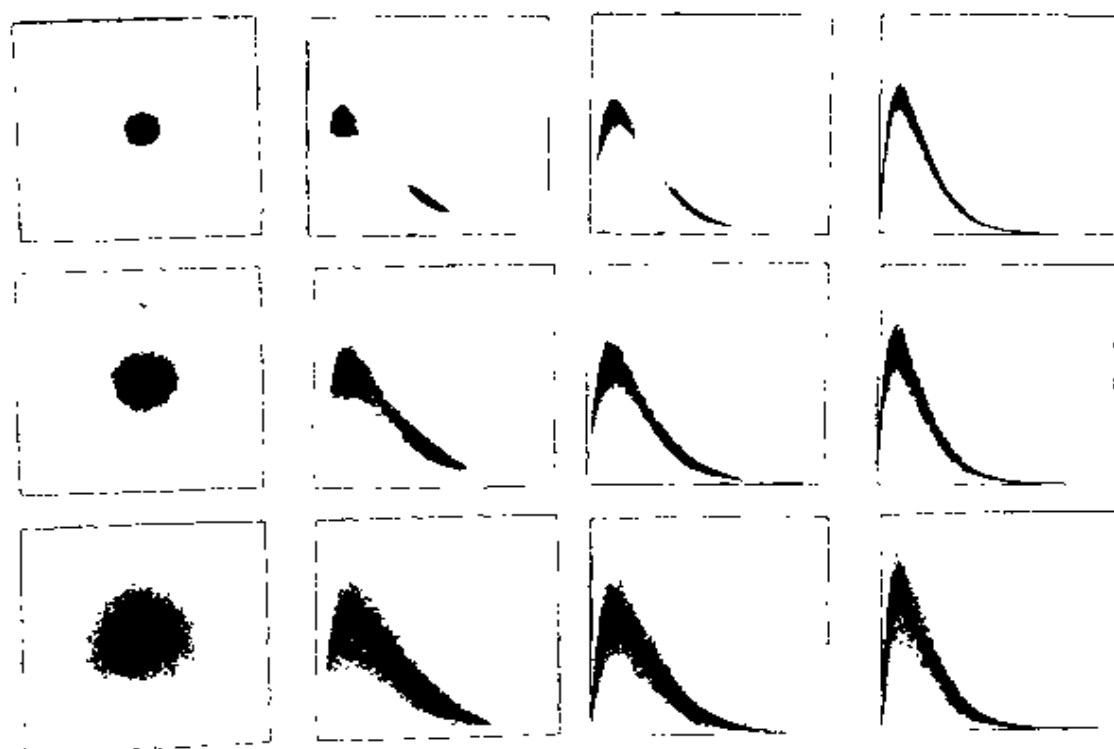


图 24-10 噪声对一维映象 (24 · 16) 的影响

自上至下三行分别表示噪声的水平, S 分别为 0.05、0.10 和 0.20; 自左至右分别表稳定点、2P、4P 和混沌

根据以上结果可知,水痘的发病率不是混沌,而是噪声影响下的年周期过程,腮腺炎的情况与水痘相似。它们是否属于 SEIR 理论中的倍周期运动或服从别的方程。也有待进一步探讨。

必须遗憾地指出,我们在这两节举出的例子大都是外国的,太缺少中国的。我们只希望这些例子能对开展我国的理论生态学和流行病学的研究起到参考作用。

习 题 解 答

第 一 章

9. 500 条

10. (1) 不稳; (2) 渐近稳定; (3) 渐近稳定; (4) 不稳; (5) $a < 0$ 时, 渐近稳定; $a = 0$ 时, 稳定; $a > 0$ 时, 不稳; (6) 不稳; (7) 不稳; (8) 渐近稳定; (9) 渐近稳定; (10) $a < 0$ 时, 渐近稳定; $a = 0$ 时, 稳定; $a > 0$ 时, 不稳。

11. (1) $V = x^2 + y^2$, 稳定

(2) $V = x^2 + y^2$, 不稳

(3) $V = 2x^2 + y^2$, 渐近稳定

(4) $V = x^2 + 2y^2$, 不稳

(5) $V = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, 不稳

(6) $V = x^2 + y^2$, 稳定

(7) $V = (x - y)^2 + 4x^2 + 2y^2$, 稳定

(8) $V = x^4 + y^2$, $a \leq 0$ 时, 稳定; $a > 0$ 时, 不稳

(9) $V = 2x^2 + y^2 + z^2$, 稳定

12. (1) 用下标 r 和 h 分别表示兔和猎狗, 则

$$\begin{cases} \dot{x}_r = R \\ \dot{y}_r = y_r = 0 \\ \begin{cases} \dot{x}_h = -k(x_h - x_r) \\ \dot{y}_h = -k(y_h - y_r) \end{cases} \\ \dot{x}_h^2 + \dot{y}_h^2 = H \end{cases}$$

