

应用非线性动力学

胡海岩 编著

航空工业出版社

2000

内 容 提 要

本书是为力学专业研究生编写的教材,也可作为机械、土木、水利、动力、车辆、船舶、飞行器、自动控制等专业研究生的选修教材,适用于 60 学时左右的课程。

全书共分 8 章。第 1 章阐述非线性动力系统的理论与实验建模方法,第 2 章和第 3 章分别介绍单自由度自治系统的定性和定量分析方法,第 4 章和第 5 章侧重于分析单自由度非自治系统和多自由度系统的非线性动力学行为。第 6 章介绍非线性系统的运动稳定性及分叉理论。第 7 章阐述混沌现象及混沌的控制。第 8 章阐述如何运用数值方法分析非线性动力系统的行为,特别是系统的周期运动、分叉与混沌。书末附录阐述了如何借助计算机代数软件 MAPLE 分析非线性动力学问题。

本书内容丰富,强调分析、计算与实验的结合,吸取了国内外近期研究成果,溶入了作者的教学和研究心得,反映了本学科的新进展。

图书在版编目(CIP)数据

应用非线性动力学 / 胡海岩编著. —北京:航空工业出版社, 2000.6

ISBN 7-80134-659-9

I. 应… II. 胡… III. 非线性-动力学-研究生-教材
IV. 0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 62423 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南京航空航天大学飞达印刷厂印刷 全国各地新华书店经售

2000 年 6 月第 1 版

2000 年 6 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16

印张: 16.125

字数: 400 千字

印数: 1—800

定价: 35.00 元

前 言

本书是为力学专业硕士研究生专业课编写的教材，也可供机械、动力、车辆、船舶、飞行器、自动控制、土木、水利等专业的硕士和博士研究生作为选修课教材。考虑到从事非线性动力学研究工作人员的需要，在内容上略加扩充，以便读者能进一步应用这些基本理论和方法去解决工程问题或者探索解决工程问题的正确途径。

本书的主要内容曾作为南京航空航天大学力学专业硕士研究生的必修课和其它专业博士研究生的选修课讲授多年，经过不断充实更新，汇集了作者多年来的教学心得和部分研究结果。撰写时，除了着重对经典内容作简明、严谨的阐述，还吸取了国内外近期文献报道的一些研究成果，力求反映本学科的最新进展和发展趋势。

全书共分 8 章。依次阐述了非线性动力系统的建模，单自由度自治系统、单自由度非自治系统和多自由度系统的分析方法及动力学行为，非线性系统的运动稳定性与分叉，混沌运动及其控制，以及非线性动力系统的数值分析方法。每章有一定数量的习题，以便读者加深对正文内容的理解，了解所学方法可能拓宽的应用范围。为了使读者从繁琐的数学推导中解放出来，并通过数值计算和图形显示来加深理解本书内容，书末附录扼要介绍了如何借助计算机代数软件 MAPLE 分析非线性动力学问题。

本书可作为 60 学时课程的教材，目录中带*号的内容可作为选修。对于 30 学时左右的非线性振动入门课程，可仅选用前 5 章，并略去目录中带*号的内容。

南京航空航天大学振动工程研究所金栋平副教授参与了本书初稿撰写过程中一些问题的研讨和习题的编写，博士研究生王在华协助编写了部分附录。博士研究生冯志华、郭大蕾，硕士研究生钱晓勇等承担了部分书稿的校对，在此一并致以诚挚的谢意。

北京航空航天大学应用数理系陆启韶教授认真审阅了全书并提出许多宝贵意见。对此，作者表示由衷的感谢。此外，作者感谢责任编辑孙平凡编审为提高本书出版质量付出的辛勤劳动。

胡海岩

2000 年 1 月

目 录

绪论	(1)
第 1 章 非线性动力系统的建模	(3)
1.1 系统的非线性与分类	(3)
1.1.1 保守系统	(3)
1.1.2 非保守系统	(5)
1.2 理论建模	(7)
1.2.1 分析力学方法	(7)
1.2.2 多刚体动力学方法	(9)
1.2.3 弹性力学方法	(12)
1.3 实验建模	(16)
1.3.1 参数估计	(16)
1.3.2 模型辨识	(18)
1.3.3 模型的可靠性*	(20)
习题	(21)
第 2 章 单自由度自治系统的定性分析	(23)
2.1 几个基本概念	(23)
2.1.1 相轨线	(23)
2.1.2 平衡点及其稳定性	(25)
2.2 平衡点的性质	(26)
2.3 保守系统的分析	(30)
2.4 非保守系统的分析	(34)
2.4.1 耗散系统	(34)
2.4.2 自激振动系统	(35)
2.4.3 极限环	(38)
习题	(40)
第 3 章 单自由度自治系统的定量分析	(43)
3.1 摄动法	(43)
3.1.1 直接摄动法	(43)
3.1.2 Lindstedt-Poincaré 摄动法	(46)
3.2 平均法	(48)
3.3 KBM 法*	(52)
3.4 多尺度法	(57)

3.5 Galerkin 法与谐波平衡法·····	(60)
3.5.1 Galerkin 法 ·····	(60)
3.5.2 谐波平衡法 ·····	(61)
习题 ·····	(62)
第 4 章 单自由度非自治系统的振动 ·····	(64)
4.1 Duffing 系统的受迫主共振 ·····	(64)
4.1.1 一次近似解 ·····	(64)
4.1.2 定常解的幅频响应 ·····	(65)
4.1.3 定常解的稳定性 ·····	(67)
4.2 Duffing 系统的受迫次共振 ·····	(68)
4.2.1 次共振的可能性 ·····	(68)
4.2.2 1/3 次亚谐共振·····	(69)
4.2.3 3 次超谐共振* ·····	(72)
4.3 Duffing 系统的受迫组合共振 ·····	(73)
4.4 van der Pol 系统的受迫振动* ·····	(75)
4.4.1 非共振情况 ·····	(75)
4.4.2 主共振 ·····	(77)
4.5 慢时变参数系统的振动* ·····	(80)
4.6 线性时变系统的参激振动·····	(82)
4.6.1 参激振动的例子 ·····	(82)
4.6.2 周期系数线性常微分方程理论 ·····	(83)
4.6.3 含阻尼 Mathieu 方程的稳定边界 ·····	(86)
4.7 非线性时变系统的参激振动* ·····	(92)
4.7.1 参激共振的一般形式 ·····	(92)
4.7.2 平方阻尼系统的主共振 ·····	(93)
习题 ·····	(95)
第 5 章 多自由度系统的振动 ·····	(97)
5.1 平方非线性系统的自由振动·····	(97)
5.1.1 非共振情况 ·····	(98)
5.1.2 内共振 ·····	(98)
5.2 陀螺力对内共振的影响* ·····	(104)
5.3 平方非线性系统的受迫振动 ·····	(109)
5.3.1 一次近似解·····	(109)
5.3.2 内共振条件下的定常解·····	(112)
5.3.3 定常解的特性·····	(114)
5.4 线性时变系统的参激振动*·····	(116)

习题	(118)
第 6 章 运动稳定性与分叉	(120)
6.1 自治系统平衡点的稳定性	(120)
6.1.1 Lyapunov 直接方法	(121)
6.1.2 根据派生系统判定稳定性	(124)
6.1.3 平衡点附近相轨线的结构	(128)
6.2 非自治系统平衡点的稳定性*	(129)
6.2.1 稳定性概念的拓广	(129)
6.2.2 Lyapunov 直接方法	(129)
6.3 向量场在平衡点处的规范型	(131)
6.3.1 PB 规范型的概念	(131)
6.3.2 PB 规范型的计算	(133)
6.3.3 共振与非共振*	(135)
6.4 周期运动的稳定性	(137)
6.4.1 非自治系统	(137)
6.4.2 自治系统	(139)
6.4.3 Poincaré 映射与不动点的稳定性	(141)
6.5 平衡点的静态分叉	(146)
6.5.1 分叉的概念	(146)
6.5.2 一维系统平衡点的静态分叉	(147)
6.5.3 高维系统平衡点的静态分叉*	(150)
6.6 平衡点的动态分叉	(154)
6.6.1 平衡点的失稳	(154)
6.6.2 二维系统平衡点的 Hopf 分叉	(155)
6.6.3 Hopf 分叉的控制*	(159)
6.7 周期运动的分叉	(160)
6.7.1 静态分叉	(161)
6.7.2 倍周期分叉	(161)
6.7.3 Naimark-Sacker 分叉*	(163)
习题	(166)
第 7 章 混沌运动与控制	(169)
7.1 混沌现象	(169)
7.2 离散动力系统的混沌	(170)
7.2.1 一维映射的混沌	(170)
7.2.2 高维映射的混沌	(173)
7.3 连续动力系统的混沌	(175)
7.3.1 同(异)宿轨线	(175)

7.3.2 Melnikov 方法	(176)
7.3.3 耗散系统的混沌运动	(180)
7.3.4 通向混沌的途径	(181)
7.4 混沌运动的控制*	(183)
7.4.1 OGY 方法	(184)
7.4.2 OGY 方法的改进与推广	(185)
7.4.3 参数自调节控制方法	(186)
7.4.4 实现控制中的关键问题	(187)
习题	(189)
第 8 章 非线性动力系统的数值分析	(190)
8.1 瞬态运动计算	(190)
8.1.1 单步法	(190)
8.1.2 多步法*	(192)
8.1.3 应用中的问题*	(194)
8.2 稳态运动计算	(195)
8.2.1 平衡点的求解	(196)
8.2.2 周期运动的求解	(197)
8.3 局部分叉的计算	(200)
8.3.1 分叉计算的任务	(200)
8.3.2 奇异点的确定	(201)
8.3.3 通过奇异点*	(201)
8.4 全局特性的计算*	(204)
8.4.1 胞映射方法	(204)
8.4.2 不变流形的计算	(208)
8.5 混沌的统计分析	(210)
8.5.1 混沌序列的判断	(210)
8.5.2 Lyapunov 指数	(212)
8.5.3 分形与分数维*	(216)
习题	(221)
附录 1 用 MAPLE 求解非线性动力学问题	(223)
附录 2 Lyapunov 方程的可解性条件	(242)
名词索引	(243)
参考文献	(247)

绪 论

工程中的真实动力系统几乎总含有各种各样的非线性因素，例如机械系统中的间隙、干摩擦、轴承油膜，结构系统的大变形、非线性材料本构关系，控制系统的非线性控制策略等等。线性系统只是真实动力系统的一种简化模型。通常，线性系统模型可提供对真实系统动力学行为的很好逼近。然而，这种线性逼近并非总是可靠的，被忽略的非线性因素有时会在分析和计算中引起无法接受的误差。特别对于系统的长时间历程动力学问题，即使略去很微弱的非线性因素，也常常会在分析和计算中出现本质性的错误。为了说明这一观点，我们列举若干种依靠线性系统理论无法解释的动力学现象。

例如，无阻尼单摆的微振动可以由单自由度线性系统来描述，其自由振动频率与摆的初始状态无关。但随着初始摆角增大，摆的自由振动将呈现非线性，自由振动频率会随着初始摆角的增加而降低。

又如，单自由度线性阻尼系统的自由振动总是随着时间衰减，系统发生周期性自由振动的前提是无阻尼，其振动幅值取决于初始状态。然而，许多未受外激励的非线性系统会发生所谓自激振动。其典型表现是：如果对处于平衡位置的系统给予一极小的扰动，系统会偏离平衡位置而发生幅值越来越大的振动，但当振动幅值大到一定程度后便趋于某一定值，形成周期振动，其振幅和周期均与系统初始状态无关。产生自激振动的原因在于这类系统具有不容忽略的非线性阻尼。

再如，在简谐激励下，线性阻尼系统的稳态响应是唯一的、与激励频率相同的简谐振动。然而，受简谐激励的非线性系统会发生多频振动现象和多解现象。即系统的稳态振动具有周期性，但具有与简谐激励不同的频率，其 Fourier 频谱呈现多个峰；系统存在多种可能的稳态振动，不同的初始状态会导致不同的稳态振动。

此外，线性系统在确定性激励下的响应是确定性的。然而，许多非线性系统在确定性激励下的响应却难以预测，呈所谓混沌现象。即系统响应对初始状态的微小变化极其敏感，但却不发散，致使系统的长时间历程预测变得不确定。

对于这些现象，只有依靠非线性振动的理论才能得以正确解释。因此，我们有必要研究非线性动力系统的行为，揭示非线性对系统动力学行为的影响。一旦把握了某种非线性现象的内在规律，就有可能利用该现象创造出线性动力系统所不具备的功能。例如，自激振动原理已被广泛应用于振荡电路，多解现象被用来对系统状态进行切换，混沌现象被用来进行保密通讯、提高振动机械的工作效率等等。

非线性动力学问题的求解一般非常困难，只有极个别的简单问题有精确解。由于线性系统的叠加原理不适用于非线性系统，这些简单问题的解无法叠加组成复杂问题的解。此外，非线性动力学具有上述特殊的复杂现象。因此，一个多世纪来人们付出了巨大的努力试图发展各种有效的分析方法，揭示非线性动力系统的奥秘。非线性动力学已成为一个有浩瀚文献的专门研究领域，并处在不断发展之中。

本书的主要读者是攻读工学硕士学位的研究生。他们大多首次接触非线性问题，手中几

乎没有什么可用的工具，而学习完本书后将开始阅读近代文献，着手解决工程中的非线性动力学问题。要在这门仅 60 学时左右的课程的学习过程中完成上述任务是很不容易的。因此，我们在本书选材和内容编排上的首要考虑就是要少而精，易于入门；其次是要适当压缩经典内容，使读者尽可能多接触一些该学科的近代发展，为今后进行从事非线性动力学的应用研究架设桥梁。我们期望这样的选材能够增加读者今后处理实际非线性动力学问题时成功的机会。

一般来说，研究非线性动力学问题的第一步是通过力学理论或实验建立研究对象的数学模型。在现有的非线性振动教科书和专著中，通常不涉及理论建模，而将其归于理论力学、材料力学、分析力学等前期课程或多体动力学、非线性弹性理论等专门课程。实验建模方法则散见于文献之中。我们认为，随着学科渗透，特别是近年来实验建模方法的发展，有必要在本书第 1 章介绍建立非线性动力系统数学模型的方法。

本书的第 2 章至第 5 章属于非线性振动的经典内容，其传统的组织体系有两种。一种是分门别类地介绍分析非线性动力系统的方法，二是由简单到复杂地介绍非线性动力系统特有的现象。这两种体系各有优点，不易兼顾。为了在比较短的篇幅内尽可能分散难点，我们先以单自由度自治系统为对象，在第 2 章和第 3 章分别介绍了定性方法和常用的几种定量分析（近似分析）方法。在第 4 和第 5 章中，则将目前最流行的多尺度方法推广到单自由度非自治系统和多自由度系统，比较全面地介绍非线性动力系统特有的现象。可以说，前两章侧重于介绍分析方法的体系，后两章侧重于介绍非线性动力学现象的体系。

本书第 6 章着重介绍非线性振动的稳定性与分叉理论，它是非线性振动经典内容向近代内容的转折。为了与近代文献相衔接并使读者接受必要的数学训练，该章的叙述比较抽象，并且有一些数学证明。这是本书的重点与难点。

第 7 章以尽可能通俗的语言介绍了混沌现象以及如何控制混沌，这是近年来非线性动力学研究的热点。

随着计算机的普及，数值计算方法在研究复杂非线性动力系统的行为，特别在研究系统的长时间历程行为中正起着重要作用。本书第 8 章将以第 6 章和第 7 章的理论为基础，介绍一些重要的数值计算方法。

非线性动力学是一门正在发展中的学科，书中许多内容并不是完全成熟的。作者衷心希望读者在阅读本书的过程中能够解决已指出的一些遗留问题，并期待读者能发现和提出有意义的新问题。

第 1 章 非线性动力系统的建模

对所关心的非线性动力系统建立数学模型是后继分析的基础。通常，建模前要对系统的构成进行分析，尽可能把握系统的主要非线性因素。然后，需要根据已掌握的信息决定建模的方法。完全借助力学理论进行建模的过程一般称作**理论建模**，而以实验作为主要手段的建模过程可称作**实验建模**。实践中，通常交替采用这两种建模技术进行相互检验，或混合采用两种技术进行复杂系统的联合建模。本章先介绍造成系统非线性的一些主要力学因素，然后分别介绍这两种建模技术。

1.1 系统的非线性及分类

单自由度非线性系统的运动微分方程一般形如

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t), t) = f(t) \quad (1.1.1)$$

它反映了系统惯性力 $-m\ddot{u}(t)$ 、非线性内力 $-p(u(t), \dot{u}(t), t)$ 与外激励 $f(t)$ 的力平衡关系。本节试图通过一些具体例子，帮助读者建立对非线性力 $p(u, \dot{u}, t)$ 的认识。

1.1.1 保守系统

机械能守恒的系统称作**保守系统**，它的运动微分方程形如

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t)) = 0 \quad (1.1.2)$$

其中 $p(u)$ 是仅依赖于系统位移 u 的非线性**有势力**，例如重力、弹性力等。

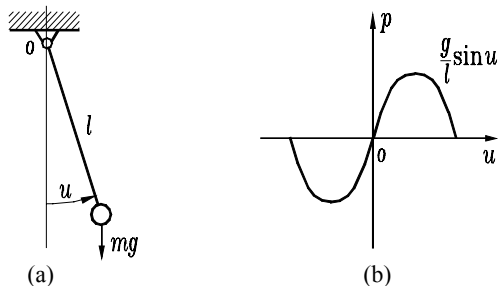


图 1.1.1 重力场中的单摆及其非线性有势力

图 1.1.1 中的重力摆是保守系统最简单的例子，其运动满足微分方程

$$\ddot{u}(t) + \frac{g}{l} \sin u(t) = 0 \quad (1.1.3)$$

该系统的非线性有势力是

$$p(u) = \frac{g}{l} \sin u \quad (1.1.4)$$

对于小摆角 u ，可利用 $\sin u \approx u$ 将系统(1.1.3)简化为线性系统。对于中等摆角 u ，采用三阶 Taylor 展开式 $\sin u \approx u - u^3/6$ ，将方程(1.1.3)简化为

$$\ddot{u}(t) + \frac{g}{l} \left[u(t) - \frac{1}{6} u^3(t) \right] = 0 \quad (1.1.5)$$

通常，将运动微分方程形如

$$\ddot{u}(t) + au(t) + bu^3(t) = 0 \quad (1.1.6)$$

的系统称作 **Duffing 系统**，其中 a 、 b 是常数。中等摆角时，重力摆运动微分方程(1.1.5)就是一个 Duffing 系统，其 $a = g/l > 0$ 、 $b = -g/6l < 0$ 。Duffing 系统的另一例子是图 1.1.2 所示端部有集中质量的弹性梁。梁的大挠度变形会产生图示非线性弹性恢复力，若梁的质量远小于端部集中质量，其大挠度自由振动近似满足方程(1.1.6)，此时 $a > 0$ 、 $b > 0$ 。

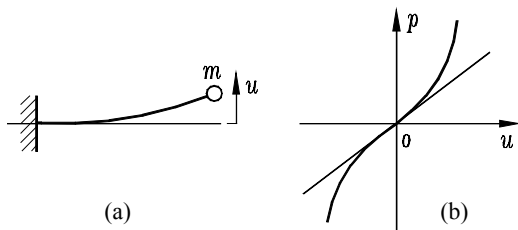


图 1.1.2 具有集中质量的大挠度梁及其非线性弹性恢复力

如果将保守系统(1.1.2)与单自由度线性系统类比，可认为有势力 $p(u)$ 相当于一非线性弹簧提供的弹性恢复力的反力。因此，可定义**非线性刚度**为

$$k(u) \stackrel{\text{def}}{=} p'(u) = \frac{dp(u)}{du} \quad (1.1.7)$$

这一刚度是随系统位移大小而变的。如果非线性弹簧满足 $up''(u) \geq 0$ ，则称系统**刚度渐硬**；反之则为**刚度渐软**。显然，重力摆是一刚度渐软系统，而带集中质量的大挠度梁是刚度渐硬系统。

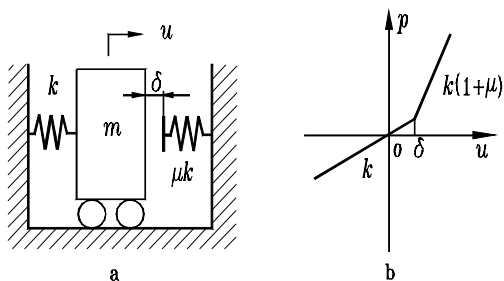


图 1.1.3 含弹性约束的系统及其分段线性弹性恢复力

间隙与弹性约束在机械系统中比比皆是。图 1.1.3 是一含弹性约束的单自由度系统，其非线性有势力是位移 u 的分段线性函数

$$p(u) = \begin{cases} ku, & u \leq \delta \\ k\delta + k(1 + \mu)(u - \delta), & u > \delta \end{cases} \quad (1.1.8)$$

故称作**分段线性系统**。显然，它是一刚度渐硬系统。

1.1.2 非保守系统

非保守系统的机械能不守恒，系统或是内部存在耗能因素，或是从外界吸收能量。下面讨论几种造成系统非保守的非线性因素。

(1) 非线性阻尼

由阻尼耗能导致的非保守系统为

$$m\ddot{u}(t) + q(\dot{u}(t)) + ku(t) = 0 \quad (1.1.9)$$

其中阻尼力的反力形如

$$q(\dot{u}) = c|\dot{u}|^{n-1}\dot{u}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.10)$$

a. 当 $n = 0$ 时，式(1.1.10)可写作

$$q(\dot{u}) = c \operatorname{sgn} \dot{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mu N \operatorname{sgn} \dot{u} \quad (1.1.11)$$

$-q(\dot{u})$ 是 Coulomb 干摩擦力，其中 N 为摩擦界面间正压力， μ 为干摩擦系数。

b. 当 $n = 1$ 时， $-q(\dot{u})$ 是人们非常熟悉的线性粘性阻尼力，适用于描述物体在空气或液体中作低速运动所受到的阻力。

c. 当 $n = 2$ 时， $-q(\dot{u})$ 是低粘度流体阻尼力，适用于描述物体在空气或低粘度液体中作中高速运动所受到的阻力。

(2) 非线性迟滞

众所周知，当弹性结构的应力超过某一门槛值后结构会发生塑性变形。此时即使完全卸载，结构仍有残余应变。这说明，结构塑性变形后的应力不仅与当前应变有关，而且与应变历史有关，从而使应变-应力曲线呈现多值。

描述理想弹塑性材料的简单唯象模型如图 1.1.4 所示，其对应的非线性力表达式为

$$p(u, t) = k_1 u + z(t), \quad dz = \begin{cases} k_2 du, & |z| \leq z_s \\ 0, & |z| > z_s \end{cases} \quad (1.1.12)$$

该模型所确定的非线性力 $p(u, t)$ 是分段线性的，并且需要由增量形式的微分方程来描述。若 $u(t) = u_0 \sin \omega t$ ，则 $p(u, t)$ 随 t 周期性变化，在 (u, p) 平面上形成图 1.1.4(b) 所示的迟滞回线。该模型除了描述理想弹塑性材料，还可描述许多可类比为图 1.1.4(a) 系统的力学问题，例如由钢丝绳、钢丝网垫作为主要弹性、阻尼元件的隔振器等。

更一般的情况下，对非线性迟滞的描述需要用分段曲线。例如，采用磁流变体的阻尼器具有如下形式的阻尼力

$$q(\dot{u}, \ddot{u}) = a_1 \dot{u} + a_2 \arctan[a_3 (\dot{u} - a_4 \operatorname{sgn} \ddot{u})] \quad (1.1.13)$$

其对应的典型迟滞回线如图 1.1.5 所示。近年来, 工程界已提出了许多非线性迟滞模型, 文献[1]对其一般形式进行了归纳和抽象。

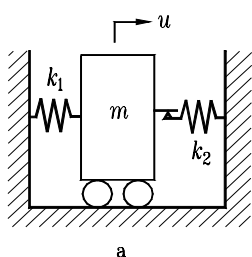


图 1.1.4 双线性弹塑性宏观模型及其迟滞现象

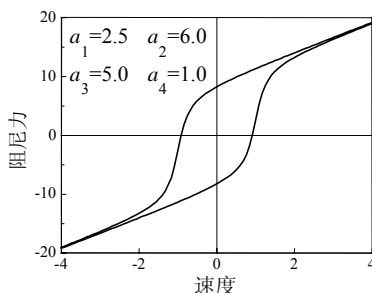
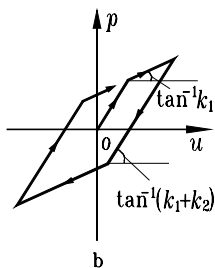


图 1.1.5 磁流变阻尼器的迟滞现象

(3) 参数激励

图 1.1.6 所示基础作铅垂运动的重力摆, 其运动微分方程为

$$ml^2 \ddot{u}(t) = ml[\ddot{v}(t) - g] \sin u(t) \quad (1.1.14)$$

若基础作铅垂简谐振动 $v(t) = a \sin 2t$, 则上式成为

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{l}(g + 4a \sin 2t) \sin u(t) = 0 \quad (1.1.15)$$

将上式与式(1.1.3)比较可见, 非线性项 $\sin u(t)$ 的系数由常数 g/l 变为时间 t 的函数 $(g + 4a \sin 2t)/l$ 。

在本例中, 环境对系统的激励以时变参数的形式反映在系统运动微分方程中, 因此被称作**参数激励**, 相应的振动称作**参激振动**。若该系统的摆角足够小, 方程(1.1.15)可线性化为著名的 **Mathieu 方程**

$$\ddot{u}(t) + (\delta + 2\varepsilon \sin 2t)u(t) = 0 \quad (1.1.16)$$

其中

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l}, \quad \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a}{l} \quad (1.1.17)$$

尽管式(1.1.16)是一线性常微分方程, 但其系数是随时间变化的。本书 4.6 节将指出, 这类系统的动力学行为明显有别于读者所熟悉的线性定常系统的振动。

对非线性系统的分类除了按保守与非保守之外, 还可按自治与非自治进行分类。**自治系统**是指方程(1.1.1)的特殊形式

$$m\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t)) = 0 \quad (1.1.18)$$

其非线性力不显含时间 t ; 不具备这种形式的系统称作**非自治系统**。在本书中, 自治系统可理解为作自由振动的系统, 以及将要介绍的自激振动系统; 而非自治系统可理解为受外激励或参数激励的系统。

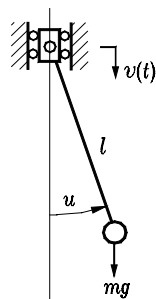


图 1.1.6 基础激励下的重力摆

1.2 理论建模

以 Newton 力学为根基的各个动力学分支都涉及如何就研究对象进行建模这一问题，而不同的研究对象决定了该动力学分支的特色。

简单质点系或单个刚体的理论建模通常运用理论力学和分析力学方法，分析力学中的 Lagrange 方程是最受欢迎的方法。但像机器人这类由多刚体和关节组成的复杂系统，则需采用多刚体动力学方法，借助计算机来完成建模。这些系统的特点是具有有限个自由度。

相比之下，具有无限自由度的连续介质系统的建模非常复杂。系统的非线性来自两方面，一是系统的运动（如大变形），二是构成系统的材料。对于计入上述非线性的杆、轴、梁、板和简单的壳体，高等材料力学和弹性力学提供了一些建模的手段。至于更复杂的结构，则需要采用非线性有限元、多柔体动力学等方法，在计算机上完成建模。

面对理论建模所涉及的上述多个动力学分支，本书仅就几个分支各介绍一种方法，供不同专业的读者作为入门向导。

1.2.1 分析力学方法

最常用的分析力学方法是第二类 Lagrange 方程。其特点是基于系统的能量来建立系统运动微分方程，从而无需对系统取分离体进行受力分析。此处不打算重复分析力学的理论体系，只是扼要介绍一些与非线性动力系统建模有关的概念。

(1) 广义坐标

若系统运动能用一组独立坐标来完备描述，则这组坐标称为该系统的**广义坐标**。广义指坐标的量纲不限于长度和角度，模态坐标、机电耦合系统的电压、电流均可作为广义坐标。

广义坐标的选择是人为的，有无穷多种方式，建立系统力学模型时用的物理坐标是其中一组。为了客观描述系统，任意两组广义坐标须能相互转换。譬如， N 自由度系统的物理坐标 $\mathbf{u}=[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N]^T$ 与另一组广义坐标 $\mathbf{q}=[q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T$ 之间应有可逆的联系。最简单的可逆联系就是线性振动理论中多次使用的线性变换。

(2) 系统的能量

考察由 n 个质量为 $m_i, i=1,2,\cdots,n$ 的质点和 s 个完整定常约束^① 组成的系统，其自由度为 $N=3n-s$ 。取一组广义坐标 $\mathbf{q}=[q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T$ ，将各质点相对于空间某定点的矢径记为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}), \quad i=1,2,\cdots,n \quad (1.2.1)$$

系统的动能是各质点动能之和

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.2.2)$$

其中系数

^① 完整定常约束是指系统的约束可以表示为不显含时间的代数方程组。

$$m_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.2.3)$$

称作系统的**质量系数**，是广义坐标 \mathbf{q} 的函数。当研究系统微振动时，可取其在平衡位置 $\mathbf{q} = 0$ 的值。

在定常约束下，系统的势能仅是广义坐标 \mathbf{q} 的函数，记作 $V(\mathbf{q})$ 。如果取平衡位置为零势能参考点，并考虑到势能在平衡位置取极值，则有条件

$$V(0)=0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=0} = 0, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.2.4)$$

(3) Lagrange 方程

在分析力学中，通常基于虚位移原理和 D'Alembert 原理来导出一般完整约束系统的 Lagrange 方程，其过程比较复杂。此处仅以完整定常约束系统为例，导出其 Lagrange 方程。但该方程与一般完整约束系统的 Lagrange 方程形式相同。

先将系统的约束分为两类，一类是理想约束，其约束反力不作功。刚体的内力、不可伸长的绳索、光滑固定面、光滑铰链等都属于此列。另一类是非理想约束，例如摩擦等。以下将非理想约束的反力与外力归在一起。

根据功能原理，外力和非理想约束反力作的元功 dW 等于系统总能量 $T+V$ 的微分，即

$$d(T+V)=dW \quad (1.2.5)$$

现在来看这一原理在具体广义坐标 $\mathbf{q}=[q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T$ 下的结果。记外力和非理想约束反力之和在这组广义坐标下的分量为 $\mathbf{f}=[f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_N]^T$ ，它们的元功可写作

$$dW = \mathbf{f}^T d\mathbf{q} = \sum_{j=1}^N f_j dq_j \quad (1.2.6)$$

定常约束系统的势能仅是广义坐标 \mathbf{q} 的函数，故

$$dV = \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_j} dq_j \quad (1.2.7)$$

定常约束系统的动能是广义坐标及其导数的函数，故

$$dT = \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (1.2.8)$$

注意到质量系数仅是广义坐标 \mathbf{q} 的函数，由式(1.2.2)可写出

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \quad (1.2.9)$$

对上式两端微分得

$$2dT = \sum_{j=1}^N d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) dq_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (1.2.10)$$

由式(1.2.10)减去式(1.2.8)得

$$dT = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) dq_j - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (1.2.11)$$

将式(1.2.6)、(1.2.7)和(1.2.11)代入式(1.2.5)，得到功能原理的具体形式

$$d(T+V-W) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - f_j \right] dq_j = 0 \quad (1.2.12)$$

根据广义坐标 q_j 的独立性，诸 dq_j 不可能同时为零，从而得到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = f_j, \quad j=1,2,\dots,N \quad (1.2.13)$$

例 1.2.1 考察图示弹簧摆，其弹簧质量可忽略不计，试建立系统自由振动微分方程组。

解：这是二自由度系统。取静平衡位置为零势能参考点，在图示广义坐标下系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{m}{2} [(l+u_2)^2 \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] \quad (a)$$

$$V = mg[l - (l+u_2)\cos u_1] + \frac{k}{2} u_2^2 \quad (b)$$

代入方程(1.2.13)得

$$\begin{cases} m(l+u_2)\ddot{u}_1 + 2m\dot{u}_1\dot{u}_2 + mg \sin u_1 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - m(l+u_2)\dot{u}_1^2 - mg \cos u_1 + ku_2 = 0 \end{cases} \quad (c)$$

如果保留到二阶非线性项，则方程(c)化为

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \frac{g}{l} u_1 = \frac{g}{l^2} u_1 u_2 - \frac{2}{l} \dot{u}_1 \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_2 + \frac{k}{m} u_2 = g - \frac{g}{2} u_1^2 + l \dot{u}_1^2 \end{cases} \quad (d)$$

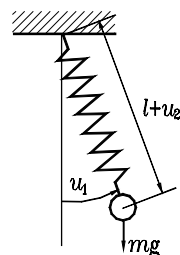


图 1.2.1 弹簧摆的自由振动

1.2.2 多刚体动力学方法

(1) 概述

多刚体动力学的研究对象是由多个刚体、关节、不计质量的弹性元件和阻尼元件等构成的系统，主要任务是采用程式化的方法来建立系统的动力学方程，并计算系统的运动。因此，它是理论力学和分析力学的自然延伸和技术发展。自 20 世纪 60 年代起，机器人、汽车等工业的需求推动了多刚体动力学理论的发展，Roberson 和 Wittenburg, Schiehlen 和 Kreuzer, Kane 等学者提出了一系列新方法。随后兴起的各种计算机代数语言为程式化建模的实现提供了平台，出现了 NEWEUL、MESA VERDE、ADAMS 等建模和分析软件。

一个典型的多刚体动力学软件包括如下模块：

- 输入系统的拓扑结构和参数信息；
- 自动消除系统的内约束力，形成系统动力学方程；
- 形成由计算机高级语言描述的动力学方程并输出结果；
- 计算系统自给定初始条件起的运动并输出结果。

从力学角度看这样一个软件，最关键的模块就是如何自动消除系统的内约束力，形成系统动力学方程。在此，特介绍一种比较容易理解的方法。

(2) Schiehlen-Kreuzer 方法

考察由 n 个刚体和 s 个完整定常约束构成的多体系统。取其第 i 个刚体 B_i 为分离体，根据刚体动力学理论，可写出 B_i 质心运动的 Newton 方程和绕 B_i 质心转动的 Euler 方程

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{f}_i, \\ \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{g}_i + \mathbf{h}_i, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.2.14)$$

其中 m_i 是 B_i 的质量， \mathbf{J}_i 是 B_i 以质心为参考点的转动惯量张量， $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 是 B_i 的质心加速度矢量， \mathbf{e}_i 和 \mathbf{f}_i 分别是作用于 B_i 质心的外力和约束力矢量， $\boldsymbol{\omega}_i$ 是 B_i 绕质心转动的角速度矢量， \mathbf{g}_i 和 \mathbf{h}_i 分别是关于 B_i 质心的外力矩和约束力矩矢量。这样 n 个刚体的动力学方程可合并为

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{e} + \mathbf{f} \\ \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{k} = \mathbf{g} + \mathbf{h} \end{cases} \quad (1.2.15)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \overset{\text{def}}{\text{diag}}[m_i], \quad \mathbf{J} = \overset{\text{def}}{\text{diag}}[\mathbf{J}_i], \quad \mathbf{r} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n]^T, \quad \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n]^T \\ \mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]^T, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n]^T, \quad \mathbf{g} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n]^T, \quad \mathbf{h} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n]^T \\ \mathbf{k} = [\boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1), \dots, \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{J}_n \cdot \boldsymbol{\omega}_n)]^T \end{cases} \quad (1.2.16)$$

由于系统具有 s 个约束，故其仅有 $N = 6n - s$ 个独立广义坐标，记为 q_1, q_2, \dots, q_N 。在这组广义坐标下，刚体 B_i 的质心运动可表示为

$$\mathbf{r}_i = \overset{\text{def}}{\mathbf{r}}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (1.2.17)$$

将其对时间求导，得到质心速度

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{ij} \dot{q}_j + \mathbf{a}_{i0} \quad (1.2.18)$$

即 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 是广义速度 $\dot{q}_j, j=1, \dots, N$ 的线性组合。由于 $\boldsymbol{\omega}_i$ 可由 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 和刚体 B_i 上另一点的速度之差确定，从而也可写成广义速度 $\dot{q}_j, j=1, 2, \dots, N$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{b}_{ij} \dot{q}_j + \mathbf{b}_{i0} \quad (1.2.19)$$

由上述两式可导出

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{a}_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{a}_{i0}}{\partial t} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{b}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{b}_{i0}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2.20)$$

其相应的矩阵形式为

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{w} \quad (1.2.21)$$

其中

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T, \quad \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}_{ij}], \quad \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{b}_{ij}] \quad (1.2.22)$$

读者不难根据式(1.2.20)写出 \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 的具体表达式。将式(1.2.21)代回式(1.2.15)，得到由独立广义坐标向量 \mathbf{q} 描述的运动微分方程

$$\mathbf{D} \mathbf{E} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_I \quad (1.2.23)$$

其中

$$\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{v} \\ \mathbf{J} \mathbf{w} + \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_E \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_I \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (1.2.24)$$

为了消除约束产生的广义力 \mathbf{f}_I ，考察系统的虚位移

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{A} \delta \mathbf{q}, \quad \delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q} \quad (1.2.25)$$

根据完整定常约束的性质， \mathbf{f}_I 在虚位移上所做的功满足

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{E}^T \mathbf{f}_I = \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{f} + \mathbf{B}^T \mathbf{h}) = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{h} = 0 \quad (1.2.26)$$

由 $\delta \mathbf{q}$ 的任意性，将方程(1.2.23)左乘 \mathbf{E}^T 得到系统的运动微分方程

$$\mathbf{E}^T \mathbf{D} \mathbf{E} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{E}^T \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{E}^T \mathbf{f}_E \quad (1.2.27)$$

例 1.2.2 图 1.2.2 所示双摆的两个集中质量均为 m ，转动惯量可忽略，摆长为 l ，试用 Schiehlen-Kreuzer 方法建立系统自由振动的微分方程。

解：以图中单位矢量 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 为基矢量建立坐标系，取 θ_1 和 θ_2 为描述系统的广义坐标，则两集中质量的质心矢径为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = l(\sin \theta_1 \mathbf{e}_1 - \cos \theta_1 \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{r}_2 = l[(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \mathbf{e}_1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \mathbf{e}_2] \end{cases} \quad (a)$$

注意到集中质量的转动惯量为零，方程(1.2.27)可简化为

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} \quad (b)$$

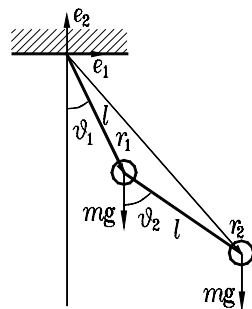


图 1.2.2 双摆自由振动

将下述矩阵和向量

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, & \mathbf{A} = l \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin\theta_1 \mathbf{e}_2 & 0 \\ \cos\theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin\theta_1 \mathbf{e}_2 & \cos\theta_2 \mathbf{e}_1 + \sin\theta_2 \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e} = -mg\mathbf{e}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 (-\sin\theta_1 \mathbf{e}_1 + \cos\theta_1 \mathbf{e}_2) \\ -(\sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2) \mathbf{e}_1 + (\cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2) \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (c)$$

代入式(b), 得到系统自由振动的非线性微分方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{bmatrix} 2\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

建议读者用该方法推导出双物理摆的运动微分方程。

1.2.3 弹性力学方法

采用弹性力学方法建模时, 一般依次列出系统的动力平衡方程、变形几何方程和本构方程, 然后尽可能消去联立方程中的未知函数。根据剩下待求解的未知物理量, 弹性力学建模方法有位移法、力法和混合法。其中, 位移法是最常用的。

本节考察图 1.2.3 中两端铰支、均匀材料等截面 Bernoulli-Euler 梁, 其左端纵向固定, 右端纵向可移动且作用有纵向载荷 $P(t)$ 。现以该梁在材料线弹性范围内的中等挠度振动为例, 说明如何运用弹性力学位移法建立系统的运动偏微分方程。

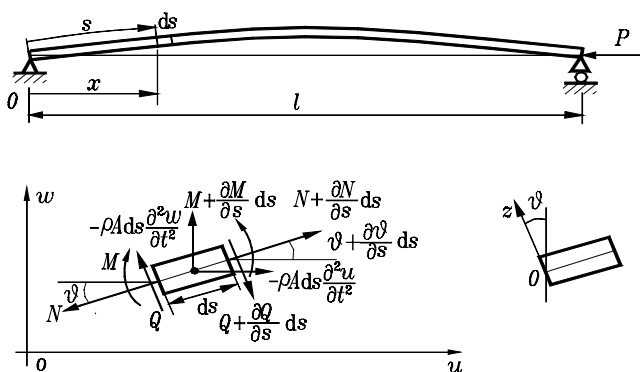


图 1.2.3 轴向力作用下的梁中等挠度振动及其微段受力分析

首先, 取梁上距左端 x 处 (对应于弧长坐标 s) 的微段 $ds = dx / \cos\theta$ 。根据图中的受力分析, 得到该微段质心的纵向运动 $u(x, t)$ 和横向运动 $w(x, t)$ 所满足的动力平衡方程

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds = \frac{\partial}{\partial s} (N \cos\theta + Q \sin\theta) ds \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} ds = \frac{\partial}{\partial s} (N \sin\theta - Q \cos\theta) ds \end{cases} \quad (1.2.28)$$

其中 $N(x, t)$ 是梁在 x 截面上沿梁变形后中性层切线方向的轴力, $Q(x, t)$ 是剪力。若略去梁微段的旋转惯量, 则剪力 $Q(x, t)$ 与弯矩 $M(x, t)$ 间具有准静力关系

$$Q = \frac{\partial M}{\partial s} = \cos \theta \frac{\partial M}{\partial x} \quad (1.2.29)$$

将式(1.2.29)代入方程(1.2.28)，得到

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (N \cos \theta + \frac{\partial M}{\partial x} \cos \theta \sin \theta) \cos \theta \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (N \sin \theta - \frac{\partial M}{\partial x} \cos \theta \cos \theta) \cos \theta \end{cases} \quad (1.2.30a)$$

$$\quad (1.2.30b)$$

对于梁的中等挠度变形，通常将方程(1.2.30)中的三角函数近似为

$$\sin \theta \approx \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1.2.31)$$

并在后继分析中保持这样的二阶 Taylor 截断。

在建立变形几何方程阶段，通常根据实验观察结果引入一些变形假设，以便使问题得以简化。此处引入的基本假设是：变形前垂直于梁轴线的横截面在变形后垂直于变形的轴线。根据这一基本假设，距中性层 z 处点的纵向位移 $\tilde{u}(x, z, t)$ 由三部分组成：一是轴力引起的横截面纵向平动 $\tilde{u}(x, 0, t)$ ，即微段质心的纵向位移 $u(x, t)$ ；二是由横截面转动引起的 $z\theta(x, t)$ ；

三是横向弯曲引起的 $\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - x$ 。因此，该点的纵向位移是

$$\tilde{u}(x, z, t) = u + z\theta + \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - x \quad (1.2.32)$$

由此得到该点的正应变

$$\varepsilon(x, z, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] \cos \theta \approx \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \cos \theta \quad (1.2.33)$$

在线弹性范围内，梁在横截面上的正应力为

$$\sigma(x, z, t) = E \varepsilon(x, z, t) \quad (1.2.34)$$

其中 E 是材料的弹性模量。

现以梁的纵向位移 $u(x, t)$ 和横向位移 $w(x, t)$ 为未知量来建立其运动偏微分方程。将式(1.2.33)代入式(1.2.34)，在梁的横截面上积分得到轴力和弯矩

$$\begin{aligned} N(x, t) &= \iint_A \sigma(x, z, t) dA = E \iint_A \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} \cos \theta(x, t) dA \\ &= EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \iint_A \sigma(x, z, t) z dA \\ &= E \iint_A z \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} \cos \theta(x, t) dA = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

其中 $I = \iint_A z^2 dA$ 是梁的截面惯性矩。根据几何关系 $\tan \theta = \frac{\partial w}{\partial x}$ ，可导出

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2.37)$$

因此

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^3 \theta \quad (1.2.38)$$

将式(1.2.35)和(1.2.38)联同式(1.2.31)代回方程(1.2.30)，得到仅含未知位移的动力学方程

$$\begin{aligned} & [\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] - \\ & [EA(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 6EI(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] \frac{\partial w}{\partial x} + \end{aligned} \quad (1.2.39a)$$

$$[\frac{3}{2} EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{25}{2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] (\frac{\partial w}{\partial x})^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & [\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 3EI(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] - \\ & [EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 11EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] \frac{\partial w}{\partial x} + \end{aligned} \quad (1.2.39b)$$

$$[2EA(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{4}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 3EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{21}{2} EI(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] (\frac{\partial w}{\partial x})^2 = 0$$

这就是计入几何非线性效应的梁纵横向运动耦合动力学方程，其最低阶截断误差为 $(\frac{\partial w}{\partial x})^3$ 。

研究梁的横向非线性振动时通常对纵向运动微分方程引入简化假设。如果略去梁横向运动对纵向运动的影响，方程(1.2.39a)将简化为线性波动方程

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2.40a)$$

相应的边界条件是

$$u(0, t) = 0, \quad EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -P(t) \quad (1.2.40b)$$

在给定的初始条件下解出纵向位移 $u(x, t)$ 后代入方程(1.2.39b)，可得到以横向位移 $w(x, t)$ 为未知函数、纵向位移 $u(x, t)$ 为时变系数的非线性偏微分方程。

对于定常纵向载荷 $P(t) = P_0$ ，一般略去梁的纵向惯性效应，视轴力为

$$N(x, t) \approx EA \frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 \quad (1.2.41)$$

这意味着

$$\frac{\partial N}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{即} \quad \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.42)$$

这时, 方程(1.2.39b)简化为

$$\begin{aligned} & [\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 3EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] - [11EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & \frac{1}{2} [(4P_0 + 3EA) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 6EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 21EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] (\frac{\partial w}{\partial x})^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

或简记为

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D(w) = 0 \quad (1.2.44)$$

其中 $D(w)$ 是关于 x 的非线性偏微分算子。

方程(1.2.44)是一非线性偏微分方程, 其解空间具有无限维。通常, 人们采用 **Galerkin 方法**将其简化为有限个常微分方程来进行研究。Galerkin 方法的基本思路是取一组满足梁边界条件的形状函数 $\varphi_r(x), r=1, 2, \dots, n$, 构造

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^n \varphi_r(x) q_r(t) \quad (1.2.45)$$

将其代入方程(1.2.44), 方程残差反映了残余力。为了尽量减小残余力, 可以选择未知函数 $q_r(t), r=1, 2, \dots, n$, 使残余力关于各形状函数 $\varphi_r(x), r=1, 2, \dots, n$ 对应的位移平均作功为零, 即

$$\int_0^l [\rho A \sum_{r=1}^n \varphi_r(x) \ddot{q}_r(t) + D(\sum_{r=1}^n \varphi_r(x) q_r(t))] \varphi_s(x) dx = 0, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (1.2.46)$$

这显然是 n 个关于未知函数 $q_r(t), r=1, 2, \dots, n$ 的二阶常微分方程。

对于梁振动问题, 最常用的形状函数就是梁的微振动固有振型。以简支梁的低频振动为例, 通常仅取梁的第一阶固有振型 $\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ 。将其代入方程(1.2.44)后再代入方程(1.2.46),

经计算得到一个单自由度非线性振动系统

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{1}{\rho A} \left\{ \left(\frac{\pi^4 EI}{l^4} - \frac{\pi^2 P_0}{l^2} \right) q_1(t) + \left[\frac{\pi^4 (4P_0 + 3EA)}{8l^4} - \frac{5\pi^6 EI}{4l^6} \right] q_1^3(t) - \frac{21\pi^8 EI}{16l^8} q_1^5(t) \right\} = 0 \quad (1.2.47)$$

最后需要指出, 现有文献一般在最初阶段就取 $\cos \theta \approx 1$, 但取弯矩表达式(1.2.38)中的 $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ 。这样的不一致截断使最终结果成为

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{1}{\rho A} \left[\left(\frac{\pi^4 EI}{l^4} - \frac{\pi^2 P_0}{l^2} \right) q_1(t) - \frac{3\pi^6 EI}{4l^6} q_1^3(t) \right] = 0 \quad (1.2.48)$$

在以后的章节将会看到, 由于 $q^3(t)$ 前系数的差异, 方程(1.2.47)和方程(1.2.48)会具有截然不同的动力学性质。

1.3 实验建模

在工程中,许多非线性因素是无法用理论方法来确定的。因此,实验是非线性动力系统建模的重要手段。实验建模问题可分为两类。一类是系统的数学模型已知,但模型中某些未知参数需要通过实验来确定;另一类则是系统的数学模型未知,需要由实验来确定。通常,将第一类问题称作**参数估计**,第二类问题称作**模型辨识**。

1.3.1 参数估计

现采用单自由度非线性系统为例来说明参数估计问题及其解法。考察系统

$$\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t), t, \mathbf{q}) = f(t) \quad (1.3.1)$$

其中非线性力 $p(u(t), \dot{u}(t), t, \mathbf{q})$ 的表达形式已知,但参数向量 $\mathbf{q} \in R^m$ 是未知的。参数估计的任务就是设计一种实验,通过实测的激励和响应数据来确定参数向量 \mathbf{q} 。

设想已有激励 $f(t)$ 和系统加速度 $\ddot{u}(t)$ 的采样序列 $f(t_k), \ddot{u}(t_k), k=1,2,\dots,n$, 则

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} p(u(t_k), \dot{u}(t_k), t_k, \mathbf{q}) = f(t_k) - \ddot{u}(t_k), \quad k=1,2,\dots,n \quad (1.3.2)$$

就是系统中非线性力的采样序列。如果 $p(u(t), \dot{u}(t), t, \mathbf{q})$ 关于未知参数向量 \mathbf{q} 是线性的,则称问题为**线性参数估计**,反之为**非线性参数估计**。现分别进行讨论。

(1) 线性参数估计

以 Duffing 系统为例,其非线性力为

$$p(u, \dot{u}, \mathbf{q}) = q_1 u + q_2 u^3 + q_3 \dot{u}, \quad \mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \in R^3 \quad (1.3.3)$$

由此,可将含测量误差 $e_k, k=1,2,\dots,n$ 的非线性力采样序列写作

$$p_k = q_1 u_k + q_2 u_k^3 + q_3 \dot{u}_k + e_k, \quad k=1,2,\dots,n \quad (1.3.4)$$

其中 $u_k = u(t_k), \dot{u}_k = \dot{u}(t_k), k=1,2,\dots,n$ 是系统位移和速度的采样序列。它们可以直接测量而得,也可以经测量的加速度采样序列积分而得。式(1.3.4)对应的矩阵形式为

$$U\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{e} \quad (1.3.5)$$

其中

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 & u_1^3 & \dot{u}_1 \\ u_2 & u_2^3 & \dot{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & u_n^3 & \dot{u}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (1.3.6)$$

显然,式(1.3.5)是关于未知参数向量 \mathbf{q} 的线性代数方程组,其有解的条件是 $n \geq m=3$ 。通常的实验总能满足 $n \gg m=3$, 所以式(1.3.5)是具有无穷多解的矛盾方程组。该方程在最小二乘意义下的解是

$$\hat{\mathbf{q}} = (U^T U)^{-1} U^T \mathbf{p} \quad (1.3.7)$$

根据数理统计理论, $\hat{\mathbf{q}}$ 是未知参数向量 \mathbf{q} 的无偏估计。

(2) 非线性参数估计

当 $p(u(t), \dot{u}(t), t, \mathbf{q})$ 与未知参数向量 \mathbf{q} 具有非线性关系时, 参数估计问题变得比较困难。原则上, 总可以构造一优化问题

$$\min_{\mathbf{q} \in D} \|p(u_k, \dot{u}_k, t_k, \mathbf{q}) - p_k\| \quad (1.3.8)$$

运用各种数值优化方法, 包括近年来引人注目的基因算法、模拟退火算法等在某一给定参数域 $D \subset R^m$ 中寻求未知参数向量 \mathbf{q} 。

鉴于多变量全局优化还不够成熟, 实践中总是尽可能回避非线性参数估计问题。事实上, 有许多非线性参数估计问题可通过某些技巧转换为线性参数估计问题。

例如, 考察一含间隙的振子, 其非线性力可表示为

$$p(u, \dot{u}, \mathbf{q}) = \begin{cases} k_1 u + c\dot{u}, & u \leq d \\ k_1 d + (k_1 + k_2)(u - d) + c\dot{u}, & u > d \end{cases} \quad (1.3.9)$$

其中待估计参数向量为

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} [k_1 \quad k_2 \quad c \quad d]^T \in R^4 \quad (1.3.10)$$

如果试图直接由式(1.3.9)所对应的采样序列来确定 \mathbf{q} , 必须处理一非线性参数估计问题。为了回避这一难题, 可用足够强的激励使系统发生碰撞振动, 选择正向和反向位移峰值处的采样序列分别构造线性参数估计问题

$$p_k^- = q_1^- u_k + q_2^- \dot{u}_k + e_k^-, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3.11a)$$

$$p_k^+ = q_1^+ u_k + q_2^+ \dot{u}_k + q_3^+ + e_k^+, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3.11b)$$

采用最小二乘解(1.3.7)得到两个参数估计向量

$$\hat{\mathbf{q}}^- \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{q}_1^- \quad \hat{q}_2^-]^T = [\hat{k}_1 \quad \hat{c}]^T, \quad \hat{\mathbf{q}}^+ \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{q}_1^+ \quad \hat{q}_2^+ \quad \hat{q}_3^+]^T = [\hat{k}_1 + \hat{k}_2 \quad \hat{c} \quad -\hat{k}_2 \hat{d}]^T \quad (1.3.12)$$

由此可解出

$$\hat{k}_1 = \hat{q}_1^-, \quad \hat{k}_2 = \hat{q}_1^+ - \hat{q}_1^-, \quad \hat{c} = \hat{q}_2^+, \quad \hat{d} = \frac{\hat{q}_3^+}{\hat{q}_1^- - \hat{q}_1^+} \quad (1.3.13)$$

上述分批对参数进行辨识的思路还可以进一步推广。例如, 文献[2]把构成系统的元件分为耗能类和保守类。考察了由线性弹簧、含间隙弹簧、立方非线性弹簧、理想弹塑性元件、线性阻尼器以及平方非线性阻尼器并联而提供的如下非线性力

$$p(u, \dot{u}, t) = k_1 u + k_2 p_1 + k_3 u^3 + k_4 p_2 + c_1 \dot{u} + c_2 \dot{u} | \dot{u} | \quad (1.3.14)$$

其中

$$p_1 = \begin{cases} 0, & |u| \leq d \\ u - d \operatorname{sgn}(u), & |u| > d \end{cases} \quad dp_2 = \begin{cases} du, & |p_2| \leq b \\ 0, & |p_2| > b \end{cases} \quad (1.3.15)$$

根据保守元件在相等变形之间的任意变形历史上不耗能的特点,可以建立仅含耗能元件参数 c_1, c_2, k_4, b 的线性识别方程并完成参数辨识;以此为基础,再利用能量积分又可建立仅含保守元件参数 k_1, k_3, k_2, d 的线性识别方程。

此外,还可以对含有非线性参数的项进行多项式逼近,辨识出多项式的系数后再反演出未知的非线性参数。例如,文献[3]提出用 Chebyshev 多项式或 Fourier 级数逼近上式中的非线性迟滞力 p_2 ,并构造了最小二乘算法辨识出钢丝绳和钢丝网垫隔振器的非线性动力学参数。

1.3.2 模型辨识

考察如下单自由度非线性系统

$$\ddot{u}(t) + p(u(t), \dot{u}(t), t) = f(t) \quad (1.3.16)$$

其中非线性力 $p(u(t), \dot{u}(t), t)$ 的具体形式未知。模型辨识的任务是要设计一种实验,通过实测的激励和响应数据来确定函数 $p(u(t), \dot{u}(t), t)$ 。具体地说,就是通过实验获得激励和系统响应的采样序列

$$t_k, \quad u_k = u(t_k), \quad \dot{u}_k = \dot{u}(t_k), \quad p_k = f(t_k) - \ddot{u}(t_k), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.3.17)$$

并由这些数据来确定函数 $p(u(t), \dot{u}(t), t)$ 。

一般来说,该问题没有精确解。解决问题的唯一途径是在某种函数类或映射类中寻求指定范数意义下的最佳逼近。实践中,可以根据对系统的某些先验了解,采用适宜的多项式、正交函数、乃至人工神经网络来逼近函数 $p(u(t), \dot{u}(t), t)$ [4,5,6]。现以采用 Chebyshev 多项式为例来说明如何进行模型辨识。

(1) Chebyshev 多项式

闭区间 $[-1, 1]$ 上的第 r 阶 Chebyshev 多项式定义为

$$T_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(r \cos^{-1} x), \quad x \in [-1, 1] \quad (1.3.18)$$

根据该定义,不难得到各阶 Chebyshev 多项式间的递推关系

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x), \quad r=1, 2, \dots \quad (1.3.19)$$

利用变量代换 $x = \cos \theta$, 可以证明如下加权正交关系

$$\int_{-1}^1 \frac{T_r(x)T_s(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos r\theta \cos s\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & r=s=0 \\ \pi/2, & r=s \neq 0 \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (1.3.20)$$

根据函数逼近理论, Chebyshev 多项式可以逼近闭区间 $[-1, 1]$ 上的任意连续函数 $f(x)$

$$f(x) = \sum_{r=1}^{+\infty} c_r T_r(x), \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (1.3.21)$$

利用加权正交关系(1.3.20)可得到

$$\begin{aligned}
 I_r &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos\theta) \cos r\theta d\theta \\
 &= \sum_{s=1}^{+\infty} c_s \int_0^\pi \cos r\theta \cos s\theta d\theta = c_r \begin{cases} \pi, & r=0 \\ \frac{\pi}{2}, & r \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

如果已有函数 $f(x)$ 的采样序列 $f_k = f(x_k), k=1, 2, \dots$, 用数值方法完成上式左端的积分 I_r 后即可解出 c_r 。

对于二元函数, 类似地有

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} c_{rs} T_r(x) T_s(y), \quad \forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \tag{1.3.23}$$

且式中的系数 c_{rs} 可由下式确定

$$\begin{aligned}
 I_{rs} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(x, y) T_r(x) T_s(y)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi f(\cos\varphi, \cos\theta) \cos r\varphi \cos s\theta d\varphi d\theta \\
 &= c_{rs} \begin{cases} \pi^2, & r=s=0 \\ \frac{\pi^2}{2}, & rs=0, r^2+s^2 \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{4}, & rs \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.3.24}$$