于是得

$$\dot{x}_h = \frac{-(x_h - x_r)H}{[(x_h - x_r)^2 + y_h^2]^{1/2}}, \quad \dot{y}_h = \frac{-y_h H}{[(x_h - x_r)^2 + y_h^2]^{1/2}}$$

(2) 令 $x = x_h - x_r$, $y = y_h$, 则

$$\dot{x} = \frac{-xH}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - R; \quad \dot{y} = \frac{-yH}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

(3) 能抓住的条件: 在任意初始条件下, 上述相对运动方程都有稳定的零解。取李雅普诺夫函数为

$$V = x^2 + y^2$$

注意, $\dot{V} \leq 0$, 可知当 $H > R$ 时, $\dot{V} < 0$, 即只要猎狗速率大于兔的速率, 它总可以追上兔。

13. (1) 鞍点; (2) 稳定切结点; (3) 不稳切结点; (4) 中心; (5) 不稳切结点; (6) 不稳焦点; (7) 稳定焦点; (8) 中心; (9) 稳定结点; (10) 鞍点。
14. 可用罗斯—霍维兹判据。 (1) 不稳; (2) $\alpha > 3/2$ 时渐近稳定; (3) 不稳; (4) 渐近稳定; (5) $\alpha > 5/2$ 时渐近稳定; (6) 不稳。
15. (1) 渐近稳定; (2) 不稳; (3) 不稳; (4) 渐近稳定; (5) 不稳; (6) 渐近稳定; (7) 渐近稳定。
16. (1) $-2 < a < -1$
 (2) $a < -1$
 (3) $ab < -3$
 (4) $a < b < -1$
 (5) $0 < a < 2$
17. (1) 奇点 $(0, 0)$ 是不稳结点; 奇点 $(1, 0)$ 和 $(0, 2)$ 都是稳定结点, 奇点 $(1/2, 1/2)$ 是鞍点。
 (2) 奇点 $(0, 0)$ 和 $(1, 2)$ 都是鞍点; 奇点 $(2, 1)$ 是稳定结点。
 (3) 奇点 $(0, 0)$ 在 $\mu > 2$ 时是鞍点, $\mu = 2$ 时是不稳结点, $\mu < 2$ 时是不稳焦点; 奇点 $(-\mu^{-1}, 0)$ 是鞍点。
 (4) 奇点 $(0, 0)$ 是鞍点; 奇点 $(1, 1)$ 是稳定焦点。
 (5) 奇点 $(1, 3)$ 是中心。
18. (1) $f(r_0) = 0$ 时, $r = r_0$ 是极限环;
 (2) 当 r 增大经过 r_0 时, $f(r)$ 由正变为负, 则环是稳定的; 如 $f(r)$ 是由负变正, 则环是不稳的; 若 $f(r)$ 不变符号, 则环是半稳的。

19. 利用班狄克生负判据。
20. (1) 无; (2) 有稳定极限环; (3) 无; (4) 无; (5) 无; (6) 在域 $x^2 + y^2 = 2$ 内存在不稳极限环。
21. (1) $x^2 + y^2 = 1$ 是不稳极限环;
 (2) $x^2 + y^2 = 1$ 是半稳极限环;
 (3) $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定极限环,
 $x^2 + y^2 = 4$ 是不稳极限环;
 (4) $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定极限环,
 $x^2 + y^2 = 9$ 是不稳极限环;
 (5) $x^2 + y^2 = 1$, 当 $a < -1/2$ 时是稳极限环, 当 $a > -1/2$ 时是不稳极限环;
 (6) $x^2 + y^2 = 1$ 是半稳极限环;
 (7) $x^2 + y^2 = 1$ 是稳定极限环,
 $x^2 + y^2 = 9$ 是不稳极限环。
22. 变换为极坐标再分析
 $\dot{r} = r(\mu + ar^2), \dot{\theta} = 1$
 (1) $\mu < 0$ 时, 奇点 $(0, 0)$ 为稳定焦点;
 $\mu > 0$ 时, 奇点 $(0, 0)$ 为不稳焦点。
 (2) $\mu > 0$ 时存在稳定的极限环 $r = (-\mu/a)^{1/2}$,
 $\mu < 0$ 时无周期解,
 故 $\mu = 0$ 处出现超临界霍普夫分岔。
 (3) $\mu < 0$ 时存在不稳定的极限环 $r = (-\mu/a)^{1/2}$,
 $\mu > 0$ 时无周期,
 故 $\mu = 0$ 处出现亚临界霍普夫分岔。
23. (1) $\mu > 0$ 时有半稳定极限环 $r = \mu$;
 (2) $\mu = 0$ 处出现霍普夫分岔。
24. 提示: (1) 利用班狄克生定理证明, $\mu < 0$ 时无周期解; (2) 利用李雅普诺夫定理 ($V = x^2 + y^2$) 证明 $x = \dot{x} = 0$ 是渐近稳定的; (3) $\mu > 0$ 时 $x^2 + y^2 = \mu$ 是极限环。