(2) 辨识方法

为了叙述方便, 考虑 $p(u, \dot{u})$ 的辨识问题。在利用 Chebyshev 多项式进行逼近之前, 先将所测得的系统状态归一化到 $[-1, 1]$ 上, 即引入新的状态变量采样序列

$$\begin{cases} x_k = \frac{2u_k - (u_{\min} + u_{\max})}{u_{\max} - u_{\min}} \\ y_k = \frac{2\dot{u}_k - (\dot{u}_{\min} + \dot{u}_{\max})}{\dot{u}_{\max} - \dot{u}_{\min}} \end{cases}, \quad k=1, 2, \dots \tag{1.3.25}$$

此时, 二维非线性力的采样序列可近似为

$$p(u_k, \dot{u}_k) \approx \tilde{p}(x_k, y_k) \approx \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n c_{rs} T_r(x_k) T_s(y_k) \tag{1.3.26}$$

其中 m 和 n 是根据 $p(u_k, \dot{u}_k)$ 的波动情况所选定的截断阶次, 通常取 $m, n=3 \sim 5$ 已足够。显然, 只要确定了式(1.3.26)中的未知系数 c_{rs} , 即获得所需二维非线性力的逼近

$$p(u, \dot{u}) \approx \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n c_{rs} T_r\left(\frac{2u - u_{\min} - u_{\max}}{u_{\max} - u_{\min}}\right) T_s\left(\frac{2\dot{u} - \dot{u}_{\min} - \dot{u}_{\max}}{\dot{u}_{\max} - \dot{u}_{\min}}\right) \tag{1.3.27}$$

确定系数 c_{rs} 的方法有如下两种:

a. 注意到式(1.3.26)关于未知参数 c_{rs} 是线性的, 因此可运用本节 1.3.1 中的最小二乘方法进行参数估计。这种处理方法比较简便, 但当乘积 mn 比较大时容易产生病态估计。

b. 通过计算式(1.3.24)中的积分 I_{rs} 来确定 c_{rs} , I_{rs} 的数值近似为

$$I_{rs} = \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{p}(\cos\varphi, \cos\theta) \cos r\varphi \cos s\theta d\varphi d\theta$$

$$\approx \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \tilde{p}(\cos(ir\Delta\varphi), \cos(js\Delta\theta)) \cos(ir\Delta\varphi) \cos(js\Delta\theta) \Delta\varphi \Delta\theta \quad (1.3.28)$$

其中 $\Delta\varphi = \pi/M, \Delta\theta = \pi/N$, M 和 N 是沿 u 和 \dot{u} 方向所取的数值积分步数。显然, 测量到的 $p(u_k, \dot{u}_k)$ 并不与式(1.3.28)中的 $\tilde{p}(\cos(ir\Delta\varphi), \cos(js\Delta\theta))$ 重合。因此, 计算上述积分时要通过对 $p(u_k, \dot{u}_k)$ 插值获得 $\tilde{p}(\cos(ir\Delta\varphi), \cos(js\Delta\theta))$ [4]。出于这种考虑, 实验时应采用随机激励, 以求获得区域 $[u_{\min}, u_{\max}] \times [\dot{u}_{\min}, \dot{u}_{\max}]$ 上尽可能均匀的测量值 $p(u_k, \dot{u}_k)$ 。

1.3.3 模型的可靠性*

通过实验建立的模型是否可靠至关重要。为此, 特将作者在实验建模研究中为提高模型可靠性所作的一些尝试归纳如下。

(1) 充分利用先验信息

本书的研究对象是工程中的非线性动力系统, 其中相当一部分是人造系统。因此, 在建模前总有若干先验信息。充分利用这些信息可使黑箱问题向灰箱问题转化, 减少建模的盲目性, 提高模型的可靠性及精度。例如:

a. 非线性系统通常具有多种平衡态和稳态运动。如果已知系统的工作范围, 则可在建模实验中选择适宜的激励, 使系统尽可能接近实际工作状态。基于这种实测数据建立的模型自然最能反映系统运行中的动力学行为。

b. 对于不同的动力系统, 建模的目的可能是不同的, 所建的模型也有所不同。以系统的动力学分析为例, 只要模型能反映系统的主要动力学特性即可。在允许的条件下应忽略模型中的次要项, 特别是具有很小系数的高阶非线性项。因为在实验中, 次要项的贡献比较微弱, 一般很难准确辨识。

c. 对于非线性力的建模, 应在选择建模方法前先观察一下实验数据。一般来说, 从位移与非线性力的关系或速度与非线性力的关系中能观察到非线性的强弱, 以及系统是否具有间隙、干摩擦等典型的非线性因素。对于多数工程实际问题, 这种观察可有助于将建模问题简化为参数估计问题。

d. 通常, 模型中的未知参数越多, 参数估计中越容易产生病态解。因此, 可先通过静态测量获得系统的质量、间隙等参数作为先验信息, 减少动力学模型中待确定的未知参数。这正是本节所用的方程(1.3.1)已作质量归一处理的原因。

(2) 尽可能提高测试数据的信噪比

采样数据中的各种测试误差对建模有很大影响。为了减小这种影响, 应尽可能提高数据的信噪比。例如:

- 所使用的位移、速度和加速度采样序列最好是直接测量所得;
- 尽可能不用数值微分方法从位移获得速度, 或从速度获得加速度;
- 如果由于传感器种类的限制而需要从加速度积分获得速度, 或从速度积分获得位移,

选择采样频率（间隔）时应兼顾数值积分的精度，并采用数字滤波消除由于数值积分引起的零漂和趋势项。

由于测量仪器和采样系统的误差与待建模的系统无关，系统处于共振状态时所测得的响应数据具有比较高的信噪比。因此，实验中应尽可能使系统处于某种共振状态。如果在实验中采用宽频带激励，则将采样序列变换到频域，共振频带内的数据具有比较高的信噪比。由此，引出了非线性系统建模的频域方法^[7]。对于线性参数估计问题，仍可类似于本节 1.3.1 用最小二乘法获得参数估计。

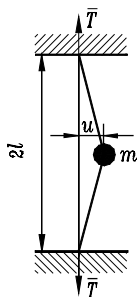
(3) 对模型进行检验

为了保证所建模型的可靠性，下述检验是必须的：

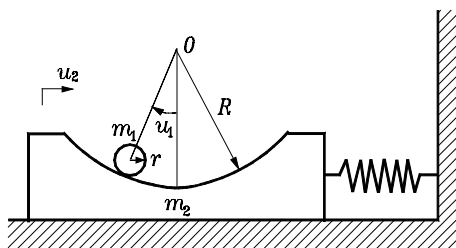
- a. 将实测的响应与根据模型计算出的响应进行对比；
- b. 考察不同模型阶次对识别结果的影响；
- c. 改变激励幅值或频率进行重复实验检验。

习 题

- 1 图示质量块 m 连接于长为 $2l$ 的金属丝中点，位于无重力环境中。已知金属丝的截面积为 A ，弹性模量为 E ，初始张力为 \bar{T} 。
 - (1) 建立质量块沿 u 方向作大位移运动的微分方程；
 - (2) 证明 $|u| \ll l$ 时，该方程可近似为 Duffing 系统。



题 1 图



题 2 图

- 2 图示圆柱体 m_1 在上表面为圆弧的质量块 m_2 上作纯滚动，略去 m_2 与地面间的摩擦，用 Lagrange 方法建立系统的运动微分方程组。
- 3 用 Schiehlen-Kreuzer 方法建立双物理摆的运动微分方程组。
- 4 周边固支的圆板受到横向均布载荷 $f(t) = f_0 \cos \omega t$ 激励，板的半径为 R ，厚度为 h ，材料的弹性模量和泊松比分别为 E 和 μ 。
 - (1) 建立圆板的大挠度振动偏微分方程；
 - (2) 用 Galerkin 方法和基频模态将其化简为单自由度常微分方程。

- 5 如果题 4 中圆板作小挠度振动，但其材料具有非线性本构关系

$$\sigma = E(\varepsilon + \alpha\varepsilon^3 + \beta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t})$$

- (1) 建立圆板的小挠度振动偏微分方程；
(2) 用 Galerkin 方法和基频模态将其化简为单自由度常微分方程。

- 6 两人一组完成如下非线性联接件的实验建模

$$p(u, \dot{u}) = k_1 u + k_3 u^3 + c_1 \dot{u} + k_2 \begin{cases} 0, & |u| \leq \delta \\ (u - \delta \operatorname{sgn} u), & |u| > \delta \end{cases}$$

每人秘密选择一组参数 $(k_1, k_2, k_3, \delta, c_1)$ ，然后对联接件施加正弦位移激励 $u(t) = u_0 \sin 20\pi t$, $u_0 > \delta$ ，通过数值计算获得采样序列 $u_k, \dot{u}_k, p_k, k = 1, 2, \dots, N$ 。将数据给对方，由其辨识联接件的参数。

- 7 在题 6 的仿真数据中分别叠加 5% 和 10% 的白噪声，再次辨识联接件的参数，并对诸参数的识别精度进行讨论。
8 考察一两端简支梁，其一端支座的螺钉发生了松动，使梁作横向运动时呈现间隙引起的碰撞振动。试构思一个动力学建模实验来确定间隙的大小。

第3章 单自由度自治系统的定量分析

本章介绍几种求解单自由度自治系统的定量分析方法，其主要适用对象是下述弱非线性自治系统的初值问题

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \varepsilon p(u(t), \dot{u}(t)) \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.1a)$$

$$(3.1.1b)$$

式中 ε 是满足条件 $|\varepsilon| \ll 1$ 的任意小参数， $p(u, \dot{u})$ 是光滑的二元函数。如果 ε 不是小参数，即系统具有强非线性，则需根据系统的特点对这些方法进行改造。由于对时间坐标作平移不会改变自治系统的形式，以下将时间起点选在初速为零时刻，且一般不再写出解函数 $u(t)$ 的自变量 t ，以求行文简便。

当 $\varepsilon = 0$ 时，系统(3.1.1)退化为派生系统，其运动

$$u_0 = a_0 \cos \omega_0 t \quad (3.1.2)$$

称作**派生解**。本章将要介绍的几种主要定量分析方法都是研究 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时非线性因素对系统运动的影响，获得对派生解(3.1.2)的某种修正。

3.1 摄动法

3.1.1 直接摄动法

由于方程(3.1.1)含有小参数 ε ，方程的解 u 自然依赖于参数 ε ，从而形如 $u(t, \varepsilon)$ 。将其展开为 ε 的幂级数

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \quad (3.1.3)$$

这可视为计入非线性影响后对派生解 u_0 的一种修正。这种在简单问题的解附近求解困难问题级数解的方法称为**摄动法**，源于 19 世纪末 Poincaré 研究天体力学问题。

为了确定上式中的未知函数 $u_1(t), u_2(t), \cdots$ ，将式(3.1.3)代入初值问题(3.1.1)。此时，方程(3.1.1)的两端分别为

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega_0^2 u &= (\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \cdots) + \omega_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) \\ &= (\ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0) + \varepsilon (\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) + \varepsilon^2 (\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) + \cdots \end{aligned} \quad (3.1.4a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon p(u, \dot{u}) &= \varepsilon p(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon^2 \dot{u}_2 + \cdots) \\ &= \varepsilon p(u_0, \dot{u}_0) + \varepsilon^2 [p_1(u_0, \dot{u}_0) u_1 + p_2(u_0, \dot{u}_0) \dot{u}_1] + \cdots \end{aligned} \quad (3.1.4b)$$

其中 $p_1(u_0, \dot{u}_0)$ 和 $p_2(u_0, \dot{u}_0)$ 分别是函数 $p(u, \dot{u})$ 在 (u_0, \dot{u}_0) 处关于 u 和 \dot{u} 的偏导数。因此，初值问题(3.1.1)成为

$$\begin{cases} (\ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0) + \varepsilon(\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1) + \varepsilon^2(\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2) + \cdots \\ = \varepsilon p(u_0, \dot{u}_0) + \varepsilon^2[p_1(u_0, \dot{u}_0)u_1 + p_2(u_0, \dot{u}_0)\dot{u}_1] + \cdots \\ u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + \cdots = a_0, \quad \dot{u}_0(0) + \varepsilon \dot{u}_1(0) + \varepsilon^2 \dot{u}_2(0) + \cdots = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

根据 ε 的任意性, 式中 ε 同次幂的系数必然自行平衡, 从而有

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad \dot{u}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.6a)$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = p(u_0, \dot{u}_0) \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.6b)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = p_1(u_0, \dot{u}_0)u_1 + p_2(u_0, \dot{u}_0)\dot{u}_1 \\ u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.6c)$$

这是一组可依次求解的线性常微分方程初值问题, 每一个都是读者所熟悉的线性无阻尼系统振动问题, 将它们的解代回式(3.1.3)即获得对派生解的修正。这种方法称作**直接摄动法**。

例 3.1.1 考察二次非线性系统的自由振动问题

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \omega_0^2 u^2 = 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

试用直接摄动法求解一次近似解。

解: 该问题的零次近似就是派生解

$$u_0 = a_0 \cos \omega_0 t \quad (b)$$

将其代入式(3.1.6b)并对方程右端三角函数的平方进行积化和差, 得到

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = -\frac{\omega_0^2 a_0^2}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t) \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (c)$$

求解该线性微分方程初值问题, 得到

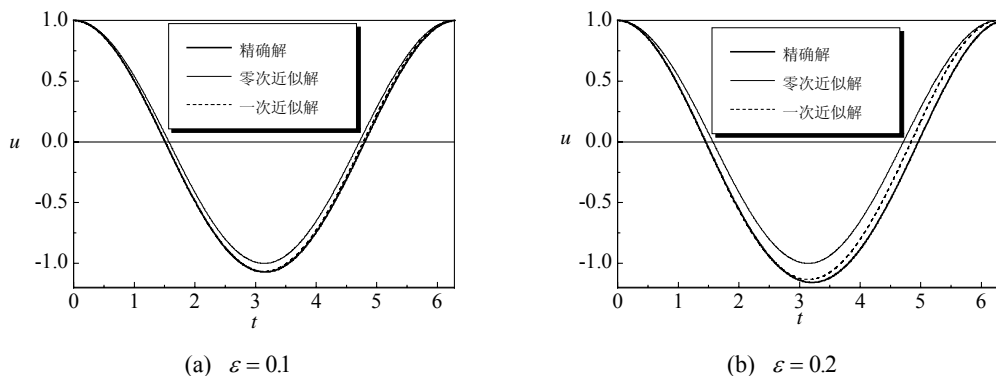
$$u_1(t) = \frac{a_0^2}{6}(-3 + 2 \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t) \quad (d)$$

所以, 系统自由振动的一次近似为

$$u(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{\varepsilon a_0^2}{6}(-3 + 2 \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t) \quad (e)$$

由此结果可见, 二次非线性因素使系统的自由振动出现了直流和二次谐波成分, 不再对称于系统的平衡位置。

采用 8.1 节将要介绍的 Runge-Kutta 法求得该系统的数值解, 在一个周期范围内与零次近似解和一次近似解对比于图 3.1.1。由图可明显看到上述不对称现象, 并且一次近似解的确计入了弱非线性因素对系统的影响。随着小参数 ε 的增加, 一次近似解的精度将下降。


 图 3.1.1 具有二次非线性系统的自由振动位移时间历程 ($a_0 = 1$, $\omega_0 = 1$)

例 3.1.2 用直接摄动法求解如下 Duffing 系统自由振动的一次近似

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \omega_0^2 u^3 = 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

解：将派生解(3.1.2)代入式(3.1.6b)，对方程右端三角函数的立方进行积化和差，得到

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = -\frac{\omega_0^2 a_0^3}{4} (3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (b)$$

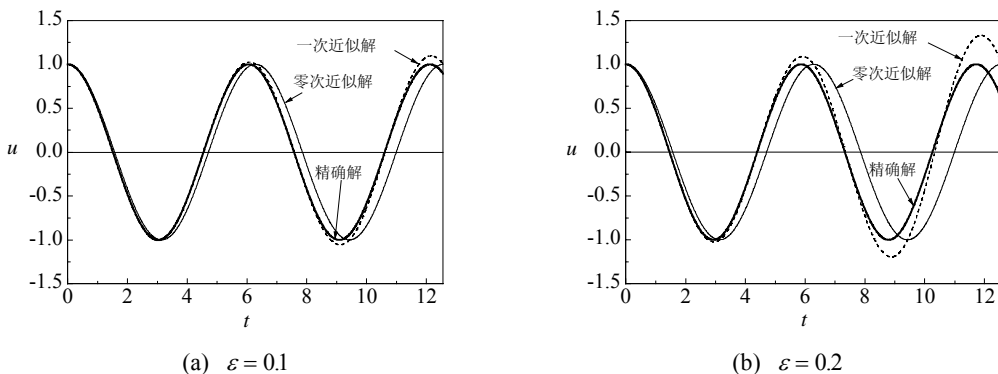
由此解得

$$u_1(t) = \frac{a_0^3}{32} (-\cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) - \frac{3\omega_0 a_0^3}{8} t \sin \omega_0 t \quad (c)$$

所以，Duffing 系统自由振动的一次近似为

$$u(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \varepsilon \left[\frac{a_0^3}{32} (-\cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) - \frac{3\omega_0 a_0^3}{8} t \sin \omega_0 t \right] \quad (d)$$

应注意的是，该近似解只在 $t \in [0, 1/\varepsilon]$ 时有效。随着时间增加，式(d)会因永年项 $t \sin \omega_0 t$ 的存在而趋于无穷。图 3.1.2 给出了精确解与零次、一次近似解的比较。


 图 3.1.2 Duffing 系统的自由振动位移时间历程 ($a_0 = 1$, $\omega_0 = 1$)

根据第 2 章的分析, 像 Duffing 系统这样一个保守系统, 自非零初始状态出发的运动总是周期的。况且从能量角度看, 保守系统的振动总有界。因此, 即使没有精确解作为参照, 也可断言近似解出了问题。但问题何在呢?

从物理角度来说, Duffing 系统的自由振动频率 ω 是受非线性影响的, 而不是原来派生系统的固有频率 ω_0 。因此, 直接摄动法对解的形式假设有问题。读者若继续求解例 3.1.1 的二次近似, 就会发现它也存在永年项 $t \sin \omega_0 t$ 。只因平方非线性没有影响到系统自由振动频率的一次近似, 所以例 3.1.1 中的一次近似结果是正确的。

从数学角度看, 就是仅仅由派生解的周期性未必能保证原系统具有唯一周期解。若想保证后者的周期性和唯一性, 还需要附加一些条件^[9]。

从另一种数学角度看, 当周期振动的频率与非线性因素 ε 有关时, 按 ε 的幂级数展开总会遇到永年项。譬如, 当简谐振动的频率为 $\omega = (1 + \varepsilon)\omega_0$ 时, 其关于 ε 的展开为

$$\cos \omega t = \cos[(1 + \varepsilon)\omega_0 t] = \cos \omega_0 t - \varepsilon \omega_0 t \sin \omega_0 t + \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2 t^2}{2} \cos \omega_0 t + \cdots \quad (3.1.7)$$

一般地, 如果函数展开式中每一项与前一项之比很小, 则称之为**一致有效展开**。这类出现永年项的展开自然是**非一致有效展开**, 又称作**奇异摄动展开**。对于这种情况, 避免永年项的办法是在表达式中采用新的频率 ω 或新的时间 $\tau = \omega t$ 。由此, 引出了历史上对直接摄动法的各种改进, 形成了一系列**奇异摄动法**。

3.1.2 Lindstedt-Poincaré 摄动法

19 世纪末, Lindstedt 对 Poincaré 的直接摄动法作了重要的改进, 使其能获得自治系统周期振动的一致有效展开。现用一种形式不同、但易于理解的方式来叙述这种方法。

仍考虑系统(3.1.1)的周期解问题, 将解 $u(t)$ 和其振动频率的平方 ω^2 展开为 ε 的幂级数

$$\begin{cases} u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \\ \omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \cdots \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1.8a) \\ (3.1.8b) \end{matrix}$$

如果能确定未知的 $u_r(t), b_r, r = 1, 2, \dots$, 就可获得方程(3.1.1)在派生解附近的一个周期解以及对解的周期(频率)的修正。

将式(3.1.8a)和(3.1.8b)分别代入式(3.1.1a)和(3.1.1b), 得

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \cdots + (\omega^2 - \varepsilon b_1 - \varepsilon^2 b_2 + \cdots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) \\ = \varepsilon p(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon^2 \dot{u}_2 + \cdots) \end{aligned} \quad (3.1.9a)$$

$$\begin{cases} u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + \cdots = a_0 \\ \dot{u}_0(0) + \varepsilon \dot{u}_1(0) + \varepsilon^2 \dot{u}_2(0) + \cdots = 0 \end{cases} \quad (3.1.9b)$$

比较等式两端 ε 的同次幂系数, 得到一系列线性常微分方程的初值问题

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \ddot{u}_0 + \omega^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad \dot{u}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.10a)$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = p(u_0, \dot{u}_0) + b_1 u_0 \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.10b)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = p_1(u_0, \dot{u}_0)u_1 + p_2(u_0, \dot{u}_0)\dot{u}_1 + b_2 u_0 + b_1 u_1 \\ u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.10c)$$

这些线性微分方程初值问题可依次求解。

方程(3.1.10a)是一线性无阻尼系统自由振动问题，解出

$$u_0 = a_0 \cos \omega t \quad (3.1.11)$$

将其代入式(3.1.10b)，得到

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = p(a_0 \cos \omega t, -\omega a_0 \sin \omega t) + b_1 a_0 \cos \omega t \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{p}(t) \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.12)$$

显然，函数 $p(a_0 \cos \omega t, -\omega a_0 \sin \omega t)$ 是时间 t 的周期函数，函数 $\tilde{p}(t)$ 亦如此。这是一线性无阻尼系统在周期激励下的振动问题。将激励 $\tilde{p}(t)$ 展为 Fourier 级数

$$\tilde{p}(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} (\alpha_r \cos r\omega t + \beta_r \sin r\omega t) + b_1 a_0 \cos \omega t \quad (3.1.13)$$

系统(3.1.12)的响应由式(3.1.13)中各简谐激励引起的响应叠加而成。根据线性系统振动理论，若 $\tilde{p}(t)$ 中含有 $\cos \omega t$ 或 $\sin \omega t$ ，则无阻尼系统(3.1.13)的受迫响应中将含有 $t \cos \omega t$ 或 $t \sin \omega t$ 这样随时间增加趋于无穷的**永年项**，即该系统发生振幅无限的共振。欲使该系统作周期运动，需消除永年项。为此，令式(3.1.13)中 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 项的系数为零

$$\alpha_1 + b_1 a_0 = 0, \quad \beta_1 = 0 \quad (3.1.14)$$

此时，方程(3.1.12)成为

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = \alpha_0 + \sum_{r=2}^{+\infty} (\alpha_r \cos r\omega t + \beta_r \sin r\omega t) \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.15)$$

由式(3.1.14)可以得到对自由振动频率的修正 b_1 ，而由初值问题(3.1.15)得到对派生解的一阶修正 $u_1(t)$ 。再将结果代入式(3.1.10c)，可以类似地确定二阶修正 $u_2(t)$ 和 b_2 。

例 3.1.3 用 Lindstedt-Poincaré 摄动法求解下述 Duffing 系统自由振动的一次近似解

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \omega_0^2 u^3 = 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

解：将式(3.1.11)给出的零次近似代入方程(3.1.12)，对右端的 $\cos^3 \omega t$ 积化和差后得到

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = (b_1 - \frac{3}{4} \omega_0^2 a_0^2) a_0 \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega_0^2 a_0^3 \cos 3\omega t \quad (b)$$

为了消除永年项, 取

$$b_1 = \frac{3}{4} \omega_0^2 a_0^2 \quad (c)$$

在该条件下, 可确定一次修正 u_1 的初值问题为

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = -\frac{1}{4} \omega_0^2 a_0^3 \cos 3\omega t \\ u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (d)$$

解出

$$u_1 = \frac{\omega_0^2 a_0^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (e)$$

将上述 b_1 和 u_1 代回展开式(3.1.8), 得到自由振动的一次近似解

$$u = a_0 \cos \omega t + \frac{\varepsilon \omega_0^2 a_0^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (f)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3\omega_0^2 a_0^2}{4}} \approx \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{3a_0^2}{8}\right) \quad (g)$$

作者曾将数值积分方法所得到的精确解与之相对比, 直至 $\varepsilon = 0.4$ 时一次近似解均与精确解几乎完全重合。

由式(f)和(g)可见: 立方非线性使 Duffing 系统的自由振动包括了基频 ω 和三次谐波成分; 而基频 ω 不同于派生系统的固有频率 ω_0 , 当系统刚度渐硬($\varepsilon > 0$)时, ω 随着振幅 (亦即初位移) 的增加而增加, 刚度渐软时则相反。这些显著有别于线性系统的自由振动。

在历史上, Lindstedt-Poincaré 摄动法是求解自治系统周期解最早获得成功的方法。它的特点是简便, 但局限于求周期解。本章后几节将介绍的方法则可求解包括瞬态振动在内的自由振动。

3.2 平均法

仍研究初值问题(3.1.1)。首先, 对该系统状态引进一变换

$$u(t) = a(t) \cos \psi(t) \quad (3.2.1a)$$

$$\dot{u}(t) = -\omega_0 a(t) \sin \psi(t) \quad (3.2.1b)$$

其中

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 t + \varphi(t) \quad (3.2.2)$$

将式(3.2.2)代入式(3.2.1)后对时间 t 求导数, 得到

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \dot{a}(t) \cos \psi(t) - a(t) \sin \psi(t) [\omega_0 + \dot{\varphi}(t)] \\ \ddot{u}(t) = -\omega_0 \{ \dot{a}(t) \sin \psi(t) + a(t) \cos \psi(t) [\omega_0 + \dot{\varphi}(t)] \} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

将(3.2.1b)和(3.1.1a)代入上式, 得到未知函数 $\dot{a}(t)$ 和 $\dot{\varphi}(t)$ 的线性代数方程

$$\begin{cases} \cos \psi(t) \dot{a}(t) - a(t) \sin \psi(t) \dot{\varphi}(t) = 0 \\ \sin \psi(t) \dot{a}(t) + a(t) \cos \psi(t) \dot{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} p(a(t) \cos \psi(t), -\omega_0 a(t) \sin \psi(t)) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

解出

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} p(a(t) \cos \psi(t), -\omega_0 a(t) \sin \psi(t)) \sin \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a(t)} p(a(t) \cos \psi(t), -\omega_0 a(t) \sin \psi(t)) \cos \psi(t) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

至此, 已用变换(3.2.1)将二阶非线性微分方程(3.1.1a)等价地转化为一阶非线性微分方程组(3.2.5)。虽然这并没有解决问题, 但式(3.2.5)说明: 如果系统的运动形如式(3.2.1), 则其振幅 $a(t)$ 和相位 $\varphi(t)$ 随时间的变化是 ε 的同阶小量; 与 $\psi(t)$ 相比, 它们是缓慢变化的。

为简化问题, 可用式(3.2.5)在 $\psi(t)$ 变化一周内的平均值来代替其慢变的真值, 将式(3.2.5)改写为

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \dot{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (3.2.6a)$$

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \dot{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (3.2.6b)$$

这样, 式(3.2.6)右端仅含未知振幅 a 。式(3.2.6a)成为振幅 a 的可分离变量一阶微分方程, 解出振幅 $a(t)$ 后代入式(3.2.6b), 积分得到相位 $\varphi(t)$ 。如果求稳态振动, $\dot{a}(t) = 0$ 使得式(3.2.6a)成为定常振幅 a 的代数方程, 解出 a 后同样代入式(3.2.6b), 积分得到相位 $\varphi(t)$ 。最后, 将 a 和 φ 代回式(3.2.2)和(3.2.1), 得到近似解。

值得指出, 此处的平均法导出过程基于直观, 只计入了 ε 的一次近似。Krylov 等学者根据严格的渐近分析, 提出了可计入 ε 高次近似的平均法^[10]。

例 3.2.1 考察含有幂次阻尼的单自由度系统

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u = -\varepsilon |\dot{u}|^{n-1} \dot{u}, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

用平均法求解其自由振动的一次近似。

解: 根据式(3.2.6)及三角函数乘幂的积分公式

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} |-\omega_0 a \sin \psi|^{n-1} (-\omega_0 a \sin \psi) \sin \psi d\psi = -\frac{\varepsilon \omega_0^{n-1} |a|^{n-1} a}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \psi|^{n-1} \sin^2 \psi d\psi$$

$$= \begin{cases} -\varepsilon \frac{2n!!}{\pi(n+1)!!} a^n \omega_0^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \\ -\varepsilon \frac{n!!}{(n+1)!!} a^n \omega_0^{n-1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (\text{b})$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 \quad (\text{c})$$

将上述结果代入式(3.2.1a)，得到一次近似解

$$u = a(\varepsilon t) \cos \omega_0 t \quad (\text{d})$$

由此可见：在一次近似意义下，小阻尼仅影响系统自由振动的振幅，而不影响其频率。以下考察不同阻尼对自由振动幅值变化的影响。

a. $n=0$ (Coulomb 干摩擦)：此时式(b)为

$$\dot{a} = -\frac{2\varepsilon}{\pi\omega_0} \quad (\text{e})$$

积分得到线性衰减规律

$$a = a_0 - \frac{2\varepsilon}{\pi\omega_0} t \quad (\text{f})$$

b. $n=1$ (线性粘性阻尼)：此时式(b)为

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2} a \quad (\text{g})$$

分离变量后积分，得到指数衰减规律

$$a = a_0 e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \quad (\text{h})$$

c. $n=2$ (平方阻尼)：此时式(b)为

$$\dot{a} = -\frac{4\varepsilon\omega_0}{3\pi} a^2 \quad (\text{i})$$

分离变量后积分得到

$$a = \frac{3\pi a_0}{3\pi + 4\varepsilon\omega_0 a_0 t} \quad (\text{j})$$

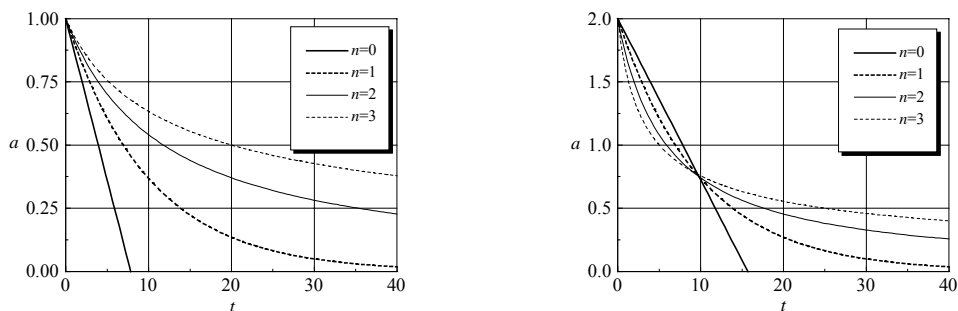
d. $n=3$ (立方阻尼)：此时式(b)为

$$\dot{a} = -\frac{3\varepsilon\omega_0^2}{8} a^3 \quad (\text{k})$$

分离变量后积分得到

$$a = a_0 \sqrt{\frac{4}{4 + 3\varepsilon\omega_0^2 a_0^2 t}} \quad (\text{l})$$

将各阻尼模型下的振幅衰减规律示于图 3.2.1，两种情况的位移初值分别为 $a_0=1$ 和 $a_0=2$ 。显见，平方和立方阻尼对大位移具有很强的衰减作用，而对小位移则作用减弱。


 图 3.2.1 不同阻尼模型的振幅衰减规律 ($\varepsilon=0.2$, $\omega_0=1$)

例 3.2.2 用平均法求解如下 van der Pol 系统的自激振动一次近似

$$\begin{cases} \ddot{u} + u = \varepsilon(1-u^2)\dot{u}, & \varepsilon > 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

解：根据式(3.2.6)，系统振动的慢变振幅和相位服从

$$\dot{a}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-a^2 \cos^2 \psi)(-a \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (b)$$

$$= \frac{\varepsilon a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \sin \psi - \frac{a^2}{4} \sin 3\psi \right] \sin \psi d\psi = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\dot{\varphi}(t) = 0 \quad (c)$$

将式(b)改写为

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon a^2 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (d)$$

分离变量后积分得

$$\ln \frac{a^2}{4-a^2} - \ln \frac{a_0^2}{4-a_0^2} = \varepsilon t \quad (e)$$

解出慢时变的振幅

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{4}(e^{\varepsilon t} - 1)}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}}} \quad (f)$$

而相位满足

$$\varphi(t) = \varphi(0) = 0 \quad (g)$$

从式(f)可见：对于任意初始扰动 $a_0 \neq 0$ ，系统的振动幅值都会趋于定常

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \left[1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t} \right]^{-1/2} = 2 \quad (h)$$

这一近似结果与图 2.4.2 中 $\varepsilon=0.1$ 时的精确相图非常吻合。

3.3 KBM 渐近法*

自 20 世纪 20 年代起,乌克兰基辅学派的数学家们对非线性常微分方程的渐近解法进行了深入研究。他们最有代表性的成果就是以 Krylov、Bogoliubov 和 Mitropolski 名字命名的 KBM 法。本节以初值问题式(3.1.1)为例来说明该方法的思路及实施步骤。

(1) 解的渐近展开式

根据平均法中等价变换后的方程(3.2.5)知:如果视初值问题式(3.1.1)描述的振动具有振幅和初相位时变的简谐形式,则振幅和初相位随时间的变化律是缓慢的,与 ε 的阶次相同。因此,可将方程(3.1.1)的解表示为如下三个 ε 的幂级数

$$\begin{cases} u = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \cdots & (3.3.1a) \\ \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots & (3.3.1b) \\ \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \cdots & (3.3.1c) \end{cases}$$

并要求

$$u_r(a, \psi) = u_r(a, \psi + 2\pi), \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.3.2)$$

与 Lindstedt-Poincaré 摄动法所采用的两个级数展开相比,此处对振幅变化率的展开使得所设的解可包括非周期振动,例如 van der Pol 系统的瞬态振动过程。

在求解之前,先讨论一下展开式(3.3.1)的精度问题。如果在式(3.3.1b)和(3.3.1c)中仅保留第一项, \dot{a} 和 $\dot{\psi}$ 将与 ε 同量级, a 和 ψ 发生显著变化所需的时间是 $1/\varepsilon$ 。在这段时间内, a 和 ψ 产生的误差与 ε^0 同量级。因此, $\varepsilon u_1(a, \psi)$ 对式(3.3.1a)的贡献将湮没在上述误差中,从而可忽略。依次类推,为了使近似解具有 ε^m 阶精度,需要将式(3.3.1b)和(3.3.1c)展开到 ε^m 次项,而将式(3.3.1a)展开到 ε^{m-1} 次项。

(2) 基本方程

为了获得确定 u_r, A_r, ψ_r 所需的方程,先计算式(3.3.1a)的各阶导数

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{a}(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \cdots) + \dot{\psi}(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \cdots) \\ \ddot{u} = \ddot{a}(\cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \cdots) + \ddot{\psi}(-a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \cdots) + \\ \quad \dot{a}^2(\varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \cdots) + 2\dot{a}\dot{\psi}(-\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \cdots) + \\ \quad \dot{\psi}^2(-a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \cdots) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

由式(3.3.1b)和(3.3.1c)可获得上述两式中对 a 和 ψ 的各阶导数

$$\begin{cases} \ddot{a} = (\varepsilon A_1' + \cdots) \dot{a} = (\varepsilon A_1' + \cdots)(\varepsilon A_1 + \cdots) = \varepsilon^2 A_1 A_1' + \cdots \\ \ddot{\psi} = (\varepsilon \omega_1' + \cdots) \dot{\psi} = (\varepsilon \omega_1' + \cdots)(\varepsilon A_1 + \cdots) = \varepsilon^2 \omega_1' A_1 + \cdots \\ \dot{a}^2 = (\varepsilon A_1 + \cdots)^2 = \varepsilon^2 A_1^2 + \cdots \\ \dot{a} \dot{\psi} = (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 \cdots)(\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \cdots) = \varepsilon \omega_0 A_1 + \varepsilon^2 (\omega_0 A_2 + \omega_1 A_1) + \cdots \\ \dot{\psi}^2 = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots)^2 = \omega_0^2 + \varepsilon (2\omega_0 \omega_1) + \varepsilon^2 (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) + \cdots \end{cases} \quad (3.3.4)$$

式中 $(\cdot)'$ 代表对 a 求导。将式(3.3.4)代入式(3.3.3)并按 ε 的升幂排列, 得到

$$\begin{cases} \ddot{u} = -a\omega_0 \sin \psi + \varepsilon (A_1 \cos \psi - a\omega_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi}) + \\ \quad \varepsilon^2 (A_2 \cos \psi - a\omega_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi}) + \cdots \\ \ddot{u} = -a\omega_0^2 \cos \psi + \varepsilon (-2\omega_0 A_1 \sin \psi - 2a\omega_0 \omega_1 \cos \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2}) + \\ \quad \varepsilon^2 [(A_1 A_1' - a\omega_1^2 - 2a\omega_0 \omega_2) \cos \psi - (2\omega_0 A_2 + 2A_1 \omega_1 + aA_1 \omega_1') \sin \psi + \\ \quad 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2}] + \cdots \end{cases} \quad (3.3.5)$$

将式(3.3.5)代入方程(3.1.1a), 则其左右端分别为

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega_0^2 u &= \varepsilon (-2\omega_0 A_1 \sin \psi - 2a\omega_0 \omega_1 \cos \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_1) + \\ &\quad \varepsilon^2 [(A_1 A_1' - a\omega_1^2 - 2a\omega_0 \omega_2) \cos \psi - (2\omega_0 A_2 + 2A_1 \omega_1 + aA_1 \omega_1') \sin \psi + \\ &\quad 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_2] + \cdots \end{aligned} \quad (3.3.6a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon p(u, \dot{u}) &= \varepsilon p(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + \varepsilon^2 [p_1(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) u_1 + \\ &\quad p_2(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) (A_1 \cos \psi - a\omega_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi})] + \cdots \end{aligned} \quad (3.3.6b)$$

其中 p_1 和 p_2 代表二元函数 p 的两个偏导数。根据 ε 的任意性, 令方程两端 ε 同次幂相等得到确定 $u_r, A_r, \omega_r, r=1,2$ 所需的线性偏微分方程

$$\omega_0^2 (\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1) = f_0(a, \psi) + 2\omega_0 A_1 \sin \psi + 2a\omega_0 \omega_1 \cos \psi \quad (3.3.7a)$$

$$\omega_0^2 (\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + u_2) = f_1(a, \psi) + 2\omega_0 A_2 \sin \psi + 2a\omega_0 \omega_2 \cos \psi \quad (3.3.7b)$$

其中

$$f_0(a, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} p(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \quad (3.3.8a)$$

$$\begin{aligned}
f_1(a, \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} p_1(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) u_1 + \\
&\quad p_2(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) (A_1 \cos \psi - a \omega_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi}) + \\
&\quad (a \omega_1^2 - A_1 A_1') \cos \psi + (2 A_1 \omega_1 + a A_1 \omega_1') \sin \psi - \\
&\quad 2 \omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2 \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2}
\end{aligned} \tag{3.3.8b}$$

显然, $f_0(a, \psi), f_1(a, \psi)$ 均是关于变量 ψ 的函数, 并以 2π 为周期。根据消除永年项的条件, 可依次求解式(3.3.7)中的方程。

(3) 求解过程

现以求解二次近似为例来说明求解过程。

a. 将 $f_0(a, \psi)$ 和 $u_1(a, \psi)$ 展开为 Fourier 级数

$$\begin{cases} f_0(a, \psi) = g_{00}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} [g_{0r}(a) \cos r\psi + h_{0r}(a) \sin r\psi] \\ u_1(a, \psi) = v_{10}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} [v_{1r}(a) \cos r\psi + w_{1r}(a) \sin r\psi] \end{cases} \tag{3.3.9}$$

将其代入式(3.3.7a)得

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2 v_{10}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} \omega_0^2 (1 - r^2) [v_{1r}(a) \cos r\psi + w_{1r}(a) \sin r\psi] \\
&= g_{00}(a) + [g_{01}(a) + 2a\omega_0\omega_1] \cos \psi + [h_{01}(a) + 2\omega_0 A_1] \sin \psi + \\
&\quad \sum_{r=2}^{+\infty} [g_{0r}(a) \cos r\psi + h_{0r}(a) \sin r\psi]
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

比较一次谐波的系数可得到消除方程(3.3.7a)永年项的条件

$$\omega_1 = -\frac{g_{01}(a)}{2a\omega_0}, \quad A_1 = -\frac{h_{01}(a)}{2\omega_0} \tag{3.3.11}$$

将(3.3.11)代回展开式(3.3.1)并具体写出 $f_0(a, \psi)$ 的 Fourier 展开基波系数, 得到解的一次近似

$$\begin{cases} u = a \cos \psi \\ \dot{a} = -\varepsilon \frac{h_{01}(a)}{2\omega_0} = -\frac{\varepsilon}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \dot{\psi} = \omega_0 - \varepsilon \frac{g_{01}(a)}{2a\omega_0} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi \omega_0 a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \tag{3.3.12}$$

这与平均法所得一次近似解(3.2.6)完全相同。

b. 为了求解二次近似, 比较式(3.3.10)中高次谐波的系数, 得到

$$v_{10} = \frac{g_{00}(a)}{\omega_0^2}, \quad v_{1r} = \frac{g_{0r}(a)}{(1-r^2)\omega_0^2}, \quad w_{1r} = \frac{h_{0r}(a)}{(1-r^2)\omega_0^2}, \quad r = 2, 3, \dots \tag{3.3.13}$$

由于式(3.3.10)右端的基波自相平衡, 因此方程(3.3.7a)的特解为

$$u_1(a, \psi) = \frac{1}{\omega_0^2} \{g_{00}(a) + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{(1-r^2)} [g_{0r}(a) \cos r\psi + h_{0r}(a) \sin r\psi]\} \quad (3.3.14)$$

这样就有了计算式(3.3.8b)中 $f_1(a, \psi)$ 所需的全部函数。将 $f_1(a, \psi)$ 和 $u_2(a, \psi)$ 展开为 Fourier 级数

$$\begin{cases} f_1(a, \psi) = g_{10}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} [g_{1r}(a) \cos r\psi + h_{1r}(a) \sin r\psi] \\ u_2(a, \psi) = v_{20}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} [v_{2r}(a) \cos r\psi + w_{2r}(a) \sin r\psi] \end{cases} \quad (3.3.15)$$

将其代入式(3.3.7b)得

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 v_{20}(a) + \sum_{r=1}^{+\infty} \omega_0^2 (1-r^2) [v_{2r}(a) \cos r\psi + w_{2r}(a) \sin r\psi] \\ &= g_{10}(a) + [g_{11}(a) + 2a\omega_0\omega_2] \cos \psi + [h_{11}(a) + 2\omega_0 A_2] \sin \psi + \\ & \sum_{r=2}^{+\infty} [g_{1r}(a) \cos r\psi + h_{1r}(a) \sin r\psi] \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

比较一次谐波的系数可得到消除方程(3.3.7b)永年项的条件

$$\omega_2 = -\frac{g_{11}(a)}{2a\omega_0}, \quad A_2 = -\frac{h_{11}(a)}{2\omega_0} \quad (3.3.17)$$

将式(3.1.14)和(3.3.17)代回展开式(3.3.1), 得到解的二次近似

$$\begin{cases} u = a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} \{g_{00}(a) + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{(1-r^2)} [g_{0r}(a) \cos r\psi + h_{0r}(a) \sin r\psi]\} \\ \dot{a} = -\varepsilon \frac{h_{01}(a)}{2\omega_0} - \varepsilon^2 \frac{h_{11}(a)}{2\omega_0} \\ \dot{\psi} = \omega_0 - \varepsilon \frac{g_{01}(a)}{2a\omega_0} - \varepsilon^2 \frac{g_{11}(a)}{2a\omega_0} \end{cases} \quad (3.3.18)$$

例 3.3.1 用 KBM 法求解如下 Duffing 系统自由振动的二次近似解

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \omega_0^2 u^3 = 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

解: 为了叙述方便, 将求解过程分为三步。

a. 将方程(a)与式(3.1.1)对比知 $p(u, \dot{u}) = -\omega_0^2 u^3$, 从而由式(3.3.8a)和三角函数关系得

$$f_0(a, \psi) = -\omega_0^2 a^3 \cos^3 \psi = -\frac{\omega_0^2 a^3}{4} (3 \cos \psi + \cos 3\psi) \quad (b)$$

这说明在 $f_0(a, \psi)$ 的 Fourier 系数中, 仅有如下两项非零

$$g_{01}(a) = -\frac{3\omega_0^2 a^3}{4}, \quad g_{03}(a) = -\frac{\omega_0^2 a^3}{4} \quad (c)$$

根据式(3.3.11), 得到对振幅和频率变化率的一阶修正量

$$A_1(a) = 0, \quad \omega_1(a) = -\frac{g_{01}(a)}{2a\omega_0} = \frac{3\omega_0 a^2}{8} \quad (d)$$

b. 根据式(3.3.14)和式(c), 位移的一阶修正为

$$u_1(a, \psi) = \frac{a^3}{32} \cos 3\psi \quad (e)$$

将式(d)和(e)代入式(3.3.8b), 整理得到

$$\begin{aligned} f_1(a, \psi) &= (-3\omega_0^2 a^2 \cos^2 \psi) \left(\frac{a^3}{32} \cos 3\psi \right) + a \left(\frac{3\omega_0 a^2}{8} \right)^2 \cos \psi + 2\omega_0 \left(\frac{3\omega_0 a^2}{8} \right) \left(\frac{9a^3}{32} \cos 3\psi \right) \\ &= \frac{\omega_0^2 a^5}{128} (-12 \cos^2 \psi \cos 3\psi + 18 \cos \psi + 27 \cos 3\psi) \\ &= \frac{\omega_0^2 a^5}{128} (15 \cos \psi + 21 \cos 3\psi - 3 \cos 5\psi) \end{aligned} \quad (f)$$

即

$$g_{11}(a) = \frac{15\omega_0^2 a^5}{128}, \quad h_{11}(a) = 0 \quad (g)$$

代入式(3.3.17), 得到振幅和频率变化率的二次修正

$$A_2(a) = 0, \quad \omega_2(a) = -\frac{g_{11}(a)}{2a\omega_0} = -\frac{15\omega_0 a^4}{256} \quad (h)$$

代回展开式(3.3.1)并积分, 得到二次近似解形如

$$\begin{cases} u = a \cos \psi + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3\psi \\ a = \text{const.} \\ \psi = (1 + \varepsilon \frac{3a^2}{8} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256}) \omega_0 t \end{cases} \quad (i)$$

c. 最后, 根据初始条件来确定常数 a 。显然

$$a + \varepsilon \frac{a^3}{32} = u(0) = a_0 \quad (j)$$

这是关于未知量 a 的三次代数方程。因 $\varepsilon = 0$ 时 $a = a_0$, 故可设该方程的解为

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots \quad (k)$$

将其代入式(j)后比较 ε 的同次幂, 解得

$$a_1 = -\frac{a_0^3}{32} \quad (l)$$

从而有

$$a = a_0 - \varepsilon \frac{a_0^3}{32} + \dots \quad (\text{m})$$

将其代回到式(i), 则二次近似解成为

$$\begin{cases} u = a_0 \cos \psi + \varepsilon \frac{a_0^3}{32} (\cos 3\psi - \cos \psi) \\ \psi = (1 + \varepsilon \frac{3a^2}{8} - \varepsilon^2 \frac{15a^4}{256}) \omega_0 t \end{cases} \quad (\text{n})$$

3.4 多尺度法

根据 3.1 节的分析, 自治系统周期振动的频率可展开为 ε 的幂级数, 故其相位形如

$$\omega t = \omega_0 t + \omega_1 t \varepsilon + \omega_2 t \varepsilon^2 + \dots = \omega_0 t + \omega_1(\varepsilon t) + \omega_2(\varepsilon^2 t) + \dots \quad (3.4.1)$$

20 世纪 50 年代, 美国学者 Sturrock 最早引入一系列越来越慢的时间尺度

$$T_r \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r t, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4.2)$$

并视这些时间尺度为独立变量, 将方程(3.1.1)的解表示成

$$u(t) = u_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (3.4.3)$$

形成了寻求不同阶次近似解采用不同时间尺度的思想。

现以初值问题(3.1.1)为例来介绍多尺度法。首先定义偏导数算子表示导数算子

$$\frac{d}{dt} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{dT_r}{dt} \frac{\partial}{\partial T_r} = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \frac{\partial}{\partial T_r} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r D_r \quad (3.4.4a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r D_r \left(\sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s D_s \right) = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (3.4.4b)$$

将式(3.4.3)和(3.4.4)代入方程(3.1.1a), 比较 ε 同次幂的系数得一系列线性偏微分方程

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (3.4.5a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + p(u_0, D_0 u_0) \quad (3.4.5b)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = & -(D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 2D_1 D_0 u_1 + \\ & p_1(u_0, D_0 u_0) u_1 + p_2(u_0, D_0 u_0) (D_1 u_0 + D_0 u_1) \end{aligned} \quad (3.4.5c)$$

显然, 这组方程可依次求解。

现具体求解上述线性偏微分方程。首先易见, 方程(3.4.5a)的解形如

$$u_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos[\omega_0 T_0 + \varphi(T_1, T_2, \dots)] \quad (3.4.6)$$

为了求解 u_1 的方便, 将上式写作复数形式

$$u_0 = A(T_1, T_2, \dots) e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc} \quad (3.4.7)$$

其中 cc 代表其前面各项的共轭，后不赘述。将这一解代入方程(3.4.5b)，得到

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2j\omega_0 D_1 A e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc} + p(A e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc}, j\omega_0 A e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc}) \quad (3.4.8)$$

这可理解为周期激励下的无阻尼系统。为了不出现永年项，上式右端不能含有 $e^{j\omega_0 T_0}$ 或 $e^{-j\omega_0 T_0}$ 这样的项，即要求上式右端的 Fourier 系数为零

$$-2j\omega_0 D_1 A + \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} p(A e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc}, j\omega_0 A e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc}) e^{-j\omega_0 T_0} dT_0 = 0 \quad (3.4.9)$$

记

$$A(T_1, T_2, \dots) = \frac{a(T_1, T_2, \dots)}{2} e^{j\varphi(T_1, T_2, \dots)} \quad (3.4.10)$$

将其代入式(3.4.9)，得到该条件的三角函数形式

$$j(D_1 a + ja D_1 \varphi) = \frac{1}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) (\cos \psi - j \sin \psi) d\psi \quad (3.4.11)$$

分离上式的实部和虚部得到

$$\begin{cases} D_1 a = -\frac{1}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ D_1 \varphi = -\frac{1}{2\pi \omega_0 a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (3.4.12)$$

在这组条件下求解方程(3.4.8)，得到一次修正 $u_1(T_0, T_1, \dots)$ ，连同 $u_0(T_0, T_1, \dots)$ 一起代入方程(3.4.5c)，类似地定出消除永年项的条件，进而解出 $u_2(T_0, T_1, \dots)$ 。

不难发现，式(3.4.12)与平均法得到的一次近似振幅和相位方程(3.2.6)相同。形式上的差异在于：平均法中振幅和相位以 t 为自变量，而此处则以 $T_1 = \varepsilon t$ 为自变量，从而其导数之间差 ε 倍。

例 3.4.1 用多尺度法求解如下 van der Pol 系统自激振动的二次近似

$$\begin{cases} \ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u}, & \varepsilon > 0 \\ u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

解：为了求解二次近似，需要用三个时间尺度 T_0, T_1 和 T_2 ，设解为

$$u(t) = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) \quad (b)$$

将方程(a)与方程(3.4.5)相对照，得到

$$\begin{cases} D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \\ D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 \\ D_0^2 u_2 + u_2 = -(D_1^2 + 2D_0 D_2) u_0 - 2D_1 D_0 u_1 - 2u_0 u_1 D_0 u_0 + (1 - u_0^2)(D_1 u_0 + D_0 u_1) \end{cases} \quad (c)$$

式(c)中第一个方程的解为

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{jT_0} + \text{cc} \quad (\text{d})$$

将式(d)代入式(c)中第二个方程, 略加整理后得到

$$D_0^2 u_1 + u_1 = j(-2D_1 A + A - A^2 \bar{A})e^{jT_0} - jA^3 e^{j3T_0} + \text{cc} \quad (\text{e})$$

其中 \bar{A} 代表 A 的共轭。消除永年项的条件是

$$-2D_1 A + A - A^2 \bar{A} = 0 \quad (\text{f})$$

因此, 方程(e)的特解为

$$u_1 = \frac{j}{8} A^3 e^{j3T_0} + \text{cc} \quad (\text{g})$$

将式(d)和(g)代入式(c)中第三个方程, 考虑到条件(f)后整理得到

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -(2jD_2 A - \frac{1}{4}A + A^2 \bar{A} - \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2)e^{jT_0} + \frac{1}{8}(2A^3 + A^4 \bar{A})e^{j3T_0} + \frac{5}{8}A^5 e^{j5T_0} + \text{cc} \quad (\text{h})$$

该方程的解消除永年项要求

$$2jD_2 A - \frac{1}{4}A + A^2 \bar{A} - \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2 = 0 \quad (\text{i})$$

此时, 方程(h)的特解为

$$u_2 = -\frac{1}{64}(2A^3 + A^4 \bar{A})e^{j3T_0} - \frac{5}{192}A^5 e^{j5T_0} + \text{cc} \quad (\text{j})$$

现根据消除永年项的条件(f)和(i)来确定函数 $A(T_1, T_2)$ 。视其为时间 t 的函数 $A(\varepsilon t, \varepsilon^2 t)$, 根据复合函数求导规则和条件(f)和(i)得

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A = \frac{\varepsilon}{2}(A - A^2 \bar{A}) - \frac{j\varepsilon^2}{2}(\frac{1}{4}A - A^2 \bar{A} + \frac{7}{8}A^3 \bar{A}^2) \quad (\text{k})$$

为了便于求解方程(k), 将复函数 $A(\varepsilon t, \varepsilon^2 t)$ 写作

$$A(\varepsilon t, \varepsilon^2 t) = \frac{a(t)}{2} e^{j\varphi(t)} \quad (\text{l})$$

其中 $a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 是实函数。将式(l)代入方程(k)后分离实虚部, 得到

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2} a(1 - \frac{a^2}{4}) \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon^2 (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}a^2 + \frac{7}{256}a^4) \end{cases} \quad (\text{m})$$

例 3.2.2 已给出了上式中第一个方程的解

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\varepsilon t}}} \quad (\text{n})$$

其中 a_0 是积分常数。若将其代入式(m)中第二个方程积分, 则会遇到数学上的困难。因此, 利用 $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{da} \dot{a}$ 及式(m)中第一个方程, 将第二个方程改写为

$$\frac{d\varphi}{da} = -\frac{\varepsilon(1-a^2 + \frac{7}{32}a^4)}{a(4-a^2)} \quad (o)$$

对其分离变量积分, 整理得到

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\varepsilon^2}{16}t^2 - \varepsilon\left(\frac{1}{8}\ln a - \frac{7}{64}a^2\right) \quad (p)$$

其中 φ_0 是积分常数。

最后, 根据式(b)、式(d)、式(g)和式(l)可写出二次近似解

$$u(t) = a \cos(t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{32}a^3 \sin 3(t + \varphi) \quad (q)$$

其中慢时变振幅 a 及相位 φ 由式(n)和式(p)给出。

3.5 Galerkin 法与谐波平衡法

考察单自由度自治系统

$$R \equiv \ddot{u} + p(u, \dot{u}) = 0 \quad (3.5.1)$$

本节讨论如何求取该系统周期运动的近似解, 并用残差力 R 描述解的近似程度。

3.5.1 Galerkin 法

回顾 1.2 节的 1.2.3, Galerkin 法可将描述梁振动的偏微分方程近似为常微分方程组。事实上, 该方法还可用于常微分方程, 将其近似为代数方程组后求解。

设方程(3.5.1)的近似解形如

$$u(t) = \sum_{r=1}^m a_r u_r(t) \quad (3.5.2)$$

其中 $u_r(t), r=1, 2, \dots, m$ 是给定的周期函数, 但周期 T 尚未知; $a_r, r=1, 2, \dots, m$ 是待定系数。因此, 式(3.5.2)中共有 $m+1$ 个未知数。

将近似解(3.5.2)代入方程(3.5.1), 则残差力 $R \neq 0$ 。一般情况下, 残差力 R 沿虚位移 δu 所作的虚功 $R\delta u \neq 0$ 。然而, 可以调整式(3.5.2)中的待定系数 $a_r, r=1, 2, \dots, m$, 使残差力 R 在一个振动周期内沿各虚位移 δu_r 的平均虚功为零。这就是所谓的 **Galerkin 条件**

$$\frac{1}{T} \int_0^T R(t) \delta u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{r=1}^m a_r \ddot{u}_r(t) + p\left(\sum_{r=1}^m a_r u_r(t), \sum_{r=1}^m a_r \dot{u}_r(t)\right) \right] \delta u(t) dt = 0, \quad (3.5.3)$$

$r=1, \dots, m$

由于自治系统的初始状态总可取为

$$\dot{u}(0) = \sum_{r=1}^m a_r \dot{u}_r(0) = 0 \quad (3.5.4)$$

联立方程(3.5.3)和(3.5.4)可以构成确定上述 $m+1$ 个未知数的代数方程组。

例 3.5.1 用 Galerkin 法求解如下 Duffing 方程的近似解

$$R \equiv \ddot{u} + \omega_0^2 u + \beta \omega_0^2 u^3 = 0 \quad (a)$$

解：根据零初始速度条件，取方程(a)的近似周期解为

$$u(t) = a \cos \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (b)$$

其中振幅 a 和频率 ω 待定。将式(b)代入方程(a)并进行三角函数积化和差，得到残差力

$$R(t) = (\omega_0^2 - \omega^2) a \cos \omega t + \frac{1}{4} \beta \omega_0^2 a^3 (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) \quad (c)$$

代入 Galerkin 条件

$$\int_0^T R(t) \cos \omega t dt = 0 \quad (d)$$

得到

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a + \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 a^3 = 0 \quad (e)$$

由此解出自由振动频率

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta a^2} \quad (f)$$

不难验证：当 $\beta = \varepsilon$ 时，该结果与例 3.1.3 中用 Lindstedt-Poincaré 摄动法所得结果一致。

3.5.2 谐波平衡法

将周期解 $u(t)$ 作有限 Fourier 展开

$$u(t) = a_0 + \sum_{r=1}^n (a_r \cos r\omega t + b_r \sin r\omega t), m = 2n + 1 \quad (3.5.5)$$

将其代入 $p(u, \dot{u})$ 后亦作有限 Fourier 展开

$$p(u, \dot{u}) = p_0 + \sum_{r=1}^n (p_r \cos r\omega t + q_r \sin r\omega t) \quad (3.5.6)$$

把式(3.5.5)和(3.5.6)代入方程(3.5.1)，得到残差力

$$R(t) = p_0 + \sum_{r=1}^n [(p_r - r^2 \omega^2 a_r) \cos r\omega t + (q_r - r^2 \omega^2 b_r) \sin r\omega t] \quad (3.5.7)$$

这时，Galerkin 条件(3.5.3)成为三角函数积分。根据三角函数积分的正交性，残差力中同次谐波被保留，故有

$$p_0 = 0, \quad p_r - r^2 \omega^2 a_r = 0, \quad q_r - r^2 \omega^2 b_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.8)$$

这意味着：将解(3.5.5)代入方程(3.5.1)后，同次谐波的力必须自相平衡。这就是所谓的**谐波平衡法**。以例 3.5.1 为例，谐波平衡法可省去 Galerkin 条件(d)，直接从残差力表达式(c)得到幅频关系(e)。

Galerkin 法和谐波平衡法对方程(3.5.1)并没有弱非线性要求。为了保证使用时的可靠性，Mickens 曾对方程的形式进行了研究，提出如下必要条件^[11]：

- (1) 非线性函数 $p(u, \dot{u})$ 应是有限个形如 $u^i \dot{u}^j$ 的单项式之和，其中 i, j 是非负整数；
- (2) 各项的指数 $i + j$ 应为奇数；
- (3) 对于保守系统，非线性函数 $p(u)$ 必须仅有一个极小值；
- (4) 高阶项与基波项相比必须是小振幅。

显然，Galerkin 法和谐波平衡法能否取得成功与函数 $u_r(t), r=1, 2, \dots, m$ 的正确选择密切相关。通常，人们根据待求周期振动的特点取 $u_r(t), r=1, 2, \dots, m$ 为三角函数，即将周期解作有限 Fourier 展开，但阶次 m 事先未知。对于不少弱非线性问题， m 取为 1~2 就可获得满意结果。然而，也有不少问题对 m 的要求很高。这时，谐波平衡方程将成为多元非线性代数方程，其求解需要依赖数值方法。8.2 节将对此进行更深入的讨论。

习 题

- 1 分别用直接摄动法和 Lindstedt-Poincaré 摄动法求下述系统自由振动的二次近似解，并对结果进行一致有效展开检验

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^2 = 0 \\ u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

- 2 考察图示重力场中的单自由度无阻尼系统，其非线性弹簧恢复力 q 与变形 δ 间关系为

$$q(\delta) = k\delta + \varepsilon k\delta^3, \quad k > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

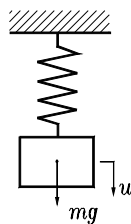
- (1) 以系统静平衡位置为位移原点，建立系统的振动微分方程；
- (2) 用 Lindstedt-Poincaré 摄动法分析重力对系统自由振动频率的影响。

- 3 用平均法求下述保守系统周期振动的一阶近似解

- (1) $\ddot{u} + \sin u = 0$
- (2) $\ddot{u} + u + \varepsilon(u^2 + u^3) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$

- 4 试论证可否用平均法求解下述立方非线性系统的周期振动

$$\ddot{u} + u^3 = 0$$



题 2 图

5 考察下述 Coulomb 摩擦阻尼系统

$$\ddot{u}(t) + \mu N \operatorname{sgn} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

其中摩擦系数 μ 为小参数，用 KBM 法求解该系统自由振动的一次近似。

- 6 用 KBM 法求题 5 中系统自由振动的二次近似解。
- 7 用多尺度法求题 5 中系统自由振动的一次近似解。
- 8 用谐波平衡法求 van der Pol 系统自激振动的一次近似解。
- 9 用谐波平衡法求题 3 的近似解。
- 10 用 Galerkin 法求 van der Pol 系统自激振动的一次近似解。

第4章 单自由度非自治系统的振动

第3章介绍的各种定量分析方法稍加修改便可用于分析非自治系统的振动。因此,本章侧重对非自治系统振动的行为和规律进行分析。先以几种典型系统为例,分析其在外激励下受迫振动的一次近似解。然后,分析慢时变系统参数对受迫振动的影响以及快时变系统参数激发的振动。

4.1 Duffing 系统的受迫主共振

本节用多尺度法研究含阻尼的 Duffing 系统在简谐激励下的受迫振动问题

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) + \varepsilon\omega_0^2u^3(t) = F\cos\omega t, \quad \zeta > 0 \quad (4.1.1)$$

所谓**主共振**是指外激励频率 ω 接近派生系统固有频率 ω_0 时的共振。如果系统是线性小阻尼系统,这时很小的激励幅值 F 就激发出强烈的共振。因此,研究主共振时对系统阻尼、外激励幅值和频率加以如下限制

$$\begin{cases} \zeta\omega_0 = \varepsilon\mu, & \mu = O(1) \\ F = \varepsilon f, & \omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad f = O(1), \quad \sigma = O(1) \end{cases} \quad (4.1.2)$$

其中 σ 称作**激励频率失调参数**。

4.1.1 一次近似解

在条件(4.1.2)下,方程(4.1.1)成为

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = \varepsilon[-2\mu\dot{u}(t) - \omega_0^2u^3(t) + f\cos(\omega_0 + \varepsilon\sigma)t] \quad (4.1.3)$$

研究解的一次近似时只要用两个时间尺度,故设

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (4.1.4)$$

将式(4.1.4)代入方程(4.1.3)并利用导算子表达式(3.4.4),比较 ε 同次幂后得到一组线性偏微分方程

$$D_0^2u_0 + \omega_0^2u_0 = 0 \quad (4.1.5a)$$

$$D_0^2u_1 + \omega_0^2u_1 = -2D_0D_1u_0 - 2\mu D_0u_0 - \omega_0^2u_0^3 + f\cos(\omega_0T_0 + \sigma T_1) \quad (4.1.5b)$$

方程(4.1.5a)的解是

$$u_0(T_0, T_1) = a(T_1)\cos[\omega_0T_0 + \beta(T_1)] \stackrel{\text{def}}{=} A(T_1)e^{j\omega_0T_0} + \text{cc} \quad (4.1.6)$$

其中

$$A(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta(T_1)} \quad (4.1.7)$$

将其代入方程(4.1.5b)得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -[2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A}]e^{j\omega_0 T_0} - \\ & \omega_0^2 A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + \frac{f}{2} e^{j(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + \text{cc} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

由此得消除永年项的条件

$$2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (4.1.9)$$

将式(4.1.7)代入式(4.1.9)，分离其实部和虚部得到

$$\begin{cases} D_1 a = -\mu a + \frac{f}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a D_1 \beta = \frac{3\omega_0}{8} a^3 - \frac{f}{2\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases} \quad (4.1.10)$$

这就是一次近似解(4.1.6)的慢时变振幅和相位应满足的微分方程。引入

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sigma T_1 - \beta \quad (4.1.11)$$

方程(4.1.10)还可转化为自治微分方程

$$\begin{cases} D_1 a = -\mu a + \frac{f}{2\omega_0} \sin \varphi \\ a D_1 \varphi = \sigma a - \frac{3\omega_0}{8} a^3 + \frac{f}{2\omega_0} \cos \varphi \end{cases} \quad (4.1.12)$$

相应的一次近似解(4.1.6)成为

$$u(t) = a(T_1) \cos[\omega_0 T_0 + \sigma T_1 - \varphi(T_1)] = a(\varepsilon t) \cos[\omega t - \varphi(\varepsilon t)] \quad (4.1.13)$$

4.1.2 定常解的幅频响应

为确定对应稳态运动的定常解振幅 \bar{a} 和相位 $\bar{\varphi}$ ，令式(4.1.12)中 $D_1 a = 0$ 、 $D_1 \varphi = 0$ ，得到振幅 \bar{a} 和相位 $\bar{\varphi}$ 满足的代数方程

$$\mu \bar{a} = \frac{f}{2\omega_0} \sin \bar{\varphi} \quad (4.1.14a)$$

$$\sigma \bar{a} - \frac{3\omega_0}{8} \bar{a}^3 = -\frac{f}{2\omega_0} \cos \bar{\varphi} \quad (4.1.14b)$$

两式平方后相加消去 $\bar{\varphi}$ ，得到振幅 \bar{a} 、相位 $\bar{\varphi}$ 与激励频率失调量 σ 间的关系

$$[\mu^2 + (\sigma - \frac{3\omega_0 \bar{a}^2}{8})^2] \bar{a}^2 = (\frac{f}{2\omega_0})^2 \quad (4.1.15a)$$

$$\bar{\varphi} = \tan^{-1}\left(\frac{-\mu}{\sigma - 3\omega_0 \bar{a}^2 / 8}\right) \quad (4.1.15b)$$

简称为**幅频响应方程**和**相频响应方程**。它们也可用原系统参数表示为

$$[(\zeta\omega_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \frac{3\varepsilon\omega_0 \bar{a}^2}{8})^2] \bar{a}^2 = \left(\frac{F}{2\omega_0}\right)^2 \quad (4.1.16a)$$

$$\bar{\varphi} = \tan^{-1}\left(\frac{-\zeta\omega_0}{\omega - \omega_0 - 3\varepsilon\omega_0 \bar{a}^2 / 8}\right) \quad (4.1.16b)$$

式(4.1.16a)是关于 ω 的实系数二次代数方程。对于 $0 < \bar{a} \leq F/2\zeta\omega_0^2$ ，可解出一对实根 ω

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{8}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2\omega_0 \bar{a}}\right)^2 - (\zeta\omega_0)^2} \quad (4.1.17)$$

从而绘出主共振幅频和相频响应曲线如图 4.1.1 所示。由图可见，对于固定的激励频率（亦即 σ ），主共振可能是唯一的，也可能有三种。类似于自治系统有多个平衡解的情况，多个稳态主共振的真正实现取决于其稳定性及系统初始条件。

从式(4.1.16a)可发现一个有趣的现象：主共振的峰值大小总是

$$\bar{a}_{\max} = \frac{F}{2\zeta\omega_0^2} \quad (4.1.18)$$

与非线性因素无关。但出现峰值的激励频率则与非线性因素有关

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{3\bar{a}_{\max}^2}{8}\right) \quad (4.1.19)$$

这一频率与例 3.1.3 中 Duffing 系统自由振动的频率相同。其原因在于：主共振的一次近似是简谐振动，共振时外激励恰好与系统阻尼力相平衡，使得主共振犹如无阻尼自由振动。通常，将式(4.1.19)确定的曲线称为主共振的**骨架线**。它给出了不同激励下主共振峰值与激励频率的关系，主导了主共振幅频响应曲线的形状。

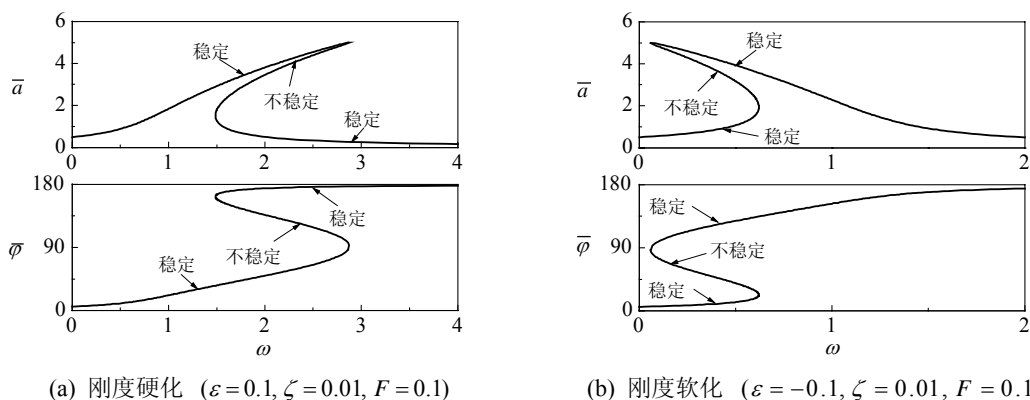


图 4.1.1 稳态主共振的幅频和相频响应 ($\omega_0 = 1.0$)

4.1.3 定常解的稳定性

稳态主共振是一周期运动，其稳定性的严格定义见 6.3 节。由于描述主共振非定常解的微分方程(4.1.12)是一自治系统，主共振定常解的稳定性就是自治系统在定常解 $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ (亦即奇点)处的稳定性。因此，可采用 2.2 节中的结论来分析主共振的稳定性。

将方程(4.1.12)在 $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ 处线性化，形成关于扰动量 Δa 和 $\Delta \varphi$ 的自治微分方程

$$\begin{cases} D_1 \Delta a = -\mu \Delta a + \frac{f}{2\omega_0} \cos \bar{\varphi} \Delta \varphi \\ D_1 \Delta \varphi = -\left(\frac{3\omega_0 \bar{a}}{4} + \frac{f}{2\omega_0 \bar{a}^2} \cos \bar{\varphi}\right) \Delta a - \frac{f}{2\omega_0 \bar{a}} \sin \bar{\varphi} \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.1.20a)$$

$$\begin{cases} D_1 \Delta \varphi = -\left(\frac{3\omega_0 \bar{a}}{4} + \frac{f}{2\omega_0 \bar{a}^2} \cos \bar{\varphi}\right) \Delta a - \frac{f}{2\omega_0 \bar{a}} \sin \bar{\varphi} \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.1.20b)$$

利用式(4.1.14a)消去上式中的 $\bar{\varphi}$ ，得到特征方程

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & -\bar{a} \left(\sigma - \frac{3\omega_0 \bar{a}^2}{8} \right) \\ \frac{1}{\bar{a}} \left(\sigma - \frac{9\omega_0 \bar{a}^2}{8} \right) & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.1.21)$$

展开行列式得

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\omega_0 \bar{a}^2}{8}\right) \left(\sigma - \frac{9\omega_0 \bar{a}^2}{8}\right) = 0 \quad (4.1.22)$$

对于 $\mu > 0$ ，由条件(2.2.25)可得到定常解失稳的条件

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\omega_0 \bar{a}^2}{8}\right) \left(\sigma - \frac{9\omega_0 \bar{a}^2}{8}\right) < 0 \quad (4.1.23)$$

通过将式(4.1.16)关于 \bar{a}^2 求导数，可发现幅频响应曲线上具有铅垂切线的条件正是 $\Gamma = 0$ 。因此，失稳条件对应着幅频响应曲线有多值解时中间的一支解。

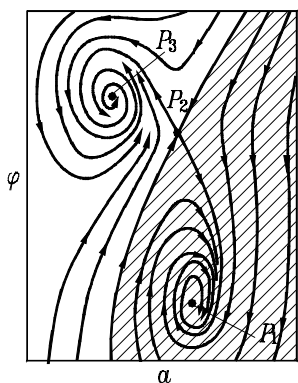
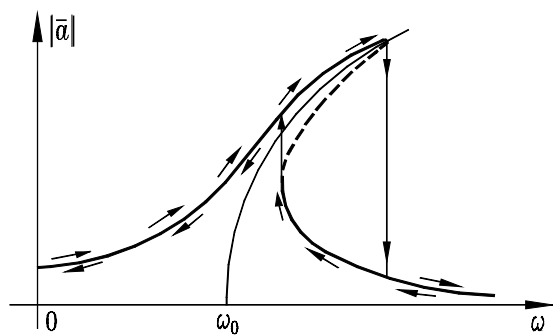


图 4.1.2 主共振的多解现象



4.1.3 实验中主共振幅频响应的跳跃现象

为了进一步理解多解现象及不同解支的稳定性，取某一 σ 使频响曲线出现多值。采用 8.1 节将要介绍的 Runge-Kutta 方法计算方程(4.1.12)自不同的 (a, φ) 出发的相轨线，得到如图 4.1.2

所示结果。对此可讨论如下：

(1) 图中 P_1 、 P_2 和 P_3 是三个奇点，对应于图 4.1.1 频响曲线上该 σ 处的上、中、下三个解支上的点，即原系统的三种稳态运动。显然， P_1 和 P_3 是焦点，而 P_2 是鞍点。

(2) 自阴影区任一初始状态出发，系统状态将最终被吸引到 P_1 ；而位于非阴影区的初始状态将最终被吸引到 P_3 。这表明了频响曲线的上、下两个解支是渐近稳定的。

(3) 只有恰好位于两区域分界线上的初始状态才可能被吸引到 P_2 ，一旦受到偏离分界线的小扰动，其状态就会被吸引到 P_1 或 P_3 。所以，频响曲线的中间解支是不稳定的。

如上分析，在主共振幅频响应的多解频带上有两个渐近稳定解和一个不稳定解。由于在实验中只能实现渐近稳定运动，所以，在简谐慢扫频激励实验中，对渐近稳定运动的跟踪只能按图 4.1.3 中箭头所示的路径进行，从而产生图示的**跳跃现象**。

4.2 Duffing 系统的受迫次共振

本节继续研究 Duffing 系统在简谐激励下的受迫振动问题，但着重分析激励频率远离派生系统固有频率时系统可能发生的共振，简称**次共振**。

4.2.1 次共振的可能性

(1) 无阻尼系统

首先考察无阻尼 Duffing 系统在简谐激励下的受迫振动

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon \omega_0^2 u^3(t) = F \cos \omega t, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (4.2.1)$$

现用谐波平衡法验证该系统具有精确解

$$u(t) = \bar{a} \cos \frac{\omega t}{3} \quad (4.2.2)$$

为此，将式(4.2.2)代入方程(4.2.1)并运用三角函数积化和差关系得

$$\left(\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{9}\right)\bar{a} \cos \frac{\omega t}{3} + \frac{\varepsilon \omega_0^2 \bar{a}^3}{4} (3 \cos \frac{\omega t}{3} + \cos \omega t) = F \cos \omega t \quad (4.2.3)$$

欲使上述关系在任意时刻均成立，同次谐波必须自相平衡。故有

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{9}\right) + \frac{3\varepsilon \omega_0^2 \bar{a}^2}{4} = 0 \\ \frac{\varepsilon \omega_0^2 \bar{a}^3}{4} - F = 0 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

由此可解出这种振动的振幅和频率

$$\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{4F}{\varepsilon \omega_0^2}}, \quad \frac{\omega}{3} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{4}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{8}\right) \quad (4.2.5)$$

这说明，简谐激励下的无阻尼 Duffing 系统的确会发生频率为激励频率 1/3 的受迫振动。而式(4.2.5)中第二式表明，这种振动的频率与系统自由振动频率完全重合，从而是一种共振。因

此, 人们称其为 **1/3 次亚谐共振**。

对这种现象的物理解释有多种, 其中之一是: 外激励激发了系统自由振动的三次谐波, 进而联带起系统的自由振动, 并将其维持下去。

(2) 阻尼系统

考察阻尼 Duffing 系统在简谐激励下的振动问题

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon\omega_0^2 u^3(t) = F \cos \omega t \quad (4.2.6)$$

由于激励频率 ω 远离 ω_0 , 不再要求激励幅值为小量, 但仍限定系统非线性及阻尼比较弱

$$0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad \zeta\omega_0 = \varepsilon\mu > 0, \quad \mu = O(1) \quad (4.2.7)$$

该系统不具有形如式(4.2.2)的精确解, 可采用多尺度法研究解的一次近似。设

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (4.2.8)$$

将式(4.2.8)代入方程(4.2.6), 比较 ε 的同次幂得线性偏微分方程

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos \omega T_0 \quad (4.2.9a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^3 \quad (4.2.9b)$$

方程(4.2.9a)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{j\omega_0 T_0} + B e^{j\omega T_0} + \text{cc}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.2.10)$$

将其代入(4.2.9b)得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -[2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\omega_0^2 AB^2 + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A}]e^{j\omega_0 T_0} - \\ & B[2j\mu\omega + 3\omega_0^2 B^2 + 6\omega_0^2 A\bar{A}]e^{j\omega T_0} - \\ & \omega_0^2 \{A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + B^3 e^{3j\omega T_0} + 3A^2 B e^{j(2\omega_0 + \omega)T_0} + \\ & 3\bar{A}^2 B e^{j(\omega - 2\omega_0)T_0} + 3AB^2 e^{j(\omega_0 + 2\omega)T_0} + 3\bar{A}\bar{B}^2 e^{j(\omega_0 - 2\omega)T_0}\} + \text{cc} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

分析上式右端各项可发现: 激励频率 ω 远离 ω_0 时, 仍有某些 ω 的取值会导致永年项。例如, 大括号中第 2 项和第 4 项分别在条件 $3\omega \approx \omega_0$ 和 $\omega - 2\omega_0 \approx \omega_0$ 下诱发永年项。在消除永年项条件下可确定出 $A(T_1) \neq 0$, 这将使一次近似解(4.2.8)中的自由振动部分保留下来。这是振动频率 $\omega_0 \neq \omega$ 且振幅依赖于激励幅值的受迫振动。由于这种受迫振动的频率分别是 $\omega_0 \approx 3\omega$ 和 $\omega_0 \approx \omega/3$, 故称其为 **3 次超谐共振**和 **1/3 次亚谐共振**, 统称为**次共振**。以下分别进行研究。

4.2.2 1/3 次亚谐共振

(1) 一次近似解

为了在 $\omega \approx 3\omega_0$ 时研究亚谐共振, 定义新的激励频率失调量 σ , 使

$$\omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (4.2.12)$$

由式(4.2.11)可写出消除永年项的条件

$$2j\omega_0(D_1A + \mu A) + 6\omega_0^2AB^2 + 3\omega_0^2A^2\bar{A} + 3\omega_0^2\bar{A}^2Be^{j\sigma T_1} = 0 \quad (4.2.13)$$

引入

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{2}e^{j\beta}, \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sigma T_1 - 3\beta \quad (4.2.14)$$

将其第一式代入式(4.2.13)，分离实虚部后再代入第二式，得到 1/3 次亚谐共振的慢时变幅值和相位满足的自治微分方程

$$\begin{cases} D_1a = -\mu a - \frac{3\omega_0B}{4}a^2 \sin \varphi \\ aD_1\varphi = (\sigma - 9\omega_0B^2)a - \frac{9\omega_0}{8}a^3 - \frac{9\omega_0B}{4}a^2 \cos \varphi \end{cases} \quad (4.2.15a)$$

$$\begin{cases} D_1a = -\mu a - \frac{3\omega_0B}{4}a^2 \sin \varphi \\ aD_1\varphi = (\sigma - 9\omega_0B^2)a - \frac{9\omega_0}{8}a^3 - \frac{9\omega_0B}{4}a^2 \cos \varphi \end{cases} \quad (4.2.15b)$$

由式(4.2.10)得到系统的一次近似响应

$$u(t) = a(\varepsilon t) \cos \frac{\omega t - \varphi(\varepsilon t)}{3} + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.2.16)$$

(2) 定常解及其存在条件

令式(4.2.15)中 $D_1a = 0$ 、 $D_1\varphi = 0$ ，得到定常解振幅和相位满足的代数方程

$$\begin{cases} \mu\bar{a} = -\frac{3\omega_0B\bar{a}^2}{4} \sin \bar{\varphi} \\ \sigma - 9\omega_0B^2 - \frac{9\omega_0}{8}\bar{a}^2 = \frac{9\omega_0B\bar{a}}{4} \cos \bar{\varphi} \end{cases} \quad (4.2.17)$$

由此消去 $\bar{\varphi}$ ，得到 1/3 次亚谐共振的幅频响应方程

$$9\mu^2 + (\sigma - 9\omega_0B^2 - \frac{9\omega_0}{8}\bar{a}^2)^2 = (\frac{9\omega_0B\bar{a}}{4})^2 \quad (4.2.18)$$

这是关于 \bar{a}^2 的二次代数方程，解出

$$\bar{a}^2 = P \pm \sqrt{P^2 - Q} \quad (4.2.19)$$

其中

$$P = \frac{8\sigma}{9\omega_0} - 6B^2, \quad Q = (\frac{8}{9\omega_0})^2 [9\mu^2 + (\sigma - 9\omega_0B^2)^2] > 0 \quad (4.2.20)$$

由于 $Q > 0$ ，式(4.2.19)取正解的条件是 $P > 0$ 且 $P^2 \geq Q$ ，由此得到 1/3 次亚谐共振的必要条件

$$B^2 < \frac{4\sigma}{27\omega_0}, \quad 2\mu^2 \leq \omega_0B^2(\sigma - \frac{63\omega_0B^2}{8}) \quad (4.2.21)$$

此处第一个不等式要求 $\sigma > 0$ ，这说明对于刚度硬化的 Duffing 系统，1/3 次亚谐共振发生在激励频率 ω 略高于 $3\omega_0$ 的频段上。第二个不等式表明增加阻尼可破坏 1/3 次亚谐共振。当上述条件不满足时，方程(4.2.15)只有定常解 $\bar{a} = 0$ 。由式(4.2.16)可见，此时系统的一次近似响应与线性系统在远离共振频段的响应相同。

为了进一步讨论 1/3 次亚谐共振的必要条件, 视式(4.2.21)中的 B^2 为未知量, 解二次不等式得

$$\frac{27\omega_0}{4}B^2 < \sigma, \quad \left| \frac{63\omega_0}{4}B^2 - \sigma \right| \leq \sqrt{\sigma^2 - 63\mu^2} \quad (4.2.22)$$

不难证明, 上式中第二个不等式覆盖了第一个, 从而成为 1/3 次亚谐共振的存在性条件。该条件还可利用原外激励参数表示为

$$\left| \frac{63\omega_0}{16} \frac{F^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} - \sigma \right| \leq \sqrt{\left(\frac{\omega - 3\omega_0}{\varepsilon} \right)^2 - 63\mu^2} \quad (4.2.23)$$

根据该条件, 图 4.2.1 给出了两种阻尼时产生 1/3 次亚谐共振时激励幅值 F 和激励频率 ω 的关系。显然, 随着系统阻尼的增加, 发生共振的区域缩小。图 4.2.2 是给定激励幅值下对应上述两种阻尼的幅频响应曲线。

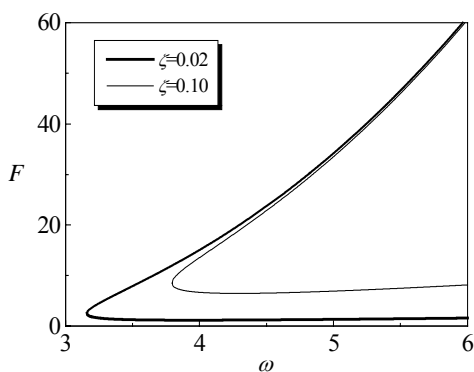


图 4.2.1 1/3 次亚谐共振的激励条件
($\omega_0 = 1, \varepsilon = 0.5$)

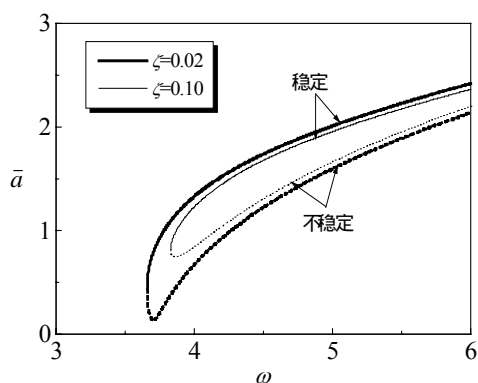


图 4.2.2 1/3 次亚谐共振的幅频响应
($F = 10, \omega_0 = 1, \varepsilon = 0.5$)

(3) 定常解的稳定性

类似于对主共振定常解的稳定性分析, 将方程(4.2.15)在 $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ 处关于小扰动 Δa 和 $\Delta \varphi$ 局部线性化

$$\begin{cases} D_1 \Delta a = -\left(\mu + \frac{3\omega_0 B \bar{a}}{2} \sin \bar{\varphi}\right) \Delta a - \frac{3\omega_0 B \bar{a}^2}{4} \cos \bar{\varphi} \Delta \varphi \\ D_1 \Delta \varphi = -\frac{9\omega_0}{4} (\bar{a} + B \cos \bar{\varphi}) \Delta a + \frac{9\omega_0 B \bar{a}}{4} \sin \bar{\varphi} \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.2.24)$$

该方程对应的特征方程为

$$\det \begin{bmatrix} -\left(\mu + \frac{3\omega_0 B \bar{a}}{2} \sin \bar{\varphi}\right) - s & -\frac{3\omega_0 B \bar{a}^2}{4} \cos \bar{\varphi} \\ -\frac{9\omega_0}{4} (\bar{a} + B \cos \bar{\varphi}) & -\frac{9\omega_0 B \bar{a}}{4} \sin \bar{\varphi} - s \end{bmatrix} = 0 \quad (4.2.25)$$

通过式(4.2.17)和式(4.2.20)中的第一式, 可将特征方程简化为

$$s^2 + 2\mu s + \gamma = 0, \quad \gamma = -\frac{27\omega_0^2 \bar{a}^2}{32}(P - \bar{a}^2) \quad (4.2.26)$$

鉴于 $\mu > 0$ 和条件(2.2.21), $1/3$ 次亚谐共振渐近稳定的充分必要条件是 $\gamma > 0$, 亦即条件

$$\bar{a}^2 > P \quad (4.2.27)$$

这表明, 方程(4.2.18)的两个解支中, 幅值大的一支渐近稳定, 小的一支不稳定。这正如图 4.2.2 所示。

为了理解 $1/3$ 次亚谐共振具有两个定常解和解的稳定性, 可以像对主共振的分析那样, 采用数值积分方法计算方程(4.2.15)自不同的 (a, φ) 出发的相轨线, 得到如图 4.2.3 所示结果。

a. 图中 P_1 和 P_2 是两个奇点, 对应于某一激励频率下频响曲线上、下解支上的点, 即原系统的两种稳态运动。显然, P_1 是焦点, 而 P_2 是鞍点。

b. 自阴影区任一初始状态出发, 系统状态将最终被吸引到 P_1 , 形成稳态 $1/3$ 次亚谐共振; 而位于非阴影区的初始状态将最终将成为 $\bar{a} = 0$, 系统呈现近乎于线性系统的稳态受迫振动。这再次表明, 频响曲线的上解支是渐近稳定的。

c. 只有恰好位于两区域分界线上的初始状态才可能被吸引到 P_2 , 一旦受到偏离分界线的小扰动, 其状态就会被吸引到 P_1 或 $\bar{a} = 0$ 。所以, 频响曲线的下解支是不稳定的。

产生上述 $1/3$ 次亚谐共振的原因是 Duffing 系统具有立方非线性。若系统具有 n 次方非线性, 则可能产生 $1/n$ 次亚谐共振。这种高频激励诱发低频共振的现象在工程中屡见不鲜。例如, 1956 年, Lefschetz 报道一架飞机的螺旋桨激发出机翼的 $1/2$ 次共振, 机翼共振又激发了尾翼的 $1/4$ 次共振, 以致飞机被破坏。又如, 若隔振系统具有弱非线性, 尽管激励频率远高于系统固有频率, 仍可能在隔振频段内发生亚谐共振, 产生危险。避免上述危险是研究非线性振动的目的之一。

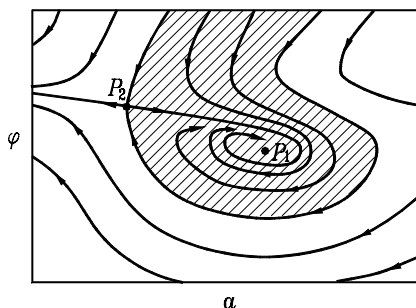


图 4.2.3 $1/3$ 次亚谐共振的多解现象

4.2.3 3 次超谐共振*

(1) 一次近似解

为了在 $\omega \approx \omega_0/3$ 时研究超谐共振, 定义新的激励频率失调量 σ , 使

$$3\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (4.2.28)$$

由式(4.2.11)可写出消除永年项的条件

$$2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\omega_0^2 AB^2 + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} + \omega_0^2 B^3 e^{j\sigma\tau_1} = 0 \quad (4.2.29)$$

引入

$$A = \frac{a}{2} e^{i\beta}, \quad \varphi = \sigma T_1 - \beta \quad (4.2.30)$$

将其第一式代入式(4.2.29), 分离实虚部后再代入第二式, 得到3次超谐共振的慢时变幅值和相位满足的自治微分方程

$$\begin{cases} D_1 a = -\mu a - \omega_0 B^3 \sin \varphi \\ a D_1 \varphi = (\sigma - 3\omega_0 B^2) a - \frac{3\omega_0}{8} a^3 - \omega_0 B^3 \cos \varphi \end{cases} \quad (4.2.31)$$

由式(4.2.10)得到系统的一次近似响应

$$u(t) = a(\varepsilon t) \cos[3\omega t - \varphi(\varepsilon t)] + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.2.32)$$

(2) 定常解

令式(4.2.31)中 $D_1 a = 0$ 、 $D_1 \varphi = 0$, 得到3次超谐共振的幅频响应关系

$$[\mu^2 + (\sigma - 3\omega_0 B^2 - \frac{3\omega_0}{8} \bar{a}^2)^2] \bar{a}^2 = \omega_0^2 B^6 \quad (4.2.33)$$

现对该式进行讨论:

a. 由于 $B \neq 0$, 方程(4.2.33)的解必满足 $\bar{a} \neq 0$, 这显著有别于1/3次亚谐共振。

b. 将该式与式(4.1.15a)对比可见, 3次超谐共振的幅频响应与主共振幅频响应非常相似。即3次超谐共振存在三个解共存现象, 其中上下两个解支渐近稳定, 中间解支不稳定, 从而在正弦慢扫频实验中发生跳跃现象。

c. 3次超谐共振峰为

$$|a|_{\max} = \frac{\omega_0 |B|^3}{\mu} = \frac{\varepsilon}{8\zeta} \left| \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \right|^3 \quad (4.2.34)$$

它与系统的非线性程度有关, 这显著有别于主共振。由于共振峰与 ε 量级相同, 弱非线性系统的3次超谐共振的危险性比较小。

4.3 Duffing 系统的受迫组合共振

本节采用多尺度法分析受两个简谐激励作用的 Duffing 系统

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 = F_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + F_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (4.3.1)$$

其中

$$0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad \zeta\omega_0 = \varepsilon\mu, \quad \mu = O(1), \quad F_r = O(1), \quad r=1,2 \quad (4.3.2)$$

仍采用两尺度展开式求一次近似解

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (4.3.3)$$

将其代入上式后比较 ε 同次幂, 得到

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F_1 \cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + F_2 \cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) \quad (4.3.4a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^3 \quad (4.3.4b)$$

解方程(4.3.4a)得

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + B_1 e^{j\omega_1 T_0} + B_2 e^{j\omega_2 T_0} + \text{cc} \quad (4.3.5)$$

其中

$$B_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_r}{2(\omega_0^2 - \omega_r^2)} e^{j\theta_r}, \quad r=1,2 \quad (4.3.6)$$

将解(4.3.5)代入方程(4.3.4b)右端, 展开立方项后得到长达一页的非齐次项, 包括了总计 22 种引起永年项的可能性^[12]。如果约定 $\omega_1 < \omega_2$, 仍有 11 种可能性。它们是:

$$\omega_0 \approx 3\omega_1, \quad \omega_0 \approx 3\omega_2, \quad \omega_0 \approx \omega_1 / 3, \quad \omega_0 \approx \omega_2 / 3 \quad (4.3.7a)$$

$$\omega_0 \approx \omega_2 \pm 2\omega_1, \quad \omega_0 \approx 2\omega_2 \pm \omega_1, \quad \omega_0 \approx 2\omega_1 - \omega_2, \quad \omega_0 \approx \frac{\omega_2 \pm \omega_1}{2} \quad (4.3.7b)$$

式(4.3.7a)中的 4 种情况对应于两个激励各自引起的 3 次超谐和 1/3 次亚谐共振。式(4.3.7b)中的 7 种情况则表明: 若两个外激励频率线性组合后接近派生系统固有频率, 也会发生共振。这类共振称为**组合共振**。

现以情况 $\omega_0 \approx 2\omega_1 + \omega_2$ 为例, 分析组合共振。此时

$$2\omega_1 + \omega_2 = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (4.3.8)$$

消除永年项的条件为

$$2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + \omega_0^2(3A\bar{A} + 6B_1\bar{B}_1 + 6B_2\bar{B}_2)A + 3\omega_0^2 B_1^2 B_2 e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (4.3.9)$$

引入

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{2} e^{j\beta}, \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sigma T_1 - \beta + 2\theta_1 + \theta_2 \quad (4.3.10)$$

将其第一式代入式(4.3.9), 分离实虚部后再代入第二式得到组合共振的慢时变幅值和相位满足的自治微分方程

$$\begin{cases} D_1 a = -\mu a - H_1 \sin \varphi \\ a D_1 \varphi = (\sigma - H_2) a - \frac{3\omega_0}{8} a^3 - H_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (4.3.11)$$

其中

$$\begin{cases} H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3\omega_0 F_1^2 F_2}{8(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 (\omega_0^2 - \omega_2^2)} \\ H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3\omega_0}{4} \left[\frac{F_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{F_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} \right] \end{cases} \quad (4.3.12)$$

由式(4.3.5)得到系统的一次近似响应

$$u(t) = a(\varepsilon t) \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t + 2\theta_1 + \theta_2 - \varphi(\varepsilon t)] + \frac{F_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{F_2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (4.3.13)$$

除非 ω_1 / ω_2 是分数，否则这一响应是非周期的。

令(4.3.11)中 $D_1 a = 0$ 、 $D_1 \varphi = 0$ ，得到定常解的幅频和相频响应方程

$$\left\{ \begin{aligned} [\mu^2 + (\sigma - H_2 - \frac{3\omega_0 \bar{a}^2}{8})^2] \bar{a}^2 &= H_1^2 \\ \bar{\varphi} &= \tan^{-1}(\frac{-\mu}{\sigma - H_2 - 3\omega_0 \bar{a}^2 / 8}) \end{aligned} \right. \quad (4.3.14a)$$

$$\bar{\varphi} = \tan^{-1}(\frac{-\mu}{\sigma - H_2 - 3\omega_0 \bar{a}^2 / 8}) \quad (4.3.14b)$$

由式(4.3.14a)可得到组合共振的最大振幅

$$|\bar{a}|_{\max} = \frac{H_1}{\mu} \quad (4.3.15)$$

它发生在

$$\sigma = H_2 + \frac{3\omega_0 |\bar{a}|_{\max}^2}{8} = \frac{3\omega_0 H_1^2}{8\mu^2} + H_2 \quad (4.3.16)$$

将式(4.3.14a)与主共振的幅频和相频响应方程(4.1.15a)对比可知：组合共振具有与主共振相似的骨架线、稳定性和跳跃现象。由于 $H_1 \neq 0$ ，式(4.3.14a)只能有非零解 \bar{a} 。因此，组合共振与亚谐共振不同，它总要发生。组合共振现象再次说明，非线性系统具有比线性系统更多的共振机会。同时表明，系统的响应绝不是各个激励引起的响应之和。

4.4 van der Pol 系统的受迫振动*

本节考察具有自激因素的 van der Pol 系统在简谐激励下的振动问题

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} + F \cos \omega t \quad (4.4.1)$$

采用多尺度法研究该系统的一次近似解

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (4.4.2)$$

根据外激励频率 ω 与派生系统固有频率 ω_0 是否接近，可讨论非共振和共振两种情况。

4.4.1 非共振情况

(1) 一次近似解

将式(4.4.2)代入方程(4.4.1)，比较 ε 的同次幂得

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos \omega t \quad (4.4.3a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_1 D_0 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 \quad (4.4.3b)$$

解方程(4.4.3a)得

$$\begin{aligned}
u_0 &= a(T_1) \cos[\omega_0 T_0 + \beta(T_1)] + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega T_0 \\
&= A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + B e^{j\omega T_0} + \text{cc}
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

其中

$$A(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta(T_1)}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{4.4.5}$$

将式(4.4.4)代入方程(4.4.3b)得到

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 &= j\omega_0 [-2D_1 A + A(1 - 2A\bar{A} - 2B^2) + A^2 \bar{A}] e^{j\omega_0 T_0} + \\
&\quad j\omega B(1 - 2A\bar{A} - 2B^2) e^{j\omega T_0} - j\omega A^3 e^{j3\omega_0 T_0} - j\omega_0 B^3 e^{j3\omega T_0} - \\
&\quad j(2\omega_0 + \omega) A^2 B e^{j(2\omega_0 + \omega) T_0} - j(\omega_0 + 2\omega) A B^2 e^{j(\omega_0 + 2\omega) T_0} + \\
&\quad j(\omega - 2\omega_0) A^2 B e^{j(2\omega_0 - \omega) T_0} + j(\omega_0 - 2\omega) A B^2 e^{j(\omega_0 - 2\omega) T_0} + \text{cc}
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

由此不难写出非共振条件

$$\omega_0 \neq \omega + O(\varepsilon), \quad \omega_0 \neq 3\omega + O(\varepsilon), \quad \omega_0 \neq \frac{\omega}{3} + O(\varepsilon) \tag{4.4.7}$$

它们分别对应着不发生主共振、超谐共振和亚谐共振的条件。在此前提下，根据式(4.4.6)右端第一项可得到消除永年项的条件

$$-2D_1 A + A(1 - 2A\bar{A} - 2B^2) + A^2 \bar{A} = 0 \tag{4.4.8}$$

或写作

$$D_1 A = \frac{1}{2} (A\eta - A^2 \bar{A}) \tag{4.4.9}$$

其中

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - 2B^2 = 1 - \frac{F^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{4.4.10}$$

将式(4.4.5)中第一式代入式(4.4.9)，分离实虚部得到

$$D_1 a = \frac{a}{2} \left(\eta - \frac{a^2}{4} \right), \quad D_1 \beta = 0 \tag{4.4.11}$$

经分离变量积分得

$$\frac{a^2}{4\eta - a^2} = c_1 e^{\eta T_1}, \quad \beta = c_2 \tag{4.4.12}$$

或写作

$$a = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{c_1} e^{-\varepsilon \eta T}}}, \quad \beta = c_2 \tag{4.4.13}$$

其中 c_1 和 c_2 是由初始条件确定的积分常数。

(2) 定常解

如果外激励比较弱, 其幅值满足

$$0 < F < \sqrt{2} |\omega_0^2 - \omega^2| \quad (4.4.14)$$

则 $2B^2 < 1$, 从而 $\eta > 0$ 。此时由式(4.4.13)得 $\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} a(T_1) = 2\sqrt{\eta}$ 。根据式(4.4.4), 系统的稳态振动由自激振动和受迫振动叠加而成

$$\begin{aligned} u(t) &= 2\sqrt{\eta} \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{F^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

当且仅当 ω 和 ω_0 可公约时 $u(t)$ 是周期运动。

如果外激励很强, 其幅值不满足条件(4.4.14), 则 $\eta < 0$ 。根据式(4.4.12), 这导致 $\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} a(T_1) = 0$ 。此时, 系统的稳态运动仅含受迫振动

$$u(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.4.16)$$

自激振动条件被外激励破坏了。这种现象被称为**猝息** (Quenching)。

4.4.2 主共振

类似于对 Duffing 系统主共振的研究, 此处限定

$$F = \varepsilon f, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma, \quad f = O(1), \quad \sigma = O(1) \quad (4.4.17)$$

(1) 一次近似解

将两尺度解(4.4.2)和条件(4.4.17)代入方程(4.4.1), 比较 ε 的同次幂得

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (4.4.18a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_1 D_0 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u + f \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (4.4.18b)$$

将方程(4.4.18a)的解

$$u_0 = a(T_1) \cos[\omega_0 T_0 + b(T_1)] = A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc} \quad (4.4.19)$$

代入方程(4.4.18b), 得到

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = [j\omega_0(-2D_1 A + A - A^2 \bar{A}) + \frac{f}{2} e^{j\sigma T_1}] e^{j\omega_0 T_0} - j\omega_0 A^3 e^{j3\omega_0 T_0} + \text{cc} \quad (4.4.20)$$

消除永年项的条件是

$$j\omega_0(-2D_1 A + A - A^2 \bar{A}) + \frac{f}{2} e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (4.4.21)$$

分离实虚部得

$$\begin{cases} -D_1 a + \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} + \frac{f}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) = 0 \\ a D_1 \beta + \frac{f}{2\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) = 0 \end{cases} \quad (4.4.22)$$

或写作

$$\begin{cases} D_1 a = \frac{a}{2} (1 - \frac{a^2}{4}) + \frac{f}{2\omega_0} \sin \varphi \\ a D_1 \varphi = \sigma a + \frac{f}{2\omega_0} \cos \varphi \end{cases} \quad (4.4.23)$$

其中

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sigma T_1 - \beta \quad (4.4.24)$$

(2) 定常解

令式(4.4.23)中 $D_1 a = 0$ 、 $D_1 \varphi = 0$ ，得到振幅 \bar{a} 和相位 $\bar{\varphi}$ 满足的代数方程

$$\begin{cases} \frac{\bar{a}}{2} (1 - \frac{\bar{a}^2}{4}) + \frac{f}{2\omega_0} \sin \bar{\varphi} = 0 \\ \sigma \bar{a} + \frac{f}{2\omega_0} \cos \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (4.4.25)$$

消去 $\bar{\varphi}$ 得到幅频方程

$$\frac{\bar{a}^2}{4} (1 - \frac{\bar{a}^2}{4})^2 + (\sigma \bar{a})^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad (4.4.26)$$

或写作

$$\rho (1 - \rho)^2 + 4\sigma^2 \rho = H \quad (4.4.27)$$

其中

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{a}^2}{4} > 0, \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^2}{4\omega_0^2} > 0 \quad (4.4.28)$$

相频方程为

$$\tan \bar{\varphi} = \frac{1 - \bar{a}^2/4}{2\sigma} = \frac{1 - \rho}{2\sigma} \quad (4.4.29)$$

稳态解形如

$$u(t) = \bar{a} \cos(\omega t - \bar{\varphi}) + O(\varepsilon) \quad (4.4.30)$$

这说明，此时系统的自激振动不再有所表现，这种现象被称作**同步**。

(3) 定常解的稳定性

将方程(4.4.23)在 $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ 处线性化, 形成关于扰动量 Δa 和 $\Delta \varphi$ 的自治微分方程

$$\begin{cases} D_1 \Delta a = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\bar{a}^2}{8}\right) \Delta a + \frac{f}{2\omega_0} \cos \bar{\varphi} \Delta \varphi \\ D_1 \Delta \varphi = -\frac{f}{2\omega_0 \bar{a}^2} \cos \bar{\varphi} \Delta a - \frac{f}{2\omega_0 \bar{a}} \sin \bar{\varphi} \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.4.31)$$

利用式(4.4.25)消去上式中的 $\cos \bar{\varphi}$ 和 $\sin \bar{\varphi}$, 得到特征方程

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3\bar{a}^2}{4}\right) & \sigma \bar{a} \\ -\frac{\sigma}{\bar{a}} & \lambda - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.32)$$

展开行列式并利用式(4.4.28)引入的 ρ , 得到

$$\lambda^2 - P\lambda + Q = 0 \quad (4.4.33)$$

其中

$$P = 1 - 2\rho, \quad Q = \frac{1}{4}(1 - 4\rho + 3\rho^2) + \sigma^2 \quad (4.4.34)$$

解方程(4.4.33)得

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}) = \frac{1}{2}(1 - 2\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\sigma^2}) \quad (4.4.35)$$

它们均有负实部的条件是

$$P = 1 - 2\rho < 0, \quad Q = \sigma^2 + \frac{1}{4}(3\rho^2 - 4\rho + 1) > 0 \quad (4.4.36)$$

参考图 4.4.1, 该条件是 (σ, ρ) 平面上由直线 $\rho = 1/2$ 和椭圆 $4\sigma^2 + (3\rho^2 - 4\rho + 1) = 0$ 所形成的非阴影区。此外, 根据 $\lambda_{1,2}$ 是否为复根的临界条件 $\rho = \pm 2\sigma$, 在图中两直线所形成的扇形外, $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ 是方程(4.4.31)的焦点, 在扇形与椭圆之间为结点, 在椭圆内为鞍点。

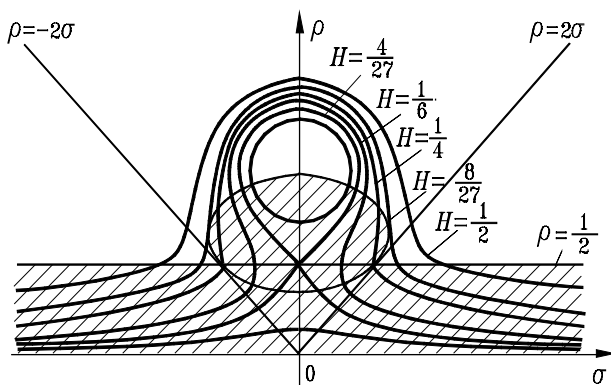


图 4.4.1 不同激励幅值下的幅频响应

(4) 小结

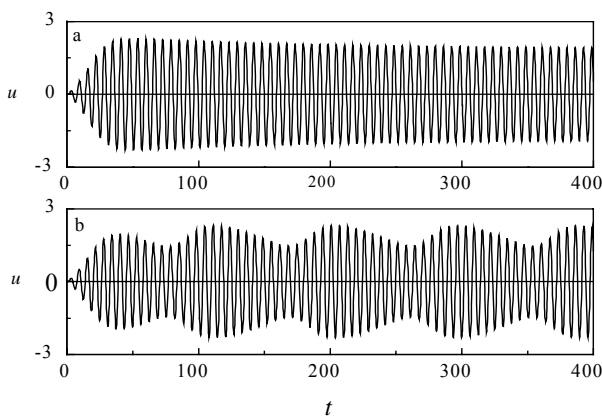
显然, 由方程(4.4.27)给出的幅频关系依赖于与外激励幅值平方成正比的参数 H 。一旦给定参数 H 和频差 σ , 该方程是关于 ρ 的实系数三次代数方程, 从而有一个或三个实根。参考图 4.4.1, 幅频曲线的性态可分为如下几种情况。

a. 若 $0 < H < 4/27$: 频差 $|\sigma|$ 比较小时, 方程(4.4.27)有三个定常解, 但仅幅值最大的解渐近稳定; 频差 $|\sigma|$ 比较大时, 方程(4.4.27)只有一个定常解且不稳定。

b. 若 $4/27 < H < 8/27$: 频差 $|\sigma|$ 很小时, 方程(4.4.27)只有一渐近稳定解; 频差 $|\sigma|$ 稍大些后, 有三个定常解, 但仅幅值最大的解渐近稳定; 频差 $|\sigma|$ 比较大时, 仅有一个不稳定解。

c. 若 $H > 8/27$: 频差 $|\sigma|$ 比较小时, 方程(4.4.27)只有一个渐近稳定解; 频差 $|\sigma|$ 比较大时, 仅有一个不稳定解。

归纳上述情况, 只有在小频差时, 系统才出现渐近稳定的同步振动。并且这种稳定同步振动是唯一的, 系统的幅频响应不存在跳跃现象。图 4.4.2 给出了频差足够小时的同步现象以及频差稍大后的不同步现象, 后者也称作**失步**。



(a) 小频差 ($\sigma = 0.05$) (b) 稍大频差 ($\sigma = 0.1$)

图 4.4.2 同步与失步现象 ($\varepsilon = 0.1, f = 0.1, \omega_0 = 1$)

4.5 慢时变参数系统的振动*

在工程实践中, 许多系统的参数会在运行过程中发生变化, 从而使系统的数学模型含有若干随时间变化的参数。这类系统被称为**时变参数系统**。例如, 飞行器的质量会由于燃料消耗而减少, 是一变质量系统。重物在起吊过程中是一变摆长的摆, 可视为变刚度系统。旋转机械在正常启动和停车过程中, 非平衡质量引起的惯性载荷幅值、频率会显著变化, 是一变载荷参数系统。

本节先研究**慢时变参数系统**, 即参数在系统振动一周中发生缓慢变化的系统。为了具体起见, 考察 Duffing 系统在简谐激励下的受迫振动, 并着重分析慢变激励频率对系统通过主共振区的影响。系统的运动微分方程为

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon[2\mu\dot{u}(t) + \omega_0^2 u^3(t)] = \varepsilon f \cos \theta(t, \varepsilon t) \quad (4.5.1)$$

激励相位满足

$$\begin{cases} \theta(t, \varepsilon t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 t + \psi(\varepsilon t) \\ \dot{\theta}(t, \varepsilon t) = \omega_0 + \varepsilon \psi'(\varepsilon t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 + \varepsilon \sigma(\varepsilon t) \end{cases} \quad (4.5.2)$$

现用多尺度法研究该系统的一次近似解, 设

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (4.5.3)$$

将式(4.5.3)代入方程(4.5.1), 比较 ε 同次幂后得到一组线性偏微分方程

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (4.5.4a)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^3 + f \cos[\omega_0 T_0 + \psi(T_1)] \quad (4.5.4b)$$

将方程(4.5.4a)的解

$$u_0(T_0, T_1) = a(T_1) \cos[\omega_0 T_0 + \beta(T_1)] \stackrel{\text{def}}{=} A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + \text{cc} \quad (4.5.5)$$

代入方程(4.5.4b)得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -[2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A}] e^{j\omega_0 T_0} - \\ & \omega_0^2 A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + \frac{f}{2} e^{j[\omega_0 T_0 + \psi(T_1)]} + \text{cc} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

由此得消除永年项的条件

$$2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} e^{j\psi(T_1)} = 0 \quad (4.5.7)$$

分离其实部和虚部得到

$$\begin{cases} D_1 a(T_1) + \mu a(T_1) - \frac{f}{2\omega_0} \sin[\psi(T_1) - \beta(T_1)] = 0 \\ a(T_1) D_1 \beta(T_1) - \frac{3\omega_0}{8} a^3(T_1) + \frac{f}{2\omega_0} \cos[\psi(T_1) - \beta(T_1)] = 0 \end{cases} \quad (4.5.8)$$

或等价的

$$\begin{cases} D_1 a(T_1) = -\mu a(T_1) + \frac{f}{2\omega_0} \sin \varphi(T_1) \\ D_1 \varphi(T_1) = \sigma(T_1) - \frac{3\omega_0}{8} a^2(T_1) + \frac{f}{2\omega_0 a(T_1)} \cos \varphi(T_1) \end{cases} \quad (4.5.9)$$

其中

$$\varphi(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(T_1) - \beta(T_1) \quad (4.5.10)$$

将式(4.5.9)所确定的慢时变振幅和相位代回式(4.5.5), 得到系统的一次近似解

$$u(t) = a(\varepsilon t) \cos[\omega_0 t + \psi(\varepsilon t) - \varphi(\varepsilon t)] \quad (4.5.11)$$

现设想慢变激励频率按如下线性规律变化

$$\sigma(T_1) = \sigma_0 + rT_1 \quad (4.5.12)$$

由于 $\sigma(T_1)$ 非定常, 故方程(4.5.9)是二维非自治系统, 无解析解。但可以从 $r=0$ 时已有的主共振解(4.1.13)出发, 用 8.1 节将要介绍的 Runge-Kutta 方法获得不同扫频速率下的幅频、相频关系, 如图 4.5.1 所示。显然, 快速扫频将使共振峰偏移, 这与人们在实验中观察到的现象相吻合。

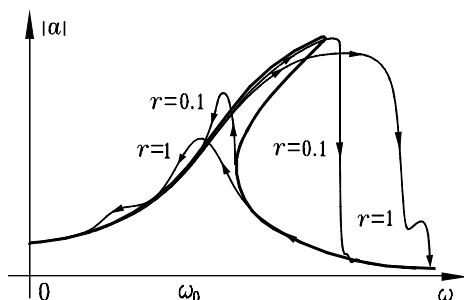


图 4.5.1 不同扫频速率 r 对系统主共振幅频特性的影响

4.6 线性时变系统的参激振动

4.6.1 参激振动的例子

本节讨论具有**快时变参数**的系统, 即系统参数随时间变化的速率达到与系统振动频率相同的量级, 其最简单的例子是 1.2 节中 1.1.2 介绍的基础作铅垂简谐振动的单摆以及相应的 Mathieu 方程。随着参数变化的加快, 这类系统的行为会发生质的变化, 出现由参数变化激发的参激振动。

1831 年, 英国科学家 Faraday 首先发现了参激振动现象: 当充液容器作铅垂振动时, 液体的自由表面波动周期是容器振动周期的二倍。由于充液容器在运载工具、化工等诸多工程领域中占有重要地位, 对这一问题的研究吸引了许多学者, 推动了对参激振动的研究。

弹性结构在周期载荷作用下的动力稳定性也归结为参激振动问题。1924 年, 俄罗斯学者 В е л я е в 研究了纵向简谐激励下梁的横向振动, 发现它服从一系列 Mathieu 方程。

例 4.6.1 图示两端铰支 Bernoulli-Euler 梁受简谐纵向力 $f(t) = f_0 \cos \omega t$ 作用, 忽略梁的纵向惯性, 建立其受扰后的横向微振动方程。

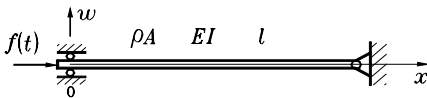


图 4.6.1 铰支 Bernoulli-Euler 梁的动力稳定性问题

解: 设梁的长度为 l , 单位长度质量为 ρA , 抗弯刚度为 EI 。忽略梁的纵向惯性后, 梁在轴向简谐力 $f(t) = f_0 \cos \omega t$ 作用下的横向微振动微分方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + f_0 \cos \omega t \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{a})$$

以两端铰支 Bernoulli-Euler 梁的固有振型作为 Galerkin 形函数, 将挠度表示为

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{+\infty} \sin \frac{r\pi x}{l} u_r(t) \quad (\text{b})$$

将式(b)代入式(a), 根据固有振型的加权正交性得到一组解耦的常微分方程

$$\ddot{u}_r(t) + \omega_r^2 [1 - f_r \cos \omega t] u_r(t) = 0, \quad r=1,2,\dots \quad (\text{c})$$

其中

$$\omega_r^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^4 \pi^4 EI}{\rho A l^4}, \quad f_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_0 l^2}{r^2 \pi^2 EI} \ll 1, \quad r=1,2,\dots \quad (\text{d})$$

引入

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega t}{2}, \quad \delta_r \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2\omega_r}{\omega} \right)^2, \quad \varepsilon_r \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{f_r \delta_r}{2}, \quad r=1,2,\dots \quad (\text{e})$$

得到标准的 Mathieu 方程

$$\frac{d^2 u_r(\tau)}{d\tau^2} + (\delta_r + 2\varepsilon_r \cos 2\tau) u_r(\tau) = 0, \quad r=1,2,\dots \quad (\text{f})$$