25. $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3$; 音叉分岔。

26. (1) $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ 当 $\alpha < 1$ 时是稳定平衡点; 当 $\alpha > 1$ 时是不稳定平衡点。

$(x, \dot{x}) = (\cos^{-1} \alpha^{-1}, 0)$ 仅当 $\alpha > 1$ 时, 而且是稳定的。

(2) $x=0, \alpha=1$ 是分岔点, 属音叉分岔。

第二章

22. 庞卡莱映象为

$$P(x) = \frac{x}{x - (x-1)e^{-2\pi\mu}}$$

所以截面上的不动点是 $x=1$ 。当 $\mu < 0$ 时, 不动点不稳定 (对应于不稳极限环); 当 $\mu > 0$ 时, 不动点稳定 (对应于稳定环)。

24. $\sigma = \ln|2-\mu|$ 和 $\sigma = \ln|-\mu^2+2\mu+4|$ 。

$\mu=1$ 和 3 均为分岔点 ($\sigma=0$),

$\mu=2$ 和 $1+\sqrt{5}$ 时, $\sigma \rightarrow -\infty$, 周期运动。

25. (1) $x=0$ 是稳定不动点;

(2) $x=0$ 和 $x_s=2\mu/(1+2\mu)$ 都是不稳不动点; (3) $\sigma=\ln 2\mu$;

(4) $\mu=1/2$ 是分岔点; $\mu>1/2$ 时, 出现混沌。如用计算机画出不
动点 x 和参数 μ 的关系, 可得题图 2-1 结果。

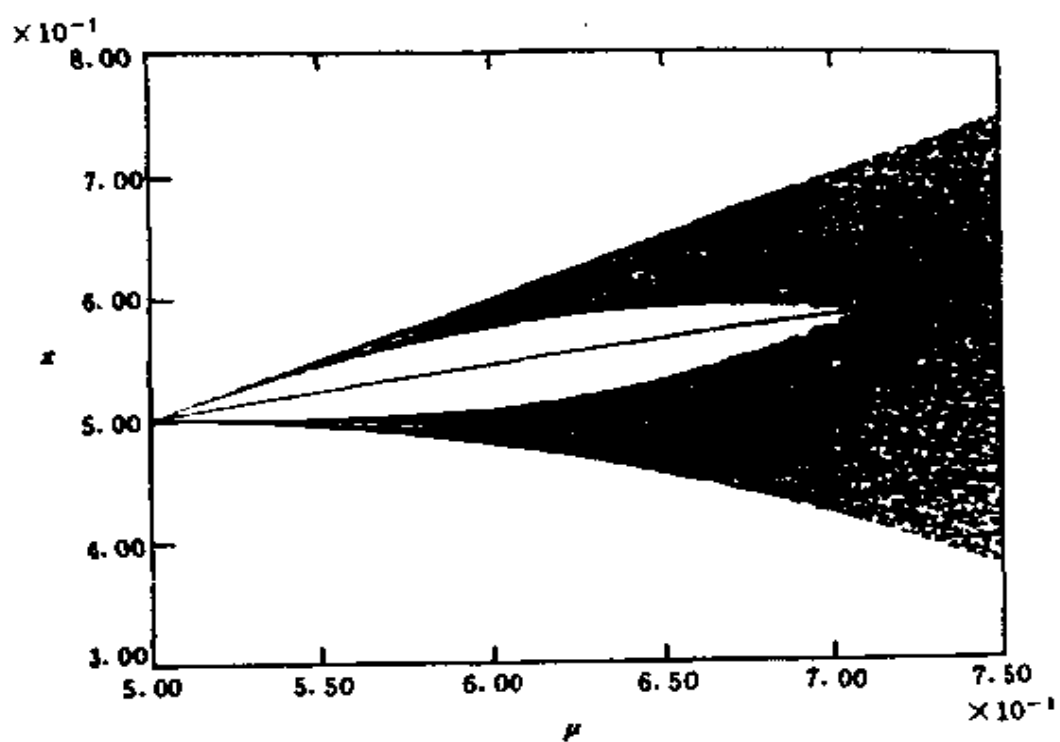
(5) $\mu<1/2$ 时人们获得信息; $\mu>1/2$ 时人们失去信息。

26. $x_s = \frac{1}{2a} [-1+b \pm \sqrt{(1-b)^2+4a}]$; $y_s = bx_s$

27. (1) $\lambda_1 = \ln 2$; $\lambda_2 = -\ln 2\alpha$

(2) $d = 1 + \ln 2 / \ln 2\alpha$

可以用两种方法求 d 。(i) 利用式 (14·26); (ii) 对最后的分形纵向作一垂线, 分形在此垂线上的分布类似康托尔集合。利用式 (14·10) 可求此分布的分维。再加上横向的维数, 便得全分形的维数。



题图 2-1 三角映象的混沌图，混沌中间的曲线是不稳定不动点 x_i 。

参 考 文 献

一般参考书

- 【1】李如生, 非平衡态热力学和耗散结构, 清华大学出版社, 1986.
- 【2】陆启韶, 常微分方程的定性方法和分叉, 北京航空航天大学出版社, 1989.
- 【3】秦元勋, 运动稳定性理论与应用, 科学出版社, 1981.
- 【4】张芷芬等, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.
- 【5】安德罗诺夫等著高为炳等译, 振动理论(上、下册), 科学出版社, 1981.
- 【6】格莱克著张淑誉译, 混沌: 开创新科学, 上海译文出版社, 1990.
- 【7】高安秀树著沈步明和常子文译, 分形维, 地震出版社, 1981.
- 【8】尼科利斯和普里戈京著徐锡申等译, 非平衡系统的自组织, 科学出版社, 1986.
- 【9】J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.
- 【10】H. Haken, Synergetics, Springer-Verlag, 1977.
- 【11】H. Haken, Advanced synergetics, Springer-Verlag, 1983.
- 【12】A. V. Holden (editor), Chaos, Manchester Univ. Press, 1986.
- 【13】E. A. Jackson, Perspective of Nonlinear Dynamics, (vol. 1, 2), Cambridge Univ. Press, 1989, 1990.
- 【14】D. W. Jordan and P. Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations (2nd edition), Clarendon Press, 1987.
- 【15】A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, 1983.
- 【16】N. Minorsky, Nonlinear Oscillations, Van-Nostrand Co., 1962.

- 【17】F. C. Moon, Chaotic Vibrations, John Wiley and Sons, 1987.
- 【18】T. S. Parker and L. O. Chua, Practical Numerical Algorithms for chaotic Systems, Springer-Verlag, 1989.
- 【19】S. N. Rasband, Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems, John Wiley and Sons, 1990.
- 【20】A. W. Saeng (editor), Methods and Applications of Nonlinear Dynamics, World Scientific, 1988.
- 【21】J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, John Wiley and Sons, 1986.

专 题

混 沌 (理论与实验)

- 【1】郝柏林, 物理学进展, 3, 330, 1983.
郑伟谋、郝柏林, 物理学进展, 10, 316, 1990.
- 【2】G. Benettin, et al, Phys. Rev., A14, 2338, 1976;
Meccanica 15, 9, 1980.
- 【3】P. Coullet and J. Tresser, C. R. Acad. Sci (Paris), 287, 577, 1978; J. de Phys., C5, 25, 1978.
- 【4】J. Crutchfield, et al, Phys. Lett., A76, 1, 1980.
- 【5】J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke, Physica D7, 153, 1983.
- 【6】M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys., 19, 25, 1978.
- 【7】M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys., 22, 186, 1979.
- 【8】M. J. Feigenbaum, Phys. Lett. A74, 375, 1979.
- 【9】C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett., 48, 1507, 1982.
- 【10】C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, Physica D7, 181, 1983.
- 【11】R. H. G. Helleman, in Long Term Prediction in Dynamics. ed. by C. W. Horton et al, Wiley, 1983.
- 【12】M. Hénon, Comm. Math. Phys. 50, 69, 1976.
- 【13】M. Hénon and C. Heiles, Astrophys. J., 69, 73, 1964.

- 【14】J. Kaplan and J. A. Yorke, Springer Lecture Notes in Mathematics 730, 204, 1979.
- 【15】L. D. Landau, Dokl. Acad. Sci. USSR (Л. Д. Ландау, ДАН), 44, 339, 1944.
- 【16】T. Y. Li and J. A. Yorke, Am. Math. Monthly, 82, 985, 1975.
- 【17】P. S. Lindsay, Phys. Rev. Lett., 47, 1349, 1981.
- 【18】E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci., 20, 130, 1963.
- 【19】R. M. May, Nature, 261, 459, 1976.
- 【20】H. Mori (森肇), Progr. Theor. Phys., 63, 1044, 1980.
- 【21】H. Mori (森肇), Progr. Theor. Phys., 63, 1931, 1980.
- 【22】M. Nauenberg and J. Rudnick, Phys. Rev., B24, 493, 1981.
- 【23】O. E. Rössler, Phys. Lett., A57, 397, 1976.
- 【24】O. E. Rössler, Z. Naturforsch., a31, 1664, 1976.
- 【25】D. Ruelle and F. Takens, Commun. Math. Phys., 20, 167, 1971.
- 【26】D. Ruelle and F. Takens, Commun. Math. Phys. 23, 343, 1971.
- 【27】D. A. Russell, Phys. Rev. Lett. 45, 1175, 1980.
- 【28】A. N. Sarkovskii, Ukr. Math. Zh. (А. Н. Шаркобский, Укр. Мат. Ж.) 16 (1), 61, 1964.
- 【29】R. Shaw, Z. Naturforsch. a36, 80, 1981.
- 【30】R. Shaw, The Dripping Faucet as a Model Chaotic System, Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1984.
- 【31】Y. Ueda, in New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics, ed. by P. J. Holmes, SIAM; Philadelphia, 311, 1980.
- 【32】X. M. Wu and Z. A. Schelly, Physica, D40, 433, 1989.