显然, 梁横向动力稳定要求所有 Mathieu 方程的解均稳定。

参激振动是一个很大的研究命题, 本节侧重于研究线性系统的参激振动。先讨论一般的具有周期系数的线性齐次常微分方程, 给出其解的稳定性准则。然后, 用摄动法研究 Mathieu 方程解的稳定性边界问题。

4.6.2 周期系数线性常微分方程理论

考察具有周期系数的齐次线性常微分方程

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + p_1(t)\dot{u}(t) + p_2(t)u(t) = 0 \\ p_r(t+T) = p_r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad r=1,2 \end{cases} \quad (4.6.1)$$

将其写作二维相空间中的状态方程

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.6.2)$$

其中

$$\mathbf{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_2(t) & -p_1(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t+T), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad (4.6.3)$$

(1) 基本解

根据线性常微分方程理论, 方程(4.6.2)具有两个线性无关的基本解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 。对于该方程的任意解 $\mathbf{u}(t)$, 存在常数 a_1 和 a_2 , 使得

$$\mathbf{u}(t) = a_1 \boldsymbol{\varphi}_1(t) + a_2 \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{a}, \quad (4.6.4)$$

其中

$$\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t)], \quad a \stackrel{\text{def}}{=} [a_1 \quad a_2]^T \quad (4.6.5)$$

$\Phi(t)$ 称作**基本解矩阵**。

现讨论基本解矩阵的主要性质。鉴于 $A(t)$ 以 T 为周期，若 $u(t)$ 是方程(4.6.2)的解， $u(t+T)$ 也是该方程的解。自然， $\Phi(t+T)$ 中的 $\varphi_1(t+T)$ 和 $\varphi_2(t+T)$ 亦如此。因此，存在两个常数向量 b_1 和 b_2 使得

$$\Phi(t+T) = [\varphi_1(t+T) \quad \varphi_2(t+T)] = \Phi(t)[b_1 \quad b_2] \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t)B \quad (4.6.6)$$

其中矩阵 B 称作**单值矩阵**。不难证明， B 具有如下性质：

a. B 是可逆矩阵

$$b. B = \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) \quad (4.6.7)$$

$$c. \text{若取 } \Phi(0) = I, \quad B = \Phi(T) \quad (4.6.8)$$

d. 根据线性常微分方程理论中的 Liouville 公式，可导出

$$\det B = e^{\int_0^T \text{tr} A(t) dt} = e^{-\int_0^T p_1(t) dt} \quad (4.6.9)$$

对于保守系统，由 $p_1(t) \equiv 0$ 和上式给出

$$\det B = 1 \quad \text{即} \quad \det \Phi(t+T) = \det \Phi(t), \quad \forall t \in R^1 \quad (4.6.10)$$

该性质的几何涵义是：对于保守系统，两个不共线的状态向量 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 所张平行四边形面积经过时间 T 后保持不变。这通常称作保守系统的**保积特性**。

(2) 特征乘数与特征指数

根据矩阵 B 的特征值问题

$$(B - \lambda_r I) b_r = 0, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.11)$$

定义 λ_r 为方程(4.6.2)的第 r 阶**特征乘数**，而满足如下关系的 μ_r 为第 r 阶**特征指数**

$$\lambda_r = e^{\mu_r T}, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.12)$$

在通过 Floquet 定理来理解它们的涵义之前，先证明它们反映了系统(4.6.2)的内在性质，与 $\Phi(t)$ 的选取无关。

设有两个不同的基本解矩阵 $\Phi(t)$ 和 $\hat{\Phi}(t)$ ，它们各自满足

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)B, \quad \hat{\Phi}(t+T) = \hat{\Phi}(t)\hat{B} \quad (4.6.13)$$

由于 $\hat{\Phi}(t)$ 是解矩阵，自然存在可逆矩阵 C 使得它可由基本解矩阵 $\Phi(t)$ 表示

$$\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)C, \quad \hat{\Phi}(t+T) = \Phi(t+T)C \quad (4.6.14)$$

易见

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{\Phi}^{-1}(t)\hat{\Phi}(t+T) = (\Phi(t)C)^{-1}\Phi(t+T)C \\ &= C^{-1}\Phi(t)^{-1}\Phi(t+T)C = C^{-1}BC \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

根据线性代数, 单值矩阵 \mathbf{B} 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 互为相似矩阵, 它们具有相同的特征值。

(3) Floquet 定理

定理 4.6.1 (Floquet 定理) 方程(4.6.2)存在具有如下形式的所谓**正规解**

$$\mathbf{u}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) \mathbf{e}^{\mu_r t}, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.16)$$

满足

$$\mathbf{u}_r(t+T) = \lambda_r \mathbf{u}_r(t), \quad r = 1, 2 \quad (4.6.17)$$

其中

$$\mathbf{q}_r(t+T) = \mathbf{q}_r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.18)$$

证明: 取基本解矩阵和由式(4.6.11)所确定的特征向量构造方程(4.6.2)的正规解

$$\mathbf{u}_r(t) = \Phi(t) \mathbf{b}_r, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.19)$$

不难导出

$$\mathbf{u}_r(t+T) = \Phi(t+T) \mathbf{b}_r = \Phi(t) \mathbf{B} \mathbf{b}_r = \lambda_r \Phi(t) \mathbf{b}_r = \lambda_r \mathbf{u}_r(t), \quad r = 1, 2 \quad (4.6.20)$$

再取

$$\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{u}_r(t) \mathbf{e}^{-\mu_r t}, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.21)$$

可验证其周期性如下

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_r(t+T) &= \mathbf{u}_r(t+T) \mathbf{e}^{-\mu_r(t+T)} = \lambda_r \mathbf{u}_r(t) \mathbf{e}^{-\mu_r t} \mathbf{e}^{-\mu_r T} \\ &= \mathbf{u}_r(t) \mathbf{e}^{-\mu_r t} = \mathbf{q}_r(t), \quad r = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

根据式(4.6.16)及 $\mathbf{q}_r(t)$ 的周期性, 不难得出如下推论:

- 若 $\operatorname{Re}(\mu_r) < 0$, 即 $|\lambda_r| < 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_r(t) = 0$, 相应的正规解渐近稳定;
- 若 $\operatorname{Re}(\mu_r) > 0$, 即 $|\lambda_r| > 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{u}_r(t)| = +\infty$, 相应的正规解不稳定;
- 若 $\operatorname{Re}(\mu_r) = 0$, 即 $|\lambda_r| = 1$, 则相应的正规解稳定 (但非渐近稳定)。特别地, 若存在正整数 m , 使 $\lambda_r^m = 1$, 则有

$$\mathbf{u}_r(t+mT) = \lambda_r^m \mathbf{u}_r(t) = \mathbf{u}_r(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad r = 1, 2 \quad (4.6.23)$$

即正规解以 mT 为周期。

(4) Hill 方程

当 $p_1(t) \equiv 0$ 时, 将方程(4.6.1)改写为

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + p(t)u(t) = 0 \\ p(t+T) = p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (4.6.24)$$

1886 年, Hill 在分析月球在近地点附近的运动时首次研究了这类方程, 故该方程被称作 Hill 方程。显然, Mathieu 方程是其特款。

不难验证, 通过变换

$$u(t) = v(t) \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \int_0^t p_1(t) dt} \quad (4.6.25)$$

方程(4.6.1)可简化为 Hill 方程

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + p(t)v(t) = 0 \\ p(t) = p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t) - \frac{1}{2}\dot{p}_1(t) \end{cases} \quad (4.6.26)$$

因此, 对 Hill 方程的了解将有助于对更一般的方程(4.6.1)进行研究。

根据式(4.6.11), Hill 方程的特征乘数满足特征方程

$$\lambda^2 - (\text{tr} \mathbf{B})\lambda + 1 = 0 \quad (4.6.27)$$

故

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - 1} \quad \text{且} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (4.6.28)$$

由此可知 Hill 方程特征解的特性:

- 若 $|\text{tr} \mathbf{B}| > 2$, 必有某一 $|\lambda_r| > 1$, 相应的正规解不稳定;
- 若 $|\text{tr} \mathbf{B}| < 2$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ 且 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, 相应的正规解稳定 (但非渐近稳定);
- 若 $|\text{tr} \mathbf{B}| = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, 正规解是以 T 或 $2T$ 为周期的稳定解 (但非渐近稳定)。

最后, 讨论 Hill 方程在下述条件下的稳定性

$$p(t) = \delta + \varepsilon s(t) \quad (4.6.29)$$

其中

$$s(t+T) = s(t), \quad \int_0^T s(t) dt = 0 \quad (4.6.30)$$

δ 和 ε 是两个参数, 它们的不同组合决定了方程的解是否稳定。根据前述分析, 解失稳的临界条件是 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, 相应的 (δ, ε) 可称作临界值。

Haupt 指出: 给定 $\delta - \varepsilon$ 平面上的直线 $\varepsilon = \text{const.}$, 则在该直线上存在无限多个孤立的临界值 $\delta^{(0)}(\varepsilon) < \delta^{(1)}(\varepsilon) < \delta^{(2)}(\varepsilon) \dots$, 形成图 4.6.2 所示的 Haupt 图; 当 $\delta(\varepsilon) < \delta^{(0)}(\varepsilon)$ 时解不稳定, $\delta^{(0)}(\varepsilon) < \delta(\varepsilon) < \delta^{(1)}(\varepsilon)$ 时解稳定 (但非渐近稳定), 然后依次交替。

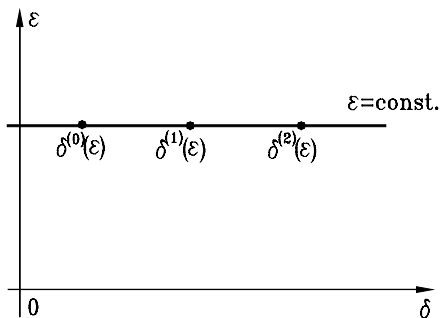


图 4.6.2 Haupt 图

4.6.3 含阻尼 Mathieu 方程的稳定边界

出于解决实际问题的需要, 考察具有阻尼的 Mathieu 方程

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\dot{u}(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)u(t) = 0, \quad |\varepsilon| < 1, \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (4.6.31)$$

现在的任务是确定使该方程零解保持稳定的参数组合 (δ, ε) 。鉴于一些文献对阻尼影响的处理存在不妥之处, 本书的论证略费笔墨。

(1) 确定稳定性边界条件

若不计阻尼, Mathieu 方程是 Hill 方程的特例, 且其周期系数满足条件(4.6.30)。根据对 Haupt 图的讨论, 方程零解的稳定性取决于参数 (δ, ε) 。对于 $\delta - \varepsilon$ 平面上部分区域的取值 (δ, ε) , 零解保持稳定; 而对于另一部分区域内的取值 (δ, ε) , 零解受扰后以指数形式发散。在这两种区域的分界线上, 受扰零解是周期为 π 或 2π 的周期解, 这就是系统的参激振动, 也是确定分界线的条件。分界线 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 称作 Mathieu 方程零解的**稳定性边界**, 亦即参激振动条件。

计入小阻尼后, 方程零解的稳定性边界自然要发生变化。确定稳定性边界的条件是否也发生变化呢? 为了回答这一问题, 先进行下面的分析。

由于方程(4.6.31)的系数以 π 为周期, 根据式(4.6.9)得

$$\det \mathbf{B} = e^{-\int_0^{2\pi} \zeta d\tau} = e^{-2\pi\zeta} \quad (4.6.32)$$

因此, 方程的特征乘数满足实系数代数方程

$$\lambda^2 - (\text{tr} \mathbf{B})\lambda + e^{-2\pi\zeta} = 0 \quad (4.6.33)$$

由此解出

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - e^{-2\pi\zeta}} \quad \text{且} \quad \lambda_1 \lambda_2 = e^{-2\pi\zeta} < 1 \quad (4.6.34)$$

根据对 Floquet 定理的推论, 方程零解稳定的临界条件是下述三条件之一

$$|\lambda_1| = 1, \quad |\lambda_2| < 1 \quad (4.6.35a)$$

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| = 1 \quad (4.6.35b)$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad (4.6.35c)$$

根据式(3.6.34)中不等式的约束, 条件(4.6.35c)永不满足。而满足前两个条件的特征乘数只能是方程(4.6.33)的实根, 不会是共轭复根。因此, 仅有如下两种情况。

情况 a:

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - e^{-2\pi\zeta}} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - e^{-2\pi\zeta}} < 1 \quad (4.6.36)$$

相应地可解得

$$\text{tr} \mathbf{B} = 1 + e^{-2\pi\zeta} \quad (4.6.37)$$

此时, 方程有一个正规解以 π 为周期, 而另一正规解渐近稳定。受扰零解随时间延续趋于以 π 为周期的正规解。

情况 b:

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - e^{-2\pi\zeta}} > -1, \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}}{2}\right)^2 - e^{-2\pi\zeta}} = -1 \quad (4.6.38)$$

相应地有

$$\text{tr} \mathbf{B} = -(1 + e^{-2\pi\zeta}) \quad (4.6.39)$$

此时, 方程有一个正规解以 2π 为周期, 而另一正规解渐近稳定。受扰零解随时间延续趋于以 2π 为周期的正规解。

因此, 受扰零解以 π 或 2π 为周期仍是确定零解稳定性边界的条件, 从而可以采用求周期解的各种近似方法来确定稳定性边界。

(2) 稳定性边界的确定

以下在小阻尼条件下用摄动法确定稳定性边界。为此, 将式(4.6.31)中的阻尼标记为

$$\zeta = \varepsilon\mu, \quad \mu = O(1) \quad (4.6.40)$$

对于 $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$, 把待求的周期解 $u(t)$ 及稳定性边界 $\delta(\varepsilon)$ 关于 ε 展开

$$\begin{cases} u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \\ \delta(\varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2(t) + \cdots \end{cases} \quad (4.6.41)$$

其中 $u_r(t)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ 以 π 或 2π 为周期。将上式代入方程(4.6.31), 比较 ε 同次幂得

$$\ddot{u}_0(t) + \delta_0 u_0(t) = 0 \quad (4.6.42a)$$

$$\ddot{u}_1(t) + \delta_0 u_1(t) = -(\delta_1 + 2 \cos 2t) u_0(t) - 2\mu \dot{u}_0(t) \quad (4.6.42b)$$

$$\ddot{u}_2(t) + \delta_0 u_2(t) = -\delta_2 u_0(t) - (\delta_1 + 2 \cos 2t) u_1(t) - 2\mu \dot{u}_1(t) \quad (4.6.42c)$$

解方程(4.6.42a), 得到周期解形如

$$u_0(t) = a \cos \sqrt{\delta_0} t + b \sin \sqrt{\delta_0} t \quad (4.6.43)$$

其中

$$\delta_0 = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6.44)$$

以下依次讨论 δ_0 取这些值时的稳定性边界。

a. $\delta_0 = 0$

根据方程(4.6.42a)得周期解

$$u_0(t) = a = \text{const.} \quad (4.6.45)$$

将其代入式(4.6.42b)得

$$\ddot{u}_1(t) = -a(\delta_1 + 2 \cos 2t) \quad (4.6.46)$$

为了消除该方程的永年项, 命 $\delta_1 = 0$, 进而解出

$$u_1(t) = \frac{a}{2} \cos 2t \quad (4.6.47)$$

需指出的是: 因式(4.6.45)已含常数项, 此处积分常数被省略。将该特解代入式(4.6.42c)得

$$\ddot{u}_2(t) = -a(\delta_2 + \frac{1}{2}) + 2\mu a \sin 2t - \frac{a}{2} \cos 4t \quad (4.6.48)$$

消除该方程永年项的条件是 $\delta_2 = -1/2$, 在此条件下解(4.6.48)得特解

$$u_2(t) = -\frac{\mu a}{2} \sin 2t + \frac{a}{32} \cos 4t \quad (4.6.49)$$

将上述结果代入式(4.6.41)并采用式(4.6.40), 得到在 $\delta_0 = 0$ 附近的稳定性边界和 π 周期解

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.50)$$

$$u(t) = a + \frac{\varepsilon a}{2}(\cos 2t - \zeta \sin 2t) + \frac{\varepsilon^2 a}{32} \cos 4t + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.51)$$

b. $\delta_0 = 1$

此时, 式(4.6.43)成为

$$u_0(t) = a \cos t + b \sin t \quad (4.6.52)$$

将其代入方程(4.6.42b)得

$$\ddot{u}_1(t) + u_1(t) = -[(\delta_1 + 1)a + 2\mu b] \cos t + [2\mu a - (\delta_1 - 1)b] \sin t - a \cos 3t - b \sin 3t \quad (4.6.53)$$

消除永年项的条件为

$$\begin{cases} (\delta_1 + 1)a + 2\mu b = 0 \\ 2\mu a - (\delta_1 - 1)b = 0 \end{cases} \quad (4.6.54)$$

该方程有非零解 (a, b) 的条件是

$$\det \begin{bmatrix} \delta_1 + 1 & 2\mu \\ 2\mu & 1 - \delta_1 \end{bmatrix} = 1 - \delta_1^2 - 4\mu^2 = 0 \quad (4.6.55)$$

即

$$\delta_1 = \pm \sqrt{1 - 4\mu^2}, \quad |\mu| < 1/2 \quad (4.6.56)$$

在此条件下, 方程(4.6.42b)的特解为

$$u_1(t) = \frac{1}{8}(a \cos 3t + b \sin 3t) \quad (4.6.57)$$

再将式(4.6.52)和(4.6.57)代入方程(4.6.42c), 得到

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2(t) + u_2(t) = & -(\delta_2 + \frac{1}{8})(a \cos t + b \sin t) - (\frac{\delta_1 a}{8} + \frac{3\mu b}{4}) \cos 3t + \\ & (\frac{3\mu a}{4} - \frac{\delta_1 b}{8}) \sin 3t - \frac{a}{8} \cos 5t - \frac{b}{8} \sin 5t \end{aligned} \quad (4.6.58)$$

消除永年项的条件是

$$\delta_2 = -\frac{1}{8} \quad (4.6.59)$$

在此条件下解方程(4.6.58), 得到

$$u_2(t) = \frac{1}{64}[(\delta_1 a + 6\mu b) \cos 3t + (\delta_1 b - 6\mu a) \sin 3t] + \frac{1}{192}(a \cos 5t + b \sin 5t) \quad (4.6.60)$$

最后, 将上述结果代入式(4.6.41)并采用式(4.6.40), 得到 $\delta_0 = 1$ 附近的两条稳定性边界和对应

的 2π 周期解

$$\delta = 1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\zeta^2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.61)$$

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + \frac{\varepsilon}{8} \left[\left(a + \frac{3\zeta b}{4} \right) \cos 3t + \left(b - \frac{3\zeta a}{4} \right) \sin 3t \right] + \frac{\varepsilon}{64} [\pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\zeta^2} (a \cos 3t + b \sin 3t) + \frac{\varepsilon}{3} (a \cos 5t + b \sin 5t)] + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.62)$$

c. $\delta_0 = 4$

此时式(4.6.43)成为

$$u_0(t) = a \cos 2t + b \sin 2t \quad (4.6.63)$$

代入方程(4.6.42b)得

$$\ddot{u}_1(t) + u_1(t) = -a - (\delta_1 a + 4\mu b) \cos 2t + (4\mu a - \delta_1 b) \sin 2t - a \cos 4t - b \sin 4t \quad (4.6.64)$$

消除永年项的条件是

$$\begin{cases} \delta_1 a + 4\mu b = 0 \\ 4\mu a - \delta_1 b = 0 \end{cases} \quad (4.6.65)$$

由于 $\delta_1^2 + 16\mu^2 > 0$, 该方程只有零解

$$\delta_1 = 0, \quad \mu = 0 \quad (4.6.66)$$

这表明, $O(\varepsilon)$ 量级的阻尼过大。因此, 引入更小的阻尼

$$\zeta = \varepsilon^2 \hat{\mu}, \quad \hat{\mu} = O(1) \quad (4.6.67)$$

这时, 方程(4.6.42b)和(4.6.42c)需改写为

$$\ddot{u}_1(t) + \delta_0 u_1(t) = -(\delta_1 + 2 \cos 2t) u_0(t) \quad (4.6.68a)$$

$$\ddot{u}_2(t) + \delta_0 u_2(t) = -\delta_2 u_0(t) - (\delta_1 + 2 \cos 2t) u_1(t) - 2\hat{\mu} \dot{u}_0(t) \quad (4.6.68b)$$

将式(4.6.63)代入方程(4.6.68a)得

$$\ddot{u}_1(t) + u_1(t) = -a - \delta_1 (a \cos 2t + b \sin 2t) - a \cos 4t - b \sin 4t \quad (4.6.69)$$

其消除永年项的条件是

$$\delta_1 = 0 \quad (4.6.70)$$

在此条件下解方程(4.6.69)得特解

$$u_1(t) = -\frac{a}{4} + \frac{a}{12} \cos 4t + \frac{b}{12} \sin 4t \quad (4.6.71)$$

将该解代入方程(4.6.68b)

$$\ddot{u}_2(t) + u_2(t) = -\left[(\delta_2 - \frac{5}{12})a + 4\hat{\mu}b\right]\cos 2t + \left[4\hat{\mu}a - (\delta_2 + \frac{1}{12})b\right]\sin 2t - \frac{a}{12}\cos 6t - \frac{b}{12}\sin 6t \quad (4.6.72)$$

消除永年项的条件是

$$\begin{cases} (\delta_2 - \frac{5}{12})a + 4\hat{\mu}b = 0 \\ 4\hat{\mu}a - (\delta_2 + \frac{1}{12})b = 0 \end{cases} \quad (4.6.73)$$

该方程有非零解的条件为

$$\delta_2^2 - \frac{1}{3}\delta_2 - (\frac{5}{144} + 16\hat{\mu}^2) = 0 \quad (4.6.74)$$

解得

$$\delta_2 = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 16\hat{\mu}^2} \quad (4.6.75)$$

方程(4.6.72)在此条件下的特解是

$$u_2(t) = \frac{1}{384}(a \cos 6t + b \sin 6t) \quad (4.6.76)$$

将上述结果代回展开式(4.6.41)并利用式(4.6.67), 得到 $\delta_0 = 4$ 附近的稳定性边界和对应的 π 周期解

$$\delta(\varepsilon) = 4 + \frac{\varepsilon^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} + 16\zeta^2} + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.77)$$

$$u(t) = a \cos 2t + b \sin 2t - \varepsilon\left(\frac{a}{4} - \frac{a}{12}\cos 4t - \frac{b}{12}\sin 4t\right) + \frac{\varepsilon^2}{384}(a \cos 6t + b \sin 6t) + O(\varepsilon^3) \quad (4.6.78)$$

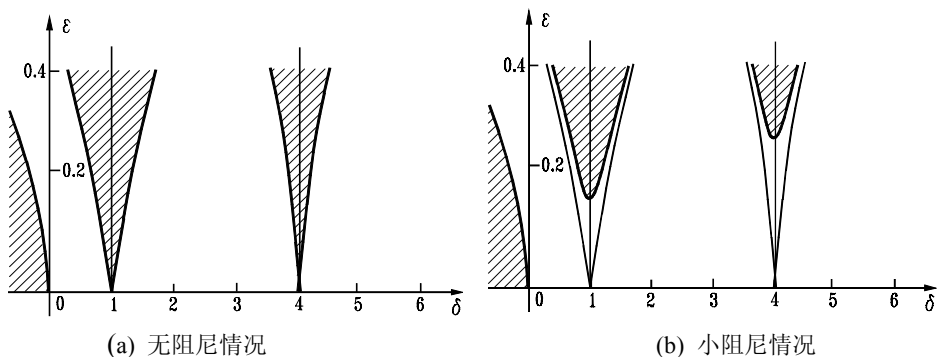


图 4.6.3 Mathieu 方程零解的不稳定区

根据式(4.6.50)、(4.6.61)和(4.6.77)中的稳定性边界表达式, 可获得图 4.6.3 所示的 Mathieu 方程零解在参数 (δ, ε) 平面上稳定性情况, 解在阴影区不稳定。显然, 阻尼使图中不稳定区

缩小。凌复华曾通过数值计算发现：这一结论仅当 ε 比较小时方正确；当 ε 比较大时，阻尼会使原来的稳定区变为不稳定区^[13]。

例 4.6.2 对于 $\omega \approx 2\omega_r$ ，讨论例 4.6.1 中梁的动力稳定问题。

解：此时 $\delta_r \approx 1$ 。根据式(4.6.61)和例 4.6.1 中式(e)，不稳定区的一阶近似为

$$|\delta_r - 1| < |\varepsilon_r| = \frac{f_r \delta_r}{2} \quad (a)$$

即

$$\frac{1}{1 + f_r/2} < \delta_r < \frac{1}{1 - f_r/2} \quad (b)$$

将式(a)代入式(b)并注意到 $0 < f_r \ll 1$ ，得出

$$1 - \frac{f_0 l^2}{2r^2 \pi^2 EI} < \left(\frac{2\omega_r}{\omega}\right)^2 < 1 + \frac{f_0 l^2}{2r^2 \pi^2 EI} \quad (c)$$

这说明，一旦激励频率 ω 与梁的某阶固有频率 ω_r 的二倍足够接近，梁受到横向小扰动时将发生参激振动而失稳。

4.7 非线性时变系统的参激振动*

对于上节所讨论的线性时变系统，一旦系统参数的组合使系统处于不稳定区，系统响应将趋于无穷。但事实上，当响应达到一定幅度后，实际系统将偏离线性系统模型，系统响应也就不会无限大。例如，结构大变形引起的非线性弹性恢复力、系统运动速度提高引起的非线性阻尼力等都会制约响应的增长。本节将讨论具有这类非线性因素的时变系统的参激振动问题。

4.7.1 参激共振的一般形式

考察附加了弱非线性项的 Mathieu 方程

$$\ddot{u}(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)u(t) = \varepsilon p(u(t), \dot{u}(t)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (4.7.1)$$

采用多尺度法研究其在 $\delta \approx 1$ 时的一次近似解。设解为

$$u(t) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (4.7.2)$$

将其代入方程(4.7.1)，比较 ε 的同次幂得

$$D_0^2 u_0 + \delta u_0 = 0 \quad (4.7.3a)$$

$$D_0^2 u_1 + \delta u_1 = -2D_1 D_0 u_0 - 2u_0 \cos 2T_0 + p(u_0, D_0 u_0) \quad (4.7.3b)$$

方程(4.7.3a)的解为

$$u_0 = A(T_1) e^{j\omega T_0} + \text{cc}, \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\delta} \quad (4.7.4)$$

将其代入方程(4.7.3b)右端，整理后得到

$$D_0^2 u_1 + \delta u_1 = -2j\omega D_1 A e^{j\omega T_0} - \bar{A} e^{j(2-\omega)T_0} - \bar{A} e^{-j(2+\omega)T_0} + cc + p(A e^{j\omega T_0} + cc, j\omega A e^{j\omega T_0} + cc) \quad (4.7.5)$$

为了明确 δ 接近于 1 的程度, 记

$$\omega = 1 - \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (4.7.6)$$

易见, 此时方程(4.7.5)右端的指数将出现

$$(2 - \omega)T_0 = [2(\omega + \varepsilon\sigma) - \omega]T_0 = \omega T_0 + 2\sigma T_1 \quad (4.7.7)$$

由此得到消除该方程永年项的条件

$$2j\omega D_1 A - \bar{A} e^{j2\sigma T_1} + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(A e^{j\omega T_0} + cc, j\omega A e^{j\omega T_0} + cc) e^{-j\omega T_0} dT_0 = 0 \quad (4.7.8)$$

令

$$A(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta(T_1)} \quad (4.7.9)$$

将其代入上式后分离实虚部, 得到

$$\begin{cases} D_1 a = -\frac{a}{2\omega} \sin 2(\sigma T_1 - \beta) - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} p(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ \alpha D_1 \beta = \frac{a}{2\omega} \cos 2(\sigma T_1 - \beta) - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} p(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (4.7.10)$$

其中

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \omega T_0 - \beta \quad (4.7.11)$$

若引入

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \beta - \sigma T_1 \quad (4.7.12)$$

则可将方程(4.7.10)化为自治系统

$$\begin{cases} D_1 a = \frac{a}{2\omega} \sin 2\varphi - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} p(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ a D_1 \varphi = -\sigma a + \frac{a}{2\omega} \cos 2\varphi - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} p(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (4.7.13)$$

最后, 将式(4.7.9)代入式(4.7.4)并利用式(4.7.12)和(4.7.6), 得到系统(4.7.1)的一次近似解

$$u(t) = a \cos(\omega T_0 + \beta) = a \cos(\omega T_0 + \sigma T_1 + \varphi) = a \cos(t + \varphi) \quad (4.7.14)$$

它的振动频率正是参数激励频率的 1/2。

4.7.2 平方阻尼系统的主共振

现以平方阻尼为例, 考察非线性因素对线性系统不稳定参激振动的影响。取

$$p(u, \dot{u}) = -(\mu_1 \dot{u} + \mu_2 \ddot{u} |\dot{u}|), \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 > 0 \quad (4.7.15)$$

将其代入(4.7.13)并完成积分, 得到

$$\begin{cases} D_1 a = -\frac{\mu_1 a}{2} - \frac{4\mu_2 a^2}{3\pi} + \frac{a}{2\omega} \sin 2\varphi \\ a D_1 \varphi = -\sigma a + \frac{a}{2\omega} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (4.7.16)$$

命上式中 $D_1 a = 0$ 、 $D_1 \varphi = 0$, 得到定常解方程

$$\begin{cases} \bar{a} \left(-\frac{\mu_1}{2} - \frac{4\mu_2 \bar{a}}{3\pi} + \frac{1}{2\omega} \sin 2\bar{\varphi} \right) = 0 \\ \bar{a} \left(-\sigma + \frac{1}{2\omega} \cos 2\bar{\varphi} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.7.17)$$

由上式消去 $\bar{\varphi}$, 得到非零定常解满足的幅频关系

$$\left(\mu_1 + \frac{8\omega\mu_2 \bar{a}}{3\pi} \right)^2 + 4\sigma^2 = \frac{1}{\omega^2} \quad (4.7.18)$$

显然, 当且仅当 $\mu_2 \neq 0$ 时有非零幅值

$$\bar{a} = \frac{3\pi}{8\omega\mu_2} \left(\sqrt{\frac{1}{\omega^2} - 4\sigma^2} - \mu_1 \right) \quad (4.7.19)$$

现考察由非线性阻尼引起的非零定常解存在条件。式(4.7.19)要求

$$|\sigma| < \frac{1}{2\omega} \approx \frac{1}{2} \quad (4.7.20)$$

而条件(4.7.6)意味着

$$\delta = \omega^2 = (1 - \varepsilon\sigma)^2 \approx 1 - 2\varepsilon\sigma \quad (4.7.21)$$

将上述两条件合并得到非零定常解存在的条件

$$1 - \varepsilon < \delta < 1 + \varepsilon \quad (4.7.22)$$

这正是无阻尼 Mathieu 方程发生不稳定参激振动的条件。

图 4.7.1 给出了 $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ 时两种 ε 取值下非零定常解振幅 \bar{a} 与 δ 的关系。振幅曲线与 $\bar{a}=0$ 的两个交点近似为 $\delta = 1 \mp \varepsilon$, 这与式(4.7.22)给出的非零定常解存在条件相吻合。

上述非零定常解能否实现还取决于其是否具有渐近稳定性。为了分析稳定性, 将方程(4.7.16)在定常解 $(\bar{a}, \bar{\varphi})$ 处线性化, 利用式(4.7.17)得到微扰动 $(\Delta a, \Delta \varphi)$ 所满足的线性微分方程

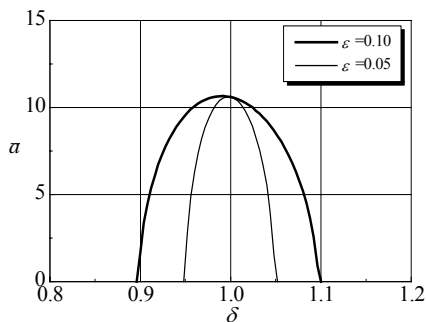


图 4.7.1 定常解振幅 \bar{a} 与 δ 的关系
($\mu_1 = \mu_2 = 0.1$)

$$\begin{cases} D\Delta a = -\frac{4\mu_2\bar{a}}{3\pi}\Delta a + \frac{\bar{a}}{\omega}\cos 2\bar{\varphi}\Delta\varphi \\ D\Delta\varphi = -\frac{1}{\omega}\sin 2\bar{\varphi}\Delta\varphi \end{cases} \quad (4.7.23)$$

对于 $\bar{a} > 0$ ，该方程所对应的特征值为

$$\lambda_1 = -(\mu_1 + \frac{8\mu_2\bar{a}}{3\pi}) < 0, \quad \lambda_2 = -\frac{4\mu_2\bar{a}}{3\pi} < 0 \quad (4.7.24)$$

所以，该非零定常解是渐近稳定性的。因此，平方阻尼的确可以将 Mathieu 方程的不稳定参激振动稳定为有限幅值的定常振动。

习 题

- 1 考察简谐激励下的平方非线性系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon(2\mu\dot{u} + \omega_0^2 u^2) = \varepsilon f \cos 2\omega t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

求系统主共振的一次近似解并讨论其稳定性。

- 2 对于含 Coulomb 摩擦的 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon[\mu \operatorname{sgn} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u^3(t)] = \varepsilon f \cos \omega t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

求系统主共振的一次近似解，并讨论不同激励幅值对主共振峰的影响。

- 3 试求下述系统在 $\omega \approx 1$ 时周期振动的一次近似解

$$\ddot{u} + \varepsilon(u^2 + \dot{u}^2 - 1)\dot{u} + u = \varepsilon f \cos \omega t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

- 4 证明无阻尼系统

$$\ddot{u} + p(u) = F \cos \omega t$$

具有 $1/n$ 纯亚谐共振 $u = a \cos(\frac{\omega t}{n})$ 的条件是

$$p(u) = (\frac{\omega}{n})^2 u + F T_n(\frac{u}{a})$$

其中

$$T_n(u) = \cos(n \arccos u)$$

是第一类 Chebyshev 多项式。

- 5 对于简谐激励下的平方非线性系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon(2\mu\dot{u} + \omega_0^2 u^2) = F \cos 2\omega t$$

求其 $1/2$ 次亚谐共振的一次近似解并对稳定性进行讨论。

6 求解如下系统的主共振和 1/3 次亚谐共振

$$\ddot{u} + 2\mu u^2 \dot{u} + \sin u = F \cos \omega t$$

7 考察受组合激励的系统

$$\ddot{u} + u + \varepsilon(2\mu \dot{u} + u^3) = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t, \quad \omega_1 \approx 1, \quad \omega_2 \approx 3$$

(1) 在条件 $F_1 = O(\varepsilon)$ 下用多尺度法求该系统的近似解;

(2) 导出系统具有周期振动的条件。

8 对于含 Coulomb 摩擦的 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon[\mu \operatorname{sgn} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u^3(t)] = \varepsilon f \cos \theta(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

若其激励频率按下述规律线性变化

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 + \varepsilon(\sigma_0 + r\varepsilon t), \quad \omega_0 > 0, \quad \sigma_0 > 0, \quad r > 0$$

求系统主共振的一次近似解。

9 考察具有周期系数的线性系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} u_1 + \frac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t} u_2 \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t} u_1 - \frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} u_2 \end{cases}$$

(1) 验证它有两个基本解组 $u_1 = \cos t, u_2 = \sin t$ 和 $u_1 = \sin t, u_2 = \cos t$;

(2) 求其特征乘数和特征指数。

10 对于线性时变系统, 是否能定义系统的固有频率和阻尼比? 为什么?

第5章 多自由度系统的振动

对于线性时不变系统的振动分析, 模态概念和叠加原理在单自由度系统和多自由度系统之间架设了一座桥梁, 使得多自由度系统的振动可以分解为一系列等价于单自由度系统振动的纯模态振动。对于非线性多自由度系统, 与这种纯模态振动相对应的是系统在特殊初始状态下的某一同步振动, 但系统的一般振动并非各种同步振动的组合。这使得非线性多自由度系统的振动分析变得十分复杂。本章将推广第3章介绍的近似解法, 对非线性多自由度系统的振动进行分析。为了用尽可能短的篇幅说明问题, 本章侧重讨论二自由度系统。

对于多自由度系统, 由非线性引起的最重要的新现象是自由振动的**内共振**。为了说明这一概念, 考察图 5.0.1 所示在铅垂平面内运动的弹簧摆, 其弹簧的惯性可忽略不计。例 1.2.1 给出了该二自由度系统的运动微分方程, 其最简形式具有二次非线性, 相应的派生系统是两个互不耦合的单自由度系统, 分别具有以 $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ 为频率的摆动和以 $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ 为频率的弹簧伸缩振动。若 $\omega_2 \approx 2\omega_1$, 这两种振动通过二次非线性因素发生耦合。其表现是: 若拉长弹簧并给摆一很小的初始角后释放, 集中质量起初主要作上下振动, 然后逐渐过渡到以摆动为主; 此后又回到上下振动为主, 不断重复。

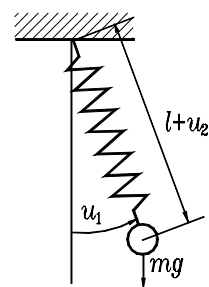


图 5.0.1 重力场中的弹簧摆

内共振不仅是非线性多自由度系统自由振动的特有现象, 而且还会影响系统受迫振动和参激振动, 增添许多共振的可能性及复杂现象。对于这些可能的共振, 在求近似解时要增加一系列消除永年项的条件。

5.1 平方非线性系统的自由振动

本节考察具有弱阻尼、平方非线性的二自由度系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + 2\varepsilon\mu_1\dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 - b_1 u_1 u_2 = 0 \\ \ddot{u}_2 + 2\varepsilon\mu_2\dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 - b_2 u_1^2 = 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

其中

$$\omega_1 < \omega_2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 \leq \mu_r = O(1), \quad b_r = O(1), \quad r = 1, 2 \quad (5.1.2)$$

由于系统呈强非线性, 采用多尺度法研究其微振动的一次近似。将解展开为

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \cdots \\ u_2 = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \cdots \end{cases} \quad (5.1.3)$$

代入方程(5.1.1)后比较 ε 同次幂, 得到

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = 0 \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0 \end{cases} \quad (5.1.4a)$$

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + b_1 u_{11} u_{21} \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + b_2 u_{11}^2 \end{cases} \quad (5.1.4b)$$

方程(5.1.4a)的解形如

$$\begin{cases} u_{11} = A_1(T_1)e^{j\omega_1 T_0} + \text{cc} \\ u_{21} = A_2(T_1)e^{j\omega_2 T_0} + \text{cc} \end{cases} \quad (5.1.5)$$

将其代入方程(5.1.4b)得

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2j\omega_1(D_1 A_1 + \mu_1 A_1)e^{j\omega_1 T_0} + \\ \quad b_1[A_1 A_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)T_0} + \bar{A}_1 A_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1)T_0}] + \text{cc} \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2j\omega_2(D_1 A_2 + \mu_2 A_2)e^{j\omega_2 T_0} + \\ \quad b_2[A_1^2 e^{j2\omega_1 T_0} + \bar{A}_1 A_1] + \text{cc} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

观察方程(5.1.6)的右端项不难发现：含 $e^{j\omega_1 T_0}$ 和 $e^{j\omega_2 T_0}$ 的项分别使第一和第二个方程的解产生永年项；此外，当 $\omega_2 = 2\omega_1$ 时，含 $e^{j(\omega_2 - \omega_1)T_0}$ 和 $e^{j2\omega_1 T_0}$ 的项分别会使第一和第二个方程的解产生永年项。这正是内共振条件引起的永年项。因此，求解过程需要根据 ω_2 是否接近 $2\omega_1$ 分别来进行。

5.1.1 非共振情况

此时，派生系统的两个固有频率满足

$$\omega_2 = 2\omega_1 + O(1) \quad (5.1.7)$$

消除方程(5.1.6)永年项的条件是

$$D_1 A_r + \mu_r A_r = 0, \quad r = 1, 2 \quad (5.1.8)$$

解出

$$A_r = a_r e^{-\mu_r T_1}, \quad r = 1, 2 \quad (5.1.9)$$

其中 a_1 和 a_2 是积分常数。将此结果代回式(5.1.5)和(5.1.3)，得到微振动的一次近似

$$u_r = \varepsilon a_r e^{-\mu_r T_1} e^{j\omega_r T_0} + \text{cc} = \varepsilon a_r e^{-\varepsilon \mu_r t} \cos(\omega_r t + \beta_r), \quad r = 1, 2 \quad (5.1.10)$$

其中 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ 是由系统初始条件确定的常数。此时，系统犹如两个单自由度线性系统，作不相耦合的衰减振动。

5.1.2 内共振

此时，派生系统的两个固有频率满足

$$\omega_2 - 2\omega_1 = \varepsilon \sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (5.1.11)$$

从而使

$$\begin{cases} (\omega_2 - \omega_1)T_0 = \omega_1 T_0 + \varepsilon \sigma T_0 = \omega_1 T_0 + \sigma T_1 \\ 2\omega_1 T_0 = (\omega_2 - \varepsilon \sigma)T_0 = \omega_2 T_0 - \sigma T_1 \end{cases} \quad (5.1.12)$$

将其代入方程(5.1.6)右端, 得到消除永年项的条件

$$\begin{cases} -2j\omega_1(D_1 A_1 + \mu_1 A_1) + b_1 \bar{A}_1 A_2 e^{j\sigma T_1} = 0 \\ -2j\omega_2(D_1 A_2 + \mu_2 A_2) + b_2 A_1^2 e^{-j\sigma T_1} = 0 \end{cases} \quad (5.1.13)$$

令

$$A_r = \frac{a_r}{2} e^{j\beta_r}, \quad r=1,2 \quad (5.1.14)$$

并代入式(5.1.13), 经分离实部和虚部得到

$$\begin{cases} D_1 a_1 + \mu_1 a_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1) = 0 \\ D_1 a_2 + \mu_2 a_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1) = 0 \\ a_1 D_1 \beta_1 + \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1) = 0 \\ a_2 D_1 \beta_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1) = 0 \end{cases} \quad (5.1.15)$$

引入新的相位

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 \quad (5.1.16)$$

将其代入方程(5.1.15), 并注意到方程(5.1.15)中最后两式可合而为一

$$\begin{aligned} a_2 D_1 \varphi &= a_2 D_1 (\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1) = a_2 D_1 \beta_2 - 2a_2 D_1 \beta_1 + \sigma a_2 \\ &= \sigma a_2 + \left(\frac{b_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \right) \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

可将方程(5.1.15)简化为

$$\begin{cases} D_1 a_1 + \mu_1 a_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin \varphi = 0 \\ D_1 a_2 + \mu_2 a_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin \varphi = 0 \\ a_2 D_1 \varphi - \sigma a_2 - \left(\frac{b_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \right) \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.1.18)$$

该三维自治微分方程描述了一次近似解的慢变振幅和相位。将其解依次代回式(5.1.14)、(5.1.16)、(5.1.5)和(5.1.3), 得到稳态振动的一次近似

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon a_1(\varepsilon t) \cos[\omega_1 t + \beta_1(\varepsilon t)] \\ u_2 = \varepsilon a_2(\varepsilon t) \cos[2\omega_1 t + 2\beta_1(\varepsilon t) + \varphi(\varepsilon t)] \end{cases} \quad (5.1.19)$$

其中 $\beta_1(\alpha)$ 可由方程(5.1.18)的解代回方程(5.1.15)中第三式积分而得。以下按照系统是否具有阻尼分别讨论方程(5.1.18)的解。

(1) 阻尼系统的定常解

一般情况下, 阻尼 $\mu_1 > 0$ 和 $\mu_2 > 0$ 将使系统作衰减振动, 只有在特殊的刚度和阻尼匹配下系统才可能出现非零稳态振动。为了确定这种非零定常解, 令方程(5.1.18)左端的导数为零, 得到定常解幅值和相位应满足的代数方程组

$$\begin{cases} \mu_1 \bar{a}_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \sin \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (5.1.20a)$$

$$\begin{cases} \mu_2 \bar{a}_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 \sin \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (5.1.20b)$$

$$\begin{cases} \sigma \bar{a}_2 + \left(\frac{b_1}{2\omega_1} \bar{a}_2^2 - \frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 \right) \cos \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (5.1.20c)$$

由式(5.1.20a)和(5.1.20b)消去 $\sin \bar{\varphi}$ 得

$$\bar{a}_1^2 = -\frac{b_1 \mu_2 \omega_2}{b_2 \mu_1 \omega_1} \bar{a}_2^2 \quad (5.1.21)$$

这意味着有非零定常解的条件是

$$b_1 b_2 \mu_1 \mu_2 < 0 \quad (5.1.22)$$

将式(5.1.21)代入方程(5.1.20c)消去 \bar{a}_1 并注意 $\bar{a}_2 \neq 0$, 得到

$$\sigma + \frac{b_1}{2\omega_1} \left(1 + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \right) \bar{a}_2 \cos \bar{\varphi} = 0 \quad (5.1.23)$$

将上式与式(5.1.20a)相比解出

$$\cotan \bar{\varphi} = -\frac{\sigma}{(2\mu_1 + \mu_2)} = \frac{2\omega_1 - \omega_2}{\varepsilon(2\mu_1 + \mu_2)} \quad (5.1.24)$$

由此可得到相位 $0 < \bar{\varphi} < \pi$, 代回方程(5.1.20a)得

$$\bar{a}_2 = \frac{4\mu_1 \omega_1}{b_1 \sin \bar{\varphi}} \quad (5.1.25)$$

再代回式(5.1.21)得

$$\bar{a}_1 = \sqrt{-\frac{b_1 \mu_2 \omega_2}{b_2 \mu_1 \omega_1} |\bar{a}_2|} \quad (5.1.26)$$

将上述振幅 \bar{a}_1 、 \bar{a}_2 和相位 $\bar{\varphi}$ 带回式(5.1.19), 得到定常解的一次近似。

值得指出的是, 此定常解能否真正实现还取决于其是否具有渐近稳定性。为了讨论稳定性, 将定常解 \bar{a}_1 、 \bar{a}_2 和 $\bar{\varphi}$ 代入方程(5.1.18), 然后将该方程在定常解处线性化, 得到对应的特征方程

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{b_1}{4\omega_1} \bar{a}_1 \sin \bar{\varphi} & \frac{b_1}{4\omega_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cos \bar{\varphi} \\ -\frac{b_2}{2\omega_2} \bar{a}_1 \sin \bar{\varphi} & -\mu_2 - \lambda & \frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 \cos \bar{\varphi} \\ -\frac{b_2}{2\omega_1} \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} \cos \bar{\varphi} & \frac{b_1}{2\omega_1} (1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}) \cos \bar{\varphi} & -(2\mu_1 + \mu_2) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (5.1.27)$$

定常解渐近稳定的充分必要条件是方程所有的根皆有负实部。以 $\sigma = 0$ 为例, 此时 $\bar{\varphi} = \pi/2$, 方程(5.1.27)可简化为

$$[\lambda + (2\mu_1 + \mu_2)][\lambda(\lambda + \mu_2) + \frac{b_1 b_2}{8\omega_1 \omega_2} \bar{a}_1^2] = [\lambda + (2\mu_1 + \mu_2)](\lambda^2 + \mu_2 \lambda - 2\mu_1 \mu_2) = 0 \quad (5.1.28)$$

解得

$$\lambda_1 = -(2\mu_1 + \mu_2), \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-\mu_2 \mp \sqrt{\mu_2^2 + 8\mu_1 \mu_2}) \quad (5.1.29)$$

由此可见, 对于 $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ 的耗散系统, 该定常解并不稳定。定常解渐近稳定的条件是

$$\mu_1 < 0, \quad \mu_2 > -2\mu_1 > 0 \quad (5.1.30)$$

即系统含有某种自激因素。注意到条件(5.1.22), 系统非线性刚度还需满足 $b_1 b_2 > 0$ 。

(2) 无阻尼系统的非定常解

此时, 方程(5.1.18)简化为

$$\begin{cases} D_1 a_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.1.31a)$$

$$\begin{cases} D_1 a_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.1.31b)$$

$$\begin{cases} a_2 D_1 \varphi - \sigma a_2 - (\frac{b_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2) \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.1.31c)$$

由其中前两个方程消去 $\sin \varphi$ 得到全微分关系

$$a_1 D_1 a_1 + \nu a_2 D_1 a_2 = 0 \quad (5.1.32)$$

其中

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_1 \omega_2}{b_2 \omega_1} \quad (5.1.33)$$

对式(5.1.32)两端积分得到能量守恒关系

$$a_1^2 + \nu a_2^2 = E = \text{const.} \quad (5.1.34)$$

显然, 当 $\nu > 0$, 即 $b_1 b_2 > 0$ 时, 等能量线是 (a_1, a_2) 平面上的椭圆, 而 $b_1 b_2 < 0$ 时是双曲线。

以下仅研究前一情况。

视 a_2 为间接变量, 利用式(5.1.31b)将(5.1.31c)左端第一项改写为

$$a_2 D_1 \varphi = a_2 \frac{d\varphi}{da_2} D_1 a_2 = -\frac{a_1^2 a_2 b_2 \sin \varphi}{4\omega_2} \frac{d\varphi}{da_2} \quad (5.1.35)$$

代入式(5.1.31c)得

$$a_1^2 a_2 \sin \varphi \frac{d\varphi}{da_2} + \frac{4\sigma\omega_2}{b_2} a_2 + (2\nu a_2^2 - a_1^2) \cos \varphi = 0 \quad (5.1.36)$$

即

$$a_1^2 a_2 d(\cos \varphi) - \frac{2\sigma\omega_2}{b_2} d(a_2^2) - 2\nu a_2^2 \cos \varphi da_2 + a_1^2 \cos \varphi da_2 = 0 \quad (5.1.37)$$

利用全微分关系(5.1.32)将上式中 $-\nu a_2 da_2$ 替换为 $a_1 da_1$, 整理后得全微分

$$d(a_1^2 a_2 \cos \varphi) - \frac{2\sigma\omega_2}{b_2} d(a_2^2) = 0 \quad (5.1.38)$$

积分得

$$a_1^2 a_2 \cos \varphi - \frac{2\sigma\omega_2}{b_2} a_2^2 = L = \text{const.} \quad (5.1.39)$$

由于三个未知量 a_1 、 a_2 和 φ 之间具有两个积分关系, 方程(5.1.31)中的未知量只剩一个, 例如取作 $a_1(T_1)$ 。为了最终描述的方便, 引入一未知函数 $\xi(T_1)$, 要求它满足

$$a_1^2 = E\xi \quad (5.1.40)$$

根据能量关系(5.1.34)和式(5.1.40), 可将 a_2 表示为

$$a_2^2 = \frac{E(1-\xi)}{\nu} \quad (5.1.41)$$

将式(5.1.31a)中 $b_1 a_1 a_2 \sin \varphi / 4\omega_1$ 移项后两端平方, 利用式(5.1.39)、(5.1.40)和(5.1.41)得

$$\begin{aligned} (D_1 a_1)^2 &= \frac{b_1^2}{16\omega_1^2} a_1^2 a_2^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \frac{b_1^2}{16\omega_1^2} a_1^2 a_2^2 \left[1 - \frac{1}{a_1^4 a_2^2} \left(L + \frac{2\sigma\omega_2}{b_2} a_2^2 \right)^2 \right] \\ &= \frac{b_1^2}{16\omega_1^2 a_1^2} \left\{ \frac{E^3}{\nu} \xi^2 (1 - \xi) - \left[L + \frac{2\sigma\omega_2 E}{b_2 \nu} (1 - \xi) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

注意到对式(5.1.40)求导的下述关系

$$2a_1 D_1 a_1 = E \frac{d\xi}{dT_1} \quad (5.1.43)$$

方程(5.1.42)可写作

$$\frac{4\nu\omega_1^2}{Eb_1^2} \left(\frac{d\xi}{dT_1} \right)^2 = \xi^2 (1 - \xi) - \frac{\nu}{E^3} \left[L + \frac{2\sigma\omega_2 E}{b_2 \nu} (1 - \xi) \right]^2 = F^2(\xi) - G^2(\xi) \quad (5.1.44)$$

其中两个一元函数定义为

$$F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \pm \xi \sqrt{1 - \xi}, \quad G(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\nu}{E^3}} \left[L + \frac{2\sigma\omega_2 E}{b_2 \nu} (1 - \xi) \right] \quad (5.1.45)$$

它们关于 ξ 变化的图形示于图 5.1.1。

显然, 由方程(5.1.44)确定的运动要求 $F^2(\xi) \geq G^2(\xi)$, $F(\xi)$ 与 $G(\xi)$ 的交点对应于 $d\xi/dT_1 = 0$, 即 $D_1 a_1 = 0$ 。这对应于方程(5.1.31)的定常解, 也就是原系统的周期振动。一般情况下, $F(\xi)$ 与 $G(\xi)$ 交于三点, 对应的横坐标为 $\xi_1 < 0 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ 。根据式(5.1.40)的要求 $\xi > 0$, 运动要满足 $\xi_2 \leq \xi \leq \xi_3$ 。现证明 ξ 随时间在区间 $[\xi_2, \xi_3]$ 内振荡, 对应的系统运动是非周期性振动。关于 $\xi_1 = \xi_2$ 或 $\xi_2 = \xi_3$ 的退化情况, 可参见文献[12]的讨论。

首先, 将方程(5.1.44)右端作形式上的因式分解

$$\frac{4\nu\omega_1^2}{Eb_1^2} \left(\frac{d\xi}{dT_1} \right)^2 = (\xi_3 - \xi)(\xi_2 - \xi)(\xi_1 - \xi) \quad (5.1.46)$$

引入变换

$$\xi_3 - \xi = (\xi_3 - \xi_2) \sin^2 y \quad (5.1.47)$$

式(5.1.46)成为

$$\frac{dy}{dt} = \pm \rho \sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 y} \quad (5.1.48)$$

其中常数

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}}, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon b_1}{4\omega_1} \sqrt{\frac{E(\xi_3 - \xi_1)}{\nu}} = O(\varepsilon) \quad (5.1.49)$$

对方程(5.1.48)进行分离变量积分, 得到

$$\pm \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 z}} = \rho t \quad (5.1.50)$$

用 Jacobi 椭圆函数 $\text{sn}(\rho t, \eta)$ 表示式中的积分, 得到

$$y = \arcsin[\text{sn}(\rho t, \eta)] \quad (5.1.51)$$

依次代回式(5.1.47)和(5.1.40), 得到

$$a_1 = \pm \sqrt{\xi E} = \pm \sqrt{E[\xi_3 - (\xi_3 - \xi_2) \text{sn}^2(\rho t, \eta)]} \quad (5.1.52)$$

根据式(5.1.41)

$$a_2 = \pm \sqrt{\frac{E(1 - \xi)}{\nu}} = \pm \sqrt{\frac{E}{\nu} [1 - \nu[\xi_3 - (\xi_3 - \xi_2) \text{sn}^2(\rho t, \eta)]]} \quad (5.1.53)$$

这表明, 两个自由度的振幅像调幅波一样随时间 t 缓慢变化, 此起彼伏, 能量在两个自由度间来回传递。由于系统无阻尼, ε 的大小取决于振幅。因此, 振幅越大, 振幅的波动也越快。图 5.1.2 给出了两种初位移下系统的内共振, 充分地支持了上述结论。

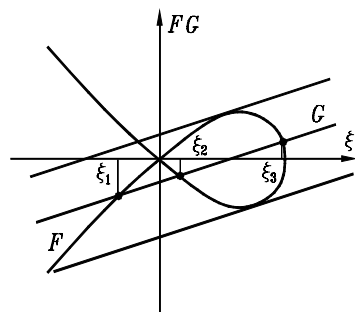
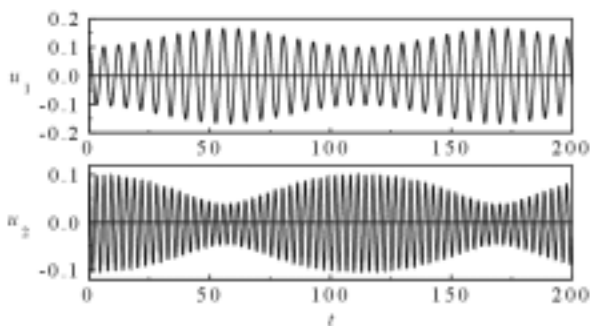
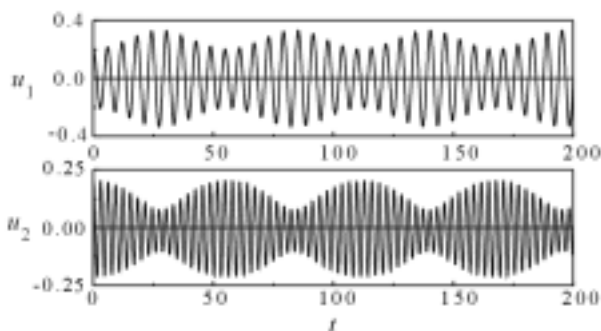


图 5.1.1 在 ξ 坐标下可能发生的振动



(a) 初始条件: $u_1(0)=u_2(0)=0.1, \dot{u}_1(0)=\dot{u}_2(0)=0$



(b) 初始条件: $u_1(0)=u_2(0)=0.2, \dot{u}_1(0)=\dot{u}_2(0)=0$

图 5.1.2 二次非线性系统的内共振

$$(b_1=b_2=1, \omega_1=1, \omega_2=2.01)$$

最后值得指出, 内共振现象普遍存在于非线性多自由度系统的自由振动中。一般情况下, N 自由度非线性系统的派生系统具有 N 个固有频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, 当它们中的某一对之比为整数 n 时, 系统的 n 次非线性项就可能导致内共振发生。例如, 若将系统(5.1.1)中的平方非线性弹性力改为立方非线性弹性力, 则当 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 时系统的自由振动会发生内共振。读者可仿照本节的思路对其进行分析, 只是相应的方程(5.1.44)形式不同。而该方程没有精确解, 只能通过数值积分来完成分析^[12]。

5.2 陀螺力对内共振的影响*

许多工程问题涉及到陀螺效应, 最典型的有陀螺的振动、卫星姿态的控制等。本节讨论陀螺力对多自由度非线性系统自由振动的影响。具体地, 考察一个具有陀螺力的二自由度平方非线性系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 - c\dot{u}_2 + k_{11}u_1 + k_{12}u_2 - 2u_1u_2 = 0 \\ \ddot{u}_2 + c\dot{u}_1 + k_{21}u_1 + k_{22}u_2 - u_1^2 = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

其中 $c > 0$, $k_{ij}, i, j = 1, 2$ 是正定刚度矩阵的元素。由于系统具有强非线性, 采用多尺度法求系统微自由振动的一次近似解。

(1) 一次近似解的形式

设解为

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \cdots \\ u_2 = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \cdots \end{cases} \quad (5.2.2)$$