分形

- 【1】汪子丹、龚昌德, 物理学进展, 10 (1), 1, 1990.
- 【2】黄立基、丁菊仁, 物理学进展, 11 (3), 269, 1991.
- 【3】法尔科内 (Falconer) 著, 曾文曲等译, 分形几何—数学基础及其应用, 东北工学院出版社, 1991.
- 【4】M. Ben Amar and B. Moussallam, Physica, D25, 155, 1987.

参考文献

415

- 【5】D. Avnir et al, *Nature*, 308, 261, 1984.
- 【6】K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- 【7】J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, 1988.
- 【8】H. G. E. Hentschel and I. Procaccia *Phys. Rev.*, A29, 1461, 1984.
- 【9】B. H. Kaye, in *Particle characterization in Technology*, ed. by J. K. Beddow 1, 81 CRC Press Boca Raton, Folorida, 1984.
- 【10】S. H. Liu, *Fractals and Their Application in Condensed Matter Physics*, in *Solid State Physics*, vol. 39, Acad. Press, 1986.
- 【11】C. W. Lung (龙期威), in *Nonlinear Phenomena in Materials Science*, Vol. 2, 483, 1992.
- 【12】S. Majumdar and B. R Prasad, *Comp. Phys.* 2, 69, 1988 (关于大脑皮层分形).
- 【13】B. B. Mandelbrot, *Fractals; Forms, Chance and Dimension*. W. H. Freeman, 1977.
- 【14】B. B. Mandelbrot, *The Geometry of Fractal Sets*. W. H. Freeman, 1983.
- 【15】P. Meakin, *Phys. Rev.*, A27, 1495, 1983.
- 【16】L. Niemeyer et al, *Phys. Rev. Lett.*, 52, 1023, 1984.
- 【17】P. Pfeiffer et al, *Surf. Sci.*, 126, 569, 1983.
- 【18】P. Pfeiffer and D. Avnir, *J. Chem. Phys.*, 29, 3558, 1983
- 【19】L. Pietronero and E. Tosatti(editors), *Fractals in Physics*, Elsevier, 1986.
- 【20】C. H. Scholz and B. B. Mandelbrot (eds), *Fractals in Geophysics*, Birkhauser, Boston, 1989.
- 【21】H. J. Stapleton et al, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 1456, 1980.
- 【22】R. F. Voss, *J. Phys.*, A17, L373, 1984.
- 【23】T. A. Witten and L. M. Sander, *Phys. Rev.*, B27, 5686, 1983.

p-n 结

- 【24】倪皖荪、魏荣爵, 物理学报, 34 (4), 503, 1985.
- 【25】彭建华、熊莹、田小健, 物理学报, 41 (2), 193, 1992.
- 【26】R. Van Buskirk and C. Jeffries, Phys. Rev., A31, 3332, 1985.
- 【27】P. Klinker, et al, Phys. Lett., A101, 371, 1984.
- 【28】P. S. Lindsay, Phys. Rev. Lett., 47, 1349, 1981.
- 【29】J. Perez and C. Jeffries, Phys. Lett., A92, 82, 1982.
- 【30】J. Testa, J. Perez and C. Jeffries, Phys. Rev.
- 【31】Lett., 48, 714, 1982.

光电导体

- 【1】S. W. Teitsworth, R. M. Westervelt and E. E. Haller, Phys. Rev. Lett., 51, 825, 1983.
- 【2】S. W. Teitsworth and R. M. Westervelt, Phys. Rev. Lett., 53, 2587, 1984.
- 【3】R. M. Westervelt and S. W. Teitsworth, Physica, D23, 187, 1986.

电子-空穴等离子体

- 【1】J. C. Adam, et al, in Intrinsic Stochasticity in Plasmas, ed. by G. Laval and D. Grésillon, Orsay, France, 415, 1979.
- 【2】M. Glicksman, Phys. Rev., 124, 1655, 1961.
- 【3】G. A. Held, C. Jeffries and E. E. Haller, Phys. Rev. Lett., 52, 1037, 1984.
- 【4】C. E. Hurwitz and A. L. Mewhorter, Phys. Rev., A134, 1033, 1964.
- 【5】I. L. Ivanov and S. M. Ryvkin, Zh. Tekh. Fiz., 28, 774, 1958.
- 【6】R. D. Larrabee and M. C. Steele, J. Appl. Phys., 31, 1519, 1960.
- 【7】T. Misawa and T. Yamada, Japanese J. Appl. Phys., 2, 19, 1963.
- 【8】J. M. Wersinger, J. M. Finn and E. Ott, Phys. Fluids, 23, 1142, 1980.

约瑟夫森结

- 【1】汪子丹、姚希贤, 物理学报, 34 (9), 1140, 1985.
- 【2】E. Ben-Jacob et al, Appl. Phys. Lett., 38, 822, 1981.
- 【3】D. D'Humières et al, Phys. Rev., A26, 3483, 1982.
- 【4】J. C. Fernandez et al, Phys. Lett., 145, 1990.
- 【5】I. Goldhirsch et al, Phys. Rev., B29, 1218, 1984.
- 【6】B. A. Huberman et al, Appl. Phys. Lett., 37, 750, 1980.
- 【7】R. L. Kautz, J. Appl. Phys., 52, 3528; 6241, 1981.
- 【8】A. H. MacDonald and M. Plischke, Phys. Rev., B27, 201, 1983.
- 【9】M. Octavio and C. R. Nasser, Phys. Rev. B30, 1586, 1984.
- 【10】M. Salerno and M. R. Samuelsen, Phys. Lett., A156, 293, 1991.
- 【11】W. J. Yeh and Y. H. Kao, Appl. Phys. Lett. 42, 299, 1983.

光学双稳态和光学混沌

- 【1】N. B. Abraham, P. Mandel and L. M. Narducci, in Progress in Optics, vol. XXV, ed. by E. Wolf, North Holland Physics Publishing, 1, 1988.
- 【2】F. I. Arecchi and T. Bonifacio, IEEE J. Quantum Electronics QE-1, 169, 1965.
- 【3】D. Baums et al, Phys. Rev. Lett. m62, 155, 1989.
- 【4】R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Lett. Nuovo Cimento. 21, 510, 1978.
- 【5】R. Bonifacio et al, Opt. Commun., 30, 129, 1979.
- 【6】Cao Yonxing, et al, Chinese Phys. Lett., 8 (11), 559, 1991.
- 【7】W. J. Firth in Chaos, ed. by A. V. Holden, Manchester Univ. Press, 135, 1986.
- 【8】J. Y. Gao (高景岳), J. M. Yuan and L. M. Narducci, Opt. Commun., 44, 201, 1983.
- 【9】J. Y. Gao (高景岳) et al Phys. Rev., A30, 901, 1984.
- 【10】H. M. Gibbs, Optical Bistability: Controlling Light with Light, Academic Press, Appendix C, 1985.

- 【11】H. Haken, in *Handbuch der Physik*, vol. XXV/2c, ed. by L. Genzel, Springer-Verlag, 1970.
- 【12】K. Ikeda, *Opt. Commun.* 30, 257, 1979.
- 【13】W. P. Lu and R. G. Harrison, *Phys. Rev.*, A43, 6358, 1991.
- 【14】L. A. Lugiato, in *Progress in Optics*, vol. XXI, ed. by E. Wolf, North Holland Physics Publishing, 71, 1984.
- 【15】J. V. Moloney and A. C. Newell, *Physica*, D44, 1, 1990.
- 【16】C. S. Wang et al, *Phys. Lett.* A152, 21, 1991.
- 【17】C. O. Weiss et al, *Opt. Commun.*, 52, 405, 1985.

化学振荡与化学混沌

- 【1】郝柏林、张淑誉, *Commun. Theor. Phys.* 1, 111, 1982.
- 【2】郝柏林、张淑誉, *物理学报*, 32, 198, 1983.
- 【3】王光瑞, *物理学报*, 32, 960, 1983.
- 【4】王光瑞、张淑誉、郝柏林, *物理学报*, 33, 1008, 1984.
- 【5】王光瑞、陈式刚、郝柏林, *物理学报*, 33, 1246, 1984.
- 【5】王光瑞、陈式刚、郝柏林, *物理学报*, 33, 1246, 1984.
- 【6】王光瑞、郝柏林, *物理学报*, 33, 1321, 1984.
- 【7】C. Baier et al, *Phys. Lett.*, 141, 340, 1989.
- 【8】A. Boileux, A. Goldbeter and B. Hess, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 72, 3829, 1975.
- 【9】L. Bornmann et al, *Z. Naturforsch.*, 28b, 93, 1973; 28b, 824, 1973; 28c, 514, 1973.
- 【10】H. Degn, *Nature Phys. Sci.*, 243, 18, 1973.
- 【11】O. Decroly and A. Goldbeter, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 79, 6917, 1982.
- 【12】E. K. H. Ebert et al, *Modeling of Chemical Reaction Systems*, Springer-Verlag, 1981.
- 【13】R. J. Field, E. Körös and R. M. Noyes, *J. Am. Chem. Soc.*, 94, 8649, 1972.
- 【14】L. K. Forbes, *Physica*, D43, 140, 1990.