将其代入方程(5.2.1)后比较 ε 同次幂, 得到

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} - c D_0 u_{21} + k_{11} u_{11} + k_{12} u_{21} = 0 \\ D_0^2 u_{21} + c D_0 u_{11} + k_{21} u_{11} + k_{22} u_{21} = 0 \end{cases} \quad (5.2.3a)$$

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} - c D_0 u_{22} + k_{11} u_{12} + k_{12} u_{22} = -2 D_1 D_0 u_{11} + c D_1 u_{21} + 2 u_{11} u_{21} \\ D_0^2 u_{22} + c D_0 u_{12} + k_{21} u_{12} + k_{22} u_{22} = -2 D_1 D_0 u_{21} - c D_1 u_{11} + u_{11}^2 \end{cases} \quad (5.2.3b)$$

由于方程(5.2.3a)左端具有静力和陀螺力耦合, 其解形如

$$\begin{cases} u_{11} = A_1(T_1) e^{j\omega_1 T_0} + A_2(T_1) e^{j\omega_2 T_0} + \text{cc} \\ u_{21} = \Gamma_1 A_1(T_1) e^{j\omega_1 T_0} + \Gamma_2 A_2(T_1) e^{j\omega_2 T_0} + \text{cc} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

其中 $j\omega_1$ 和 $j\omega_2$ 是下述关于 λ 的特征方程的两个互异纯虚根

$$\det \begin{bmatrix} k_{11} + \lambda^2 & k_{12} - c\lambda \\ k_{21} + c\lambda & k_{22} + \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda^4 + (k_{11} + k_{22} + c^2)\lambda^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad (5.2.5)$$

以下约定 $0 < \omega_1 < \omega_2$, 而

$$\Gamma_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_{12} - jc\omega_r}{\omega_r^2 - k_{22}}, \quad r=1,2 \quad (5.2.6)$$

将解(5.2.4)代入方程(5.2.3b)得

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} - c D_0 u_{22} + k_{11} u_{12} + k_{12} u_{22} \\ = -(2j\omega_1 - c \Gamma_1) D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - (2j\omega_2 - c \Gamma_2) D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} + \\ \quad 2 \Gamma_1 A_1^2 e^{j2\omega_1 T_0} + 2 \Gamma_2 A_2^2 e^{j2\omega_2 T_0} + 2(\Gamma_1 + \Gamma_2) A_1 A_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \\ \quad 2(\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2) \bar{A}_1 \bar{A}_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1) T_0} + 2 \bar{\Gamma}_1 A_1 \bar{A}_1 + 2 \bar{\Gamma}_2 A_2 \bar{A}_2 + \text{cc} \\ D_0^2 u_{22} + c D_0 u_{12} + k_{21} u_{12} + k_{22} u_{22} \\ = -(2j\omega_1 \Gamma_1 + c) D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - (2j\omega_2 \Gamma_2 + c) D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} + \\ \quad A_1^2 e^{j2\omega_1 T_0} + 2 A_2^2 e^{j2\omega_2 T_0} + 2 A_1 A_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \\ \quad 2 \bar{A}_1 A_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1) T_0} + A_1 \bar{A}_1 + A_2 \bar{A}_2 + \text{cc} \end{cases} \quad (5.2.7)$$

与 5.1 节中的分析相似, 这里要就系统是否发生内共振来讨论方程(5.2.7)的永年项问题。为了说明可能发生的新现象, 以下侧重研究 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 的内共振情况。

记

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1) \quad (5.2.8)$$

由此可将式(5.2.7)右端出现的如下指数改写为

$$2\omega_1 T_0 = \omega_2 T_0 - \sigma T_1, (\omega_2 - \omega_1) T_0 = \omega_1 T_0 + \sigma T_1 \quad (5.2.9)$$

对于 5.1 节中线性部分完全解耦的系统, 方程(5.1.6)左端频率为 ω_1 (或 ω_2) 的谐波项自相平衡, 令方程右端相应项的系数为零即可消除永年项。目前, 方程(5.2.7)左端具有静力耦合和陀螺力耦合, 消除永年项的过程要稍微复杂些。设该方程的一个特解形如

$$\begin{cases} u_{12} = U_{11}e^{j\omega_1 T_0} + U_{12}e^{j\omega_2 T_0} \\ u_{22} = U_{21}e^{j\omega_1 T_0} + U_{22}e^{j\omega_2 T_0} \end{cases} \quad (5.2.10)$$

将其连同式(5.2.9)代入方程(5.2.7), 比较两端频率为 ω_1 和 ω_2 的谐波的系数, 得到

$$\begin{cases} (k_{11} - \omega_r^2)U_{1r} + (k_{12} - jc\omega_r)U_{2r} = Q_{1r} \\ (k_{21} + jc\omega_r)U_{1r} + (k_{22} - \omega_r^2)U_{2r} = Q_{2r}, \quad r=1,2 \end{cases} \quad (5.2.11)$$

其中

$$\begin{cases} Q_{11} = -(2j\omega_1 - c\Gamma_1)D_1 A_1 + 2(\overline{\Gamma}_1 + \Gamma_2)\overline{A}_1 A_2 e^{j\sigma T_1} \\ Q_{21} = -(2j\omega_1 \Gamma_1 + c)D_1 A_1 + 2\overline{A}_1 A_2 e^{j\sigma T_1} \\ Q_{12} = -(2j\omega_2 - c\Gamma_2)D_1 A_2 + 2\Gamma_1 A_1^2 e^{-j\sigma T_1} \\ Q_{22} = -(2j\omega_2 \Gamma_2 + c)D_1 A_2 + A_1^2 e^{-j\sigma T_1} \end{cases} \quad (5.2.12)$$

显然, 方程(5.2.11)左端频率为 ω_1 (或 ω_2) 的谐波项无法自相平衡, 只有依靠方程左右端相互平衡。由方程(5.2.5)可见, 线性代数方程(5.2.11)的系数行列式为零。因此, 该方程的可解性条件是

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1r} & k_{12} - jc\omega_r \\ Q_{2r} & k_{22} - \omega_r^2 \end{bmatrix} = 0, \quad r=1,2 \quad (5.2.13)$$

利用式(5.2.6)将上式改写为

$$Q_{1r} + \Gamma_r Q_{2r} = 0, \quad r=1,2 \quad (5.2.14)$$

把式(5.2.12)代入式(5.2.14)并进行整理, 得到消除永年项的条件

$$\begin{cases} D_1 A_1 = -jB_1 \overline{A}_1 A_2 e^{j(\sigma T_1 + \gamma)} \\ D_1 A_2 = -\frac{j}{2} B_2 A_1^2 e^{-j(\sigma T_1 + \gamma)} \end{cases} \quad (5.2.15)$$

其中

$$B_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|2\overline{\Gamma}_1 + \Gamma_2|(k_{22} - \omega_r^2)}{\omega_r(k_{11} + k_{22} + c^2 - 2\omega_r^2)}, \quad r=1,2 \quad (5.2.16)$$

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}[\log(2\overline{\Gamma}_1 + \Gamma_2)] \quad (5.2.17)$$

记

$$A_r(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_r(T_1)}{2} e^{j\beta_r(T_1)}, \quad r=1,2 \quad (5.2.18)$$

将其代入方程(5.2.15)后分离实虚部, 得到一阶近似解振幅和相位应满足的自治微分方程组

$$\begin{cases} D_1 a_1 = \frac{1}{2} B_1 a_1 a_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 + \gamma) \\ D_1 a_2 = -\frac{1}{4} B_2 a_1^2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 + \gamma) \\ a_1 D_1 \beta_1 = -\frac{1}{2} B_1 a_1 a_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 + \gamma) \\ a_2 D_1 \beta_2 = -\frac{1}{4} B_2 a_1^2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 + \gamma) \end{cases} \quad (5.2.19)$$

容易看出, 该方程相当于方程(5.1.15)的无阻尼情况。类似于 5.1 节的分析, 通过引入

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \beta_2 - 2\beta_1 + \sigma T_1 + \gamma \quad (5.2.20)$$

可将方程(5.2.19)缩并为 3 维自治系统

$$\begin{cases} D_1 a_1 = \frac{1}{2} B_1 a_1 a_2 \sin \varphi \\ D_1 a_2 = -\frac{1}{4} B_2 a_1^2 \sin \varphi \\ a_2 D_1 \varphi = \sigma a_2 + (B_1 a_2^2 - \frac{1}{4} B_2 a_1^2) \cos \varphi \end{cases} \quad (5.2.21)$$

因此, 系统的一次近似解为

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon [a_1(\varepsilon) \cos(\omega_1 t + \beta_1) + a_2(\varepsilon) \cos(2\omega_1 t + 2\beta_1 + \varphi - \gamma)] \\ u_2 = \varepsilon [\Gamma_1 |a_1(\varepsilon) \cos(\omega_1 t + \beta_1 + \gamma_1) + \Gamma_1 |a_2(\varepsilon) \cos(2\omega_1 t + 2\beta_1 + \varphi + \gamma_1 - \gamma)] \end{cases} \quad (5.2.22)$$

其中

$$\gamma_r = \arg(\Gamma_r), \quad r = 1, 2 \quad (5.2.23)$$

显然, 方程(5.2.21)的非零定常解使式(5.2.22)成为周期运动。由于系统无阻尼, 这种周期运动只能是临界稳定的, 系统在任意初始条件下的运动并非周期运动。

(2) 非周期运动的分析

从式(5.2.21)的前两个方程消去 $\sin \varphi$ 后得到一全微分, 积分得

$$a_1^2 + \nu a_2^2 = E = \text{const.} \quad (5.2.24)$$

其中 E 是积分常数, 而

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2B_1}{B_2} = \frac{2\omega_2(k_{22} - \omega_1^2)(k_{11} + k_{22} + c^2 - 2\omega_2^2)}{\omega_1(k_{22} - \omega_2^2)(k_{11} + k_{22} + c^2 - 2\omega_1^2)} \quad (5.2.25)$$

利用特征方程(5.2.5)的根与系数关系

$$(j\omega_1)^2 + (j\omega_2)^2 = -(k_{11} + k_{22} + c^2) \quad (5.2.26)$$

式(5.2.25)可简化为

$$\nu = -\frac{2\omega_2(k_{22} - \omega_1^2)}{\omega_1(k_{22} - \omega_2^2)} \quad (5.2.27)$$

当 $\nu > 0$ 时, 可完全按 5.1 节中的方法对方程(5.2.21)进行分析。这时, 陀螺力不改变系统自由振动的内共振特性, 振动幅值 a_1 和 a_2 是有界的。

以下讨论 $\nu < 0$ 的情况。显然, 当 $k_{22} < \omega_1^2$ 或 $k_{22} > \omega_2^2$ 时, $\nu < 0$ 。仿照 5.1 节中的分析, 可求出方程(5.2.21)的第二个积分

$$a_1^2 a_2 \cos \varphi - \frac{2\sigma}{B_2} a_2^2 = L = \text{const.} \quad (5.2.28)$$

由于三个未知量 a_1 、 a_2 和 φ 之间具有两个积分关系, 方程(5.2.21)中的未知量只剩一个。现以 $a_2(T_1)$ 作为独立函数, 引入一未知函数 $\xi(T_1)$, 要求它满足

$$a_2^2 = |E| \xi \quad (5.2.29)$$

与 5.1 节的一个区别在于: 当 $\nu < 0$ 时, 有可能出现 $E < 0$ 。根据式(5.2.24), 可写出

$$a_1^2 = |E|(\pm 1 + \hat{\nu} \xi), \quad \hat{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -\nu > 0 \quad (5.2.30)$$

其中的 \pm 号分别对应 $E > 0$ 和 $E < 0$ 。利用式(5.2.28)从式(5.2.21)的第二个方程中消去 φ , 并利用式(5.2.29)和(5.2.30)得到

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = F^2(\xi) - G^2(\xi) \quad (5.2.31)$$

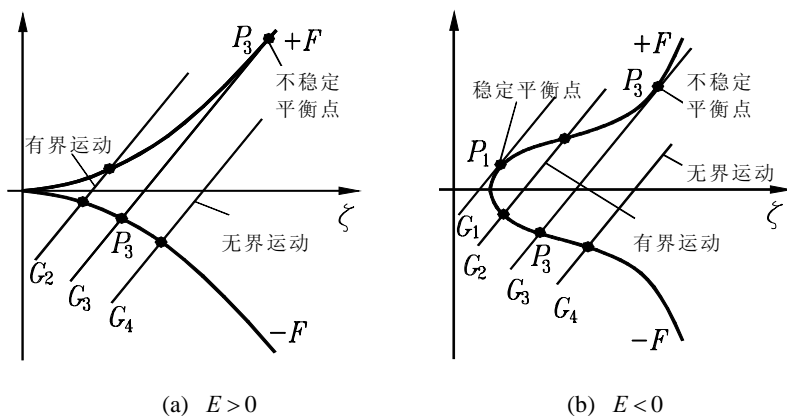
其中

$$\begin{cases} \xi \stackrel{\text{def}}{=} \mu \xi, & F \stackrel{\text{def}}{=} \pm \xi(\xi \pm 1), G \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\sigma}(\xi + \hat{L}) \\ \tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} B_2 \sqrt{\hat{\nu} |E|} T_1, & \hat{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sigma}{B_2 \sqrt{\hat{\nu} |E|}}, \quad \hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L B_2 \hat{\nu}}{2\sigma |E|} \end{cases} \quad (5.2.32)$$

图 5.2.1 给出了 $E > 0$ 和 $E < 0$ 时函数 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 的示意图。由于 a_2 为实函数, 故 ξ 亦如此, 从而有 $F^2 \geq G^2$ 。根据式(5.2.31), 直线 $G(\xi)$ 与曲线 $F(\xi)$ 的交点对应于时变函数 $\xi(\tau)$ 的极值点。由式(5.2.29)和(5.2.30)知, 这对应于 $D_1 a_1 = 0$ 和 $D_1 a_2 = 0$, 即方程(5.2.21)的定常解, 也就是原系统的周期振动。特别地, 直线 G_1 、 G_3 与曲线 $F(\xi)$ 有切点 P_1 和 P_3 , 其中 P_1 对应于稳定的周期运动, 而 P_3 对应于不稳定的周期运动。

当直线 G_2 与曲线 $F(\xi)$ 有两个交点时, 类似于 5.1 节的分析, 两交点横坐标间的 ξ (亦即 a_2^2) 可以用 Jacobi 椭圆函数表示, 它对应于系统的有界非周期振动。

直线 G_4 与曲线 $F(\xi)$ 只有一个交点, 其右侧的 ξ 可趋于无穷, 这对应于系统的无界运动。特别是当 $\sigma = 0$ 时直线 $G = 0$ 与曲线 $F(\xi)$ 只有一个交点, 从而系统的运动必无界。这种无界运动是陀螺力和非线性刚度项联合引起的效应。


 图 5.2.1 函数 $F(\zeta)$ 和 $G(\zeta)$

5.3 平方非线性系统的受迫振动

考察具有弱阻尼、平方非线性的二自由度系统在简谐激励下的振动问题

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + 2\varepsilon\mu_1\dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 - b_1 u_1 u_2 = F_1 \cos(\omega t + \theta_1) \\ \ddot{u}_2 + 2\varepsilon\mu_2\dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 - b_2 u_1^2 = F_2 \cos(\omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (5.3.1)$$

其中

$$\omega_1 < \omega_2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 \leq \mu_r = O(1), \quad b_r = O(1), \quad r = 1, 2 \quad (5.3.2)$$

本节研究系统在如下激励条件下的受迫振动

$$F_1 = \varepsilon f_1, \quad F_2 = \varepsilon^2 f_2, \quad f_r = O(1), \quad r = 1, 2 \quad (5.3.3a)$$

$$\omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma_1, \quad \sigma_1 = O(1) \quad (5.3.3b)$$

即作用在第二个自由度上的激励很弱，但其频率接近派生系统的第二阶固有频率。该方程可近似描述船体在以 ω 为频率的规则波浪下绕横轴的俯仰振动 u_1 和绕纵轴的滚摆振动 u_2 。

5.3.1 一次近似解

类似于 5.1 节，采用多尺度法研究该强非线性系统微振动的一次近似。设解为

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \cdots \\ u_2 = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \cdots \end{cases} \quad (5.3.4)$$

将式(5.3.4)和(5.3.3a)代入方程(5.3.1)后比较 ε 同次幂，得到

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = f_1 \cos(\omega T_0 + \theta_1) \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0 \end{cases} \quad (5.3.5a)$$

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + b_1 u_{11} u_{21} \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_1 u_{21}) + b_2 u_{11}^2 + f_2 \cos(\omega T_0 + \theta_2) \end{cases} \quad (5.3.5b)$$

方程(5.3.5a)的解形如

$$\begin{cases} u_{11} = A_1(T_1)e^{j\omega_1 T_0} + B e^{j(\omega T_0 + \theta_1)} + cc \\ u_{21} = A_2(T_1)e^{j\omega_2 T_0} + cc \end{cases} \quad (5.3.6)$$

其中

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1}{2(\omega_1^2 - \omega^2)} \quad (5.3.7)$$

将式(5.3.6)代入方程(5.3.5b)得

$$\begin{cases} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2j\omega_1(D_1 A_1 + \mu_1 A_1)e^{j\omega_1 T_0} - 2j\mu_1 \omega B e^{j(\omega T_0 + \theta_1)} + \\ \quad b_1[A_1 A_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)T_0} + \bar{A}_1 A_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1)T_0}] + \\ \quad b_1[A_2 B e^{j((\omega + \omega_2)T_0 + \theta_1)} + \bar{A}_2 B e^{j((\omega - \omega_2)T_0 + \theta_1)}] + cc \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2j\omega_2(D_1 A_2 + \mu_2 A_2)e^{j\omega_2 T_0} + f_2 e^{j(\omega T_0 + \theta_2)} / 2 + \\ \quad b_2[A_1^2 e^{j2\omega_1 T_0} + \bar{A}_1 A_1 + B^2 + 2A_1 B e^{j((\omega + \omega_1)T_0 + \theta_1)} + \\ \quad 2\bar{A}_1 B e^{j((\omega - \omega_1)T_0 + \theta_1)} + B^2 e^{2j(\omega T_0 + \theta_1)}] + cc \end{cases} \quad (5.3.8)$$

根据 5.1 节的分析知, 方程(5.3.8)的解出现永年项的条件与 ω_2 是否接近 $2\omega_1$ 有关, 需要分别进行讨论。

(1)非内共振情况

此时, 派生系统的两个固有频率满足

$$\omega_2 = 2\omega_1 + O(1) \quad (5.3.9)$$

为了消除方程(5.3.8)的永年项, 只要

$$\begin{cases} D_1 A_1 + \mu_1 A_1 = 0 \\ 4j\omega_2(D_1 A_2 + \mu_2 A_2) - f_2 e^{j(\sigma_1 T_1 + \theta_2)} = 0 \end{cases} \quad (5.3.10)$$

解该线性微分方程得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{a_1}{2} e^{(-\mu_1 T_1 + j\theta_1)} \\ A_2 = \frac{a_2}{2} e^{(-\mu_2 T_1 + j\theta_2)} - \frac{jf_2}{4\omega_2(\mu_2 + j\sigma_1)} e^{j(\sigma_1 T_1 + \theta_2)} \end{cases} \quad (5.3.11)$$

其中 a_1 和 a_2 是积分常数。

将式(5.3.11)依次代回式(5.3.6)和(5.3.3), 便可得到受迫振动响应。注意到上式中第一项的衰减特性, 系统稳态受迫振动的一次近似为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\mathcal{F}_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta_1) = \frac{F_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta_1) \\ u_2 = \frac{\mathcal{F}_2}{2\omega_2 \sqrt{\mu_2^2 + \sigma_1^2}} \sin(\omega t + \theta_2 - \varphi) = \frac{F_2}{2\varepsilon\omega_2 \sqrt{\mu_2^2 + \sigma_1^2}} \sin(\omega t + \theta_2 - \varphi) \end{cases} \quad (5.3.12)$$

其中

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_1}{\mu_2}\right) \quad (5.3.13)$$

这说明，一次近似意义下的受迫振动尚未受系统中非线性影响。此时，系统犹如两个单自由度线性系统，作不相耦合的受迫简谐振动。读者不难从线性系统受迫振动的精确解出发，证明(5.3.12)的正确性。

(2) 内共振情况

此时，派生系统的两个固有频率满足

$$\omega_2 - 2\omega_1 = -\varepsilon\sigma_2, \quad \sigma_2 = O(1) \quad (5.3.14)$$

由式(5.3.3b)和(5.3.14)可写出如下相位关系

$$\begin{cases} (\omega_2 - \omega_1)T_0 = \omega_1 T_0 - \varepsilon\sigma_2 T_0 = \omega_1 T_0 - \sigma_2 T_1 \\ 2\omega_1 T_0 = (\omega_2 + \varepsilon\sigma_2)T_0 = \omega_2 T_0 + \sigma_2 T_1 \\ \omega T_0 = (\omega_2 + \varepsilon\sigma_1)T_0 = \omega_2 T_0 + \sigma_1 T_1 \end{cases} \quad (5.3.15)$$

将其代入方程(5.3.8)的右端，获得消除永年项的条件

$$\begin{cases} -2j\omega_1(D_1 A_1 + \mu_1 A_1) + b_1 \bar{A}_1 A_2 e^{-j\sigma_2 T_1} = 0 \\ -2j\omega_2(D_1 A_2 + \mu_2 A_2) + b_2 A_1^2 e^{j\sigma_2 T_1} + \frac{f_2}{2} e^{j(\sigma_1 T_1 + \theta_1)} = 0 \end{cases} \quad (5.3.16)$$

令

$$A_r = \frac{a_r}{2} e^{j\beta_r}, \quad r=1,2 \quad (5.3.17)$$

并代入式(5.3.16)，经分离实虚部得到

$$\begin{cases} D_1 a_1 + \mu_1 a_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 - \sigma_2 T_1) = 0 \\ D_1 a_2 + \mu_2 a_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1 - \sigma_2 T_1) - \frac{f_2}{2\omega_2} \sin(\sigma_1 T_1 - \beta_2 + \theta_2) = 0 \\ a_1 D_1 \beta_1 + \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 - \sigma_2 T_1) = 0 \\ a_2 D_1 \beta_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1 - \sigma_2 T_1) + \frac{f_2}{2\omega_2} \cos(\sigma_1 T_1 - \beta_2 + \theta_2) = 0 \end{cases} \quad (5.3.18)$$

再引入

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sigma_1 T_1 - \beta_2 + \theta_2 \\ \varphi_2 = \beta_2 - 2\beta_1 - \sigma_2 T_1 \end{cases} \quad (5.3.19)$$

亦即

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)T_1 + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2] \\ \beta_2 = \sigma_1 T_1 + \theta_2 - \varphi_1 \end{cases} \quad (5.3.20)$$

将方程(5.3.18)简化为

$$\begin{cases} D_1 a_1 + \mu_1 a_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin \varphi_2 = 0 \\ D_1 a_2 + \mu_2 a_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin \varphi_2 - \frac{f_2}{2\omega_2} \sin \varphi_1 = 0 \\ a_1 D_1 \varphi_1 - \sigma_1 a_2 - \frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos \varphi_2 - \frac{f_2}{2\omega_2} \cos \varphi_1 = 0 \\ a_2 D_1 \varphi_2 + \sigma_2 a_2 + (\frac{b_2}{4\omega_2} a_1^2 - \frac{b_1}{2\omega_1} a_2^2) \cos \varphi_2 + \frac{f_2}{2\omega_2} \cos \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (5.3.21)$$

把该方程确定的慢变幅值和相位依次代回式(5.3.17)和(5.3.6), 并注意到由式(5.3.15)和(5.3.20)所给出的相位关系

$$\begin{cases} \omega_1 T_0 + \beta_1 = \frac{1}{2}[\omega - \varepsilon(\sigma_1 - \sigma_2)]T_0 + \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)T_1 + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2] \\ \quad = \frac{1}{2}(\omega t + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2) \\ \omega_2 T_0 + \beta_2 = (\omega - \varepsilon\sigma_1)T_0 + \sigma_1 T_1 + \theta_2 - \varphi_1 = \omega t + \theta_2 - \varphi_1 \end{cases} \quad (5.3.22)$$

得到受迫振动的一次近似

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon a_1(\varepsilon t) \cos[\frac{1}{2}(\omega t + \theta_2 - \varphi_1(\varepsilon t) - \varphi_2(\varepsilon t))] + \frac{F_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta_1) \\ u_2 = \varepsilon a_2(\varepsilon t) \cos[\omega t + \theta_2 - \varphi_1(\varepsilon t)] \end{cases} \quad (5.3.23)$$

5.3.2 内共振条件下的定常解

令方程(5.3.21)左端的导数为零, 得到定常解振幅和相位满足的代数方程

$$\mu_1 \bar{a}_1 - \frac{b_1}{4\omega_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \sin \bar{\varphi}_2 = 0 \quad (5.3.24a)$$

$$\mu_2 \bar{a}_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 \sin \bar{\varphi}_2 - \frac{f_2}{2\omega_2} \sin \bar{\varphi}_1 = 0 \quad (5.3.24b)$$

$$\sigma_1 \bar{a}_2 + \frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 \cos \bar{\varphi}_2 + \frac{f_2}{2\omega_2} \cos \bar{\varphi}_1 = 0 \quad (5.3.24c)$$

$$\sigma_2 \bar{a}_2 + (\frac{b_2}{4\omega_2} \bar{a}_1^2 - \frac{b_1}{2\omega_1} \bar{a}_2^2) \cos \bar{\varphi}_2 + \frac{f_2}{2\omega_2} \cos \bar{\varphi}_1 = 0 \quad (5.3.24d)$$

该方程组的解按 \bar{a}_1 是否为零分为两种情况。

(1) 单振子解

将由式(5.3.24a)确定的 $\bar{a}_1 = 0$ 代入式(5.3.24b)和(5.3.24c)得

$$\begin{cases} \mu_2 \bar{a}_2 = \frac{f_2}{2\omega_2} \sin \bar{\varphi}_1 \\ \sigma_1 \bar{a}_2 = -\frac{f_2}{2\omega_2} \cos \bar{\varphi}_1 \end{cases} \quad (5.3.25)$$

两端平方后相加可解出 \bar{a}_2 。此时，系统的定常解振幅是

$$\bar{a}_1 = 0, \quad \bar{a}_2 = \frac{f_2}{2\omega_2 \sqrt{\mu_2^2 + \sigma_1^2}} \quad (5.3.26)$$

系统犹如单个振子。由式(5.3.25)还可确定 $\bar{\varphi}_1$ ，联同 \bar{a}_1 和 \bar{a}_2 代回方程(5.3.24d)可求出 $\bar{\varphi}_2$ 。

(2) 双振子解

将式(5.3.24d)减去(5.3.24c)得

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \bar{a}_2 - \frac{b_1}{2\omega_1} \bar{a}_2^2 \cos \bar{\varphi}_2 = 0 \quad (5.3.27)$$

如果将由式(5.3.27)确定的 $\bar{a}_2 = 0$ 代入式(5.3.24b)、(5.3.24c)和(5.3.24d)，可发现与 $f_2 \neq 0$ 矛盾。因此，恒有 $\bar{a}_2 \neq 0$ 。以下依次求非零解 \bar{a}_2 和 \bar{a}_1 。

约去式(5.3.24a)中 $a_1 \neq 0$ 和式(5.3.27)中 $\bar{a}_2 \neq 0$ ，两式联立后消去 $\sin \bar{\varphi}_2$ ，得到

$$\mu_1^2 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{4} = \left(\frac{b_1 \bar{a}_2}{4\omega_1} \right)^2 \quad (5.3.28)$$

由此解出

$$\bar{a}_2 = \frac{2\omega_1}{b_1} \sqrt{4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \quad (5.3.29)$$

为了求解 a_1 ，先由方程(5.3.24a)和(5.3.27)解出

$$\sin \bar{\varphi}_2 = \frac{4\mu_1\omega_1}{b_1 a_2}, \quad \cos \bar{\varphi}_2 = \frac{2\omega_1(\sigma_2 - \sigma_1)}{b_2 a_2} \quad (5.3.30)$$

将其代入式(5.3.24b)和(5.3.24c)，整理后得

$$\begin{cases} \mu_1 \omega_1 b_2 \bar{a}_1^2 + \mu_2 \omega_2 b_1 \bar{a}_2^2 = \frac{b_1 \bar{a}_2 f_2}{2} \sin \bar{\varphi}_1 \\ \frac{\omega_1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) b_2 \bar{a}_1^2 + \sigma_1 \omega_2 b_1 \bar{a}_2^2 = -\frac{b_1 \bar{a}_2 f_2}{2} \cos \bar{\varphi}_1 \end{cases} \quad (5.3.31)$$

将式(5.3.31)中两式平方后相加得

$$(\mu_1 \omega_1 b_2 \bar{a}_1^2 + \mu_2 \omega_2 b_1 \bar{a}_2^2)^2 + \left[\frac{\omega_1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) b_2 \bar{a}_1^2 + \sigma_1 \omega_2 b_1 \bar{a}_2^2 \right]^2 = \left(\frac{b_1 \bar{a}_2 f_2}{2} \right)^2 \quad (5.3.32)$$

即

$$\begin{aligned} \omega_1^2 b_2^2 [\mu_1^2 + (\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2})^2] \bar{a}_1^4 + \omega_1 \omega_2 b_1 b_2 [2\mu_1 \mu_2 + \sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_1)] \bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2 + \\ \omega_2^2 b_1^2 (\mu_2^2 + \sigma_1^2) \bar{a}_2^4 = (\frac{b_1 \bar{a}_2 f_2}{2})^2 \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

再把式(5.3.29)代入上式, 约去 $b_1^2 \bar{a}_2^2 \neq 0$ 后整理得

$$(\frac{\bar{a}_1}{2})^4 + 2P_1 (\frac{\bar{a}_1}{2})^2 + P_2 = 0 \quad (5.3.34)$$

其中

$$\begin{cases} P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2} [2\mu_1 \mu_2 + \sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_1)] \\ P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2})^2 (\mu_2^2 + \sigma_1^2) [4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2] - (\frac{f_2}{2b_2})^2 \end{cases} \quad (5.3.35)$$

解方程(5.3.34)得

$$\bar{a}_1 = 2\sqrt{-P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - P_2}} \quad (5.3.36)$$

由于

$$\begin{aligned} P_1^2 - P_2 &= (\frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2})^2 [2\mu_1 \mu_2 + \sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_1)]^2 - \\ &\quad (\frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2})^2 (\mu_2^2 + \sigma_1^2) [4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2] + (\frac{f_2}{2b_2})^2 \\ &= (\frac{f_2}{2b_2})^2 - (\frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2})^2 [2\sigma_1 \mu_1 - \mu_2 (\sigma_2 - \sigma_1)]^2 \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

记

$$P_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{2\omega_1 \omega_2}{b_1 b_2})^2 [2\sigma_1 \mu_1 - \mu_2 (\sigma_2 - \sigma_1)]^2 \quad (5.3.38)$$

改写式(5.3.36)后与式(5.3.29)并列

$$\bar{a}_1 = 2\sqrt{-P_1 \pm \sqrt{(\frac{f_2}{2b_2})^2 - P_3}}, \quad \bar{a}_2 = \frac{2\omega_1}{b_1} \sqrt{4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \quad (5.3.39)$$

将 \bar{a}_2 代回方程(5.3.30)可求得 $\bar{\varphi}_2$, 再联同 \bar{a}_1 代回方程(5.3.24b)可得到 $\bar{\varphi}_1$ 。

不论哪种情况, 将方程(5.3.21)在所求得的 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ 处进行线性化, 通过计算扰动方程的特征值, 即可对定常解的稳定性进行判断。

5.3.3 定常解的特性

式(5.3.39)说明了一种有趣的现象: 一方面, 方程(5.3.34)总有一正实解 \bar{a}_2 , 但却与 f_2 无

关；即系统第二个自由度的振幅与直接作用在该自由度上的激励无关。另一方面，该激励有可能激发起第一个自由度的振动，且振幅与激励有关。

现讨论第一个自由度振动被激发的条件，亦即方程(5.3.34)有正实解 \bar{a}_1 的条件

$$\left(\frac{f_2}{2b_2}\right)^2 - P_3^2 \geq 0, \quad -P_1 \pm \sqrt{\left(\frac{f_2}{2b_2}\right)^2 - P_3^2} > 0 \quad (5.3.40)$$

相应的临界条件是

$$f_2 = g_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2|b_2 P_3|, \quad f_2 = g_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2|b_2| \sqrt{P_1^2 + P_3^2} \quad (5.3.41)$$

显然， $0 < g_1 < g_2$ 。以下着重讨论激励幅值对定常解振幅的影响：

(1) 当 $P_1 < 0$ 时，若 $f_2 < g_1$ ，则方程(5.3.34)无实解，故方程(5.3.24)只有式(5.3.26)给出的一组解，即系统只有一种近乎于线性系统的受迫振动。不难证明，它是渐近稳定的。

(2) 当 $P_1 < 0$ 时，若 $g_1 \leq f_2 \leq g_2$ ，方程(5.3.34)有一对正实解，故方程(5.3.24)有式(5.3.26)给出的一组解和式(5.3.39)给出的两组正实解，即系统有一种近乎于线性的受迫振动和两种非线性受迫振动。可证明，幅值小的非线性受迫振动不稳定，其余两种受迫振动渐近稳定。

(3) 当 $P_1 < 0$ 时，若 $f_2 > g_2$ ，则方程(5.3.34)有一正实解，故方程(5.3.24)有式(5.3.26)给出的一组解和式(5.3.39)给出的一组正实解。此时，系统有一种近乎于线性的受迫振动和一种非线性受迫振动。前者不稳定，后者渐近稳定。

(4) 当 $P_1 \geq 0$ 时，若 $f_2 < g_2$ ，则方程(5.3.34)无正实解，故方程(5.3.24)只有式(5.3.26)给出的一组解。此时，系统只有一种近乎于线性系统的受迫振动，它是渐近稳定的。

(5) 当 $P_1 \geq 0$ 时，若 $f_2 > g_2$ ，则方程(5.3.34)有一正实解，从而方程(5.3.24)有式(5.3.26)给出的一组解和式(5.3.39)给出的一组正实解。此时，系统有一种近乎于线性的受迫振动和一种非线性受迫振动。前者不稳定，后者渐近稳定。

图 5.3.1 (a) 和 5.3.1 (b) 给出了 $P_1 < 0$ 和 $P_1 > 0$ 时不同激励幅值 f_2 对应的振幅 \bar{a}_1 和 \bar{a}_2 ，并用实线代表渐近稳定解，虚线代表不稳定解。根据式(5.3.35)，派生系统两固有频率的差以及平方非线性项的系数决定了 P_1 的取值，从而决定系统的行为属于图 5.3.1(a)或图 5.3.1(b)。

当 $P_1 < 0$ 时，随着 f_2 自零开始逐渐增加， \bar{a}_1 保持为零， \bar{a}_2 沿着由式(5.3.26)给出的渐近稳定解支 AB 线性递增。一旦 $f_2 > g_2$ ， \bar{a}_2 转入由式(5.3.40)给出的渐近稳定解支 BC ，呈现**饱和**， \bar{a}_1 跳跃到相应的渐近稳定非零解支 FE 上的 D 点，继续增加的激励使系统的能量向第一个自由度发生转移，又称**渗透**。如果此时逐渐减小 f_2 ，则 \bar{a}_1 沿着解支 FE 递减， \bar{a}_2 保持不变。一旦 $f_2 < g_1$ ， \bar{a}_1 落到零解支， \bar{a}_2 随之落到渐近稳定解支 AB 上的 H 点，然后线性递减。需要指出的是， \bar{a}_2 的解支 GB 实际是二重的，还包含了与 \bar{a}_1 的不稳定解支相对应的 \bar{a}_2 的不稳定解。建议读者学习完第 6 章的分叉理论后再来深入分析这里的多解现象。

当 $P_1 > 0$ 时，若 f_2 自零开始逐渐增加到 $f_2 > g_2$ ，上述振动幅值的饱和现象以及能量转移现象均存在，只是 \bar{a}_1 不发生跳跃。

对于船体在规则海浪激励下的摆动问题。若摇动角度很小，系统线性化后完全解耦。但随着 f_2 的增加，情况会发生显著变化。例如，当 $f_1 = 0$ 且 $\omega \approx \omega_2$ 时，人们直观上认为滚摆振动 u_2 剧烈。事实上，当 f_2 大于某一临界值后，滚摆振动 u_2 处于饱和而不再增加，而俯仰振

动 u_1 却会随着 f_2 的增加而加大, 振动能量从滚摆振动 u_2 渗透到俯仰振动 u_1 。

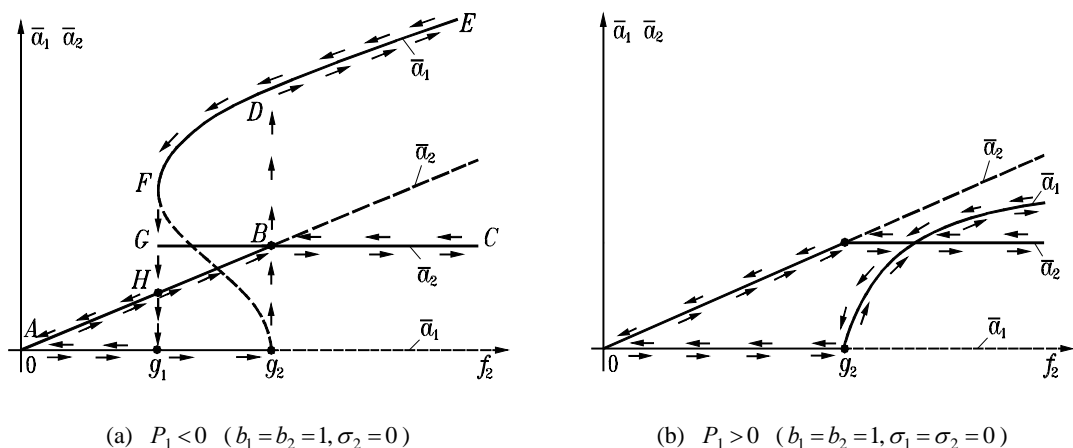


图 5.3.1 定常解振幅随激励幅值的变化规律

饱和现象是一种与内共振有关的、非线性多自由度系统受迫振动的特有现象, 在电子线路、自动控制等领域具有广泛的应用, 近年来也引起了力学家的关注。例如, Oueini 和 Nayfeh 设计了一种具有平方非线性的控制器及压电作动器, 作为动力吸振器安装于悬臂梁上, 使组合系统满足 1:2 内共振条件。当悬臂梁受到简谐激励后, 其响应立即进入饱和状态, 外激励能量转移到吸振器上^[14]。

5.4 线性时变系统的参激振动*

本节以二自由度线性时变系统为例, 阐明多自由度系统参激振动的一些特点。由于线性无阻尼时不变系统在模态坐标下可完全解耦, 故讨论如下系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + 2\varepsilon \cos \omega t (b_{11} u_1 + b_{12} u_2) = 0 \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + 2\varepsilon \cos \omega t (b_{21} u_1 + b_{22} u_2) = 0 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

采用多尺度法分析系统的一阶近似时, 设解为

$$\begin{cases} u_1 = u_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \cdots \\ u_2 = u_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \cdots \end{cases} \quad (5.4.2)$$

将其代入式(5.4.1), 比较 ε 同次幂系数得

$$\begin{cases} D_0^2 u_{10} + \omega_1^2 u_{10} = 0 \\ D_0^2 u_{20} + \omega_2^2 u_{20} = 0 \end{cases} \quad (5.4.3a)$$

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = -2D_1 D_0 u_{10} - (b_{11} u_{10} + b_{12} u_{20}) e^{j\omega T_0} + \text{cc} \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = -2D_1 D_0 u_{20} - (b_{21} u_{10} + b_{22} u_{20}) e^{j\omega T_0} + \text{cc} \end{cases} \quad (5.4.3b)$$

方程(5.4.3a)的解形如

$$\begin{cases} u_{10} = A_1(T_1)e^{j\omega_1 T_0} + \text{cc} \\ u_{20} = A_2(T_1)e^{j\omega_2 T_0} + \text{cc} \end{cases} \quad (5.4.4)$$

将其代入方程(5.4.3b)得到

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = -2j\omega_1 D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - \sum_{r=1}^2 b_{1r} A_r [e^{j(\omega_r + \omega)T_0} + e^{j(\omega_r - \omega)T_0}] + \text{cc} \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = -2j\omega_2 D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} - \sum_{r=1}^2 b_{2r} A_r [e^{j(\omega_r + \omega)T_0} + e^{j(\omega_r - \omega)T_0}] + \text{cc} \end{cases} \quad (5.4.5a)$$

$$\begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = -2j\omega_1 D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - \sum_{r=1}^2 b_{1r} A_r [e^{j(\omega_r + \omega)T_0} + e^{j(\omega_r - \omega)T_0}] + \text{cc} \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = -2j\omega_2 D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} - \sum_{r=1}^2 b_{2r} A_r [e^{j(\omega_r + \omega)T_0} + e^{j(\omega_r - \omega)T_0}] + \text{cc} \end{cases} \quad (5.4.5b)$$

现分几种情况讨论消除永年项的问题。

(1) ω 远离 $\omega_1 \pm \omega_2$

这种情况属于非共振。消除方程(5.4.5)中永年项的条件是

$$D_r A_r = 0 \quad \text{即} \quad A_r = \text{const.}, \quad r = 1, 2 \quad (5.4.6)$$

此时方程(5.4.5)的解为

$$u_{r1} = \sum_{s=1}^2 b_{rs} A_s \left[\frac{1}{(\omega_s + \omega)^2 - \omega_r^2} e^{j(\omega_s + \omega)T_0} + \frac{1}{(\omega_s - \omega)^2 - \omega_r^2} e^{j(\omega_s - \omega)T_0} \right] + \text{cc}, \quad r = 1, 2 \quad (5.4.7)$$

系统作有界振动。

(2) $\omega \approx \omega_1 + \omega_2$

这种情况称为**加法型参激组合共振**。引入调谐参数

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon\sigma \quad (5.4.8)$$

则有

$$(\omega - \omega_1)T_0 = \omega_2 T_0 + \sigma T_1, (\omega - \omega_2)T_0 = \omega_1 T_0 + \sigma T_1 \quad (5.4.9)$$

因此, 消除方程(5.4.5a)和(5.4.5b)中永年项的条件分别是

$$\begin{cases} 2j\omega_1 D_1 A_1 + b_{12} \bar{A}_2 e^{j\sigma T_1} = 0 \\ 2j\omega_2 D_1 A_2 + b_{21} \bar{A}_1 e^{j\sigma T_1} = 0 \end{cases} \quad (5.4.10)$$

这组一阶线性偏微分方程可合并为一个二阶线性偏微分方程

$$D_1^2 A_1 - j\sigma D_1 A_1 - \frac{b_{12} b_{21}}{4\omega_1 \omega_2} A_1 = 0 \quad (5.4.11)$$

由此求得一组特解

$$A_1 = a_1 e^{-j\lambda T_1}, A_2 = a_2 e^{j(\bar{\lambda} + \sigma)T_1} \quad (5.4.12)$$

其中

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \beta}], \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_{12} b_{21}}{\omega_1 \omega_2} \quad (5.4.13)$$

a_1 和 a_2 是复积分常数。显然, 当且仅当 $\sigma^2 \geq \beta$ 时 $j\lambda$ 为纯虚数, 从而 A_1 和 A_2 有界。所以, 当

$b_{12}b_{21} < 0$ 时, 系统运动总是稳定的。而当 $b_{12}b_{21} > 0$ 时, 系统会有不稳定运动, 在 (ε, ω) 平面上, 对应稳定和不稳定解的参数区边界近似为两根直线

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \pm \varepsilon\sqrt{\beta} + O(\varepsilon^2) = \omega_1 + \omega_2 \pm \varepsilon\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{\omega_1\omega_2}} + O(\varepsilon^2) \quad (5.4.14)$$

当 $|\omega - (\omega_1 + \omega_2)| < \varepsilon\sqrt{\beta}$ 时, 系统产生振幅无限的参激组合共振。

(3) $\omega \approx \omega_2 - \omega_1$

这种情况称为**减法型参激组合共振**, 其结果可从上一情形的结果中改变 ω_1 的符号来得到。显然, 当 $b_{12}b_{21} > 0$ 时, 系统的运动总是稳定的。当 $b_{12}b_{21} < 0$ 时, 系统会有不稳定运动, 在 (ε, ω) 平面上对应稳定和不稳定解的参数区边界为

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 \pm \varepsilon\sqrt{-\frac{b_{12}b_{21}}{\omega_1\omega_2}} + O(\varepsilon^2) \quad (5.4.15)$$

上述分析包含了二自由度线性参激系统一阶近似解的各种共振情况。需要指出的是, 若系统自由度超过二, 则还可能出现所谓多重组合共振问题。例如, 对于三自由度系统, 有可能出现 $\omega \approx \omega_1 + \omega_2$ 并且 $\omega \approx \omega_3 - \omega_2$ 的情况。此时, 消除永年项的条件增加到三个, 从而要联立求解三个一阶偏微分方程, 或一个三阶偏微分方程^[15]。

习 题

- 1 考察第 1 章习题 2 中系统, 试证该系统在 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 时出现内共振, 其中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

- 2 对于平方和立方非线性共存的系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 + 2\mu_1 \dot{u}_1 + a_{11}u_1^2 + a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_2^2 + \\ \quad b_{11}u_1^3 + b_{12}u_1^2u_2 + b_{13}u_1u_2^2 + b_{14}u_2^3 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 + 2\mu_2 \dot{u}_2 + a_{21}u_1^2 + a_{22}u_1u_2 + a_{23}u_2^2 + \\ \quad b_{21}u_1^3 + b_{22}u_1^2u_2 + b_{23}u_1u_2^2 + b_{24}u_2^3 = 0 \end{cases}$$

求其自由振动的一次近似解。

- 3 考察由两个耦合 van der Pol 振子组成的自激振动系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \varepsilon(1 - u_1^2)\dot{u}_1 + \varepsilon a_1 u_2 \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \varepsilon(1 - u_2^2)\dot{u}_2 + \varepsilon a_2 u_1 \end{cases}$$

其中 $\omega_1 \approx \omega_2$, 求系统自由振动的一次近似解。

4 对于平方非线性受迫振动系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\varepsilon\mu_1 \dot{u}_1 + \varepsilon b_1 u_1 u_2 + F_1 \cos \omega t \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\varepsilon\mu_2 \dot{u}_2 + \varepsilon b_2 u_1^2 + F_2 \cos \omega t \end{cases}$$

其中 $\omega_2 \approx 2\omega_1$ 。用多尺度法导出以下几种激励条件下的一次近似解：

(1) $\omega \approx \omega_1, \quad F_1 = \varepsilon^2 f_1, \quad F_2 = \varepsilon f_2;$

(2) $\omega \approx \omega_1/2;$

(3) $\omega \approx \omega_1 + \omega_2。$

5 考察立方非线性受迫振动系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\varepsilon\mu_1 \dot{u}_1 + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial u_1} + 2F_1 \cos \omega t \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\varepsilon\mu_2 \dot{u}_2 + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial u_2} + 2F_2 \cos \omega t \end{cases}$$

其中

$$V = b_1 u_1^4 + b_2 u_1^3 u_2 + b_3 u_1^2 u_2^2 + b_4 u_1 u_2^3 + b_5 u_2^4$$

试分析其组合共振并求解。

6 考察处于内共振条件下的立方非线性参激振动系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + 2\mu_1 \dot{u}_1 + a_{11} u_1^3 + a_{12} u_1^2 u_2 + a_{13} u_1 u_2^2 + a_{14} u_2^3 \\ \quad + 2(b_{11} u_1 + b_{12} u_2) \cos \omega t = 0 \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + 2\mu_2 \dot{u}_2 + a_{21} u_1^3 + a_{22} u_1^2 u_2 + a_{23} u_1 u_2^2 + a_{24} u_2^3 \\ \quad + 2(b_{21} u_1 + b_{22} u_2) \cos \omega t = 0 \end{cases}$$

其中 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 。分别求下述三种条件下系统参激振动的一次近似解：

(1) $\omega \approx 2\omega_1;$

(2) $\omega \approx 2\omega_2;$

(3) $\omega \approx \omega_1 + \omega_2。$

第6章 运动稳定性与分叉

非线性动力系统的稳定性以及系统动力学与系统参数之间的关系是人们关心的重要问题。如果能够获得非线性动力系统的解，即使是近似解，也可对这些问题进行直接讨论。因此，19世纪中叶之前，人们一直致力于求取常微分方程的解。探索过程中不乏失败的例子。19世纪的30~40年代，有两件大事改变了人们长期试图寻找微分方程通解的研究思路。一是法国数学家 Cauchy 在 1835 年证明，常微分方程初值问题在相当宽的条件下存在唯一解。二是法国数学家 Liouville 于 1841 年证明，即使非常简单的 Riccati 方程

$$\ddot{u}(t) + p(t)u(t) + q(t)u^2(t) = r(t) \quad (6.0.1)$$

其解也无法用初等函数或其积分表示。

这促使人们开始从微分方程的向量场结构来研究解的特性。1881~1886年，法国学者 Poincaré 在研究天体力学问题中开创了对微分方程所确定的积分曲线特性的研究。1882~1892年，俄国学者 Lyapunov 在其博士论文中开创了对运动稳定性的系统研究。进入20世纪后，基于几何的定性研究取得了一系列重要进展。例如，俄国学者 Andronov 等对二维系统局部及全局特性的深入研究，美国学者 Birkhoff 对向量场规范型的研究，美国学者 Smale 用符号动力学方法对解的拓扑结构的研究等。在计算技术获得高度发展后，定性研究的结论则成为指导数值计算的工具。

本书第二章已对单自由度自治系统，即状态空间中的二维自治系统进行了初步定性分析。本章是第二章内容的继续，研究对象将从二维扩展到高维。为便于理解，本章经常用低维系统为例来说明概念。

6.1 自治系统平衡点的稳定性

考察 n 维非线性自治系统

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subset R^n, \quad f: U \subset R^n \rightarrow R^n \quad (6.1.1)$$

记 $u_s \in U$ 是该系统的一个孤立平衡点，满足

$$f(u_s) = 0 \quad (6.1.2)$$

本节研究系统平衡点 u_s 的稳定性。由于 2.1 节中对自治系统平衡点的稳定性、不稳定性及渐近稳定性定义采用了矩阵描述，所以完全适用于高维自治系统(6.1.1)。这样的稳定性概念出自 Lyapunov 的研究，因此常称作 **Lyapunov 意义下的稳定性**。

不失一般性，今后设 $u_s = 0$ 。否则可通过坐标平移将平衡点移到新坐标系下系统的原点，例 6.1.1 将给出这样的实例。

6.1.1 Lyapunov 直接方法

2.4 节曾从系统总能量随时间的变化率考察了系统运动的演变趋势。历史上, Lyapunov 从这一思路出发, 研究了如何根据微分方程来构造类似于能量的某种函数, 通过计算该函数随时间的变化率来确定系统的稳定性。由于这种方法可免去求解微分方程的难题, 从而被称为研究运动稳定性的 **Lyapunov 直接方法**, 应用该方法时所需构造的函数被称为 **Lyapunov 函数**。

(1) Lyapunov 函数

考察单值可微函数

$$V(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} V(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad V(0) = 0 \quad (6.1.3)$$

其定义域为

$$U = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| \leq H\}, \quad H = \text{const.} > 0 \quad (6.1.4)$$

定义 6.1.1 如果在 U 内恒有 $V(\mathbf{u}) \geq 0$ 或 $V(\mathbf{u}) \leq 0$, 则称 $V(\mathbf{u})$ 为**正常号函数**或**负常号函数**, 统称为**常号函数**。否则称为**变号函数**。

定义 6.1.2 对于常号函数 $V(\mathbf{u})$, 如果当且仅当 $\mathbf{u} = 0$ 时 $V = 0$, 则称正常号函数 $V(\mathbf{u})$ 为**正定函数**, 负常号函数 $V(\mathbf{u})$ 为**负定函数**, 通称为**定号函数**。如果 $V = 0$ 不等价于 $\mathbf{u} = 0$, 则称正常号函数 $V(\mathbf{u})$ 为**半正定函数**, 负常号函数 $V(\mathbf{u})$ 为**半负定函数**, 统称为**半定号函数**。

二次型是最常用的常号函数, 线性代数理论已给出了二次型正定、半正定等判据。以 $n = 3$ 为例:

$V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ 是正定函数;

$V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2$ 是正常号函数, 但因对于 $u_3 \neq 0$ 有 $V(0, 0, u_3) = 0$, 从而非正定;

$V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ 是变号函数, 因为 $V(1, 0, 0) = 1$, $V(0, 0, 1) = -1$ 。

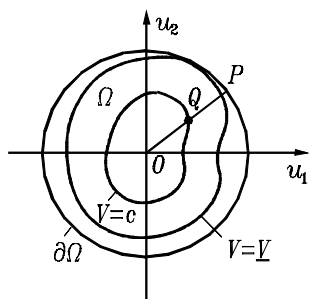


图 6.1.1 正定函数的几何意义

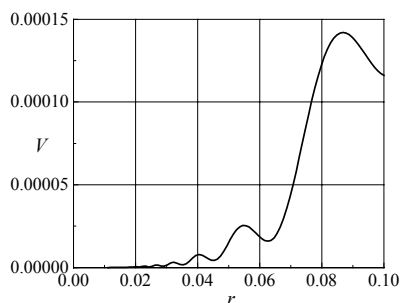


图 6.1.2 正定函数 $V(r, \theta)$ 的剖面

现以 $n = 2$ 为例, 说明正定函数 $V(u_1, u_2)$ 的几何意义。在 U 中取原点的任一邻域 $\Omega = \{(u_1, u_2) \mid u_1^2 + u_2^2 < \delta\}$, 其边界为 $\partial\Omega$ 。根据 $V(u_1, u_2)$ 的正定性质, 易见

$$\underline{V} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(u_1, u_2) \in \partial\Omega} V(u_1, u_2) > 0 \quad (6.1.5)$$

现取一常数 c 满足 $0 < c < \underline{V}$, 则 $V(u_1, u_2) = c$ 是 (u_1, u_2) 平面上的曲线。参考图 6.1.1, 从原点 O 任作一直线与 $\partial\Omega$ 相交于点 P 。根据 $V(0, 0) = 0$, $V(u_1, u_2) = c$ 以及 $V(u_1, u_2)$ 的连续性, 函数 V

将在线段 OP 上某点 Q 取值为 c 。因该直线任意, 故 $V(u_1, u_2) = c$ 是包围原点的闭曲线。根据函数 $V(u_1, u_2)$ 的连续性, 当 $c \rightarrow 0$ 时, 闭曲线 $V(u_1, u_2) = c$ 收缩到原点。当 $n > 2$ 时, 只要将曲线改为 (超) 曲面, 结论相同。

一些学者认为, 若 $c_2 < c_1$, 则闭曲线 $V(u_1, u_2) = c_2$ 包含在闭曲线 $V(u_1, u_2) = c_1$ 之内; 即当 $c \rightarrow 0$ 时, 闭曲线 $V(u_1, u_2) = c$ 向原点的收缩过程单调。他们以此作为论证稳定性定理的基础。事实上, 这并非普遍情况。例如, 极坐标系中的二元可微函数

$$V(r, \theta) = \begin{cases} r^4(2 + \cos \frac{1}{r}), & r \neq 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

是正定的, 它在原点附近的剖面如图 6.1.2。当 $c \rightarrow 0$ 时, $V(r, \theta) = c$ 的收缩过程并非单调。

(2) Lyapunov 定理

定理 6.1.1 (稳定性定理) 如果存在定号函数 $V(u)$, 其沿系统(6.1.1)确定的相轨线上的全导数

$$\dot{V}(u(t)) = \nabla V(u) \cdot \dot{u} = \nabla V(u) \cdot f(u) \quad (6.1.7)$$

是与 $V(u)$ 异号的常号函数或恒为零, 则该系统原点是稳定的。

证明: 不妨设 $V(u)$ 是 U 内的正定函数, $\dot{V}(u(t)) \leq 0$ 是负号函数或恒为零。以下先导出一个不等式, 然后用反证法完成证明。

任给 $\varepsilon > 0$, 记 $\bar{\varepsilon}$ 为连续函数 $V(u)$ 在超球面 $\|u\| = \varepsilon$ 上的下确界。因 $V(u)$ 正定, 必有 $\bar{\varepsilon} > 0$ 。根据 $V(u)$ 在 $u = 0$ 处的连续性, 对于上述 $\bar{\varepsilon} > 0$, 存在 $0 < \delta(\bar{\varepsilon}) < \bar{\varepsilon}$, 只要 $\|u_0\| < \delta$, 则有 $V(u_0) < \bar{\varepsilon}$ 。注意到 $\dot{V}(u(t)) \leq 0$, 沿着自 $u(t_0) = u_0$ 出发的相轨线必有

$$V(u(t)) \leq V(u_0) < \bar{\varepsilon} \quad (6.1.8)$$

如果系统的原点不稳定, 则存在某一时刻 $t^* > t_0$ 使得 $\|u(t^*)\| = \varepsilon$ 。注意到 $\bar{\varepsilon}$ 是 $V(u)$ 在 $\|u\| = \varepsilon$ 上的下确界, 连同不等式(6.1.8)得到矛盾结果

$$\bar{\varepsilon} \leq V(u(t^*)) \leq V(u_0) < \bar{\varepsilon} \quad (6.1.9)$$

因此, 系统的原点是稳定的。证毕。

定理 6.1.2 (渐近稳定性定理) 如果存在定号函数 $V(u)$, 其沿系统(6.1.1)确定的相轨线上的全导数是与 $V(u)$ 异号的定号函数, 则该系统原点是渐近稳定的。

证明: 不妨设 $V(u)$ 是 U 内的正定函数, $\dot{V}(u(t)) \leq 0$ 是负定函数。根据定理 6.1.1, 系统的原点是稳定的。现考察 $u(t)$ 的渐近性质。由于 $\dot{V}(u(t)) \leq 0$ 负定, 不等式(6.1.8)可推广为

$$0 < V(u_r) < \cdots < V(u_2) < V(u_1) < V(u_0) < \bar{\varepsilon} \quad (6.1.10)$$

其中

$$u_r = u(t_r), \quad t_{r+1} > t_r, \quad r = 0, 1, 2, \cdots \quad (6.1.11)$$

不等式(6.1.10)说明, 序列(6.6.11)使 $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(u(t_r)) = 0$ 。根据函数 $V(u)$ 的连续性, 可得到