参考文献

419

- 【15】A. Goldbeter and R. Lefever, *Biophys. J.* 12, 1302, 1972.
- 【16】J. L. Hudson and J. C. Mankin, *J. Chem. Phys.*, 74, 6171, 1981.
- 【17】T. Kai and K. Tomita, *Progr. Theor. Phys.*, 61, 54, 1979.
- 【18】H. Linde and H. Engel, *Physica*, D49, 13, 1991.
- 【19】M. Markus and B. Hess, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 81, 4394, 1984.
- 【20】M. Markus, D. Kuschmitz and B. Hess, *FEBS Lett.* 172, 235, 1984.
- 【21】S. C. Müller, T. Plesser and B. Hess, *Physica*, D25, 71, 1987.
- 【22】Z. Nagy-Ungvarai and B. Hess, *Physica D49*, 33, 1991.
- 【23】L. F. Olsen and H. Degn, *Nature*, 267, 177, 1977.
- 【24】L. F. Olsen, and H. Degn, *Biochem. Biophys. Acta* 523, 321, 1978.
- 【25】L. F. Olsen, *Z. Naturforsch.*, 34a, 1544, 1979.
- 【26】L. F. Olsen, *Phys. Lett.*, A94, 454, 1983.
- 【27】Y. Pomeau et al, *J. Phys. Lett.*, 42, L271, 1981.
- 【28】J. C. Roux et al, *Phys. Lett.*, A77, 391, 1980.
- 【29】R. H. Simoyi et al, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 245, 1982.
- 【30】K. Tomita and T. Kai, *J. Stat. Phys.*, 21, 65, 1979.
- 【31】J. S. Turner et al, *Phys. Lett.*, A85, 9, 1981.
- 【32】C. Vidal and A. Pacault, *Spatial Chemical Structures, Chemical Waves. A Review.* In: *Evolution of Order and Chaos*, ed. by H. Haken, SpringerVerlag, 1982.
- 【33】A. M. Zhabotinski, *Self-oscillating concentrations*, Nauka, Moscow, 1974.
- 【34】A. M. Zhabotinski et al, *Physica*, D49, 47, 1991.

可兴奋细胞

- 【1】丁达夫、冯祖康, *物理学进展*, 11 (2), 214, 1991.
- 【2】K. Aihara and G. Matsumoto, *J. Theor. Biol.*, 109, 249, 1984.

- 【3】T. R. Chay, *Physica*, D16, 233, 1985.
- 【4】T. R. Chay, *Biophys. J.* 47, 357, 1985.
- 【5】D. C. Alexander, et al, *SIAM J. Appl. Math.*, 50, 1313, 1990.
- 【6】H. Hayashi, et al, *Phys. Lett.*, A88, 265, 1982.
- 【7】H. Hayashi, et al, *Phys. Lett.*, A98, 474, 1983.
- 【8】A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *J. Physiol. (London)*, 117, 500, 1952.
- 【9】J. Keizer and G. Magnus, *Biophys. J.*, 56, 229, 1989.
- 【10】Gen Matsumoto, et al, *Phys. Lett.*, A123, 162, 1987.
- 【11】A. Mess, et al, *Phys. Lett.*, A169, 41, 1992.
- 【12】N. Takahashi, et al, *Physica*, D49, 125, 1991.
- 【13】A. T. Winfree, *Physica*, D49, 125, 1991.
- 【14】Yoshiro Hanyu and Gen Matsumoto, *Physica*, D49, 198, 1991.

心脏的搏动

- 【1】童勤业、祝辰、郑露旦, 心脏细胞的非线性动力学分析, 中国生物医学工程学报, 11, 1, 1992.
- 【2】G. W. Beeler and H. Reuter, *J. Physiol. (London)*, 268, 177, 1977.
- 【3】M. Courtemanche, et al, *Physica*, D40, 299, 1989.
- 【4】J. M. Davidenko, et al, *Physica*, D49, 182, 1991.
- 【5】R. Fitzhugh, *Biophys. J.*, 1, 445, 1961.
- 【6】R. Fitzhugh, in *Biological Engineering*, ed. by H. P. Schwan, McGraw-Hill, 1969.
- 【7】L. Glass, et al, *Physica* D7, 89, 1983.
- 【8】L. Glass, et al, *Phys. Rev.* A29, 1348, 1984.
- 【9】L. Glass and P. Hunter, *Physica*, D43, 1, 1990.
- 【10】A. L. Goldberger, V. Bhargava, B. J. West and A. J. Mandell, *Biophys. J.* 48, 525, 1985.
- 【11】A. L. Goldberger, et al, *Physica*, D19, 282, 1986.
- 【12】A. L. Goldberger and B. J. West, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 504,

参考文献

421

195, 1987.