$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(u(t)) = 0$ 。再根据函数 $V(u)$ 的连续性及其正定条件, 必有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ 。证毕。

上述两个定理的证明还有多种方法。其中,文献[16]的证明比较严格。现从几何角度来理解这一定理。根据前述分析,不妨设 $V(\mathbf{u})$ 是正定函数,对于 $c>0$, $V(\mathbf{u})=c$ 是一包围原点的闭曲面。根据定理的前提,此时

$$\dot{V}(\mathbf{u}(t)) = \nabla V(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) \leq 0 \quad (6.1.12)$$

这意味着相轨线的切方向与曲面 $V(\mathbf{u})=c$ 的法方向夹角为钝角或直角。若 $\dot{V}(\mathbf{u}(t))<0$,则夹角为钝角,相轨线从该闭曲面的外部进入其内部,随着 $c \rightarrow 0$ 与闭曲面同时收缩到原点,原点渐近稳定。若 $\dot{V}(\mathbf{u}(t))=0$,夹角为直角,相轨线与该闭曲面相切并停留在曲面上,原点是稳定的。此时,若 $V(\mathbf{u})$ 为系统总能量,则说明保守系统的原点稳定。

Lyapunov及其后继学者曾对系统的不稳定性进行过深入研究,提出了多种充分性判据,此处仅给出最常用的一种。

定理 6.1.3 (不稳定性定理) 若存在连续可微函数 $V(\mathbf{u})$,它在原点的任意邻域内总能取到正值(或负值),而其沿系统(6.1.1)确定的相轨线上的全导数正定(或负定),则该系统的原点不稳定。

证明:任给 $\varepsilon>0$,取原点的邻域 $U_\varepsilon = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| < \varepsilon\} \subset U$,并约定在除去原点的该邻域内 $\dot{V}(\mathbf{u}(t))>0$ 。根据定理的前提,对于 $0<\delta<\varepsilon$,不论 δ 多么小,均存在 $\mathbf{u}_0 \in U_\delta = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| < \delta\}$ 使 $V(\mathbf{u}_0)>0$ 。下面将用反证法证明,自初始条件 $\mathbf{u}(t_0)=\mathbf{u}_0$ 出发的相轨线将在 $t>t_0$ 后某一时刻越出邻域 U_ε 。

若不然,则对任意的 $t>t_0$ 恒有 $\|\mathbf{u}(t)\|\leq\varepsilon$,这意味着 $V(\mathbf{u}(t))$ 有界。而由 $\dot{V}(\mathbf{u}(t))>0$ 知, $0<V(\mathbf{u}_0)<V(\mathbf{u}(t))$ 且单调递增。根据 $V(\mathbf{u})$ 的连续性,及 $V(0)=0$,存在 $0<\eta<\varepsilon$,使对任意的 $t>t_0$ 恒有 $\|\mathbf{u}(t)\|\geq\eta$ 。对于环域 $U_\varepsilon-U_\eta$ 及其闭包,记连续正定函数 $\dot{V}(\mathbf{u})$ 在其上的最小值为 $m>0$ 。对 $\dot{V}(\mathbf{u}(t))\geq m$ 积分得 $V(\mathbf{u}_0)+m(t-t_0)\leq V(\mathbf{u}(t))$ 。这与 $V(\mathbf{u}(t))$ 有界相矛盾。证毕。

例 6.1.1 考察刚度软化的 Duffing 系统

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u - \varepsilon\omega_0^2u^3 = 0 \quad (a)$$

式中参数均为正,研究其平衡点的稳定性。

解:将方程(a)改写为

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \omega_0^2(-u_1 + \varepsilon u_1^3) - 2\zeta\omega_0 u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (b)$$

该系统具有三个平衡点 $(0,0)$ 及 $(\pm 1/\sqrt{\varepsilon}, 0)$,以下分别讨论它们的稳定性。

a. 对于平衡点 $(0,0)$,取系统总能量为 Lyapunov 函数

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\omega_0^2 u_1^2 - \frac{\varepsilon}{4}\omega_0^2 u_1^4 + \frac{1}{2}u_2^2 \quad (c)$$

显然,在除去 $(0,0)$ 的邻域中 $V(u_1, u_2)>0$,而根据方程(b)

$$\dot{V} = \nabla V(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \omega_0^2(u_1 - \varepsilon u_1^3)\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 = [\omega_0^2(u_1 - \varepsilon u_1^3) + \dot{u}_2]u_2 = -2\zeta\omega_0 u_2^2 < 0 \quad (d)$$

根据定理 6.1.2,该系统的平衡点 $(0,0)$ 渐近稳定。

b. 平衡点 $(\pm 1/\sqrt{\varepsilon}, 0)$ 是对称的,故只需研究 $(1/\sqrt{\varepsilon}, 0)$ 。通过坐标平移

$$v_1 = u_1 - 1/\sqrt{\varepsilon} \quad (e)$$

可将方程(b)转化为

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \omega_0^2(2v_1 + 3\sqrt{\varepsilon}v_1^2 + \varepsilon v_1^3) - 2\zeta\omega_0 v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) \quad (f)$$

仍以系统总能量构成 Lyapunov 函数

$$V(v_1, v_2) = -\omega_0^2(v_1^2 + \sqrt{\varepsilon}v_1^3 + \frac{\varepsilon v_1^4}{4}) + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (g)$$

显然, 若 $v_1 \neq 0$, 则 $V(v_1, 0) < 0$ 。而在除去 $(0, 0)$ 的邻域中, 恒有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{v}) = -\omega_0^2(2v_1 + 3\sqrt{\varepsilon}v_1^2 + \varepsilon v_1^3)\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 \\ &= [-\omega_0^2(2v_1 + 3\sqrt{\varepsilon}v_1^2 + \varepsilon v_1^3) + \dot{v}_2]v_2 = -2\zeta\omega_0 v_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (h)$$

根据定理 6.1.3, 系统的平衡点 $(1/\sqrt{\varepsilon}, 0)$ 不稳定。同理可证, 平衡点 $(-1/\sqrt{\varepsilon}, 0)$ 亦不稳定。

例 6.1.2 在研究飞行器姿态控制中, 通常视飞行器为刚体, 用其绕三个惯性主轴的角速度 ω_r , $r=1,2,3$ 来描述飞行器的姿态。根据刚体运动的 Euler 方程, 飞行器的受控运动微分方程为

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = -k_1J_1\omega_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -k_2J_2\omega_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = -k_3J_3\omega_3 \end{cases} \quad (a)$$

其中 $J_r > 0$, $r=1,2,3$ 是转动惯量, $k_r > 0$, $r=1,2,3$ 是线性控制力矩的反馈增益。现研究飞行器在指定姿态 $\omega_r = 0$, $r=1,2,3$ 处的稳定性。

解: 取 Lyapunov 函数为正定二次型

$$V(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 \quad (b)$$

其沿方程(a)相轨线的全导数是负定函数

$$\dot{V} = 2(J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3\omega_3\dot{\omega}_3) = -2(k_1J_1\omega_1^2 + k_2J_2\omega_2^2 + k_3J_3\omega_3^2) \quad (c)$$

因此, 受控姿态是渐近稳定的。

至此, 读者可以初步看到 Lyapunov 直接方法的威力。然而, 使用该方法的成功与否取决于构造适当的 Lyapunov 函数。这是富有技巧的工作, 目前尚没有一般规律。对于力学系统, 通常可尝试用系统的总能量作为 Lyapunov 函数。

6.1.2 根据派生系统判定稳定性

类似于 2.2 节的分析, 将方程(6.1.1)在 $\mathbf{u} = 0$ 附近作 Taylor 展开并利用式(6.1.2)得

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{Df}(0)\mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2) = \mathbf{A}\mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2) \quad (6.1.13)$$

其中矩阵

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Df}(0) \in R^{n \times n} \quad (6.1.14)$$

是向量函数 $f(u)$ 在 $u=0$ 处的 Jacobi 矩阵。因此, 系统(6.1.13)对应的派生系统为

$$\dot{u} = Au \quad (6.1.15)$$

为了从派生系统(6.1.15)的稳定性信息来判断系统(6.1.13)的稳定性, 下面先回顾有关线性系统稳定性的研究结果, 然后给出对非线性系统稳定性判断的两个充分条件。

(1) 线性系统的稳定性

定理 6.1.4 记矩阵 A 的特征值为 $\lambda_r, r=1, 2, \dots, n$, 系统(6.1.15)的稳定性分为三种情况:

a. 如果 $\operatorname{Re}(\lambda_r) < 0, r=1, 2, \dots, n$, 则系统渐近稳定; 反之亦然。

b. 如果存在某一 λ_r 使得 $\operatorname{Re}(\lambda_r) > 0$, 则系统不稳定。

c. 如果在 $\lambda_r, r=1, 2, \dots, n$ 中有 m 重特征值满足 $\operatorname{Re}(\lambda_r)=0, r=l_1, \dots, l_m$, 当对应的特征子空间维数为 m 时, 系统稳定, 但非渐近稳定; 当特征子空间维数小于 m 时, 系统不稳定。

该定理的证明见文献[8], 读者可通过对照 2.2 节对二维系统的讨论结果找到该定理所对应的全部情况。

在研究工程问题时, 系统的渐近稳定性具有特别重要的意义。为了判断系统是否渐近稳定, 需要了解矩阵 A 的全部特征值的实部。记矩阵 A 的特征值方程为

$$\det(A - \lambda I) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (6.1.16)$$

如果系统的维数为 $n < 5$, 可以用代数方法求解方程(6.1.16), 否则只能用数值方法求 λ 。Routh 和 Hurwitz 提出了一种方法, 可以根据方程(6.1.16)的系数判断特征值 λ 的实部是否为负, 从而免去求解方程(6.1.16)。这特别适用于含参数高维线性系统的渐近稳定性分析。

定理 6.1.5 (Routh-Hurwitz 判据)^[17] 方程(6.1.16)的所有根有负实部等价于下述所有行列式同号

$$\begin{cases} \Delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0, \quad \Delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_1, \quad \Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.1.17)$$

构造上述行列式时, 若 $r > n$ 则取 $a_r = 0$ 。

例 6.1.3 图示气室两端开口, 稳定气流由口 A 入室, 在口 B 经一阀门流出。当阀芯处于平衡位置时, 流入量和流出量平衡, 气室压力 p 定常。若阀芯受到扰动产生位移 u , 压力 p 随之变化, 阀芯的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = sp \\ \dot{p} = -bu \end{cases} \quad (\text{a})$$

其中 $m > 0, s > 0, c > 0, k > 0$ 分别是阀芯的质量、截面积、阻尼系数和弹簧刚度, $b > 0$ 。讨论阀芯在平衡位置的稳定性。

解：将式(a)中第一个方程对时间求导，然后代入第二个方程，得到

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + sbu = 0 \quad (b)$$

这是 3 阶线性微分方程，它与用一阶线性常微分方程组表示的 3 维系统等价。方程(b)的特征方程为

$$m\lambda^3 + c\lambda^2 + k\lambda + sb = 0 \quad (c)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则，该系统的渐近稳定性条件是

$$\begin{cases} \Delta_0 = m > 0, \quad \Delta_1 = c > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} c & m \\ sb & k \end{bmatrix} = ck - msb > 0, \\ \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} c & m & 0 \\ sb & k & c \\ 0 & 0 & sb \end{bmatrix} = cksb - ms^2b^2 > 0 \end{cases} \quad (d)$$

显然，式(d)中的前两个条件自然满足；而最后一个条件与第三个条件相同，即

$$ck > msb \quad (e)$$

由此可见，阻尼器在保证阀芯渐近稳定性中起着决定性作用。

(2) 非线性系统的稳定性

定理 6.1.6 若派生系统(6.1.15)渐近稳定，则系统(6.1.13)的原点亦如此。

证明：先取一待定的对称矩阵 $\mathbf{B} \in R^{n \times n}$ ，构造二次型作为 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (6.1.18)$$

它沿派生系统(6.1.15)相轨线的全导数为

$$\dot{V}(\mathbf{u}(t)) = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}) \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (6.1.19)$$

显然

$$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (6.1.20)$$

是一个对称矩阵。由于派生系统渐近稳定，矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_r, r=1, \dots, n$ 皆有负实部。根据附录 2，如果取负定矩阵 $\mathbf{C} = -\mathbf{I}$ ，可由方程(6.1.20)解出唯一的对称矩阵 \mathbf{B} 。

现证明这样的矩阵 \mathbf{B} 正定。若不然，则二次型(6.1.18)将是不定号函数、负常号函数或正常号函数中的一种。对于前两种情况，总有某一 $\mathbf{u}_0 \neq 0$ 使 $V(\mathbf{u}_0) < 0$ ，进而对一切常数 $c \neq 0$ 有 $V(c\mathbf{u}_0) = c^2 V(\mathbf{u}_0) < 0$ ，这说明在除去原点的邻域内恒有 $V(\mathbf{u}) < 0$ 。根据定理 6.1.3，这将出现系统(6.1.15)不稳定的矛盾。对于第三种情况，必有某一 $\mathbf{u}_0 \neq 0$ 使 $V(\mathbf{u}_0) = 0$ 。但沿过该点的相轨线上仍有

$$\dot{V}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} = -\|\mathbf{u}\|_2^2 < 0 \quad (6.1.21)$$

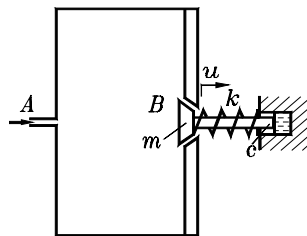


图 6.1.3 阀芯稳定性问题

该不等式与 $V(0)=0$ 矛盾。

最后, 用正定二次型(6.1.18)来证明系统(6.1.13)原点的渐近稳定性。根据式(6.1.2)和(6.1.21), $V(u)$ 沿系统(6.1.13)相轨线的全导数为

$$\dot{V}(u(t)) = \nabla V(u) \cdot f(u) = -\|u\|_2^2 + \nabla V(u) \cdot O(\|u\|^2) \quad (6.1.22)$$

由于 $\|\nabla V(u)\| = O(\|u\|)$, 只要 $\|u\|$ 足够小, 上式可保持负定。根据定理 6.1.2, 系统(6.1.13)的原点渐近稳定。证毕。

定理 6.1.7 若派生系统(6.1.15)的某一特征值有正实部, 则系统(6.1.13)的原点不稳定。

本定理的证明类似于定理 6.1.6, 可参见文献[8]。

上述两定理表明: 只要派生系统的特征值实部不为零, 就可免去构造 Lyapunov 函数, 用 Routh-Hurwitz 判据确定派生系统的特征值实部的符号, 从而推断非线性系统的渐近稳定性或不稳定性。这是工程中最常用的方法。建议读者按这种方法讨论例 6.1.1 和 6.1.2。

需要注意的是: 这两个定理恰好对应于定理 6.1.4 中的前两种情况。对于第三种情况, 非线性系统原点的稳定性将取决于系统的非线性项。现用两个例子来说明这一论断。

例 6.1.4 考察含立方非线性阻尼的系统

$$\ddot{u} + c\dot{u}^3 + u = 0 \quad (a)$$

分析其平衡点的稳定性。

解: 将方程(a)改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 - cu_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -cu_2^3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

该系统有唯一平衡点 $(0,0)$, 对于派生系统, 它是一中心。取系统总能量为 Lyapunov 函数

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 \quad (c)$$

显然, 在除去 $(0,0)$ 的邻域中 $V(u_1, u_2) > 0$, 而

$$\dot{V} = u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 = (u_1 + \dot{u}_2)u_2 = -cu_2^4 \quad (d)$$

根据定理 6.1.1、6.1.2 和 6.1.3, 存在如下三种可能性:

- a. 若 $c=0$, 则 $\dot{V}=0$, 系统原点稳定, 但非渐近稳定;
- b. 若 $c>0$, 则 $\dot{V}<0$, 系统原点渐近稳定;
- c. 若 $c<0$, 则 $\dot{V}>0$, 系统原点不稳定。

这说明, 非线性阻尼会使派生系统的中心成为稳定或不稳定焦点。因此, 派生系统的稳定性并非能保证原系统的稳定性。

例 6.1.5 考察含立方非线性弹性力的系统

$$\ddot{u} + ku^3 = 0 \quad (a)$$

分析其平衡点 $(0,0)$ 的稳定性。

解: 将方程(a)改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -ku_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ku_1^3 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

显然, 其派生系统具有二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 但仅有一个特征向量 $[1 \ 0]^T$ 。根据定理 6.1.4, 派生系统不稳定。事实上, 派生系统具有奇线 $u_2 = 0$ 。若初速度不为零, 派生系统将作匀速直线运动, 其相轨线如图 2.2.8 所示。

计入立方非线性弹性力的系统是一保守系统, 根据 2.3 节的分析, 其平衡点 $(0,0)$ 是一个 3 阶中心, 自然是稳定的。读者也可构造 Lyapunov 函数证明其稳定性。该例说明, 如果派生系统具有奇线, 则非线性系统可能具有稳定的孤立奇点。

6.1.3 平衡点附近相轨线的结构

(1) 线性系统

考察线性系统(6.1.15)对应的矩阵 \mathbf{A} , 设其特征值的重数与特征向量所张的子空间维数相同。现按照特征值实部 $\text{Re}(\lambda_r)$, $r = 1, \dots, n$ 的符号, 将特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_r$, $r = 1, \dots, n$ 分为三组, 每一组特征向量张成一子空间。它们是:

- 对应 $\text{Re}(\lambda_r) < 0$, $E^s \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_{r_1}, \boldsymbol{\varphi}_{r_2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{r_s}\}$, 称作**稳定子空间**;
- 对应 $\text{Re}(\lambda_r) = 0$, $E^c \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_{r_1}, \boldsymbol{\varphi}_{r_2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{r_c}\}$, 称作**中心子空间**;
- 对应 $\text{Re}(\lambda_r) > 0$, $E^u \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\boldsymbol{\varphi}_{r_1}, \boldsymbol{\varphi}_{r_2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{r_u}\}$, 称作**不稳定子空间**;

其中

$$n_s + n_c + n_u = n \quad (6.1.23)$$

由此可得到 n 维空间 R^n 的直和分解

$$R^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u \quad (6.1.24)$$

不难证明, 任取 $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \in E^q$, $q = s, c, u$, 当 $t > t_0$ 后的相轨线恒有 $\mathbf{u}(t) \in E^q$, $q = s, c, u$ 。这说明, 这三个子空间都是**不变子空间**。

(2) 非线性系统

对于非线性系统(6.1.13), 一般不存在上述不变子空间。因此, 需转向研究具有类似不变性质的集合。记以平衡点(即原点)为中心, 以 $\delta > 0$ 为半径的邻域为 $\delta(0)$ 。将自 $\mathbf{u} \in \delta(0)$ 出发的相轨线记作 $\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u})$ 。引入三个集合

$$W^s \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \in \delta(0) \mid \forall t \geq t_0, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) = 0\} \quad (6.1.25)$$

$$W^c \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \in \delta(0) \mid \forall t \geq t_0, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) \neq 0\} \quad (6.1.26)$$

$$W^u \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \in \delta(0) \mid \forall t \leq t_0, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow -\infty} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}) = 0\} \quad (6.1.27)$$

分别称为平衡点的**局部稳定流形**、**局部中心流形**和**局部不稳定流形**。

定理 6.1.8 (中心流形定理) 设向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in C^r$, $r \geq 1$, 则存在:

- 在 $\delta(0)$ 内并且在原点与 E^s 和 E^u 分别相切的、唯一的、 C^r 阶光滑的 W^s 和 W^u ;
- 在 $\delta(0)$ 内并且在原点与 E^c 相切的、但不唯一的、 C^{r-1} 阶光滑的 W^c 。

本定理的证明见文献[18]。此处, 给出它的几何解释。参考图 6.1.4, 平衡点附近的相轨线分为三束。在与 W^c 横截的流形 W^s 或 W^u 上, 相轨线收缩或扩张, 系统的局部特性比较简单。在 W^c 上, 系统的局部特性可能是收缩, 也可能是扩张, 甚至是更为复杂的某种游荡。具体情况将取决于向量函数 $f(u)$ 中的非线性项。当 W^c 对应的中心子空间为零维时, 称平衡点为**双曲型平衡点**, 否则为**非双曲型平衡点**。

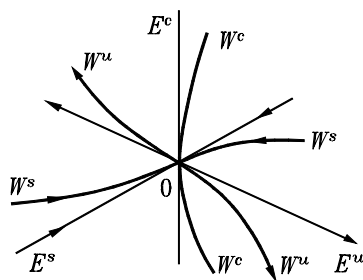


图 6.1.4 中心流形定理

6.2 非自治系统平衡点的稳定性*

6.2.1 稳定性概念的拓广

本节研究 n 维非自治系统

$$\dot{u} = f(u, t), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad f: U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (6.2.1)$$

其中 $\mathbb{R}^+ = \{t | 0 \leq t < \infty\}$ 。记 $u_s \in U$ 是该系统的一个孤立平衡点, 满足条件

$$f(u_s, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (6.2.2)$$

非自治系统有别于自治系统的特点之一是时间起点对系统行为有影响。因此, 需要拓宽 2.2 节中对平衡点稳定性的定义。

定义 6.2.1 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得 $\|u(t_0) - u_s\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ 时, 系统的运动满足

$$\|u(t) - u_s\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad (6.2.3)$$

则称系统的平衡点 u_s 是稳定的, 否则称为不稳定的。若在稳定前提下还有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_s \quad (6.2.4)$$

则称系统的平衡点 u_s 是渐近稳定的。

与自治系统平衡点的稳定性概念相比较, 该定义的主要特点在于明确了一般情况下 δ 与初始时间 t_0 有关。如果 δ 与 t_0 无关, 则称平衡点是**一致稳定**的。若在一致稳定前提下还满足条件(6.2.4), 则称平衡点是**一致渐近稳定**的。

6.2.2 Lyapunov 直接方法

(1) 预备知识

考察单值可微函数

$$V(u, t) \stackrel{\text{def}}{=} V(u_1, u_2, \dots, u_n, t), \quad V(0, t) = 0 \quad (6.2.5)$$

其定义域为

$$\Omega = \{(u, t) \mid \|u\| \leq H, t > t_0\}, \quad H = \text{const.} > 0, \quad t_0 \geq 0 \quad (6.2.6)$$

定义 6.2.2 如果函数(6.2.5)在 Ω 内恒有 $V(u, t) \geq 0$ 或 $V(u, t) \leq 0$, 则称其为**正常号函数**或**负常号函数**, 统称为**常号函数**。

定义 6.2.3 如果常号函数 V 与时间 t 有关, 但存在一与时间 t 无关的正定函数 W 使得 $V - W \geq 0$, 则称 V 为正定函数; 若 $V + W \leq 0$, 则称 V 为负定函数; 通称为定号函数。

例如当 $t_0 > 0$ 时, $W = t_0(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)$ 是正定函数, 从而 $t > t_0$ 时 $V = t(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)$ 是域 U 上的正定函数。

定义 6.2.4 设函数 V 在 Ω 上有界。如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $t > t_0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\|u\| < \delta$ 时恒有 $|V(u, t)| < \varepsilon$, 则称 V 具有**无穷小上界**。

不显含时间的连续函数必具有无穷小上界。若函数显含时间, 则很容易举出有界但不具有无穷小上界的例子。例如, $V = \sin[(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)t]$ 。

(2) Lyapunov 定理

不失一般性, 以下讨论系统平衡点为原点($u_s = 0$)时的稳定性。

定理 6.2.1 (稳定性定理) 如果存在定号函数 $V(u, t)$, 其沿非自治系统(6.2.1)确定的相轨线上的全导数

$$\dot{V}(u(t), t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V(u, t) \cdot f(u, t) \quad (6.2.7)$$

是与 $V(u, t)$ 异号的常号函数或恒为零, 则该系统的原点稳定。

证明: 不妨设 $V(u, t)$ 是 Ω 内的正定函数, $\dot{V}(u(t), t) \leq 0$ 是负常函数或恒为零。类似于定理 6.1.1 的证明, 下面先导出两个不等式, 然后用反证法完成证明。

根据定义 6.2.3, 存在与时间 t 无关的正定函数 $W(u)$, 在 Ω 内恒有

$$W(u) \leq V(u, t) \quad (6.2.8)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 记 $\bar{\varepsilon}$ 为 W 在超球面 $\|u\| = \varepsilon$ 上的下确界。 W 正定保证 $\bar{\varepsilon} > 0$ 。注意到 $V(u, t_0)$ 在 $u = 0$ 处关于 u 连续, 从而具有无穷小上界。即对于上述 $\bar{\varepsilon} > 0$, 存在 $0 < \delta(\varepsilon, t_0) < \bar{\varepsilon}$, 只要 $\|u(t_0)\| < \delta$, 恒有 $V(u(t_0), t_0) < \bar{\varepsilon}$ 。注意到 $\dot{V}(u(t), t) \leq 0$, 沿着自 $u(t_0) = u_0$ 出发的相轨线必有

$$V(u(t), t) \leq V(u(t_0), t_0) < \bar{\varepsilon} \quad (6.2.9)$$

如果系统的原点不稳定, 则存在某一时刻 $t^* > t_0$ 使得 $\|u(t^*)\| = \varepsilon$ 。这就由 $\bar{\varepsilon}$ 是下确界以及式(6.2.8)和(6.2.9)导出了矛盾结果

$$\bar{\varepsilon} \leq W(u^*) \leq V(u(t^*), t^*) \leq V(u(t_0), t_0) < \bar{\varepsilon} \quad (6.2.10)$$

因此, 系统的原点是稳定的。证毕。

类似地, 读者可以自行证明如下定理^[8]。

定理 6.2.2 (渐近稳定性定理) 如果存在具有无穷小上界的定号函数 $V(u, t)$, 其沿非自治系统(6.2.1)确定的相轨线上的全导数 $\dot{V}(u(t), t)$ 是与 $V(u, t)$ 异号的定号函数, 则该系统的原点渐近稳定。

定理 6.2.3 (不稳定性定理) 若存在连续可微、具有无穷小上界的函数 $V(u, t)$, 在原点的

任意邻域内总有 u 使 $V(u, t_0) > 0$ (或 $V(u, t_0) < 0$)，而其沿非自治系统 (6.2.1) 确定的相轨线上的全导数正定 (或负定)，则该系统的原点不稳定。

例 6.2.1 考察参数激励线性系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -(1 + \sin^2 t)u_1 + (1 - \sin t \cos t)u_2 \\ \dot{u}_2 = -(1 + \sin t \cos t)u_1 - (1 + \cos^2 t)u_2 \end{cases} \quad (a)$$

在平衡点 (0,0) 的稳定性。

解：取与时间无关的正定二次型

$$V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 \quad (b)$$

它自然具有无穷小上界。而它沿系统(a)的相轨线的全导数是

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) = 2[-(1 + \sin^2 t)u_1^2 - 2(\sin t \cos t)u_1 u_2 - (1 + \cos^2 t)u_2^2] \\ &= -2(u_1^2 + u_2^2) - 2(u_1 \sin t + u_2 \cos t)^2 \end{aligned} \quad (c)$$

如果取正定函数

$$W(u_1, u_2) = 2(u_1^2 + u_2^2) \quad (d)$$

则

$$\dot{V} + W = -2(u_1 \sin t + u_2 \cos t)^2 \leq 0 \quad (e)$$

对照定义 6.2.3 知， \dot{V} 是负定函数。根据定理 6.2.2，该系统的原点渐近稳定。

需要指出的是，对于非自治系统(6.2.1)，一般无法通过其派生系统是否稳定来推断系统的稳定性。考察非线性非自治系统

$$\dot{u} = \frac{u}{t+1} - u^3 \quad (6.2.11)$$

这是一 Bernoulli 型一阶微分方程，具有解析解

$$u(t) = \frac{u(t_0)(t+1)}{\sqrt{(t_0+1)^2 + \frac{2}{3}u^2(t_0)[(t+1)^3 - (t_0+1)^3]}}, \quad -1 < t_0 \leq t \quad (6.2.12)$$

显见， $t \rightarrow +\infty$ 时 $u(t) \rightarrow 0$ ，即平衡点 $u=0$ 是渐近稳定的。然而，该系统对应的派生系统是变量可分离的一阶微分方程，具有不稳定解

$$u(t) = u(t_0) \frac{t+1}{t_0+1}, \quad -1 < t_0 \leq t \quad (6.2.13)$$

6.3 向量场在平衡点附近的规范型

6.3.1 PB 规范型的概念

根据前两节的分析，系统在平衡点附近的动力学行为有时仅依赖于系统的线性化部分，有时则与系统中的非线性因素有关。出于考察非线性因素影响的需要，本节利用平衡点附近的局部光滑坐标变换，将系统微分方程在平衡点附近约化为尽可能简单的、但仍保留其本质

动力学特性的规范形式，即所谓的规范型。

先考察 n 维非线性自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U \subset R^n, \quad \mathbf{f}: U \subset R^n \rightarrow R^n \quad (6.3.1)$$

设 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 足够光滑，且 $\mathbf{f}(0) = 0$ 。现考虑如何通过对状态变量 \mathbf{u} 实施一系列多项式变换，使得 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 的 Taylor 展开式中直到第 r 项（ $r \geq 2$ 为正整数）皆有比较简单形式。以下将由低次到高次逐步实现这一简化过程。由于这些步骤是类似的，可仅讨论其中之一。

记 H_n^k 为 R^n 中所有 k 次齐次多项式构成的向量空间。设方程(6.3.1)右端向量函数的 Taylor 展开式为

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{g}_2(\mathbf{u}) + \cdots + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{h}_k(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^{k+1}) \quad (6.3.2)$$

其中 $\mathbf{g}_i(\mathbf{u}) \in H_n^i, i=2, \dots, k-1$ 是已简化的项， $\mathbf{h}_k(\mathbf{u}) \in H_n^k$ 是待简化的项。本节的主要任务是寻找具有如下形式的多项式变换

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{q}_k(\mathbf{v}), \quad \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) \in H_n^k \quad (6.3.3)$$

通过选择多项式 $\mathbf{q}_k(\mathbf{v})$ 来简化 $\mathbf{h}_k(\mathbf{u})$ ，并要求使式(6.3.2)中所有次数低于 k 的项保持不变。

将变换(6.3.3)代入方程(6.3.1)，可得到

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{q}_k(\mathbf{v})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{q}_k(\mathbf{v})) \quad (6.3.4)$$

根据矩阵二项式定理有

$$[\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{q}_k(\mathbf{v})]^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{q}_k(\mathbf{v}) + O(\|\mathbf{v}\|^{k+1}) \quad (6.3.5)$$

将式(6.3.5)代入方程(6.3.4)并注意展开式(6.3.2)，得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}) + \cdots + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{v}) + \mathbf{h}_k(\mathbf{v}) - [\mathbf{D}\mathbf{q}_k(\mathbf{v})\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{q}_k(\mathbf{v})] + O(\|\mathbf{v}\|^{k+1}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}) + \cdots + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{v}) + \mathbf{h}_k(\mathbf{v}) - \text{ad}_A \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) + O(\|\mathbf{v}\|^{k+1}) \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

其中 ad_A 称作**同调算子**。它是关于向量函数 $\mathbf{q}(\mathbf{v})$ 的线性算子，定义为

$$\text{ad}_A \mathbf{q}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}\mathbf{q}(\mathbf{v})\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{q}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{q}: R^n \rightarrow R^n \quad (6.3.7)$$

如果将同调算子 ad_A 在 H_n^k 上的值域记为 F_n^k ，则

$$F_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \text{ad}_A(H_n^k) \subset H_n^k \quad (6.3.8)$$

记 F_n^k 在 H_n^k 中的补空间为 G_n^k ，即

$$H_n^k = F_n^k \oplus G_n^k \quad (6.3.9)$$

因此， $\mathbf{h}_k(\mathbf{v}) \in H_n^k$ 可表示为

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{f}_k(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_k(\mathbf{v}), \quad \mathbf{f}_k(\mathbf{v}) \in F_n^k, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{v}) \in G_n^k \quad (6.3.10)$$

只要取变换(6.3.3)中待定的多项式 $\mathbf{q}_k(\mathbf{v})$ 满足如下**同调方程**

$$\text{ad}_A \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) - \mathbf{f}_k(\mathbf{v}) = 0 \quad (6.3.11)$$

则方程(6.3.6)简化为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}) + \cdots + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_k(\mathbf{v}) + O(\|\mathbf{v}\|^{k+1}) \quad (6.3.12)$$

上式为方程(6.3.1)的**第 k 阶 Poincaré-Birkhoff 规范型**, 简称为**第 k 阶 PB 规范型**或**第 k 阶 PB 范式**。而称方程

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}) + \cdots + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_k(\mathbf{v}) \quad (6.3.13)$$

为方程(6.3.1)的一个 **k 阶截断 PB 规范型**或 **k 阶截断 PB 范式**。

在平衡点附近, k 阶 ($k \geq 2$) 截断 PB 规范型携带了派生方程所没有的非线性信息, 可展现原系统在平衡点附近的动力学行为。当然, 略去的高阶小量是否对分析结果有影响是一个很复杂的数学问题。

一般地, 如果系统含有待定参数, 甚至是非自治的, 仍可研究其平衡点附近的 PB 规范型。例如, 考察含参数向量 \mathbf{p} 的非自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^m \quad (6.3.14)$$

其中 $\mathbf{f}(0, t, 0) = 0$ 。将其改写为扩张的 $n+m+1$ 维自治系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t, \mathbf{p}), & \mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^m \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{\mathbf{p}} = 0 \end{cases} \quad (6.3.15)$$

进而寻求如下形式的 PB 规范型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v} + \mathbf{B}(t)\mathbf{p} + \mathbf{g}_2(\mathbf{v}, t, \mathbf{p}) + \cdots + \mathbf{g}_k(\mathbf{v}, t, \mathbf{p}) + O(\|\mathbf{v}\|^{k+1}, \|\mathbf{p}\|^{k+1}) \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{\mathbf{p}} = 0 \end{cases} \quad (6.3.16)$$

此时, 只需将参数向量 \mathbf{p} 限制在原点附近, 与状态向量 \mathbf{u} 同等对待, 只不过它是定常的; 而对时间 t 则没有限制。因此, 该 PB 规范型的计算与自治系统的 PB 规范型相同, 只不过多项式变换中的系数是时间 t 和参数向量 \mathbf{p} 的函数。

6.3.2 PB 规范型的计算

不难看出, 向量空间 H_n^k 的维数为

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \dim H_n^k = n C_{n+k-1}^{n-1} \quad (6.3.17)$$

选择 H_n^k 的一组基函数 $\mathbf{e}_1(\mathbf{v}), \mathbf{e}_2(\mathbf{v}), \dots, \mathbf{e}_N(\mathbf{v})$, 将同调算子 $\text{ad}_{\mathbf{A}}$ 在这组基下表示为矩阵 \mathbf{L} , 它的值域是 F_n^k 。若记 \mathbf{L}^* 为矩阵 \mathbf{L} 的复共轭转置, 则矩阵 \mathbf{L}^* 的零空间 $N(\mathbf{L}^*)$ 正是 F_n^k 在 H_n^k 中的补空间, 即 $G_n^k = N(\mathbf{L}^*)$ 。因此, 可通过求解齐次线性代数方程

$$\mathbf{L}^* \mathbf{x} = 0 \quad (6.3.18)$$

的基础解系, 获得 G_n^k 的一组基函数 $\tilde{\mathbf{e}}_1(\mathbf{v}), \tilde{\mathbf{e}}_2(\mathbf{v}), \dots, \tilde{\mathbf{e}}_M(\mathbf{v})$, 进而得到

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{v}) = \sum_{r=1}^M c_r \tilde{\mathbf{e}}_r(\mathbf{v}) \quad (6.3.19)$$

例 6.3.1 考察二维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{a})$$

计算该系统的二阶截断 PB 规范型。

解：根据矩阵 \mathbf{A} 的具体形式，同调算子 ad_A 作用于任意二阶齐次多项式向量 $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = [q_1(v_1, v_2) \quad q_2(v_1, v_2)]^T \in H_2^2$ 的结果形如

$$\text{ad}_A \mathbf{q}(\mathbf{v}) = \mathbf{Dq}(\mathbf{v})\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{Aq}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial v_1} & \frac{\partial q_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial v_1} & \frac{\partial q_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

取 H_2^2 的一组基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} v_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} v_1 v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} v_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

则有

$$\text{ad}_A \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2v_1 v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_2, \quad \text{ad}_A \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} v_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_3, \quad \text{ad}_A \mathbf{e}_3 = 0, \quad \dots \quad (\text{d})$$

由此得到 ad_A 在这组基下的矩阵表示

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{e})$$

此时，线性代数方程(6.3.18)的基础解系为

$$\mathbf{x}_1 = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{f})$$

由此得 $N(\mathbf{L}^*)$ (即 G_2^2) 的一组基

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 2v_1^2 \\ v_1 v_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{g})$$

根据式(6.3.19)得到

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{v}) = c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 v_1^2 \\ c_1 v_1 v_2 + c_2 v_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{h})$$

其中 c_1 和 c_2 是常数。因此，该系统的二阶截断 PB 规范型为

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 + 2c_1 v_1^2 \\ \dot{v}_2 = c_1 v_1 v_2 + c_2 v_1^2 \end{cases} \quad (\text{i})$$

显然, 常数 c_1 和 c_2 与方程(a)中的非线性项有关。要具体确定它们, 应根据式(6.3.3)写出变换

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + a_1 v_1^2 + a_2 v_1 v_2 + a_3 v_2^2 \\ u_2 = v_2 + b_1 v_1^2 + b_2 v_1 v_2 + b_3 v_2^2 \end{cases} \quad (\text{j})$$

其中 $a_r, b_r, r=1,2,3$ 是待定常数。将其代入方程(a)的 Taylor 展开式, 与式(i)比较同次幂的系数, 进而可确定所有待定常数。

需要指出的是, 由于补空间 G_2^2 的选择非唯一, 故 PB 规范型并不唯一。例如, 读者可以取下述基向量

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{e}_1 - e_5) = \begin{bmatrix} v_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{k})$$

构成 G_2^2 , 对应的二阶截断 PB 规范型为

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 + c_1 v_1^2 \\ \dot{v}_2 = c_2 v_1^2 \end{cases} \quad (\text{l})$$

正如式(6.3.17)所表明, 向量空间 H_n^k 的维数 N 随着 n 和 k 的增加迅速增大。例如, 对于 $n=4, k=3$ 这样尚不算复杂的问题, 就会有 $N=80$ 。这时, 用矩阵表示法来计算 PB 规范型的工作量绝非手工所能胜任。因此, 人们在 MAPLE 等计算机代数软件平台上发展了一些程序化方法。此外, 还运用共轭算子、李代数等工具构造了一些新的算法。

6.3.3 共振与非共振*

在具体计算 PB 规范型前, 如果能确定式(6.3.12)中哪些 $\mathbf{g}_k(\mathbf{v})=0$ (即式(6.3.2)中哪些 $\mathbf{h}_k(\mathbf{v}) \in F_n^k$) 无疑很有帮助。为此, 先引进矩阵特征值共振的概念。

定义 6.3.1 记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是矩阵 \mathbf{A} 的特征值组, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ 是一自然数组且满足 $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^n m_r \geq 2$ 。如果存在正整数 s ($1 \leq s \leq n$) 使得

$$\lambda_s = \langle m, \lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^n m_r \lambda_r \quad (6.3.20)$$

则称 \mathbf{A} 的特征值是**共振**的, 称 $|m|$ 为**共振的阶**。

例如, 满足 $\lambda_2 = 2\lambda_1$ 的特征值是 2 阶共振的, 这正是系统的 2 阶内共振条件。由于此处对特征值的正负无限制, 故定义的共振概念很宽。又如, 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 的特征值是奇数阶共振的, 因为对于任给的正整数 m_1 和 $m_2 = m_1 + 1$ 皆有 $\lambda_2 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2$, 且 $|m| = 2m_1 + 1$ 。

欲使式(6.3.12)中的 $\mathbf{g}_k(\mathbf{v})=0$, 就是要对给定的非零多项式 $\mathbf{h}_k(\mathbf{v}) \in F_n^k$ 。考察同调方程

$$\text{ad}_A \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) - \mathbf{h}_k(\mathbf{v}) = 0 \quad (6.3.21)$$

是否有解 $\mathbf{q}_k(\mathbf{v}) \in H_n^k$, 即同调算子 ad_A 的表示矩阵是否可逆。以下在矩阵 A 已化为 Jordan 标准型的前提下对此进行讨论。

如果矩阵 A 有互异特征值, 则 A 是对角矩阵。记 \mathbf{e}_r 是对应于特征值 λ_r 的特征向量, 用 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ 构成一组基。记 $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ 是对应于 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ 的坐标, 则

$$\mathbf{v}^m \stackrel{\text{def}}{=} v_1^{m_1} v_2^{m_2} \dots v_n^{m_n}, \quad |m| = k \quad (6.3.22)$$

是 H_n^k 中元素某一分量的最简形式。取 $\mathbf{q}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^m \mathbf{e}_s$, 它是 A 的第 s 个特征向量。不难发现, 向量 $D\mathbf{q}_k(\mathbf{v})\mathbf{A}\mathbf{v}$ 也是 A 的第 s 个特征向量, 其各分量中只有第 s 个分量不为零, 且等于

$$\frac{\partial \mathbf{v}^m}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{A}\mathbf{v} = (m_1 v_1^{m_1-1} \dots v_n^{m_n}, \dots, m_n v_1^{m_1} \dots v_n^{m_n-1}) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \langle m, \lambda \rangle \mathbf{v}^m \quad (6.3.23)$$

再注意到特征值问题

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}^m \mathbf{e}_s) = \lambda_s \mathbf{v}^m \mathbf{e}_s \quad (6.3.24)$$

可以得到

$$\text{ad}_A \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) = D(\mathbf{v}^m \mathbf{e}_s) \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}(\mathbf{v}^m \mathbf{e}_s) = [\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s] \mathbf{v}^m \mathbf{e}_s = [\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s] \mathbf{q}_k(\mathbf{v}) \quad (6.3.25)$$

这说明同调算子 ad_A 对应的矩阵是对角阵, 其特征值具有 $\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s$ 的形式。由此可见, 当矩阵 A 的特征值非共振时, ad_A 的表示矩阵的所有特征值均非零, 同调算子 ad_A 可逆。

当矩阵 A 有重特征值时, 取其 Jordan 标准型为上三角矩阵。此时, 算子 ad_A 有相应的 Jordan 块, 且其特征值仍具有 $\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s$ 的形式, 从而有相同的结论。

总结上述分析, 得到本节的主要结论。

定理 6.3.1 当矩阵 A 是上三角 Jordan 标准型时, 总可适当选择变换(6.3.3)使方程(6.3.1)的右端向量函数仅由满足共振条件(6.3.20)的多项式 $\mathbf{v}^m \mathbf{e}_s$ 组成。

例 6.3.2 考察如下一元复微分方程的规范型

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \bar{z} \end{bmatrix} + O(|z|^2), \quad \omega > 0 \quad (a)$$

解: 显然, 该方程线性部分矩阵的特征值为 $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$, 恰好满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, 是奇数阶共振的。因此有无穷多、但可列个共振条件

$$\lambda_2 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = m_1 \lambda_1 + (m_1 + 1) \lambda_2, \quad m_1 = 1, 2, \dots \quad (b)$$

根据共振阶次 $|m| = 2m_1 + 1$ 知, 方程(a)的规范型仅含对应于上述共振条件的奇次项

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega z + c_3 |z|^2 \bar{z} + c_5 |z|^4 \bar{z} + \dots + c_{2k+1} |z|^{2k} \bar{z} + \dots \\ \dot{\bar{z}} = -i\omega \bar{z} + \bar{c}_3 |z|^2 z + \bar{c}_5 |z|^4 z + \dots + \bar{c}_{2k+1} |z|^{2k} z + \dots \end{cases} \quad (c)$$

6.4 周期运动的稳定性

根据前几章的分析,平衡点是系统运动微分方程的定常解,而周期运动则是将该方程经过某种平均处理后的微分方程定常解。不难想象,周期运动的稳定性分析与平衡点的分析具有一定联系,但要复杂得多。本节按照先非自治系统、再自治系统的顺序,分析周期运动的稳定性。

6.4.1 非自治系统

考察 n 维非自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in U \subset R^n, \quad t \in R^1 \quad (6.4.1)$$

其中向量函数以 $T_0 > 0$ 为周期

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, t + T_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad \forall t \in R^1 \quad (6.4.2)$$

以下将研究该系统的周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$, 它满足

$$\mathbf{u}_p(t + T) = \mathbf{u}_p(t), \quad T = mT_0, \quad \forall t \in R^1 \quad (6.4.3)$$

其中 m 为正整数。通常,将这种周期运动简称为 **m 倍周期运动**或**周期轨道**。以简谐激励下的 Duffing 系统为例,其 1/3 亚谐共振就是 3 倍周期运动。

现将平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性概念推广到周期运动。

定义 6.4.1 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 只要 $t = t_0$ 时与周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 相邻的运动 $\mathbf{u}(t)$ 满足 $\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_p(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$, 恒有

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (6.4.4)$$

则称周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 是稳定的, 否则称为不稳定的。若在稳定前提下还有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) \quad (6.4.5)$$

则称周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 是渐近稳定的。

现研究周期运动的稳定性判据。记周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 的扰动为

$$\overset{\text{def}}{\Delta \mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p(t), \quad \forall t \in R^1 \quad (6.4.6)$$

如果向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ 关于 \mathbf{u} 可微, 则微扰动 $\Delta \mathbf{u}(t)$ 满足线性常微分方程

$$\overset{\text{def}}{\Delta \dot{\mathbf{u}}}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t), t)\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{u}(t) \quad (6.4.7)$$

其中 $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t), t)$ 是向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ 在周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 处的 Jacobi 矩阵。根据式(6.4.2)和(6.4.3), 该矩阵具有周期性

$$\mathbf{A}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t), t) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t + T), t + T) = \mathbf{A}(t + T), \quad \forall t \in R^1 \quad (6.4.8)$$

因此, 方程(6.4.7)是具有周期系数的线性常微分方程。将 4.6 节介绍的 Floquet 理论推广到高维系统, 则方程(6.4.7)的解形如

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{p}_r(t) e^{\mu_r t} \quad (6.4.9)$$

其中 $c_r, r=1, 2, \dots, n$ 是常数, $\mathbf{p}_r(t), r=1, 2, \dots, n$ 是以 T 为周期的向量函数。由上式可以证明如下定理。

定理 6.4.1 若方程(6.4.7)的所有特征指数满足 $\operatorname{Re}(\mu_r) < 0, r=1, 2, \dots, n$, 则周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 渐近稳定; 反之亦然。

定理 6.4.2 若方程(6.4.7)的某一特征指数满足 $\operatorname{Re}(\mu_s) > 0$, 则周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 不稳定; 反之亦如此。

需要指出的是, 计算方程(6.4.7)的特征指数并非易事。只有在某些特殊情况下, 方程(6.4.7)可简化为 Mathieu 方程。这时, 可利用 4.6 节中的一些结果来完成周期运动的稳定性分析。

例 6.4.1 考察简谐激励下的 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon\omega_0^2 u^3(t) = F \cos \omega t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (a)$$

试给出如下主共振定常解的失稳条件

$$u_p(t) = \bar{a} \cos(\omega t - \bar{\varphi}) \quad (b)$$

解: 根据方程(a), 周期运动 $u_p(t)$ 附近的小扰动 $\Delta u(t)$ 满足

$$\Delta \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0 \Delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 [1 + 3\varepsilon u_p^2(t)] \Delta u(t) = 0 \quad (c)$$

将周期运动(b)代入上式并对三角函数积化和差, 得到

$$\Delta \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0 \Delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 \left[1 + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{2}\right] \Delta u(t) + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{2} \cos 2(\omega t - \bar{\varphi}) \Delta u(t) = 0 \quad (d)$$

引入新的时间变量、扰动量及常数

$$\begin{cases} \tau = \omega t - \bar{\varphi}, & v(\tau) = \Delta u\left(\frac{\tau + \bar{\varphi}}{\omega}\right) \\ \xi = \frac{\zeta\omega_0}{\omega}, & \delta = \left(1 + \frac{3\varepsilon \bar{a}^2}{2}\right) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, & \eta = \frac{3\varepsilon \bar{a}^2 \omega_0^2}{4\omega^2} \end{cases} \quad (e)$$

将方程(d)化为 Mathieu 方程

$$\frac{d^2 v(\tau)}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dv(\tau)}{d\tau} + (\delta + 2\eta \cos 2\tau)v(\tau) = 0 \quad (f)$$

鉴于主共振对激励频率的限制条件 $\omega \approx \omega_0$, 必有 $\delta \approx 1$ 。根据式(4.6.61)得该 Mathieu 方程零解的失稳条件

$$|\delta - 1| < \sqrt{\eta^2 - 4\xi^2} \quad (g)$$

即

$$4\xi^2 + (\delta - \eta - 1)(\delta + \eta - 1) < 0 \quad (h)$$

将式(e)中诸常数代入上式, 得主共振定常解的失稳条件

$$4\zeta^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{3\varepsilon\omega_0^2\bar{a}^2}{4})(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{9\varepsilon\omega_0^2\bar{a}^2}{4}) < 0 \quad (i)$$

注意到主共振条件

$$\omega \approx \omega_0, \quad \omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0) \quad (j)$$

条件(i)可近似为

$$\zeta^2\omega_0^2 + (\omega - \omega_0 - \frac{3\varepsilon\omega_0\bar{a}^2}{8})(\omega - \omega_0 - \frac{9\varepsilon\omega_0\bar{a}^2}{8}) < 0 \quad (k)$$

这与 4.1 节中的主共振失稳条件(4.1.23)是相同的。

一般情况下, 计算方程(6.4.7)的特征指数涉及计算单值矩阵 $\mathbf{B} = \Phi(T)$ 的特征值, 而目前尚没有解析获得该矩阵的方法。8.2 节将给出单值矩阵 \mathbf{B} 的数值计算方法。这样, 上述两个定理可用于对数值计算的周期运动进行稳定性判断。

6.4.2 自治系统

现考察 n 维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (6.4.10)$$

的周期运动

$$\mathbf{u}_p(t+T) = \mathbf{u}_p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad (6.4.11)$$

(1) 轨道稳定性概念

类似于对非自治系统的讨论, 周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 的受扰运动满足

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Df}(\mathbf{u}_p(t))\Delta \mathbf{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{u}(t) \quad (6.4.12)$$

然而, 不难发现周期运动 $\dot{\mathbf{u}}_p(t)$ 总是该方程的解

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{u}}_p(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t)) = \mathbf{Df}(\mathbf{u}_p(t))\dot{\mathbf{u}}_p(t) = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{u}}_p(t) \quad (6.4.13)$$

注意到 $\dot{\mathbf{u}}_p(t)$ 以 T 为周期, 根据 Floquet 理论可断言, 方程(6.4.12)的特征指数至少有一个为零。

因此, 自治系统的周期运动不可能具有定义 6.4.1 所描述的渐近稳定性。

回顾 2.4 节中介绍的自激振动, 它不仅是周期运动, 而且其周围的相轨线随着时间延续最终趋于该周期运动。但按照上述分析, 这种周期运动不符合定义 6.4.1 所规定的渐近稳定性。问题何在呢?

出现上述矛盾的根源在于: 定义 6.4.1 中的稳定性要求, 对于任意的 $t > t_0$, 受扰运动 $\mathbf{u}(t)$ 与周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 在同一时刻必须非常接近。这对于自治系统来说是过于苛刻的要求。为了放松这一限制, 需要重新考虑对两个运动接近程度的描述。视周期运动 $\mathbf{u}_p(t)$ 为相空间中的闭轨 Γ , 定义相空间中点 \mathbf{u} 到 Γ 的距离为

$$d(\mathbf{u}, \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{v} \in \Gamma} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (6.4.14)$$

在此基础上可引入 Poincaré 意义下的轨道稳定性概念。

定义 6.4.2 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 只要 $t = t_0$ 时闭轨 Γ 相邻的运动 $\mathbf{u}(t)$ 满足 $d(\mathbf{u}(t_0), \Gamma) < \delta(\varepsilon, t_0)$, 恒有

$$d(\mathbf{u}(t), \Gamma) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (6.4.15)$$

则称闭轨 Γ 在 Poincaré 意义下**轨道稳定**, 否则称为**轨道不稳定**。若在轨道稳定前提下还有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\mathbf{u}(t), \Gamma) = 0 \quad (6.4.16)$$

则称闭轨 Γ 在 Poincaré 意义下**轨道渐近稳定**。

例 6.4.2 考虑极坐标系下的二维系统

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = r \quad (a)$$

研究其闭轨的稳定性。

解: 该系统具有闭轨

$$r = r_0, \quad \theta = r_0 t + \theta_0, \quad r_0, \theta_0 = \text{const.} \quad (b)$$

如果该闭轨的半径 r_0 受到小扰动 $\delta > 0$, 受扰相轨线为

$$r = r_0 + \delta, \quad \theta = (r_0 + \delta)t + \theta_0 \quad (c)$$

对照式(b)和(c)可见: 尽管这两条闭轨间的距离是 δ , 但同一时刻的相位差将是 δt , 随着时间延续而趋于无限。因此, 该闭轨在 Poincaré 意义下是轨道稳定的, 但在 Lyapunov 意义下是不稳定的。

(2) 轨道渐近稳定性定理

定理 6.4.3 如果方程(6.4.12)的 $n-1$ 个特征指数具有负实部, 则自治系统(6.4.10)的周期运动在 Poincaré 意义下轨道渐近稳定。

该定理的几何意义是, 对于轨道渐近稳定的闭轨, 其受到的小扰动 $\Delta \mathbf{u}$ 可分解为 n 个分量, 沿闭轨切线方向的扰动量随着时间增加保持不变, 而其余 $n-1$ 个分量将指数衰减为零。兹将该定理的严格证明留到本节的 6.4.3 来完成。

定理 6.4.4 对于二维自治系统的闭轨, 若有

$$\int_0^T \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}_p(t)) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right) dt < 0 \quad (6.4.17)$$

则闭轨是轨道渐近稳定的。

证明: 根据线性微分方程理论中的 Liouville 公式, 可写出

$$e^{\int_0^T \text{tr} \mathbf{A}(t) dt} = \lambda_1 \lambda_2 = e^{\mu_1 T} e^{\mu_2 T} = e^{(\mu_1 + \mu_2) T} \quad (6.4.18)$$

因此

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} \mathbf{A}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right) dt < 0 \quad (6.4.19)$$

根据 Floquet 理论和上式, μ_1 和 μ_2 中必有一个为零, 另一个为负实数。根据定理 6.4.3 知, 该闭轨是轨道渐近稳定的。证毕。

例 6.4.3 考察 van der Pol 系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (\text{a})$$

研究其一次近似解的稳定性。

解：将方程(a)写作状态变量形式

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 + \varepsilon(1 - u_1^2)u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

根据例 3.2.2, 系统的一次近似解为

$$u_1 = 2 \cos \omega_0 t \quad (\text{c})$$

由条件(6.4.17)得

$$\int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right) dt = \varepsilon \int_0^T [1 - u_1^2(t)] dt = \varepsilon \int_0^T [1 - 4 \cos^2 \omega_0 t] dt = -\varepsilon T < 0 \quad (\text{d})$$

因此, van der Pol 系统的一次近似解在 Poincaré 意义下轨道渐近稳定。

6.4.3 Poincaré 映射与不动点的稳定性

仍考察自治系统(6.4.10), 将闭轨(6.4.11)记作 Γ 。下面先引入 Poincaré 映射和离散动力系统的一些概念, 然后从 Poincaré 映射不动点的角度来研究闭轨 Γ 的轨道稳定性及其相邻相轨线的特性。

(1) Poincaré 映射

定义 6.4.3 设 $\Sigma \subset R^n$ 是某个 $n-1$ 维超曲面的一部分, 如果对于任意的 $\mathbf{u} \in \Sigma$, Σ 的法向量 $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ 满足与向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 的无切条件

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) \neq 0 \quad (6.4.20)$$

则称 Σ 是向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 的 **Poincaré 截面**。

例 6.4.4 考察简谐激励下的单自由度系统

$$\ddot{u} + p(u, \dot{u}) = F \sin \omega t, \quad u \in R^1 \quad (\text{a})$$

建立其 Poincaré 截面。

解：虽然方程(a)是非自治系统, 但可写作 3 维扩张相空间中的自治系统

$$\overset{\text{def}}{\dot{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -p(u_1, u_2) + F \sin \omega u_3 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (\text{b})$$

构造 3 维相空间中的平面

$$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_3 = \text{mod}(2\pi/\omega)\} \quad (\text{c})$$

易见其法向量 $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = [0 \ 0 \ 1]^T$ 满足无切条件

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 1 \neq 0 \quad (\text{d})$$

因此, 平面 Σ 是系统的 Poincaré 截面。

为了简洁起见, 还可视相空间为 2 维, 不作相空间的扩张, 直接取

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_1, u_2, t) | t = \text{mod}(2\pi / \omega)\} \quad (\text{e})$$

这种构造 Poincaré 截面的方法可推广到一般受周期激励的非自治系统。

定义 6.4.4 任取点 $u_p \in \Gamma$, 作一足够小的 Poincaré 截面 Σ , 使 Γ 与 Σ 仅相交于点 u_p 。根据微分方程解关于初始条件的连续性定理, 存在点 u_p 的邻域 $U_r = \delta(u_p)$, 使得从任意的 $u \in U_r$ 出发的相轨线可以回到 Σ 。由此可以定义所谓首次回归映射

$$P: U_r \rightarrow \Sigma \quad (6.4.21)$$

该映射又称作 **Poincaré 映射**。

如果以 $\varphi_t(u)$ 代表自 $u \in U_r$ 出发的相轨线在 t 时刻的值, 则映射(6.4.21)可理解为

$$P(u) = \varphi_{\tau(u)}(u) \in \Sigma, \quad \forall u \in U_r \quad (6.4.22)$$

其中下标 $\tau(u)$ 是相轨线自 $u \in U_r$ 到首次返回 Σ 所需的时间。显然, $\tau(u_p) = T$, 且

$$P(u_p) = \varphi_T(u_p) = u_p \in \Sigma \quad (6.4.23)$$

这说明 Γ 是闭轨, 等价于 u_p 是 Poincaré 映射的**不动点**。因此, 研究系统(6.4.10)的闭轨及其附近的相轨线就等价于研究 Poincaré 映射的不动点及其邻近映射点的性质。由于 Poincaré 映射定义在 $n-1$ 维 Poincaré 截面上, 通常比原系统要易于研究。

映射是一种离散动力系统, 所以在对映射的不动点研究之前需先介绍离散动力系统及其若干性质。

(2) 离散动力系统的概念

定义 6.4.5 设 $U \subset R^n$ 是一开集, $P: U \rightarrow U$ 是 C^r 阶的一对一映射, 称映射序列 $P^k, k \in Z$ (Z 为整数集) 是 U 上的 C^r 阶**离散动力系统**, 其中

$$P^0 = I, \quad P^k = PP^{k-1}, \quad P^{-k} = (P^{-1})^k \quad (6.4.24)$$

定义 6.4.6 将映射点序列

$$\gamma = \{P^k(u) | u \in U, k \in Z\}, \quad Z \text{ 为整数集} \quad (6.4.25)$$

称作离散动力系统 P 过点 u 的**相轨线**。特别地, 如果存在正整数 m 使得

$$P^m(u_p) = u_p \quad (6.4.26)$$

则称 u_p 是 P 的**周期点**, 使上式成立的最小正整数 m 称为 u 的**周期**, 过周期点 u_p 的相轨线称为**周期轨道**。当 $m=1$ 时, 称 u_p 是 P 的**不动点**。

(3) 不动点的稳定性概念

定义 6.4.7 设 u_p 是 P 的不动点。如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $u \in \delta(u_p)$, 对于任意的 $k > 0$ 恒有

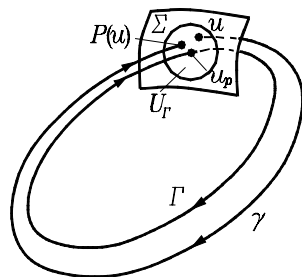


图 6.4.1 Poincaré 映射与不动点

$$\|P^k(u) - u_p\| < \varepsilon \quad (6.4.27)$$

则称不动点 u_p 是稳定的。反之，则称为不稳定。如果在稳定的前提下还有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P^k(u) = u_p \quad (6.4.28)$$

则称不动点 u_p 是渐近稳定的。

对于 Poincaré 映射的不动点，式(6.4.27)中的距离定义在 Poincaré 截面上，对时间并无要求。因此，不动点的稳定性等价于周期运动在 Poincaré 意义下的轨道稳定性。

(4) 线性化映射的性质

设 A 是可逆矩阵，考察如下线性映射

$$u_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} u_p + A(u_k - u_p), \quad u_k \in R^n, \quad k \in Z \quad (6.4.29)$$

显然， u_p 是该映射的不动点。因此，上式又可写作

$$u_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} Au_k, \quad u_k \in R^n, \quad k \in Z \quad (6.4.30)$$

定理 6.4.5

- 若 A 的所有特征值均满足 $|\lambda_r| < 1, r=1, 2, \dots, n$ ，则不动点渐近稳定；
- 若 A 的所有特征值均满足 $|\lambda_r| \leq 1, r=1, 2, \dots, n$ ，则不动点稳定；
- 若 A 的某一特征值满足 $|\lambda_r| > 1$ ，则不动点不稳定。

证明：根据特征值关系

$$A\varphi_r = \lambda_r \varphi_r, \quad r=1, 2, \dots, n \quad (6.4.31)$$

对任给的 $u \in R^n$ ，将向量 $u - u_p$ 作谱分解

$$u - u_p = \sum_{r=1}^n c_r \varphi_r \quad (6.4.32)$$

如果矩阵 A 的所有特征值均满足 $|\lambda_r| < 1, r=1, 2, \dots, n$ ，记

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq r \leq n} \{|\lambda_r|\} < 1 \quad (6.4.33)$$

易见

$$\|Au - u_p\| = \left\| A \left(\sum_{r=1}^n c_r \varphi_r + u_p \right) - u_p \right\| = \left\| \sum_{r=1}^n c_r \lambda_r \varphi_r \right\| < \lambda \left\| \sum_{r=1}^n c_r \varphi_r \right\| = \lambda \|u - u_p\| < \|u - u_p\| \quad (6.4.34)$$

因此

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k u - u_p\| < \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^k \|u - u_p\| = 0 \quad (6.4.35)$$

这说明不动点 u_p 是渐近稳定的。类似地，可证明款 b 和 c。

类似于连续线性系统，可引入线性映射的如下子空间：

- 对应所有 $|\lambda_r| < 1$ ， $E^s \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \dots, \varphi_{r_s}\}$ ，称作**稳定子空间**；
- 对应所有 $|\lambda_r| = 1$ ， $E^c \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \dots, \varphi_{r_c}\}$ ，称作**中心子空间**；

c. 对应所有 $|\lambda_r| > 1$, $E^u \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \dots, \varphi_{n_u}\}$, 称作**不稳定子空间**;

不难证明, 它们都是不变子空间, 其直和就是 R^n 。

(5) 中心流形定理

考察具有不动点 u_p 的非线性映射 $P(u)$, 将其在不动点 u_p 附近表示为

$$\begin{aligned} P(u) &= P(u_p) + Df(u_p)(u - u_p) + O(\|u - u_p\|^2) \\ &= u_p + A(u - u_p) + O(\|u - u_p\|^2) \end{aligned} \quad (6.4.36)$$

如果矩阵 A 的所有特征值的模均不为 1, 则称 u_p 为**双曲不动点**, 否则称为**非双曲不动点**。

类似于连续非线性系统, 可以定义具有如下不变性质的集合:

$$W^s \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \delta(u_p) \mid \forall k \geq 0, P^k(u) \in \delta(u_p) \text{ 且 } \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k(u) = u_p\} \quad (6.4.37)$$

$$W^c \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \delta(u_p) \mid \forall k \geq 0, P^k(u) \in \delta(u_p) \text{ 但 } \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k(u) \neq u_p\} \quad (6.4.38)$$

$$W^u \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \delta(u_p) \mid \forall k \leq 0, P^k(u) \in \delta(u_p) \text{ 且 } \lim_{k \rightarrow -\infty} P^k(u) = u_p\} \quad (6.4.39)$$

分别称为不动点的**局部稳定流形**、**局部中心流形**和**局部不稳定流形**。

定理 6.4.6 (中心流形定理) 设映射 $P(u) \in C^r, r \geq 1$, 则在不动点的邻域 $\delta(u_p)$ 内存在:

- 过不动点 u_p 与 E^s 和 E^u 分别相切的、唯一的、 C^r 阶光滑的 W^s 和 W^u ;
- 过不动点 u_p 与 E^c 相切的、但不唯一的、 C^{r-1} 阶光滑的 W^c 。

考察图 6.4.2 所示三维空间中一不稳定闭轨 Γ , 取 Γ 上任意一点 u_p 作 2 维 Poincaré 截面, 则 u_p 是 2 维 Poincaré 映射的不动点。不动点具有一维局部稳定流形 W^s 和一维局部不稳定流形 W^u , 它反映了不稳定不动点附近映射点的趋向。如果让 u_p 沿闭轨 Γ 移动, 则得到沿着闭轨 Γ 的二维局部稳定流形和二维局部不稳定流形, 图中给出了在这两个流形上的相轨线走向。

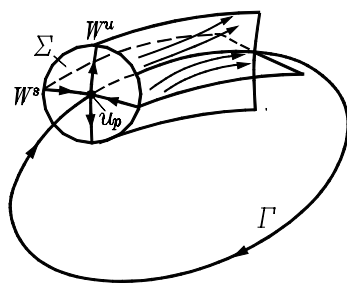


图 6.4.2 不动点的局部不变流形

(6) 周期运动的轨道稳定性

最后, 利用 Poincaré 映射来证明定理 6.4.3。为了便于理解, 将论证内容分为两个独立的定理。

定理 6.4.7 记方程(6.4.12)满足初始条件 $\Phi(0) = I$ 的单值矩阵为 $\Phi(t)$, 则 Poincaré 映射 P 的 Jacobi 矩阵 $DP(u_p) = \Phi(T)$, 其特征值是方程(6.4.12)的特征乘数。

证明: 自治系统(6.4.10)自 $u \in \Sigma$ 出发的相轨线满足

$$\varphi_t(u) = u + \int_0^t f(\varphi_s(u)) ds \quad (6.4.40)$$

将其对初始状态 u 求导并代入 $u = u_p$ 得

$$D\varphi_t(u_p) = I + \int_0^t Df(\varphi_s(u_p)) D\varphi_s(u_p) ds \quad (6.4.41)$$

再对时间 t 求导得

$$\frac{d}{dt} D\varphi_t(u_p) = Df(\varphi_t(u_p)) D\varphi_t(u_p) = A(t) D\varphi_t(u_p) \quad (6.4.42)$$

这是具有周期系数矩阵 $A(t)$ 的线性常微分方程，其解是矩阵 $D\varphi_t(u_p)$ 。

根据式(6.4.22)，Poincaré 映射 P 的 Jacobi 矩阵 $DP(u_p)$ 为 $D\varphi_T(u_p)$ ，它是周期系数微分方程(6.4.42)由初始条件 $D\varphi_0(u_p) = I$ 出发的解矩阵在 $t = T$ 时的取值。对照 4.6 节中基本解矩阵的定义可见， $D\varphi_T(u_p) = \Phi(T)$ ，其特征值自然是方程(6.4.12)的特征乘数。证毕。

定理 6.4.8 记 Γ 为 n 维自治系统(6.4.10)的闭轨，点 $u_p \in \Gamma$ 是 Poincaré 映射 P 的不动点，且 Jacobi 矩阵 $DP(u_p)$ 的特征值满足 $|\lambda_r| < 1, r=1, 2, \dots, n-1$ ，则 Γ 是轨道渐近稳定的。

证明：按式(6.4.21)构造 Poincaré 截面 Σ 和 Poincaré 映射 P ，设其在不动点 u_p 处的 Jacobi 矩阵 $DP(u_p)$ 的所有特征值皆满足 $|\lambda_r| < 1, r=1, 2, \dots, n-1$ 。定理 6.4.5 保证 u_p 是线性映射 $DP(u_p)$ 的渐近稳定不动点，从而也是 Poincaré 映射 P 的渐近稳定不动点。

由于不动点 u_p 稳定，对 u_p 的任何邻域 $U \subset \Sigma$ ，都存在点 u_p 的一个邻域 $V \subset \Sigma$ ，使得对一切的 $k \geq 0$ 和 $u \in V$ 有 $P^k(u) \in U$ 。根据常微分方程解关于初值的连续性，可知闭轨 $\Gamma = \{\varphi_t(u_p)\}$ 是轨道稳定的。

再证明对任意的 $u \in V$ ，皆有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi_t(u), \Gamma) = 0$ 。记 $u_k = P^k(u), k=0, 1, \dots, \tau_k = \tau(u_k)$ 为相轨线自 $u_k \in \Sigma$ 出发到首次返回 Σ 所需的时间。由于 $k \rightarrow +\infty$ 时 $u_k \rightarrow u_p$ ，而 $\tau(u)$ 关于 u 的连续性使得 $k \rightarrow +\infty$ 时， $\tau_k = \tau(u_k) \rightarrow \tau(u_p) = T$ 。该极限说明数集 $\{\tau_k\}$ 有上界 $\bar{\tau}$ 。对于任何 $t > 0$ ，总有正整数 $k(t)$ 使得 $t_k < t \leq t_{k+1}$ ，其中 $t_k = \sum_{j=0}^k \tau_j$ 。记 $t = t_k + s, s \in (0, \bar{\tau}]$ ，则有 $\varphi_t(u) = \varphi_s(u_k)$ 。根据 $\varphi_t(u)$ 关于 u 的连续性及其 $k \rightarrow +\infty$ 时 $u_k \rightarrow u_p$ ，对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N > 0$ ，使得当 $k > N$ 时对于任意的 $s \in (0, \bar{\tau}]$ 均有

$$\|\varphi_s(u_k) - \varphi_s(u_p)\| < \varepsilon \quad (6.4.43)$$

因此，对于 $0 < T < t$ 存在 $k(t) > N$ ，使得

$$d(\varphi_t(u), \Gamma) \leq \|\varphi_t(u) - \varphi_s(u_p)\| = \|\varphi_s(u_k) - \varphi_s(u_p)\| < \varepsilon \quad (6.4.44)$$

证毕。

将上述两定理相合并，自然就得到定理 6.4.3。值得指出，定理 6.4.7 还提供了计算 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵的方法。

6.5 平衡点的静态分叉

6.5.1 分叉的概念

分叉是指系统某一参数达到临界值时, 系统行为发生突然变化的现象。例如, 当轴向压力超过 Euler 所给出的临界值后, 压杆的平衡状态会突然发生变化。

为了定量说明分叉现象, 先考察含参数的一维动力系统

$$\dot{u} = f(u, p), \quad u \in U \subseteq R^1, \quad p \in P \subseteq R^1 \quad (6.5.1)$$

其静平衡方程为

$$f(u, p) = 0 \quad (6.5.2)$$

设参数 $p = p_0$ 时系统的平衡点为 $u = u_0$, 现研究 (u_0, p_0) 近平衡点 u 对参数 p 的依赖关系。根据式(6.5.2)可得

$$f_u(u, p) \frac{du}{dp} + f_p(u, p) = 0 \quad (6.5.3)$$

其中 $f_u(u, p)$ 和 $f_p(u, p)$ 分别是二元函数 $f(u, p)$ 关于 u 和 p 的偏导数。如果在 (u_0, p_0) 处有

$$f_u(u_0, p_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(u_0, p_0)} \neq 0 \quad (6.5.4)$$

则可由式(6.5.3)解出

$$\left. \frac{du}{dp} \right|_{p=p_0} = -f_u^{-1}(u_0, p_0) f_p(u_0, p_0) \quad (6.5.5)$$

根据隐函数存在定理, 在 p_0 的邻域中存在唯一的函数

$$u(p) = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{du(q)}{dq} dq \quad (6.5.6)$$

由上述分析知, 无法获得唯一函数 $u(p)$ 的条件是

$$f_u(u_0, p_0) = 0 \quad (6.5.7)$$

这样的 (u_0, p_0) 称为平衡方程(6.5.2)的**奇异点**。

对奇异点又可分为两种情况^①：

(1) 若 $f_p(u_0, p_0) \neq 0$, 则 $\left. \frac{du}{dp} \right|_{p=p_0} \rightarrow \infty$, 即 $u(p)$ 在奇异点具有铅垂切线, 这样的奇异点

被称作**转折点**, 又称为**极限点**或**鞍结点**。

(2) 若 $f_p(u_0, p_0) = 0$, 则 $\left. \frac{du}{dp} \right|_{p=p_0} \rightarrow \frac{0}{0}$, 即 $u(p)$ 在奇异点的切方向不定, 这样的奇异点被

称为**分叉点**。

^① 在多数文献中, 将这两种奇异点通称为分叉点。

例 6.5.1 考察含参数的平衡方程

$$f(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} (u - p + 1)[(u - 2)^2 - p + 1] = 0, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad p \in \mathbb{R}^1 \quad (\text{a})$$

讨论平衡点 u 与参数 p 的关系。

解：由式(a)解得平衡点 u 与参数 p 间关系

$$\begin{cases} u = p - 1 \\ u = 2 \pm \sqrt{p - 1}, \end{cases} \quad p \geq 1 \quad (\text{b})$$

令

$$f_u(u, p) = [(u - 2)^2 - p + 1] + 2(u - 2)(u - p + 1) = 0 \quad (\text{c})$$

与式(a)联立解得三个奇异点 $A(2, 1), B(1, 2), C(4, 5)$ 。将其代入

$$f_p(u, p) = -[(u - 2)^2 - p + 1] - (u - p + 1) \quad (\text{d})$$

得到

- a. 点 A ：由 $f_p(2, 1) = -2 \neq 0$ 知，它是转折点；
- b. 点 B ：由 $f_p(1, 2) = 0$ 知，它是分叉点；
- c. 点 C ：由 $f_p(4, 5) = 0$ 知，它也是分叉点。

对照图 6.5.1 可见：在点 A ，解曲线发生转折；在点 B 和 C ，有两条解曲线相交，切方向不唯一。

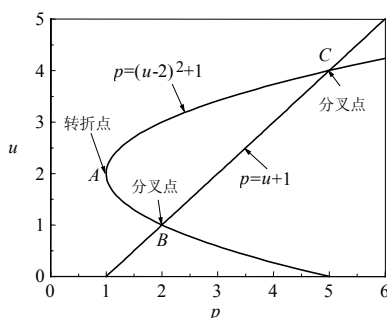


图 6.5.1 分叉图

基于上述直观认识，下面引入一般高维系统平衡点的静态分叉定义。

定义 6.5.1 对于含 m 维参数向量的 n 维系统静平衡方程

$$f(u, p) = 0, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad p \in P \subseteq \mathbb{R}^m \quad (6.5.8)$$

记 $l(p)$ 是该方程在参数向量 p 处解的数目。若 $l(p)$ 在 $p = p_0$ 处突变，则称 (u_0, p_0) 是一**静态分叉点**， $p = p_0$ 为参数向量 p 的**分叉值**。

记 $D_u f(u_0, p_0)$ 是函数向量 $f(u, p)$ 在 (u_0, p_0) 处的 Jacobi 矩阵。读者不难证明静态分叉的几个相互等价的必要条件：

- a. $f(u_0, p_0) = 0$ 且 $\det[D_u f(u_0, p_0)] = 0$ ；
- b. $f(u_0, p_0) = 0$ 且 $D_u f(u_0, p_0) = 0$ 有零特征值；
- c. $f(u_0, p_0) = 0$ 且 $D_u f(u_0, p_0)$ 的零空间维数 $\dim N(D_u f(u_0, p_0)) \geq 1$ 。

6.5.2 一维系统平衡点的静态分叉

仍考虑一维系统的静平衡方程(6.5.1)，设其在 $(0, 0)$ 处满足静态分叉的必要条件

$$f(0, 0) = 0, \quad f_u(0, 0) = 0 \quad (6.5.9)$$

为了研究解的数目 $l(p)$ ，需要了解二元函数 $f(u, p)$ 在原点附近的拓扑结构，这是一代数几何问题。20 世纪 70~80 年代，美国学者 Golubisky 等运用芽代数、等价等概念系统地解决了这一问题，相应的结果被称为奇异性理论^[19]。该理论的主要贡献有如下三方面：

- a. 提供了识别分叉的充分条件;
 - b. 提供了划分分叉种类的理论依据;
 - c. 给出了系统在分叉现象附近受小扰动后所有可能的拓扑结构变化。
- 为了应用奇异性理论, 利用条件(6.5.9)将式(6.5.1)在原点展开

$$f(u, p) = \alpha p + \frac{1}{2} au^2 + bpu + \frac{1}{2} cp^2 + \frac{1}{6} du^3 + \dots \quad (6.5.10)$$

其中

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f_p(0,0), \quad a \stackrel{\text{def}}{=} f_{uu}(0,0), \quad b \stackrel{\text{def}}{=} f_{up}(0,0), \quad c \stackrel{\text{def}}{=} f_{pp}(0,0), \quad d \stackrel{\text{def}}{=} f_{uuu}(0,0) \quad (6.5.11)$$

此外, 引入 Hessen 矩阵的行列式

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 \quad (6.5.12)$$

现根据展开式中的系数 $\alpha, a, b, c, d, \dots$ 来讨论几种重要的分叉。

(1) 鞍结分叉

若方程(6.5.10)满足静态分叉的必要条件(6.5.9)以及非退化条件

$$\alpha \neq 0, \quad a \neq 0 \quad (6.5.13)$$

则称原点 $(0,0)$ 为**鞍结点**。在该点的邻域中, 方程(6.5.10)具有解曲线 $p(u)$

$$p(u) = -\frac{a}{2\alpha} u^2 + O(u^3) \quad (6.5.14)$$

因此, $l(p)$ 在 $p=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 0 的变化。

例 6.5.2 考察如下一维动力系统的平衡解及其稳定性

$$\dot{u} = f(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} p - u^2 \quad (\text{a})$$

解: 式(a)的平衡方程是

$$f(u, p) = p - u^2 = 0 \quad (\text{b})$$

由此得解曲线

$$u = \begin{cases} \pm\sqrt{p}, & p \geq 0 \\ \text{无解}, & p < 0 \end{cases} \quad (\text{c})$$

注意到

$$D_u f(u, p) = -2u = \mp 2\sqrt{p}, \quad p \geq 0 \quad (\text{d})$$

因此, 解(c)的上半解支稳定, 下半解支不稳定, 如图 6.5.2 所示。

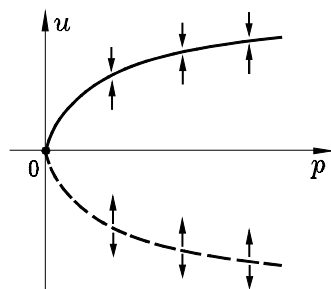


图 6.5.2 鞍结分叉

(2) 跨临界分叉

若方程(6.5.10)满足静态分叉的必要条件(6.5.9)以及

$$\begin{cases} \alpha = 0, & (\text{限定条件}) \\ a \neq 0, \quad \Delta < 0 & (\text{非退化条件}) \end{cases} \quad (6.5.15)$$

则称原点 $(0,0)$ 为**跨临界分叉点**。在该点的邻域中, 方程(6.5.10)具有两条相交的解曲线

$$u = \frac{1}{a}(-b \pm \sqrt{\Delta})p + O(p^2) \quad (6.5.16)$$

因此, $l(p)$ 在 $p=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 2 的变化。

例 6.5.3 考察如下一维动力系统的平衡解及其稳定性

$$\dot{u} = f(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} u(p - u) \quad (\text{a})$$

解: 由式(a)对应的平衡方程得到两条在原点相交的解曲线

$$u = 0, \quad u = p \quad (\text{b})$$

注意到

$$D_u f(u, p) = p - 2u \quad (\text{c})$$

对于解支 $u=0$, $D_u f(u, p) = p$, 故 $p < 0$ 时平衡点渐近稳定, 而 $p > 0$ 时不稳定。对于解支 $u=p$, $D_u f(u, p) = -p$, 故稳定性恰好相反。解曲线的形态如图 6.5.3 所示。

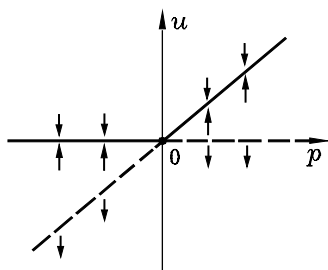


图 6.5.3 跨临界分叉

(3) 叉形分叉

若方程(6.5.10)满足静态分叉的必要条件(6.5.9)以及

$$\begin{cases} \alpha = 0, \quad a = 0, & (\text{限定条件}) \\ b \neq 0, \quad d \neq 0, & (\text{非退化条件}) \end{cases} \quad (6.5.17)$$

则称原点 $(0,0)$ 为**叉形分叉点**。在该点的邻域中, 方程(6.5.10)有两条解曲线相交于原点

$$\begin{cases} u = -\frac{c}{2b}p + O(p^2) \\ p = -\frac{d}{6b}u^2 + O(u^3) \end{cases} \quad (6.5.18)$$

因此, $l(p)$ 在 $p=0$ 左右发生从 1 到 3 的变化。

例 6.5.4 考察如下一维动力系统的平衡解及其稳定性

$$\dot{u} = f(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} u(p - u^2) \quad (\text{a})$$

解: 由式(a)对应的平衡方程得两条解曲线

$$u = 0 \quad \text{和} \quad u = \pm\sqrt{p}, \quad p \geq 0 \quad (\text{b})$$

注意到

$$D_u f(u, p) = p - 3u^2 \quad (\text{c})$$

解支 $u=0$ 的稳定性与例 6.5.3 中相同。对于解支 $u=\pm\sqrt{p}$, ($p\geq 0$)，由 $D_u f(u,p)=-2p\leq 0$ 可知其稳定。解曲线分叉的形态如图 6.5.4 所示。

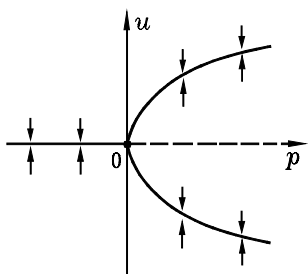


图 6.5.4 超临界叉型分叉

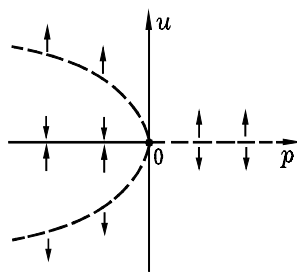


图 6.5.5 亚临界叉型分叉

例 6.5.5 考察如下一维动力系统的平衡解及其稳定性

$$\dot{u} = f(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} u(p+u^2) \quad (\text{a})$$

解：由式(a)对应的平衡方程得两条解曲线

$$u=0 \quad \text{和} \quad u=\pm\sqrt{-p}, \quad p\leq 0 \quad (\text{b})$$

注意到

$$D_u f(u, p) = p + 3u^2 \quad (\text{c})$$

解支 $u=0$ 的稳定性与例 6.5.4 中相同。对于解支 $u=\pm\sqrt{-p}$, ($p\leq 0$)，由 $D_u f(u, p)=-2p\geq 0$ 可知其不稳定。该分叉的形态如图 6.5.5 示。

这两例是两种典型的叉形分叉。例 6.5.4 在 $p>0$ 时出现非平凡解，即非平凡解对应的参数大于临界值 $p=0$ ，这种情况称为**超临界叉形分叉**。例如，压杆的失稳过程是一超临界叉形分叉。与此相反，例 6.5.5 在 $p<0$ 时出现非平凡解，故称之为**亚临界叉形分叉**。

6.5.3 高维系统平衡点的静态分叉*

考察含参数的 n 维自治系统

$$\dot{u} = f(u, p), \quad u \in U \subseteq R^n, \quad p \in P \subseteq R^m \quad (6.5.19)$$

其平衡方程为

$$f(u, p) = 0, \quad u \in U \subseteq R^n, \quad p \in P \subseteq R^m \quad (6.5.20)$$

设平衡点 $(0,0)$ 是奇异点。研究这样高维非线性方程零解的分叉问题，通常先设法将其降维处理。自然，降维后的方程仍需保持原方程的分叉行为。此处介绍两种常用的降维方法，一是 **Lyapunov-Schmidt 方法**（简称 L-S 方法），二是 **中心流形方法**。

(1) Lyapunov-Schmidt 方法

记 $A \stackrel{\text{def}}{=} D_u f(0,0)$ ，定义矩阵 A 的核和值域分别为

$$N(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \in U \subseteq R^n\}, \quad R(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in U \subseteq R^n\} \quad (6.5.21)$$

相应的正交补空间为

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} N(\mathbf{A})^\perp, \quad M_2 \stackrel{\text{def}}{=} R(\mathbf{A})^\perp \quad (6.5.22)$$

从而有直和分解

$$R^n = N(\mathbf{A}) \oplus M_1 = R(\mathbf{A}) \oplus M_2 \quad (6.5.23)$$

易见

$$\begin{cases} \dim M_2 = \dim N(\mathbf{A}) = k \\ \dim M_1 = \dim R(\mathbf{A}) = n - k \end{cases} \quad (6.5.24)$$

绝大多数实际问题满足 $1 \leq k \ll n$ ，并且一般有 $k = 1$ 。L-S 方法的基本思想就是将方程(6.5.20)投影到子空间 $N(\mathbf{A})$ 上，并使投影过程不丧失方程在 origin 附近的结构信息。

先对 \mathbf{u} 作分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \in N(\mathbf{A}), \quad \mathbf{w} \in M_1 \quad (6.5.25)$$

然后对平衡方程(6.5.20)作投影

$$\begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0 \in R(\mathbf{A}) \\ \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0 \in M_2 \end{cases} \quad (6.5.26a)$$

$$(6.5.26b)$$

其中 \mathbf{P} 是从 R^n 到 $R(\mathbf{A})$ 的投影算子， $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \mathbf{P}$ 是从 R^n 到 M_2 的投影算子。将分解式(6.5.25)代入式(6.5.26a)，可得

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{p}) = 0 \quad (6.5.27)$$

显然该方程左端满足

$$\begin{cases} \mathbf{g}(0, 0, 0) = \mathbf{P}\mathbf{f}(0, 0) = 0 \\ \mathbf{D}_{\mathbf{w}}\mathbf{g}(0, 0, 0) = \mathbf{P}\mathbf{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{A} \end{cases} \quad (6.5.28)$$

如果限制 \mathbf{A} 作用在 $\mathbf{w} \in M_1$ 上，则 \mathbf{A} 是可逆线性算子。根据隐函数定理，方程(6.5.27)在 $(0, 0, 0)$ 的邻域中有唯一解

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{v}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{w}(0, 0) = 0 \quad (6.5.29)$$

将该解代入(6.5.26b)得

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{w}(\mathbf{v}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) = 0 \quad (6.5.30)$$

由于在 origin 的邻域中，方程(6.5.20)与方程(6.5.30)的零点具有一一对应关系

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}(\mathbf{v}, \mathbf{p}) \quad (6.5.31)$$

所以， n 维平衡方程(6.5.20)已被约化为 k 维平衡方程(6.5.30)。当 $k = 1$ 并且 $m = 1$ 时，可直接利用本节 6.5.2 中一维系统平衡点分叉的结论。

例 6.5.6 用 L-S 方法研究如下含参数二维系统平衡方程在原点的分叉

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} pu_1 + u_1u_2 - u_1^3 \\ u_2 + u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{a})$$

解：显然

$$\mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) = \begin{bmatrix} p + u_2 - 3u_1^2 & u_1 \\ 2u_1 & 1 - 2u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{D}_u \mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

矩阵 \mathbf{A} 的特征值和特征向量为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, & \boldsymbol{\varphi}_1 = [1 \quad 0]^T \\ \lambda_2 = 1, & \boldsymbol{\varphi}_2 = [0 \quad 1]^T \end{cases} \quad (\text{c})$$

由此可得到矩阵 \mathbf{A} 的核和值域

$$N(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_1, u_2) | u_2 = 0\}, \quad R(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_1, u_2) | u_1 = 0\} \quad (\text{d})$$

分解式(6.5.25)恰好为

$$\mathbf{u} = u_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + u_2 \boldsymbol{\varphi}_2 \quad (\text{e})$$

将方程(a)投影到 $R(\mathbf{A})$ 得

$$g(u_1, u_2, p) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) = u_2 + u_1^2 - u_2^2 = 0 \quad (\text{f})$$

由此解出

$$u_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4u_1^2}) \approx \frac{1}{2}[1 \pm (1 + 2u_1^2)] = \begin{cases} 1 + u_1^2 \\ -u_1^2 \end{cases} \quad (\text{g})$$

根据隐函数定理，在原点的邻域中只有后一解 $u_2 = -u_1^2$ 。将其代回另一投影式，得到约化为一维的平衡方程

$$h(u_1, p) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{f}(u_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + u_2(u_1) \boldsymbol{\varphi}_2, p) = pu_1 - 2u_1^3 = 0 \quad (\text{h})$$

根据本节 6.5.2 的讨论，系统平衡点具有超临界叉型分叉。

此处为便于理解，所选例题中矩阵 \mathbf{A} 的特征向量恰好与坐标系平行，故直和分解特别简单。此外，方程(f)是可求解的。一般情况，方程(6.5.27)的求解需借助幂级数展开等近似处理方法。

(2) 中心流形方法

该方法的基本思路是将方程(6.5.19)向奇异点处的中心流形投影，获得降维的微分方程。先将方程(6.5.19)在奇异点处展开为

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, p), \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^n, \quad p \in P \subseteq R^m \quad (6.5.32)$$

其中 $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_u \mathbf{f}(0, 0)$ 。根据 6.1 节的符号，用矩阵 \mathbf{A} 的特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_r, r=1, 2, \dots, n$ 构成矩阵

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_{r_1}, \dots, \varphi_{n_c}, \varphi_{r_1}, \dots, \varphi_{n_s}, \varphi_{r_1}, \dots, \varphi_{n_u}] \quad (6.5.33)$$

由此引入线性变换

$$u = \Phi \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad v \in E^c, \quad w \in E^s \oplus E^u \quad (6.5.34)$$

将方程(6.5.32)化为

$$\begin{cases} \dot{v} = Bv + g(v, w, p) \\ \dot{w} = Cw + h(v, w, p) \end{cases} \quad (6.5.35)$$

为了将不含参数的自治系统中心流形定理用于该方程，将其扩张为 R^{n+m} 中的自治系统

$$\begin{cases} \dot{v} = Bv + g(v, w, p) \end{cases} \quad (6.5.36a)$$

$$\begin{cases} \dot{w} = Cw + h(v, w, p) \end{cases} \quad (6.5.36b)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \end{cases} \quad (6.5.36c)$$

根据定理 6.1.8，该系统在原点附近具有 $n_c + m$ 维局部中心流形

$$w = z(v, p) \quad (6.5.37)$$

由于中心流形过原点，并且与中心子空间相切的方向为 $w = 0$ ，故有

$$z(0,0) = 0, \quad D_v z(0,0) = 0, \quad D_p z(0,0) = 0 \quad (6.5.38)$$

将式(6.5.37)代入式(6.5.36a)得

$$\dot{v} = Bv + g(v, z(v, p), p) \quad (6.5.39)$$

这是系统在 $n_c + m$ 维局部中心流形上的投影，可近似反映系统在原点附近的性态。

为了确定中心流形，利用式(6.5.37)和方程(6.5.36a)将方程(6.5.36b)改写为

$$\begin{aligned} \dot{w} - Cw - h(v, w, p) &= D_v z(v, p) \dot{v} - Cz(v, p) - h(v, z(v, p), p) \\ &= D_v z(v, p)[Bv + g(v, z(v, p), p)] - Cz(v, p) - h(v, z(v, p), p) = 0 \end{aligned} \quad (6.5.40)$$

该方程连同条件(6.5.38)构成了确定中心流形的定解问题。在一般情况下，通过该方程求解中心流形的解析表达式极为困难，也并不必要。由于仅关心系统在局部中心流形上的投影，只要获得中心流形在原点的 Taylor 展开式就足够了。根据条件(6.5.38)，可设 $z(v, p)$ 为具有 v 和 p 的二次幂以上的 Taylor 展开，代入方程(6.5.40)后令同次幂系数平衡即得到 $z(v, p)$ 。

例 6.5.7 再考察例 6.5.6 中系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = pu_1 + u_1 u_2 - u_1^3 \\ \dot{u}_2 = u_2 + u_1^2 - u_2^2 \end{cases} \quad (a)$$

用中心流形方法研究系统在原点的分叉。

解：方程(a)已与方程(6.5.35)形式相同，即

$$v = u_1, \quad w = u_2, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad g = u_1 u_2 - u_1^3, \quad h = u_1^2 - u_2^2 \quad (b)$$

由例 6.5.6 得到的派生系统特征值和特征向量，该系统具有与 φ_1 相切的局部中心流形。根据条件(6.5.38)，设局部中心流形的 Taylor 展开式为

$$u_2 = z(u_1, p) = a(p)u_1^2 + \cdots \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入方程(6.5.40)得

$$2au_1[pu_1 + u_1(au_1^2 + \cdots) - u_1^3] - (au_1^2 + \cdots) - [u_1^2 - (au_1^2 + \cdots)^2] = 0 \quad (d)$$

比较上式两端 u_1^2 的系数得到

$$2ap - a - 1 = 0 \quad (e)$$

由此解出

$$a(p) = \frac{1}{2p-1} \approx -(1+2p) + O(p^2) \quad (f)$$

从而得到局部中心流形的 Taylor 展开式

$$u_2 = -(1+2p)u_1^2 + O(u_1^3, p^2u_1^2) \quad (g)$$

将其代入方程(a)中第一式并注意到 $|p| \ll 1/2$, 得到系统在局部中心流形上的投影

$$\dot{u}_1 = pu_1 - u_1(1+2p)u_1^2 - u_1^3 \approx pu_1 - 2u_1^3 \quad (h)$$

其平衡方程与上例结果相同, 系统平衡点具有超临界叉型分叉。

对照 L-S 方法和中心流形方法, 可以看到两者在投影这一基本思路上有相似之处。当 $p=0$ 时, 例 6.5.7 的中心流形 $u_2 \approx -(1+2p)u_1^2$ 恰好就是例 6.5.6 得到的局部解 $u_2 = -u_1^2$ 。因此, 两种方法所得结果相同。由于隐函数定理对函数光滑性的要求可放松到广义可微, L-S 方法可用于处理分段光滑系统。

6.6 平衡点的动态分叉

6.6.1 平衡点的失稳

仍考察含单参数的 n 维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, p), \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^n, \quad p \in P \subseteq R^1 \quad (6.6.1)$$

记以原点为中心、 $\delta > 0$ 为半径的邻域为 $\delta(0)$ 。设对于任意的 $p \in \delta(0)$, $\mathbf{u} = 0$ 保持为系统的平衡点。记

$$\mathbf{A}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(0, p) \in R^{n \times n} \quad (6.6.2)$$

自然, 其特征值与参数 p 有关, 记作 $\lambda_r(p), r=1, 2, \dots, n$ 。如果考察诸特征值 $\lambda_r(p), r=1, 2, \dots, n$ 随参数 p 增加的变化情况, 则存在如下可能性:

(1) 某一 $\lambda_r(p)$ 在 $p=0$ 附近由负实数变为正实数, 而其余特征值的实部不变号。此时, 平衡点由渐近稳定的结点变为鞍点, 丧失稳定性。对于二维系统, 这相当于在图 2.2.9 中取 $P < 0, Q = -p$ 的情况。在参数 p 的变化过程中, 由于 $\lambda_r(0) = 0$ 导致 $\det \mathbf{A}(0) = 0$, 故解的数目

$l(p)$ 在 $p=0$ 时发生变化, 属于 6.5 节已讨论过的静态分叉。

(2) 有某一对共轭特征值 $\lambda_r(p)$ 和 $\bar{\lambda}_r(p)$ 在 $p=0$ 时实部由负变为正, 而其余特征值的实部不变号。这样, 平衡点由渐近稳定的焦点变为不稳定焦点。对于二维系统, 这相当于在图 2.2.9 中取 $P=p, Q>0$ 的情况。对于这种情况, 恒有 $\det A(p) \neq 0$, 隐函数定理保证系统平衡点的数目没有变化。但由于 $p>0$ 时平衡点失稳, 受到任何小扰动的系统状态都会远离平衡点而去。但由于系统中非线性因素的制约, 受扰运动有可能最终成为某种稳态运动。这种现象称为平衡点的**动态分叉**。在方程(2.4.5)所描述的 van der Pol 系统中取 $p=\varepsilon$, 则当 $p>0$ 时系统的自激振动就属于动态分叉。

显然, 条件 $\operatorname{Re} \lambda_r(0) = \operatorname{Re} \bar{\lambda}_r(0) = 0$ 意味着 $p=0$ 时系统(6.6.1)在平衡点处具有二维中心流形。所以, 可根据中心流形定理将该 n 维系统的分叉问题化为二维系统的分叉问题。为此, 本节着重讨论二维系统的动态分叉。

6.6.2 二维系统平衡点的 Hopf 分叉

(1) 问题的描述及简化

对于 $n=2$, 将系统(6.6.1)在平衡点 $(0, p)$ 展开为

$$\dot{u} = f(u, p) = A(p)u + g(u, p), \quad u \in U \subseteq R^2, \quad p \in P \subseteq R^1 \quad (6.6.3)$$

其中 $g(u, p) = O(\|u\|^2)$ 。设矩阵 $A(p)$ 具有共轭复特征值

$$\lambda(p) = \alpha(p) \pm j\beta(p), \quad \alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \stackrel{\text{def}}{=} \omega > 0 \quad (6.6.4)$$

相应的特征向量为 φ 和 $\bar{\varphi}$ 。以下将通过一系列坐标变换并利用条件(6.6.4), 将方程(6.6.3)化为易于讨论的 PB 规范型。

首先, 引入复线性变换

$$u = [\varphi \quad \bar{\varphi}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad v \in C^1 \quad (6.6.5)$$

根据特征向量关于矩阵 $\lambda_r(p), r=1, 2, \dots, n-1$ 的加权正交性, 将方程(6.6.3)化为

$$\begin{cases} \dot{v} = \lambda(p)v + h(v, \bar{v}, p) \\ \dot{\bar{v}} = \bar{\lambda}(p)\bar{v} + \bar{h}(v, \bar{v}, p) \end{cases} \quad (6.6.6)$$

该式中的两个方程携带了相同信息, 故只需研究其中之一。以第一个方程为例, 将其作 Taylor 展开

$$\dot{v} = \lambda(p)v + h_2(v, \bar{v}, p) + h_3(v, \bar{v}, p) + \dots \quad (6.6.7)$$

其中 $h_r(v, \bar{v}, p), r \geq 2$ 是共轭复变量 v 和 \bar{v} 的 r 阶齐次多项式, 并含有参数 p 。

现尝试采用在原点附近的多项式变换, 将方程(6.6.7)转化为不含偶数次项的 PB 规范型。根据 6.3 节的分析, 对于具有共轭复变量的标量函数 $q(v, \bar{v}, p)$, 同调算子为

$$\operatorname{ad}_\lambda q(v, \bar{v}, p) = \left[\frac{\partial q}{\partial v} \lambda(p)v + \frac{\partial q}{\partial \bar{v}} \bar{\lambda}(p)\bar{v} \right] - \lambda(p)q \quad (6.6.8)$$

a. 二次项的简化

记共轭复变量 v 和 \bar{v} 的 2 阶齐次多项式空间为 H_1^2 , 其基函数为

$$e_1 = [v^2], \quad e_2 = [v\bar{v}], \quad e_3 = [\bar{v}^2] \quad (6.6.9)$$

它们在算子(6.6.8)作用下成为

$$\begin{cases} \text{ad}_\lambda e_1 = \text{ad}_\lambda v^2 = \lambda(p)v^2 = \lambda(p)e_1 \\ \text{ad}_\lambda e_2 = \text{ad}_\lambda v\bar{v} = \bar{\lambda}(p)v\bar{v} = \bar{\lambda}(p)e_2 \\ \text{ad}_\lambda e_3 = \text{ad}_\lambda \bar{v}^2 = [2\bar{\lambda}(p) - \lambda(p)]\bar{v}^2 = [2\bar{\lambda}(p) - \lambda(p)]e_3 \end{cases} \quad (6.6.10)$$

由此可得到同调算子 ad_λ 在基函数(6.6.9)下的矩阵表示

$$L(p) = \begin{bmatrix} \lambda(p) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}(p) & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{\lambda}(p) - \lambda(p) \end{bmatrix} \quad (6.6.11)$$

根据条件(6.6.4), 对于充分小的参数 p , $L(p)$ 是满秩矩阵, 其零空间是空集。因此,

$$h_2(v, \bar{v}, p) = 0 \quad (6.6.12)$$

即方程(6.6.7)中的所有二次项均可经 PB 变换消除。

b. 三次项的简化

记共轭复变量 v 和 \bar{v} 的 3 阶齐次多项式空间为 H_3 , 其基函数为

$$e_1 = [v^3], \quad e_2 = [v^2\bar{v}], \quad e_3 = [v\bar{v}^2], \quad e_4 = [\bar{v}^3] \quad (6.6.13)$$

它们在同调算子(6.6.8)作用下成为

$$\begin{cases} \text{ad}_\lambda e_1 = \text{ad}_\lambda v^3 = 3\lambda(p)v^3 = 3\lambda(p)e_1 \\ \text{ad}_\lambda e_2 = \text{ad}_\lambda v^2\bar{v} = [\lambda(p) + \bar{\lambda}(p)]v^2\bar{v} = [\lambda(p) + \bar{\lambda}(p)]e_2 \\ \text{ad}_\lambda e_3 = \text{ad}_\lambda v\bar{v}^2 = 2\bar{\lambda}(p)v\bar{v}^2 = 2\bar{\lambda}(p)e_3 \\ \text{ad}_\lambda e_4 = \text{ad}_\lambda \bar{v}^3 = [3\bar{\lambda}(p) - \lambda(p)]\bar{v}^3 = [3\bar{\lambda}(p) - \lambda(p)]e_4 \end{cases} \quad (6.6.14)$$

由此可得到同调算子 ad_λ 在基函数(6.6.13)下的矩阵表示

$$L(p) = \begin{bmatrix} 3\lambda(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(p) + \bar{\lambda}(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{\lambda}(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\bar{\lambda}(p) - \lambda(p) \end{bmatrix} \quad (6.6.15)$$

根据条件(6.6.4)有

$$\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = 2\text{Re}\lambda(0) = 0 \quad (6.6.16)$$

这表明 $L(0)$ 不满秩, 其零空间的基向量为 $[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ 。相应地有

$$h_3(v, \bar{v}, p) = \gamma(p)v^2\bar{v} \quad (6.6.17)$$

c. 更高次项的简化

考察第 $m+n$ 次项基函数 $v^m\bar{v}^n$, 它在算子(6.6.8)作用下成为

$$\text{ad}_\lambda v^m \bar{v}^n = [m\lambda(p) + n\bar{\lambda}(p) - \lambda(p)]v^m \bar{v}^n \quad (6.6.18)$$

因此, 同调算子 ad_λ 的矩阵表示 $L(p)$ 为对角阵。根据条件(6.6.4)和式(6.6.18), 矩阵 $L(0)$ 有零空间的条件是

$$m - n = 1 \quad (6.6.19)$$

这排除了 m 和 n 相等或同时为偶数的可能性。因此, 方程(6.6.7)中的所有偶数次项皆可经 PB 变换消除。

d. 化简结果

根据上述分析, 方程(6.6.7)可简化为

$$\dot{v} = \lambda(p)v + \gamma(p)v^2 \bar{v} + O(|v|^5) \quad (6.6.20)$$

等价的实数形式为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha(p)z_1 - \beta(p)z_2 + [a(p)z_1 - b(p)z_2](z_1^2 + z_2^2) + O(\|z\|^5) \\ \dot{z}_2 = \beta(p)z_1 + \alpha(p)z_2 + [b(p)z_1 + a(p)z_2](z_1^2 + z_2^2) + O(\|z\|^5) \end{cases} \quad (6.6.21)$$

其中 $z_1 = \text{Re}v$, $z_2 = \text{Im}v$, $a = \text{Re}\gamma$, $b = \text{Im}\gamma$ 。采用极坐标变化

$$z_1 = r \cos \theta, \quad z_2 = r \sin \theta \quad (6.6.22)$$

可得到更为简洁的形式

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(p)r + a(p)r^3 + O(r^5) \\ \dot{\theta} = \beta(p) + b(p)r^2 + O(r^4) \end{cases} \quad (6.6.23)$$

为了讨论方便, 将方程(6.2.23)中诸系数在 $p = 0$ 处作 Taylor 展开, 略去高次项得

$$\begin{cases} \dot{r} = cpr + ar^3 \\ \dot{\theta} = \omega + dp + br^2 \end{cases} \quad (6.6.24a)$$

$$(6.6.24b)$$

其中

$$\begin{aligned} a &\stackrel{\text{def}}{=} a(0) = \frac{1}{16}(f_{1111} + f_{1122} + f_{2112} + f_{2222}) + \\ &\quad \frac{1}{16\omega}[f_{112}(f_{111} + f_{122}) - f_{212}(f_{211} + f_{222}) - f_{111}f_{211} + f_{122}f_{222}] \end{aligned} \quad (6.6.25a)$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\alpha}{dp} \Big|_{p=0}, \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\beta}{dp} \Big|_{p=0} \quad (6.6.25b)$$

式中具有 4 位和 3 位下标的量分别是 3 阶和 2 阶偏导数, 例如 $f_{1122} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_2}$; 而

$$f_1(z_1, z_2) = \text{Re}[h(v, \bar{v}, p)], \quad f_2(z_1, z_2) = \text{Im}[h(v, \bar{v}, p)] \quad (6.6.26)$$

这些系数推导过程可参见文献[20], 参数 $b(0)$ 在最终的讨论中无关紧要而未列出。

(2) 讨论

方程(6.6.24)的特点是, 第一个方程不含未知函数 θ , 从而可依次求解。因此, 现着重讨

论其第一个方程。令

$$h(r) \stackrel{\text{def}}{=} cpr + ar^3 = 0 \quad (6.6.27)$$

这相当于一维自治系统(6.6.24a)的平衡方程。为了利用静态分叉的分析结果对方程进行讨论, 特对式中参数作如下非退化要求

$$c = \left. \frac{d\alpha}{dp} \right|_{p=0}, \quad a \neq 0 \quad (6.6.28)$$

其中第一式相当于要求特征值实部 $\alpha(p)$ 在 $p=0$ 具有横截性。

不失一般性, 设 $c > 0$ 。这样, 随着参数 p 由负到正递增, $\alpha(p)$ 亦如此。在条件(6.6.28)下, 方程(6.6.24)具有两条在 $(0,0)$ 点相交的解曲线

$$r = 0, \quad r = \sqrt{-\frac{cp}{a}} \quad (6.6.29)$$

它们是极坐标平面上点和圆, 分别对应于二维系统(6.6.24)的平衡点和极限环。现考察其稳定性, 记

$$h'(r) = \frac{dh}{dr} = cp + 3ar^2 \quad (6.6.30)$$

a. 对于平凡解 $r = 0$: 由 $h'(0) = cp$ 和 $c > 0$ 易见, $p < 0$ 时, $r = 0$ 渐近稳定; $p > 0$ 时, $(0,0)$ 不稳定。

b. 对于非平凡解 $r = \sqrt{-cp/a}$: 由 $h'(\sqrt{-cp/a}) = -2cp$ 和 $c > 0$ 可得, 若 $a < 0$, $p > 0$ 时有渐近稳定解; 若 $a > 0$, 则 $p < 0$ 时有不稳定解。前者对应于超临界叉形分叉, 后者对应于亚临界叉形分叉。

同理可讨论 $c < 0$ 的情况。归纳上述分析, 可以得到如下的 Poincaré-Andronov-Hopf 定理。根据中心流形定理, 该定理还可推广到一般的 n 维系统。

定理 6.6.1 (Poincaré-Andronov-Hopf 定理) 二维系统

$$\dot{u} = f(u, p) = A(p)u + g(u, p), \quad u \in U \subseteq R^2, \quad p \in P \subseteq R^1 \quad (6.6.31)$$

满足:

$$\text{a. } f(0, p) = 0, \quad p \in \delta(0) \quad (6.6.32)$$

b. 矩阵 $A(p)$ 具有共轭复特征值

$$\lambda(p) = \alpha(p) \pm j\beta(p), \quad \alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \stackrel{\text{def}}{=} \omega > 0 \quad (6.6.33)$$

$$\text{c. } c = \left. \frac{d\alpha}{dp} \right|_{p=0} \neq 0, \quad a \neq 0 \quad (6.6.34)$$

则方程(6.6.31)的平衡点在 $p = 0$ 时失稳, 出现如下 **Hopf 分叉**: 当 $acp < 0$ 时系统出现极限环, 其稳定性与平衡点相反。

例 6.6.1 考察变形的 van der Pol 系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = (p - u^2) \dot{u}, \quad p \in \mathbb{R}^1 \quad (\text{a})$$

讨论系统平衡点随参数 p 变化时的分叉。

解：将方程(a)改写为状态变量形式

$$\dot{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 + (p - u_1^2) u_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) \quad (\text{b})$$

首先，易验证

$$\mathbf{f}(0, p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^1 \quad (\text{c})$$

其次，由

$$\mathbf{A}(p) = \mathbf{D}_u \mathbf{f}(0, p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & p \end{bmatrix} \quad (\text{d})$$

可得到 $|p| < 2\omega_0$ 时的特征值

$$\lambda_{1,2}(p) = \frac{1}{2}(p \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - p^2}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(p) \pm j\beta(p) \quad (\text{e})$$

故

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = \omega_0 > 0, \quad c = \left. \frac{d\alpha}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{2} > 0 \quad (\text{f})$$

此外，根据式(6.6.25a)得到

$$a = -\frac{1}{8} \quad (\text{g})$$

根据定理 6.6.1，当 $p < 0$ 时，平衡点是渐近稳定的焦点； $p = 0$ 时，平衡点成为文献[8]所述的细焦点，并发生 Hopf 分叉；一旦 $p > 0$ ，平衡点成为不稳定焦点，在其附近出现一渐近稳定的极限环。图 6.6.1 以三维图方式给出了这种演变过程。

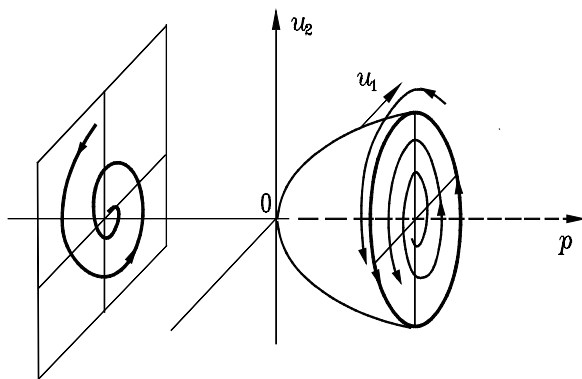


图 6.6.1 超临界 Hopf 分叉过程

6.6.3 Hopf 分叉的控制*

Hopf 分叉是工程中常见的失稳现象, 对于燃汽轮机转子、直升机旋翼等系统会引起灾难性的事故。早期, 人们主要通过修改系统设计来避免这种分叉, 其代价有时非常高昂。随着近年来主动控制技术的发展, 人们开始探索如何主动控制 Hopf 分叉。现用一转子动力学问题来说明控制 Hopf 分叉的思路。

考察由 n 维自治系统描述的转子动力学问题

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), \omega, p), \quad \mathbf{u} \in R^n \quad (6.6.35)$$

其中 $\omega \geq 0$ 是转速, $p \in R^1$ 是可主动调节的系统参数。设转子自 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ 、 $\omega = 0$ 、 $p = p_0$ 启动, 随后 ω 缓慢增加、 p 保持不变, 直到额定转速 $\omega = \omega_s$ 时 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_s(t)$ 。如果转子设计不周, 有可能存在一个转速区 $[\omega_1, \omega_2]$ 与区间 $[0, \omega_s]$ 相交, 转速达到 ω_1 和 ω_2 时分别发生 Hopf 分叉和逆 Hopf 分叉, 形成危险的自激振动。这时, 转子只能工作在 $0 \leq \omega < \omega_1$ 。

控制这类 Hopf 分叉的基本思想是: 在转子启动过程中实时调节控制参数 p , 使转子在转速接近 ω_1 和 ω_2 时 $p \neq p_0$, 破坏分叉条件; 而当转速达到 ω_s 时仍保持为 $p = p_0$, 使转子具有所期望的动力学行为。Czolczynski 等研究了用该方法控制一个具有空气轴承的刚性转子的 Hopf 分叉^[21]。他们在轴瓦与支座间加入一可实时调节间隙的压缩空气环, 由此改变转子的支撑刚度。经过大量计算, 确定了节流孔径对转子发生分叉的影响, 然后在启动过程中实时控制节流孔径, 使转子非常安全地通过了危险转速区 $[\omega_1, \omega_2]$ 。

这种控制思想可推广到许多机械系统的动力学过程控制。使用中的主要困难是: 要通过大量数值计算事先深入了解非线性系统的瞬态过程。

6.7 周期运动的分叉

考察含单一参数的 n 维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, p), \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^n, \quad p \in P \subseteq R^1 \quad (6.7.1)$$

设 Γ 是该系统的闭轨, 其周期为 T 。本节将以 Poincaré 映射为工具, 研究闭轨 Γ 随参数 p 变化发生的分叉。

给定参数 p , 任取 $\mathbf{u}_p \in \Gamma$ 作 $n-1$ 维 Poincaré 截面, 将相应的 $n-1$ 维 Poincaré 映射 $\mathbf{P}(\mathbf{u}, p)$ 在其不动点 \mathbf{u}_p 展开

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{u}, p) &= \mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p) + \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + O(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|^2) \\ &= \mathbf{u}_p + \mathbf{A}(p)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + O(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|^2) \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

其中

$$\mathbf{A}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p) \in R^{(n-1) \times (n-1)} \quad (6.7.3)$$

记 $\mathbf{A}(p)$ 的特征值为 $\lambda_r(p), r=1, 2, \dots, n-1$ 。如果不动点 \mathbf{u}_p 是渐近稳定的, 则有 $|\lambda_r(p)| < 1$,

$r=1,2,\dots,n-1$ 。若随着参数 p 的变化,某一特征值的模出现 $|\lambda_r(p_0)|=1$, 进而出现 $|\lambda_r(p)|>1$, 则不动点 u_p 变为不稳定。参考图 6.7.1 所示复平面, 上述过程意味着某一特征值 λ_r 随参数 p 变化从单位圆内移到圆外。这共有三种可能性, 对应着如下三种分叉。

(1) **静态分叉**: 有某一实特征值满足

$$\lambda_r(p_0)=1;$$

(2) **倍周期分叉**: 有某一实特征值满足

$$\lambda_r(p_0)=-1;$$

(3) **Naimark-Sacker 分叉**: 有一对共轭复特征值满足 $\lambda_r(p_0)\bar{\lambda}_r(p_0)=1$ 。

现对这三种分叉逐一进行讨论。不失一般性, 可取 $p_0=0$ 且 $u_p(0)=0$ 。

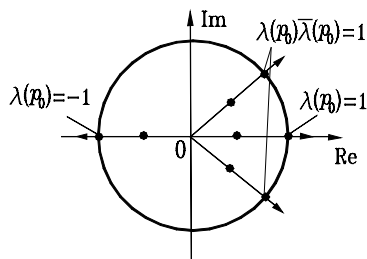


图 6.7.1 特征值模为 1 的三种方式

6.7.1 静态分叉

引入非线性代数方程

$$Q(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} P(u, p) - u = 0 \quad (6.7.4)$$

显然, Poincaré 映射 $P(u, 0)$ 的不动点 $u_p(0)=0$ 正是该方程的根

$$Q(0, 0) = P(0, 0) - 0 = 0 \quad (6.7.5)$$

而根据

$$B(p) \stackrel{\text{def}}{=} D_u Q(u_p, p) = A(p) - I \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)} \quad (6.7.6)$$

不难证明如下等价关系:

- (1) 矩阵 $r=0$ 有一特征值满足 $\lambda_r(0)=1$, 而其他特征值满足 $|\lambda_s(0)|<1, s \neq r$;
- (2) 矩阵 $B(0)$ 有一零特征值, 而其他特征值具有负实部;
- (3) 非线性方程(6.7.4)具有奇异点 $(0,0)$ 。

根据 6.5 节的分析, Poincaré 映射的不动点 u_p 会随着参数 p 的变化在 $p=0$ 处产生静态分叉, 相应的周期运动也产生静态分叉。静态分叉的种类可以是鞍结分叉, 跨临界分叉, 叉形分叉等, 取决于 Poincaré 映射高阶导算子在奇异点 $(0,0)$ 的值。

周期运动静态分叉的一个典型实例是简谐激励下 Duffing 振子主共振的跳跃现象。以对刚度硬化振子的正向扫频激励为例, 系统的一个稳定周期运动和一个不稳定周期运动会逐渐靠近, 并突然一起消失, 形成鞍结分叉。由于在它们附近不存在其它的周期运动, 系统被迫跳跃到远离它们的另一稳定周期运动上。