【13】M. R. Guevara, L. Glass and A. Shrier, *Science*, 214, 1350, 1981.

【14】M. R. Guevara and L. Glass, *J. Math. Biol.*, 14, 1, 1982.

【15】M. R. Guevara, A. Shrier and L. Glass, *Am. J. Physiol.*, 254, H1, 1988.

【16】J. Honerkamp, et al, *Bull. Math. Biol.*, 47, 1, 1985.

【17】H. Ito and L. Glass, *Physica D*56, 84, 1992.

【18】D. H. Jensen, et al, *Physica D*13, 269, 1984.

【19】M. Okuda, *Progr. Theor. Phys.* 66 (1), 90, 1981.

【20】A. E. Pollard and R. C. Barr, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 38, 982, 1991.

【21】S. Rajasekar and M. Lakshmanan, *J. Theor. Biol.*, 133, 473, 1988.

【22】S. Rajasekar and M. Lakshmanan, *Physica*, D32, 146, 1988.

【23】G. V. Savino, et al, et al, *Biophys. J.*, 56, 273, 1989.

【24】J. M. Smith and R. J. Cohen, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 81, 233, 1984.

【25】B. J. West, A. L. Goldberger and G. Rovner, *Physica D*17, 198, 1985.

【26】B. J. West and A. L. Goldberger, *Amer. Scientist*, 75, 354, 1987.

生态系统

【1】R. Arditi and L. R. Ginzburg, *J. Theor. Biol.*, 144, 311, 1989.

【2】J. L. Aron and I. B. Schwartz, *J. Theor. Biol.*, 110, 665, 1984.

【3】M. E. Gilpin, *Spiral Chaos in a Predator-prey model*, *Am. Natur.*, 113, 306, 1979.

【4】M. Inoue and H. Kamifukumoto, *Progr. Theor. Phys.*, 71 (5), 930, 1984.

【5】R. M. May, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 316, 517, 1979.

- 【6】R. M. May, Ann. N. Y. Acad. Sci., 357, 267, 1980.
- 【7】Prajneshu and P. Holgate, J. Theor. Biol., 125, 61, 1987.
- 【8】W. M. Schaffer, Ecology, 66 (1), 93, 1985.

流行病学

- 【1】R. M. Anderson and R. M. May, Science, 215, 1053, 1982.
- 【2】R. Arditi and L. R. Ginzberg, J. Theor. Biol., 144, 311, 1989.
- 【3】R. M. May and R. M. Anderson, Nature, 280, 455, 1979.
- 【4】R. M. May, Ann. N. Y. Acad. Sci., 357, 267, 1980.
- 【5】W. M. Schaffer, J. Theor. Biol., 112, 403, 1985.

其 他

太阳系中的混沌

- 【1】R. A. Kerr, Science, 245, 144, 1989.
- 【2】J. Laskar, Nature, 338, 287, 1989.
- 【3】G. J. Sussman and J. Wisdom, Science, 241, 433, 1988.
- 【4】D. R. J. Chillingworth and P. J. Holmes, Math. Geol., 12, 41, 1980.
- 【5】A. J. Cox, Rev. Geophys. Space Phys., 13, 35, 1975.
- 【6】K. A. Hoffman, Sci. Amer. 258 (5), 76, 1988.
- 【7】D. R. Inglis, Rev. Mod. Phys. 53, 481, 1981.
- 【8】A. J. Jacobs, Reversals of the Earth's Magnetic Field. Heyden & Son. Philadelphia, 1984.
- 【9】A. K. Robbins, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 73, 4297, 1976.

内分泌的节律

- 【1】Liu Bing-Zheng (刘秉正) and Deng Guo-Min (邓国民), J. Theor. Biol., 150, 51, 1991.
- 【2】R. Rössler, P. Gotz and O. E. Rössler, Biophys. J. 25, 216a (1979).

癫痫病

- 【1】E. R. Kandel and S. G. Rayport, Science, 213, 462, 1981.

参考文献

423

- 【2】P. A. Schwartzkroin, In Cellular Pacemakers. Vol. 2. Function in Normal and Diseased states, ed. by D. O. Carpenter, Wiley, N. Y., 323, 1982.

神经网络

- 【1】R. N. Stiles and R. S. Pozos, J. Appl. Physiol., 40, 990, 1976.
(关于帕金森氏病)
- 【2】徐京华, 科学杂志, 42 (2), 266, 1990.
- 【3】Dong-Xue Wang and Ju-Wei Tai, Phys. Lett. A162, 41, 1992.
- 【4】P. E. Rapp, in Oscillation in Biology and Chemistry, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- 【5】C. A. Skarda and W. J. Freeman, Behav. Brain Sc., 10, 161, 1987.
- 【6】Xu Nan and Xu Jinghua (徐京华), Bull. Math. Biol., 50, 559, 1988.