6.7.2 倍周期分叉

首先, 将映射投影到以 $\lambda_r(0)$ 的特征向量为切向量的一维中心流形上。以 v 作为新的空间坐标, 得到一维映射

$$v \rightarrow g(v, p) = \lambda_r(p)v + a_2(p)v^2 + a_3(p)v^3 + \dots \quad (6.7.7)$$

考虑复合映射

$$\begin{aligned} g^2(v, p) &= \lambda_r g(v, p) + a_2 g(v, p) + a_3 g(v, p) + \dots \\ &= \lambda_r (\lambda_r v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots) + a_2 (\lambda_r v + a_2 v^2 + \dots)^2 + a_3 (\lambda_r v + \dots)^3 + \dots \quad (6.7.8) \\ &= \lambda_r^2 v + a_2 \lambda_r (1 + \lambda_r) v^2 + 2\lambda_r (a_3 + a_2^2) v^3 + \dots \end{aligned}$$

构造一维非线性代数方程

$$\begin{aligned} h(v, p) &\stackrel{\text{def}}{=} g^2(v, p) - v \\ &= (\lambda_r^2 - 1)v + a_2 \lambda_r (1 + \lambda_r) v^2 + 2\lambda_r (a_3 + a_2^2) v^3 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

注意到 $\lambda_r(0) = -1$ ，不难证明 $(0, 0)$ 满足该方程奇异点的必要条件

$$h(0, 0) = 0, \quad h_v(0, 0) = \lambda_r^2(0) - 1 = 0 \quad (6.7.10)$$

同时还满足叉型分叉的限定条件

$$h_p(0, 0) = 0, \quad h_{vv}(0, 0) = 2a_2(0)\lambda_r(0)[1 + \lambda_r(0)] = 0 \quad (6.7.11)$$

叉型分叉的非退化条件是

$$\begin{cases} h_{vp}(0, 0) = -2\lambda_r'(0) \neq 0 \\ h_{vvv}^2(0, 0) = -12[a_3(0) + a_2^2(0)] \neq 0 \end{cases} \quad (6.7.12)$$

而超临界叉型分叉的条件是

$$h_{vp}(0, 0)g_{vv}^2(0, 0) = 24\lambda_r'(0)[a_3(0) + a_2^2(0)] < 0 \quad (6.7.13)$$

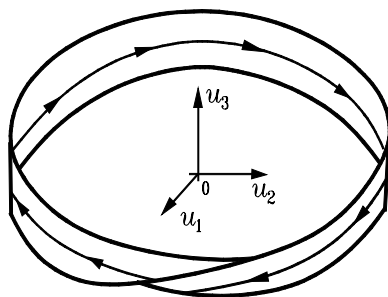
其中条件 $\lambda_r'(0) \neq 0$ 表明：当参数 p 在 $p = 0$ 附近变化时，特征值 $\lambda_r(p)$ 与单位圆在 -1 处是横截相交的。

上述分析表明：

(1) 一维代数方程(6.7.9)的零解在 $p = 0$ 时失稳，这等价于一维映射 $g(v, p)$ 的不动点 $v = 0$ 失稳，即系统的闭轨 Γ 失稳。

(2) 若条件(6.7.13)满足，则方程(6.7.9)的零解在 $p = 0$ 经历超临界叉型分叉，然后出现一对渐近稳定的非零平衡点；这等价于复合映射 $g^2(v, p)$ 具有了一对渐近稳定的非零不动点，即系统具有一对渐近稳定的、有别于原闭轨的倍周期闭轨。

基于上述原因，人们称闭轨的这种分叉为**倍周期分叉**。参考图 6.7.2，产生倍周期分叉时，闭轨 Γ 所具有的中心流形是一 Möbius 带，新产生的倍周期闭轨在其上旋转两圈方可首次返回 Poincaré 截面 Σ 。由于 Möbius 带是三维空间中扭曲的二维曲面，这要求倍周期闭轨 Γ 位于三维空间，故二维自治系统的闭轨不会产生倍周期分叉。跨过临界状态后，随着参数 p 的进一步变化，Möbius 带变为具有厚度的三维稳定流形，在



Poincaré 截面 Σ 上出现一对倍周期点，其距离随着 $|p|$ 的增加而递增。

图 6.7.2 Möbius 带上的倍周期轨道

6.7.3 Naimark-Sacker 分叉*

先考察特殊情况

$$\lambda_r^m(0) = 1, \quad m \text{ 为正整数} \quad (6.7.14)$$

显然， $m=1$ 和 $m=2$ 对应于前面讨论的两种分叉。当 $m=3$ 和 $m=4$ 时，只要满足一定的非退化条件，闭轨 Γ 会产生 3 倍或 4 倍周期分叉，其分析类似于倍周期分叉情况。Iooss 证明，对于 $m \geq 5$ 的整数，产生 m 倍周期分叉需要满足极为苛刻的条件^[22]。因此，通常将由 $m \leq 4$ 时分叉产生的周期运动（亚谐共振）作为强共振， $m \geq 5$ 时则作为弱共振。

以下研究 $m \neq 1, 2, 3, 4$ 的一般情况。由于有一对复特征值落在单位圆上，故 Poincaré 映射在不动点 u_p 处具有二维中心流形。将 Poincaré 映射 $P(u, p)$ 投影到该中心流形上，得到二维 Poincaré 映射

$$v \rightarrow g(v, p), \quad v \in R^2, \quad p \in R^1 \quad (6.7.15)$$

它满足 $g(0, 0) = 0$ ，并且其 Jacobi 矩阵 $Dg(0, 0)$ 具有一对模为 1 的共轭复特征值

$$\lambda_r(0)\bar{\lambda}_r(0) = 1 \quad (6.7.16)$$

类似于 6.6 节对二维向量函数 $f(u, p)$ 在 Hopf 分叉条件下规范型的研究，可导出二维映射 $g(v, p)$ 在条件(6.7.16)下复数形式的规范型

$$z \rightarrow h(z, p) = \lambda_r(p)z + \gamma(p)z^2\bar{z} + \dots, \quad z, \gamma, \lambda_r \in C^1, \quad p \in R^1 \quad (6.7.17)$$

通过极坐标变换

$$z = re^{2\pi i\theta} \quad (6.7.18)$$

得到实数形式的规范型

$$\begin{cases} r \rightarrow h_1(r, p) = |\lambda_r(p)| \{r + \operatorname{Re}[\frac{\gamma(p)}{\lambda_r(p)}]r^3 + \dots\} \\ \theta \rightarrow h_2(r, \theta, p) = \theta + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[\gamma(p)]}{\operatorname{Re}[\gamma(p)]} \right\} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}[\frac{\gamma(p)}{\lambda_r(p)}]r^2 + \dots \end{cases} \quad (6.7.19)$$

将上式在 $p=0$ 处作 Taylor 展开，则有

$$r \rightarrow h_1(r, p) = r + cpr + ar^3 + O(pr^2, pr^3, r^4) \quad (6.7.20a)$$

$$\theta \rightarrow h_2(r, \theta, p) = \theta + \varphi_0 + p\varphi_1 + br^2 + O(p^2, pr^2, r^3) \quad (6.7.20b)$$

其中

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}[\frac{\gamma(0)}{\lambda_r(0)}], \quad b = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}[\frac{\gamma(0)}{\lambda_r(0)}], \quad c = [\frac{d}{dp} |\lambda_r(p)|]_{p=0} \\ \varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[\gamma(0)]}{\operatorname{Re}[\gamma(0)]} \right\}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dp} \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[\gamma(p)]}{\operatorname{Re}[\gamma(p)]} \right\}_{p=0} \end{cases} \quad (6.7.21)$$

该二维映射的一个重要特点是：关于 r 的映射 $h_1(r, p)$ 是与 θ 无关的一维映射。因此， $h_1(r, p)$ 将是讨论的重点。

易见， $r=0$ 是映射(6.7.20a)的不动点，它对应于原系统的闭轨 Γ 。不难看出，当 $cp < 0$ 时， $r=0$ （即 Γ ）渐近稳定； $cp > 0$ 时或 $p=0$ 且 $a=0$ 时， $r=0$ （即 Γ ）不稳定。

当 $acp < 0$ 时，极坐标平面上的圆

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \theta) | r = \sqrt{-cp/a}, \theta \in [0, 2\pi)\} \quad (6.7.22)$$

是映射(6.7.20)的不变集。它代表了 Poincaré 截面上的一条闭曲线。不难想象，这是系统相轨线穿越 Poincaré 截面时留下的痕迹。当 Poincaré 截面沿闭轨 Γ 旋转一圈，则该闭曲线在 R^n 形成 $n-1$ 维的环面。因此，系统相轨线在图 6.7.3 所示的环面上缠绕，称作**环面运动**。当 m 等于无理数时，沿环面的运动不再具有周期性，这种运动又称作**概周期运动**。

将 $r = \sqrt{-cp/a}$ 作为映射(6.7.20a)的不动点，不难证明，当 $cp > 0$ 时圆 S （即环面运动）是稳定的，而 $cp < 0$ 时是不稳定的。即环面运动与闭轨 Γ 的稳定性相反。

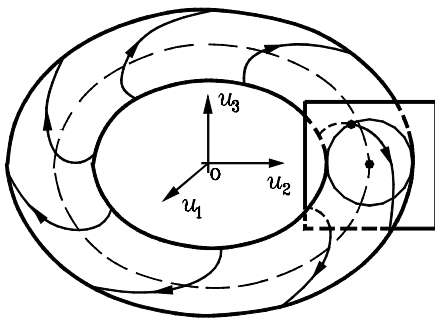


图 6.7.3 不稳定闭轨与稳定环面运动并存

归纳上述分析，可列出如下四种情况。

(1) $a < 0$ 且 $c > 0$ ： $c > 0$ 表明特征值 $\lambda_r(p)$ 和 $\bar{\lambda}_r(p)$ 随着 p 增加由单位圆内穿出。当 $p < 0$ 时，不动点 $r=0$ 渐近稳定，闭轨 Γ 保持渐近稳定。当 $p > 0$ 时， $r=0$ 失稳， Γ 亦失稳；此时随着 p 的增加，在 Poincaré 截面上出现半径逐渐增加的、渐近稳定的圆 S ，即系统产生了振幅随着 p 增加的、渐近稳定的环面运动。这种现象称为 **Naimark-Sacker 分叉**。如果观察相轨线的 Poincaré 截面，这种分叉与图 6.6.1 中的 Hopf 分叉相似。因此，通常不严格地称这种分叉为**周期运动的 Hopf 分叉**。如果系统的闭轨 Γ 来源于 Hopf 分叉，则称这种分叉为**二次 Hopf 分叉**。

(2) $a > 0$ 且 $c > 0$ ：当 $p < 0$ 时， $r=0$ 渐近稳定， Γ 保持渐近稳定；此时 S 存在，但不稳定，即存在不稳定的环面运动。当 $p > 0$ 时， $r=0$ 失稳，闭轨 Γ 亦如此。

(3) $a < 0$ 且 $c < 0$ ，当 $p < 0$ 时，闭轨 Γ 不稳定，但此时存在渐近稳定的环面运动。随着 p 增加，环面运动的振幅不断减小。当 $p > 0$ 时，环面运动消失，闭轨 Γ 变为渐近稳定的。

(4) $a > 0$ 且 $c < 0$ ，当 $p < 0$ 时，闭轨 Γ 不稳定。当 $p > 0$ 时，闭轨 Γ 渐近稳定，伴随有不稳定的环面运动。

例 6.7.1 考察单自由度受迫振动系统

$$\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + g(u(t), p) = f(t), \quad u \in R^1, \quad p \in R^1 \quad (a)$$

其中 $c > 0$ ，激励 $f(t)$ 以 $T_0 > 0$ 为周期。设系统有一以 $T = mT_0$ 为周期的闭轨 Γ ，试证其不可能发生 Naimark-Sacker 分叉。

证明：将方程(a)写作二维相空间中的非自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -g(u_1, p) - cu_2 + f(u_3) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{u}, t, p) \quad (b)$$

根据例 6.4.4 构造 Poincaré 截面

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{u}, t) | t = \text{mod}(T)\} \quad (c)$$

记 Σ 上的 Poincaré 映射为 $\mathbf{P}(\mathbf{u}, p)$ ， Γ 与 Σ 的交点为 $\mathbf{u}_p(p)$ ，自该点出发的闭轨为 $\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p, p)$ 。

因此，显然有

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p) = \boldsymbol{\varphi}_T(\mathbf{u}_p, p) = \mathbf{u}_p(p) \in \Sigma \quad (d)$$

根据定理 6.4.7 的证明过程，Poincaré 映射在不动点 $\mathbf{u}_p(p)$ 处的 Jacobi 矩阵满足

$$\mathbf{D}_u \mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_T(\mathbf{u}_p, p) \quad (e)$$

这说明，它是如下周期系数线性微分方程初值问题的解矩阵 $\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p)$ 在 T 时刻的值

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p, p) = \mathbf{D} \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p, p)) \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p, p) = \mathbf{A}(t, p) \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{u}_p, p) \\ \mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{u}_p, p) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (f)$$

其中

$$\mathbf{A}(t, p) = \mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}, t, p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_1(u_1, p) & -c \end{bmatrix}, \quad g_1(u_1, p) = \frac{\partial g(u_1, p)}{\partial u_1} \quad (g)$$

根据线性微分方程理论的 Liouville 公式

$$\det[\mathbf{D}_u \mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p)] = \det[\mathbf{D} \boldsymbol{\varphi}_T(\mathbf{u}_p, p)] = \exp\left[\int_0^T \text{tr} \mathbf{A}(t, p) dt\right] = e^{-cT} \quad (h)$$

因此，对于任意的参数 p ， $\mathbf{D}_u \mathbf{P}(\mathbf{u}_p, p)$ 的两个特征值 $\lambda_1(p)$ 和 $\lambda_2(p)$ 总满足

$$0 < \lambda_1(p) \lambda_2(p) = e^{-cT} < 1 \quad (i)$$

这说明，Naimark-Sacker 分叉的必要条件 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ 不可能满足。证毕。

例 6.7.2 仍考察单自由度受迫振动系统

$$\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + g(u(t), p) = f(t), \quad u \in R^1, \quad p \in R^1 \quad (a)$$

其中 $c > 0$ ，弹性恢复力和周期激励具有如下对称性

$$g(-u, p) = -g(u, p), \quad \forall (u, p) \in R^2, \quad f(t + T_0/2) = -f(t), \quad \forall t \in R^1 \quad (b)$$

设系统有一以 $T = mT_0$ 为周期的闭轨 $u(t)$ 满足对称性条件

$$u(t + T/2) = -u(t), \quad \forall t \in R^1, \quad T = mT_0 \quad (c)$$

试证对于任意的参数 p , $u(t)$ 不可能发生倍周期分叉。

证明: 根据方程(a), 对周期闭轨 $u(t)$ 的微扰动 $\Delta u(t)$ 满足

$$\Delta \ddot{u}(t) + c \Delta \dot{u}(t) + k(t, p) \Delta u(t) = 0 \quad (d)$$

其中

$$k(t, p) = \frac{\partial g(u(t), p)}{\partial u} \quad (e)$$

根据定理 6.4.7, 系统 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵是方程(d)的单值矩阵 $\Phi(T)$, 且 $\Phi(0) = I$ 。注意到条件(c)及奇函数的导数为偶函数, 不难验证方程(d)的刚度系数以 $T/2$ 为周期

$$k\left(t + \frac{T}{2}, p\right) = \frac{\partial g(u(t+T/2), p)}{\partial u} = \frac{\partial g(-u(t), p)}{\partial u} = \frac{\partial g(u(t), p)}{\partial u} = k(t, p) \quad (f)$$

因此, 方程(d)具有单值矩阵 $\Psi(T/2)$ 。根据 4.6 节的 Floquet 理论

$$\Phi(T) = \Psi\left(\frac{T}{2}\right) \Psi\left(\frac{T}{2}\right) = \Psi^2\left(\frac{T}{2}\right) \quad (g)$$

矩阵 $\Phi(T)$ 的特征值 $\lambda_k(p)$ 与 $\Psi(T/2)$ 的特征值 $\mu_k(p)$ 间具有关系

$$\lambda_k(p) = \mu_k^2(p), \quad k=1, 2 \quad (h)$$

若有 $\lambda_1(p) = -1$, 则 $\mu_1(p) = \pm i$ 。根据共轭关系, $\mu_2(p) = \mp i$, 从而 $\lambda_2(p) = -1$ 。这与上例中式(i)相矛盾。因此, 对任意的参数 p , 恒有 $\lambda_k(p) \neq -1, k=1, 2$ 。证毕。

根据例 6.7.1 和 6.7.2, 该系统对称闭轨的分叉种类只剩下静态分叉, 作者在文献[23]中已进一步证明, 跨临界分叉也不会发生, 最可能发生的分叉是鞍结分叉和叉型分叉。经过鞍结分叉后, 对称闭轨突然消失。而经过叉型分叉后, 原来渐近稳定的对称闭轨失稳, 新产生一对非对称的同周期闭轨。这种现象被称作**对称破缺**。这时若继续改变系统参数, 非对称闭轨就可能产生倍周期分叉了。

最后需要指出, 本章所讨论的各种分叉都限于平衡点或闭轨附近, 并没有大范围改变系统的向量场指向。正因为如此, 才能根据奇异性理论这种局部数学分析工具对分叉进行分类和讨论。因此, 可将这种分叉称作**局部分叉**。自然, **全局分叉**则指分叉引起了系统向量场大范围的变化。全局分叉的分析已超出了本书预定范围, 建议读者见文献[24]。

习 题

1 判断下列函数的定号性

$$(1) V(u_1, u_2, u_3) = -(u_1 - u_2)^2 - (u_2 - u_3)^2 - (u_3 - u_1)^2$$

$$(2) V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + (u_2 + u_3)^2$$

$$(3) \quad V(u_1, u_2, u_3, t) = \frac{2+t}{1+t} u_1^2 + (2 + \sin t) u_2^2 + (1 + e^{-t}) u_3^2$$

$$(4) \quad V(u_1, u_2, u_3, t) = -(1 + \sin t) u_1^2 - u_2^2 - e^{-t} u_3^2$$

$$(5) \quad V(u_1, u_2, u_3, t) = (1 + 2 \sin t) u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

2 研究下列系统零解的稳定性

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = \tan(u_2 - u_1) \\ \dot{u}_2 = 2^{u_2} - 2 \cos(\frac{\pi}{3} - u_1) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = \ln(e^{-3u_1} + 4u_2) \\ \dot{u}_2 = \sqrt[3]{1 - 6u_1 + 2u_2} - 1 \end{cases}$$

3 研究系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 2u_1 - 5u_2 - 7u_1^2 \\ \dot{u}_2 = 3u_1 - 6u_2 - 9u_2^2 \end{cases}$$

在平衡点 (1, -1) 处的稳定性。

4 判断下列函数是否具有无穷小上界

$$(1) \quad V(u_1, u_2, t) = (1 + \cos t) u_1^2 + \sin(u_2 t)$$

$$(2) \quad V(u_1, u_2, t) = t u_1^2 + u_2^2 \sin t$$

$$(3) \quad V(u_1, u_2, t) = \frac{1}{1+t} u_1^2 + (1 + e^{-t}) u_2^2$$

5 对于二维非自治系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -e^{-2t} u_1 - (4 + \sin t) u_2 \\ \dot{u}_2 = (1 + e^{-2t}) u_1 - \frac{1}{4 + \sin t} u_2 \end{cases}$$

构造

$$V(u_1, u_2, t) = (1 + e^{-2t}) u_1^2 + (4 + \sin t) u_2^2$$

作为 Lyapunov 函数, 判断系统零解的稳定性。

6 考察方程

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \omega \\ \dot{u}_2 = -k^2 \sin u_1 - 2n\omega \end{cases}$$

其中 n 为正整数。试构造 Lyapunov 函数判断方程零解的稳定性。

7 对于二维自治系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 + p_1(u_1, u_2) \\ \dot{u}_2 = u_1 + p_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

计算其三阶截断 PB 规范型。

8 考察二维系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 + (1 - u_1^2 - u_2^2)u_1 \\ \dot{u}_2 = u_1 + (1 - u_1^2 - u_2^2)u_2 \end{cases}$$

试证: (1) 系统具有唯一闭轨 Γ ; (2) Γ 是一个周期吸引子。

9 考虑一维映射

$$v \rightarrow g(v, p) = av + bv^2 + cv^3$$

分别研究当 $|a| < 1$, $|a| = 1$ 和 $|a| > 1$ 时原点的稳定性。

10 判断参数 $p \in R^1$ 在 origin 附近变化时, 下述一维系统平衡点的分叉

(1) $\dot{u} = p - u^2$;

(2) $\dot{u} = pu - u^2 + u^3$;

(3) $\dot{u} = p^2 u - u^3$ 。

11 给定含参数 $p \in R^1$ 的二维系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = pu_1 - u_1^2 \\ \dot{u}_2 = -u_2 + u_1^2 \end{cases}$$

用 L-S 方法讨论参数 p 在 origin 附近变化时系统平衡点的分叉。

12 对于题 11 中系统

(1) 求系统在 origin $(0,0)$ 处的局部中心流形;

(2) 给出限制在中心流形上的系统分叉图。

13 考察参数 $p \in R^1$ 在 origin 附近变化时下列二维系统的相图, 并考虑能否用定理 6.6.1 解释相图的变化:

(1) $\begin{cases} \dot{r} = -r(r+p)^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{r} = -r(p-r^2)(2p-r^2)^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{r} = -r(r+p)(r-p) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dot{r} = pr(r+p)^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

14 构思一个含单参数的二维映射, 使其具有倍周期分叉。

15 对于二维含参数映射 $v \rightarrow g(v, p)$, $v \in R^2$, $p \in R^1$, 证明它在 Naimark-Sacker 分叉条件下的复规范型为

$$z \rightarrow h(z, p) = \lambda_r(p)z + \gamma(p)z^2\bar{z} + \cdots, \quad z, \gamma, \lambda_r \in C^1, \quad p \in R^1$$

第 7 章 混沌运动与控制

从 Newton 时代起人们就坚信：如果对一个确定性动力系统施加确定性的输入，该系统的输出必然具有确定性。这就是 Laplace 提炼出的确定论思想。对于线性系统，这一结论正确无疑。对于非线性系统，则不然。系统可能发生一种无法精确重复的、貌似随机的所谓混沌运动。本章先扼要介绍混沌运动及其起因，然后阐述混沌的控制方法。

7.1 混沌现象

历史上，人们对确定论的否定经历了一个比较漫长、曲折的过程。早在 1892 年，法国学者 Poincaré 在研究三体问题时就发现，系统在某类鞍型不动点附近具有不寻常的运动。1954 年，前苏联学者 Kolmogorov 猜测，近可积保守系统会具有非常复杂的相轨线结构。1962 年到 1963 年期间，前苏联学者 Arnold 和 Morser 证明了 Kolmogorov 的猜想，这就是著名的 KAM 定理。这些数学家的研究成果非常抽象，未能引起科学界的广泛注意。

1963 年，美国数学家 Lorenz 在研究由气象预报抽象出的 Benard 对流问题时，采用数值积分方法计算了如下三维自治系统的初值问题

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1 u_3 \\ u_1 u_2 \end{bmatrix} \quad (7.1.1)$$

他发现，若取系统参数为

$$\alpha = 10, \quad \beta = \frac{8}{3}, \quad \gamma = 28 \quad (7.1.2)$$

则系统自任意初始状态出发的相轨线呈图 7.1.1 所示的蝴蝶形态，但既无规则，又不重复。这就是典型的**混沌运动**。由于该系统具有确定性，所以这种混沌运动并非随机运动。

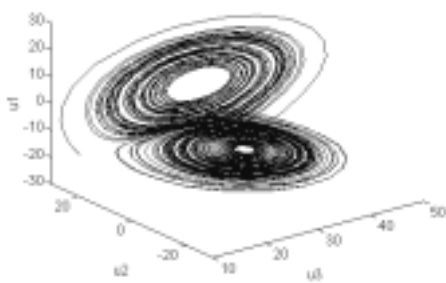


图 7.1.1 Lorenz 系统的相轨线

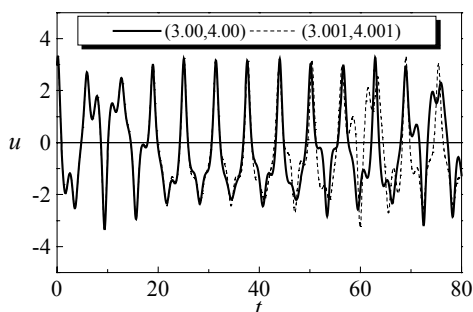


图 7.1.2 Duffing 系统的混沌运动

为了解混沌运动，考察一个读者所熟悉的、受简谐激励的有阻尼 Duffing 系统

$$\ddot{u} + 0.05\dot{u} + u^3 = 7.5 \cos t \quad (7.1.3)$$

观察它从两组非常相近的初始状态

$$u(0) = 3.000, \quad \dot{u}(0) = 4.000 \quad (7.1.4a)$$

$$u(0) = 3.001, \quad \dot{u}(0) = 4.001 \quad (7.1.4b)$$

出发的振动。采用 8.1 节中的 Runge-Kutta 方法，得到图 7.1.2 所示的系统位移时间历程。易见：系统状态在初始时刻的微小差异会随时间增加迅速扩大，但系统运动仍保持有界，进入稳态后的运动杂乱无章，没有周期。有趣的是，即使将两组初始条件的差异缩小到 10^{-15} ，这种现象依然存在。这说明，虽然方程(7.1.3)描述一确定性动力学系统，但该系统对初始条件异常敏感，采用有限字长的计算机无法得到可重复的长时间位移历程。这并不是计算方法出了问题。日本学者 Ueda 曾用电路模拟过该系统，发现系统的输出貌似随机，永不重复。这种非线性动力系统特有的运动称为混沌运动，简称**混沌**。它的基本特征是：

- (1) 高度依赖于初始条件，从而实际不可重复；
- (2) 局部不稳定（一般呈指数型发散），但总体是有界的；
- (3) 无周期、无序。

最近 20 多年，人们对混沌进行了大量的研究。但迄今为止，尚未形成对混沌的严格数学定义。通常，可将上述特征作为鉴别混沌运动的标志。

混沌现象表明，在确定性现象和随机现象之间还存在着某些复杂现象。这可以解释许多过去人们迷惑的问题。因此，混沌与相对论、量子力学被誉为 20 世纪物理学的三大发现。自 20 世纪 80 年代起，对混沌现象的研究促使非线性科学成为一个蓬勃发展的重要学科。对混沌的研究兴趣已从数学家和物理学家扩散到力学家、经济学家、生物学家乃至医学家，对各类非线性系统混沌现象的报道和研究构成了浩瀚的文献。例如，1990 年，郝柏林编著的《Chaos II》列出了 117 本专著和教材，2244 篇论文。1991 年，Zhang S. Y. 归纳的《Bibliography on Chaos》中则有 7000 多篇文献。随着研究的深入，对文献的归纳不得不进行分类。近年来，在国际互联网上已相继出现了许多有关混沌研究文献的站点。

20 世纪 90 年代以来，不少从事应用的研究人员开始探索如何利用混沌现象造福于人类。目前，已在提高振动机械效率、加速化工过程、改善保密通信等方面取得了初步成果，向人们展示了混沌现象美好的应用前景。

7.2 离散动力系统的混沌

根据 6.4 节中的定义，离散动力系统是一映射序列，它远比用常微分方程描述的连续动力系统要简单。因此，人们通常从离散动力系统开始讨论混沌。本节先以一维映射为例，直观介绍混沌现象。然后，通过二维马蹄映射说明混沌的内在本质。

7.2.1 一维映射的混沌

含参数 p 的 **Logistic 映射**是目前已研究比较透彻的一维离散动力系统，它定义为

$$u_{r+1} = f(u_r, p) \stackrel{\text{def}}{=} pu_r(1-u_r), \quad u_r \in [0,1], \quad p \in [0, 4], \quad r = 0,1,2,\dots \quad (7.2.1)$$

该映射可作为描述生物繁殖的数学模型。下面将从一次映射开始，逐次讨论其不动点及其稳定性。

(1) 一次映射

一次映射的不动点 u_F 满足方程

$$f(u_F, p) - u_F = pu_F(1-u_F) - u_F = 0 \quad (7.2.2)$$

解得

$$\begin{cases} u_{F_1} = 0 \\ u_{F_2} = 1 - \frac{1}{p} \in [0, 1], \quad p \geq 1 \end{cases} \quad (7.2.3)$$

根据

$$\left. \frac{\partial f(u, p)}{\partial u} \right|_{u=u_F} = p(1-2u_F) \quad (7.2.4)$$

和式(7.2.3)得

$$\left. \frac{\partial f(u, p)}{\partial u} \right|_{u=u_{F_1}} = p, \quad \left. \frac{\partial f(u, p)}{\partial u} \right|_{u=u_{F_2}} = 2-p \quad (7.2.5)$$

根据 6.5 节和 6.7 节的讨论，不难得到如下结论：

- 当 $p \in [0, 1)$ 时，映射(7.2.1)有唯一稳定不动点 u_{F_1} ；
- 当 $p = p_0 = 1$ 时，不动点 u_{F_1} 经过跨临界分叉失稳， u_{F_2} 成为稳定不动点；
- 当 $p \in (1, 3)$ 时，映射(7.2.1)有不稳定不动点 u_{F_1} 和稳定不动点 u_{F_2} ；
- 当 $p = p_1 = 3$ 时，不动点 u_{F_2} 经倍周期分叉失稳，映射(7.2.1)将有一对周期 2 不动点。

(2) 二次映射

周期 2 不动点满足

$$\begin{aligned} f^2(u_F, p) - u_F &= pf(u_F, p)[1 - f(u_F, p)] - u_F \\ &= p^2 u_F(1-u_F)[1 - pu_F(1-u_F)] - u_F = 0 \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

对上式分解因式，得到

$$u_F[(p-1) - pu_F][p^2 u_F^2 - p(p+1)u_F + (p+1)] = 0 \quad (7.2.7)$$

由此得到 4 个不动点

$$\begin{cases} u_{F_1} = 0 \\ u_{F_2} = 1 - \frac{1}{p} \\ u_{F_{3,4}} = 1 + p \mp \frac{1}{2p} \sqrt{(p+1)(p-3)} \end{cases} \quad (7.2.8)$$

根据二次映射在不动点处关于 u 的偏导数可证明:

- a. 当 $p \in (3, 1 + \sqrt{6})$ 时, 不动点 u_{F_1} 和 u_{F_2} 不稳定, 而 u_{F_3} 和 u_{F_4} 是稳定的周期 2 不动点;
- b. 当 $p = p_2 = 1 + \sqrt{6}$ 时, u_{F_3} 和 u_{F_4} 经倍周期分叉失稳, 映射(7.2.1)有两对周期 4 不动点。

(3) 第 n 次映射

不难用数学归纳法验证:

- a. 当 $p \in (p_{m-1}, p_m)$ 时, 第 n 次映射

$$u_{r+n} = f^n(u_r, p), \quad n = 2^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.2.9)$$

具有 2^m 个 n 周期不动点, 其中 2^{m-1} 个是稳定的, 另外 2^{m-1} 个是不稳定的。

- b. 当 $p = p_m$ 时, 2^{m-1} 个稳定的 n 周期不动点发生倍周期分叉, 映射(7.2.1)有 2^m 个 $2n$ 周期不动点。

(4) 无限次映射

随着 n 的增加, 映射(7.2.1)具有无限个如此重复的自相似结构, 如图 7.2.1 所示。1978 年, Grossman 和 Feigenbaum 发现

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} p_m = p_\infty = 3.569945672 \dots \quad (7.2.10)$$

此时, 不动点的周期 $2^m \rightarrow +\infty$, 即映射点不再具有周期, 在区间 $[0, 1]$ 内发生无规则的游荡。这就是一维 Logistic 映射的混沌现象。此外, 存在一普适常数

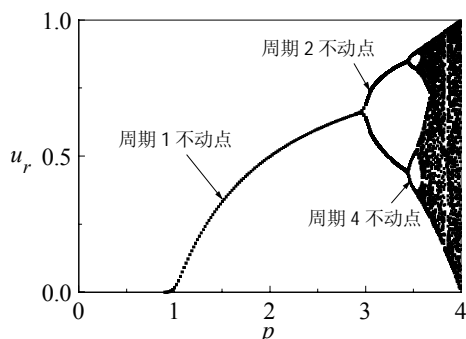


图 7.2.1 Logistic 映射不动点的倍周期分叉序列

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_m = \frac{p_m - p_{m-1}}{p_{m+1} - p_m} = \delta = 4.6692016091029909 \dots \quad (7.2.11)$$

美国学者李天岩和 Yorke 在 1975 年指出: “周期 3 意味着混沌”, 即

- a. 当 $p \in [p_\infty, 4]$ 时, 映射(7.2.1)具有非常复杂的结构。随着参数 p 的变化, 除了混沌区外尚有一些稳定周期不动点的窗口, 最宽的窗口对应于周期 3。

- b. 在稳定周期 3 窗口中, 映射具有其他任意周期的不动点, 这些不动点都是不稳定的。

(5) 一般情况

事实上, 前苏联学者 Sarkovskii 早在 1964 年就证明: 一维映射

$$u_{r+1} = pf(u_r) \quad (7.2.12)$$

不动点周期出现的次序为

$$1, 2, 4, 8, \dots; \dots; \dots \times 2^2, 5 \times 2^2, 3 \times 2^2, \dots, 7 \times 2, 5 \times 2, 3 \times 2, \dots, 7, 5, 3 \quad (7.2.13)$$

即周期 3 最后出现。因此, 李天岩和 York 的发现是 **Sarkovskii 定理** 的特款。

一般地, 若含参数的一维映射在某闭区间内具有单一极值, 则该映射通常会发生混沌。例如, 当参数 p 由 2 逐渐减小时, 单峰映射序列

$$u_{r+1} = u_r^2 + p, \quad u_0 = 0, \quad p \in [-2, 2] \quad (7.2.14)$$

会经过倍周期分叉进入混沌。重复的倍周期分叉是动力系统由周期运动向混沌运动过渡的一种常见道路。

7.2.2 高维映射的混沌

(1) Smale 马蹄映射

马蹄映射是美国学者 Smale 在 1963 年构造的一个分段线性二维映射，它具有典型的混沌行为。记 $S = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ， S 上的 **Smale 马蹄映射** $f: S \rightarrow S$ 按如下规则来定义：将 S 拉伸为长和宽分别为 μ 和 λ 的矩形，再将其折叠成马蹄状放置在 S 上，取其与 S 的重叠部分记作 V_1 和 V_2 。然后，像制作拉面一样重复上述过程。

根据上述定义和图 7.2.2 不难看出

$$\begin{cases} S \cap f(S) = V_1 \cup V_2 \\ V_i = f(H_i) \rightarrow H_i = f^{-1}(V_i) \end{cases} \quad (7.2.15)$$

$$\begin{cases} S \cap f(S) \cap f^2(S) = V_{11} \cup V_{21} \cup V_{22} \cup V_{12} \\ V_{ij} = f^2(H_{ij}) \rightarrow H_{ij} = f^{-2}(V_{ij}) \end{cases} \quad (7.2.16)$$

一般地， $\bigcap_{r=0}^n f^r(S)$ 是 2^n 条宽 λ^n 的垂直带的集合； $\bigcap_{r=0}^n f^{-r}(S)$ 是 2^n 条宽 $(1/\mu)^n$ 的水平带的集合； $\bigcap_{r=0}^n f^r(S)$ 是 4^n 个面积为 $(\lambda/\mu)^n$ 的矩形的集合。显然，马蹄映射具有**不变集**

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{r=-\infty}^{+\infty} f^r(S) \quad (7.2.17)$$

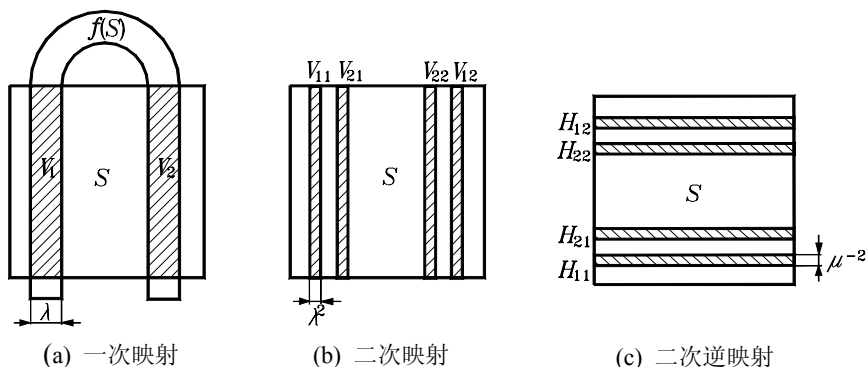


图 7.2.2 Smale 马蹄映射示意

定理 7.2.1^[25]: 马蹄映射的不变集 A 具有如下性质:

- A 中有 $f(S)$ 的可列个任意周期的鞍型不动点，它们在 A 中处处稠密；
- A 中有不可列个有界非周期映射点；
- A 中有一条稠密的轨道；
- 若映射 $\tilde{f}(S)$ 与映射 $f(S)$ 具有 C^1 阶接近，则 $\tilde{f}(S)$ 将有与 A 拓扑等价的不变集 \tilde{A} 。

为了从直观的几何角度来理解该定理，可以回想一下制作拉面的过程。不难想象：面团

上最初非常接近的两个质点经过反复地拉伸与折叠, 已很难判断它们间的距离。实际上, 重复拉伸与折叠 20 次时, 它们间的距离有可能被放大了 100 万倍, 也可能被缩小到分子水平。定理中的 a 和 b 两款正说明 Λ 中的任意点可能是不稳定的周期点, 也可能是有界的非周期点。而拉伸与折叠过程使得 c 款中的轨道具有局部发散而整体有界的特性, 这就是 **Smale 马蹄意义下的混沌**。最后的 d 款则说明, 其他具有拉伸与折叠效果的二维映射也具有马蹄映射的性质。

(2) 高维映射发生混沌的条件

如果某一映射具有拉伸与折叠效果, 可猜测其映射序列具有混沌现象。然而, 为了证明它与马蹄映射 $f(S)$ 具有 C^1 阶接近并非易事。对许多实际问题, 研究其是否发生 Smale 马蹄意义下的混沌可以从映射鞍型不动点附近的横截同宿点来着手。

定义 7.2.1 设映射 $f(u): R^n \rightarrow R^n$, u_F 是 $f(u)$ 的鞍型不动点, 称下述非空集合

$$W^H(u_F) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u \in W^s(u_F) \cap W^u(u_F), u \neq u_F\} \quad (7.2.18)$$

为**同宿点**。若 $W^s(u_F)$ 和 $W^u(u_F)$ 在同宿点横截, 则称同宿点为**横截同宿点**。

横截同宿点集的一个基本性质是它必为无限点集。事实上, 由于 $W^s(u_F)$ 和 $W^u(u_F)$ 均为映射 $f(u)$ 的不变集, 其非空交集 $W^s(u_F) \cap W^u(u_F)$ 亦如此。取 $u \in W^s(u_F) \cap W^u(u_F)$ 但 $u \neq u_F$, 则对于任意的 r 皆有 $f^r(u) \in W^s(u_F) \cap W^u(u_F)$, 且 $\lim_{|r| \rightarrow +\infty} f^r(u) = u_F$ 。因此, 非空交集 $W^s(u_F) \cap W^u(u_F)$ 中必有无限多个点。

定理 7.2.2 (Smale-Birkhoff 定理)^[26] 如果映射 $f(u): R^n \rightarrow R^n$ 在其鞍型不动点 u_F 附近具有横截同宿点, 则 $f(u)$ 具有不变集 Λ , 且 $f(u)$ 在 Λ 上具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

该定理的证明思路是: 在鞍型不动点 u_F 附近沿 $W^s(u_F)$ 取一微弧段 B^s , 沿 $W^u(u_F)$ 取一微弧段 B^u , 作微元 $V = B^s \times B^u$ 。任取一横截同宿点 $u \in W^s(u_F) \cap W^u(u_F)$, 在其附近沿 $W^u(u_F)$ 取一微弧段 dS 。则对于充分大的 n , $f^n(dS)$ 将与 V 相交, 从而 $f^n(dS) \cap V$ 与 B^u 充分接近。因此, 可将映射 $f^n(u)$ 理解为 V 上的一个 Smale 马蹄映射。

上述结果还可进一步推广。设 u_{F_1} 和 u_{F_2} 是 $f(u)$ 的两个不同的鞍型不动点, 若存在异于上述不动点的 $u \in W^s(u_{F_1}) \cap W^u(u_{F_2})$ 或 $u \in W^u(u_{F_1}) \cap W^s(u_{F_2})$, 则称其为 $f(u)$ 的**异宿点**。若 $W^s(u_{F_1})$ 和 $W^u(u_{F_2})$ 在异宿点横截, 则称异宿点为**横截异宿点**。此时, $f(u)$ 也具有不变集 Λ , 并且在 Λ 上具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

需要指出的是, 尽管鞍型不动点附近的横截同(异)宿点会导致混沌, 但这种混沌现象能否实际观测到还取决于它是否具有吸引性。即对于不变集 Λ 附近的任意点 $\tilde{u} \notin \Lambda$, 有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(\tilde{u}) \in \Lambda \quad (7.2.19)$$

这种具有吸引性的不变集 Λ 被称为**混沌吸引子**。

(3) Hénon 映射及其吸引子

法国学者 Hénon 于 1976 年研究了如下二维映射 (简称为 **Hénon 映射**)

$$f: \begin{cases} u_1 \rightarrow 1 + bu_2 - au_1^2 \\ u_2 \rightarrow u_1 \end{cases} \quad (7.2.20)$$

在 $a=1.3$ 、 $b=0.3$ 时的情况。这时，映射有两个不动点

$$u_{F_1} = (0.8839, 0.8839), \quad u_{F_2} = (-1.5839, -1.5839) \quad (7.2.21)$$

将映射 f 作用于 u_{F_1} 附近的任意点 u 形成映射序列 $f^k(u), k=1, 2, \dots$ ，得到图 7.2.3(a) 所示的游荡点集 A 。该点集具有马蹄映射不变集 A 的基本性质和吸引性，是一混沌吸引子。

此外，该点集具有无穷自相似结构。将图 7.2.3(a) 中的一部分放大后如图 7.2.3(b) 示，若进一步放大还会得到彼此相似的结果。这种无穷自相似几何结构被称作**分形**。通常，将具有分形特征的吸引子称为**奇怪吸引子**。

建议读者导出 Hénon 映射在不动点 u_{F_1} 的 Jacobi 矩阵，进而求出两个特征向量。它们自然是稳定和不稳定流形的切向量。沿这两个特征向量分别取点构造映射序列，并将它们与 Hénon 映射的混沌吸引子 A 进行比较。

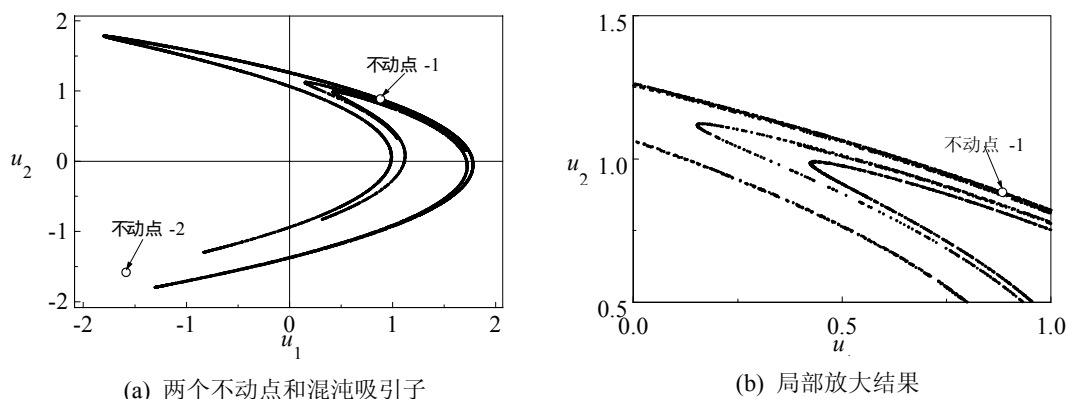


图 7.2.3 Hénon 映射的不动点和混沌吸引子

7.3 连续动力系统的混沌

本节讨论由常微分方程描述的动力系统的混沌现象，侧重于工程中常见的耗散系统。与离散动力系统相似的是，在双曲不动点附近出现稳定流形与不稳定流形横截相交也是连续动力系统产生混沌运动的起因。因此，本节从自治系统的同（异）宿轨线展开讨论。

7.3.1 同（异）宿轨线

考察 n 维自治系统

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in R^n \quad (7.3.1)$$

设 u_i 是系统的双曲平衡点，若其稳定流形 $W^s(u_i)$ 和不稳定流形 $W^u(u_i)$ 满足

$$W^s(u_i) \cap W^u(u_i) \neq \emptyset \quad (7.3.2)$$

则称上述交集集中的点为**同宿点**，称过 u_i 的相轨线为**同宿轨线**。若系统有两个互异的双曲平衡

点 u_i 和 u_j , 其稳定流形 $W^s(u_i)$ 、 $W^s(u_j)$ 和不稳定流形 $W^u(u_i)$ 、 $W^u(u_j)$ 满足

$$W^s(u_i) \cap W^u(u_j) \neq 0 \quad \text{或} \quad W^u(u_i) \cap W^s(u_j) \neq 0 \quad (7.3.3)$$

则称上述交集的点为**异宿点**, 称过 u_i 和 u_j 的相轨线为**异宿轨线**。

例 7.3.1 受轴向压力的杆的横向自由振动可简化为有负线性刚度的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + c\dot{u} - u + u^3 = 0 \quad (a)$$

考察其同宿轨线随阻尼系数 c 的变化。

解: 将方程(a)改写为状态变量形式的二维自治系统

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 - u_1^3 - cu_2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

对于 $c = 0$, 方程(b)是二维保守系统。根据 2.3 节的分析方法, 该系统具有三个平衡点, 即鞍点 $u_1 = (0, 0)$, 中心 $u_2 = (-1, 0)$ 和 $u_3 = (1, 0)$ 。由于相轨线不能穿过中心, 仅需考虑过鞍点 $u_1 = (0, 0)$ 的相轨线, 即能量曲线。它满足总能量为零的条件

$$-\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{4}u_1^4 + \frac{1}{2}u_2^2 = 0 \quad (c)$$

根据图 7.3.1(a)所示, 该能量曲线就是鞍点 u_1 的同宿轨线 $W^s(0) \cap W^u(0)$ 。当 $c > 0$ (或 $c < 0$) 时, u_1 仍保持为鞍点, 而中心 u_2 和 u_3 将成为稳定 (或不稳定) 焦点。同宿轨线分裂为 $W^s(0)$ 和 $W^u(0)$ 。

由于二维自治系统的稳态运动只有平衡点、闭轨以及同 (异) 宿轨线, 且轨线只能在有限个平衡点处相交。因此, 二维自治系统不存在同 (异) 宿轨线横截相交引起的混沌。

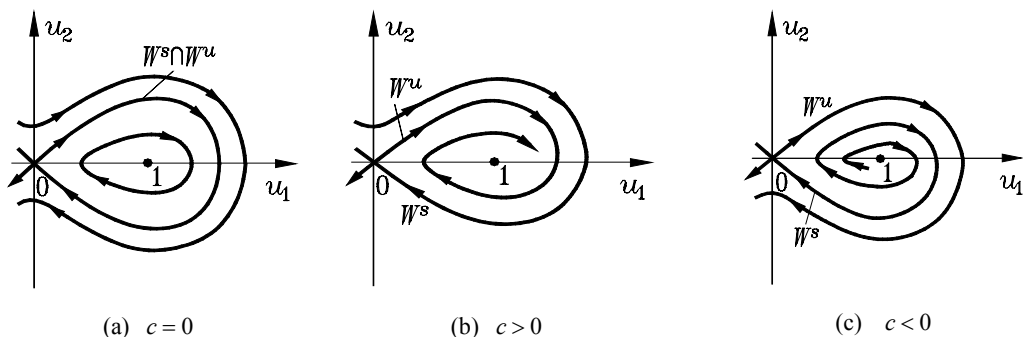


图 7.3.1 同宿轨线及其随阻尼的变化

7.3.2 Melnikov 方法

1963 年, 前苏联学者 Melnikov 在研究保守系统同 (异) 宿轨线受扰动后分裂时, 提出了一种度量分裂后稳定与不稳定流形距离的方法。下面以二维保守系统的同宿轨线受扰后分裂为例, 来说明该方法。异宿轨线时的分析完全类似。

(1) 问题的表述

考察二维保守系统受到时变周期小扰动后的动力学问题

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1 \quad (7.3.4)$$

设 $\varepsilon = 0$ 时, 未受扰的保守系统有一鞍点 \mathbf{u}_0 , 其同宿轨线为 $\mathbf{u}^0(t)$; 而扰动向量函数以 $T > 0$ 为周期

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad (7.3.5)$$

根据这一周期性, 引入在圆 S^1 上周期性取值的相位角

$$\theta = \frac{2\pi}{T} \text{mod}(t, T) \in S^1 \quad (7.3.6)$$

将二维非自治系统(7.3.4)改写为三维“扭扩”圆柱空间中的自治系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{u}, \theta) \\ \dot{\theta} = 2\pi/T \end{cases} \quad (7.3.7)$$

任取一固定时刻 $\tau \in [0, T)$, 将与之对应的固定相位角平面作为 Poincaré 截面

$$\Sigma^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{u}, \theta) \mid \theta = \frac{2\pi}{T} \tau \in [0, 2\pi)\} \quad (7.3.8)$$

记 Σ^τ 上的 Poincaré 映射为 $\mathbf{P}_\varepsilon^\tau$ 。不难看出:

a. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 未受扰系统的平衡点 \mathbf{u}_0 就是映射 \mathbf{P}_0^τ 的不动点, 其对应的闭轨是 $\mathbf{u}_0 \times S^1$; 原自治系统鞍点的双曲性保证 \mathbf{P}_0^τ 在不动点 \mathbf{u}_0 处 Jacobi 矩阵的特征值不为 1。

b. 当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时, 根据隐函数定理知, 映射 $\mathbf{P}_\varepsilon^\tau$ 在 \mathbf{u}_0 附近具有唯一的鞍型不动点

$$\mathbf{u}_\varepsilon^\tau = \mathbf{u}_0 + O(\varepsilon) \quad (7.3.9)$$

记其对应的闭轨为 γ_ε 。

(2) 同宿轨线分裂后的距离

记双曲型闭轨 γ_ε 的稳定和不稳定流形分别为 $W_\varepsilon^s(\gamma_\varepsilon)$ 和 $W_\varepsilon^u(\gamma_\varepsilon)$, 将自 Σ^τ 出发的、位于这两个不变流形上的相轨线在同宿轨线 $\mathbf{u}^0(t)$ 处作 Taylor 展开

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon^s(t, \tau) = \mathbf{u}^0(t - \tau) + \varepsilon \mathbf{u}_1^s(t, \tau) + O(\varepsilon^2), & t \geq \tau \\ \mathbf{u}_\varepsilon^u(t, \tau) = \mathbf{u}^0(t - \tau) + \varepsilon \mathbf{u}_1^u(t, \tau) + O(\varepsilon^2), & t \leq \tau \end{cases} \quad (7.3.10)$$

将其代入方程(7.3.4), 比较 ε 的同次幂得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1^s(t, \tau) = \mathbf{Df}(\mathbf{u}^0(t - \tau))\mathbf{u}_1^s(t, \tau) + \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t - \tau), t), & t \geq \tau \\ \dot{\mathbf{u}}_1^u(t, \tau) = \mathbf{Df}(\mathbf{u}^0(t - \tau))\mathbf{u}_1^u(t, \tau) + \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t - \tau), t), & t \leq \tau \end{cases} \quad (7.3.11)$$

将轨线 $\mathbf{u}_\varepsilon^s(t, \tau)$ 与 $\mathbf{u}_\varepsilon^u(t, \tau)$ 在时刻 t 的距离向同宿轨线 $\mathbf{u}^0(t - \tau)$ 的单位法向量投影, 记作

$$d(t) = \mathbf{f}^\perp(\mathbf{u}^0(t - \tau)) \cdot [\mathbf{u}_\varepsilon^u(t, \tau) - \mathbf{u}_\varepsilon^s(t, \tau)] \quad (7.3.12)$$

注意到式(7.3.10)及

$$\mathbf{f}^\perp(\mathbf{u}^0(t-\tau)) = \frac{1}{\|\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau))\|} \begin{bmatrix} -f_2(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \\ f_1(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \end{bmatrix} \quad (7.3.13)$$

可将式(7.3.12)改写为

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau))\|} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge [\mathbf{u}_1^u(t, \tau) - \mathbf{u}_1^s(t, \tau)] + O(\varepsilon^2) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau))\|} [\Delta^u(t, \tau) - \Delta^s(t, \tau)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

其中

$$\Delta^u(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^u(t, \tau), \quad \Delta^s(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^s(t, \tau) \quad (7.3.15)$$

而 \wedge 代表二维向量的楔积^①。

由式(7.3.15)可计算同宿轨线在 Σ^τ 上的分裂程度。以 $\Delta^s(t, \tau)$ 为例, 注意到式(7.3.11), 可导出

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^s(t, \tau) &= \frac{d}{dt} [\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^s(t, \tau)] \\ &= D\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \dot{\mathbf{u}}^0(t-\tau) \wedge \mathbf{u}_1^s(t, \tau) + \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \dot{\mathbf{u}}_1^s(t, \tau) + \\ &= D\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^s(t, \tau) + \\ &\quad \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge [D\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \mathbf{u}_1^s(t, \tau) + \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t-\tau), t)] \\ &= \text{tr} D\mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^s(t, \tau) + \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t-\tau), t) \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

由于未受扰系统是保守的, 故有

$$\text{tr} D\mathbf{f}(\mathbf{u}^0) = \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0) = 0 \quad (7.3.17)$$

因此

$$\dot{\Delta}^s(t, \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t-\tau), t) \quad (7.3.18)$$

对上式进行积分

$$\Delta^s(+\infty, \tau) - \Delta^s(\tau, \tau) = \int_\tau^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t-\tau), t) dt \quad (7.3.19)$$

注意到同宿轨线随时间增加最终要返回鞍点, 故有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta^s(t, \tau) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{u}_1^s(t-\tau) = 0 \quad (7.3.20)$$

从而有

^① 二维向量 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T$ 与 $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$ 的楔积定义为标量 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ 。

$$\Delta^s(\tau, \tau) = -\int_{\tau}^{+\infty} f(u^0(t-\tau)) \wedge g(u^0(t-\tau), t) dt \quad (7.3.21)$$

类似地有

$$\Delta^u(\tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(u^0(t-\tau)) \wedge g(u^0(t-\tau), t) dt \quad (7.3.22)$$

最终得到 $W_{\varepsilon}^s(\gamma_{\varepsilon})$ 和 $W_{\varepsilon}^u(\gamma_{\varepsilon})$ 在 Σ^{τ} 上的距离度量函数

$$\begin{aligned} d(\tau) &= \frac{\varepsilon}{\|f(u^0(0))\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^0(t-\tau)) \wedge g(u^0(t-\tau), t) dt + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{\|f(u^0(0))\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^0(t)) \wedge g(u^0(t), t+\tau) dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

当 $\tau \in [0, T)$ 变化时, Poincaré 截面 Σ^{τ} 将扫过整个柱面。如果在某时刻 τ 出现 $d(\tau) = 0$, 则意味着 $W_{\varepsilon}^s(\gamma_{\varepsilon})$ 和 $W_{\varepsilon}^u(\gamma_{\varepsilon})$ 相交。归纳上述分析, 得到下述定理。

(3) Melnikov 定理

定理 7.3.1 对于受时变周期小扰动的二维保守系统(7.3.4), 定义 **Melnikov 函数**

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^0(t-\tau)) \wedge g(u^0(t-\tau), t) dt \quad (7.3.24)$$

若有 $\tau \in [0, T)$ 使得 $M(\tau) = 0$ 且 $\frac{d}{d\tau} M(\tau) \neq 0$, 则 $W_{\varepsilon}^s(\gamma_{\varepsilon})$ 和 $W_{\varepsilon}^u(\gamma_{\varepsilon})$ 横截相交。

例 7.3.2 考察简谐激励下具有负线性刚度的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} - u + u^3 = \varepsilon f \cos \omega t \quad (a)$$

试求该系统同宿轨线横截相交的条件。

解: 将方程(a)写作标准形式(3.3.4), 则

$$f(u) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 - u_1^3 \end{bmatrix}, \quad g(u, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\mu u_2 + f \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (b)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统退化为二维保守系统。根据例 7.3.1 知, $(0,0)$ 是该系统的鞍点, 过鞍点的同宿轨线满足

$$\dot{u}_1 = u_2 = \pm \sqrt{u_1^2 - \frac{1}{2}u_1^4} \quad (c)$$

对式(c)分离变量, 积分得

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - u_1^2}}{u_1}\right) = \mp t \quad (d)$$

解出 u_1 后代回式(c), 得到 u_2 , 从而有

$$u^0(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t \\ \mp \sqrt{2} \operatorname{sech} t \cdot \tanh t \end{bmatrix} \quad (e)$$

将式(b)和(e)代入式(7.3.24), 运用留数定理计算广义积分得

$$\begin{aligned}
M(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}^0(t-\tau)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{u}^0(t-\tau), t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t) [f \cos \omega(t+\tau) - 2\mu u_2(t)] dt \\
&= -\sqrt{2} f \int_0^{+\infty} \operatorname{sech} t \cdot \tanh t \cdot \cos \omega(t+\tau) dt - 4\mu \int_0^{+\infty} \operatorname{sech}^2 t \cdot \tanh t dt \\
&= \sqrt{2} \pi \omega f \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \sin \omega \tau - \frac{8\mu}{3}
\end{aligned} \tag{f}$$

因此, 出现同宿轨线横截相交的必要条件是

$$\sqrt{2} \pi \omega f \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) > \frac{8\mu}{3} \quad \text{即} \quad \cosh\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) < \frac{3\sqrt{2} \pi \omega f}{8\mu} \tag{g}$$

这说明: 小阻尼 $2\varepsilon\mu$ 和强激励 εf 易于使条件(g)成立, 使同宿轨线横截相交而形成混沌运动。

需要指出, 由 Melnikov 方法所确定的同宿轨线横截相交条件只是一阶近似的。以上例中的条件(g)为例, 数值计算所得到的混沌运动阈值 f/μ 要高于此处的解析值。

7.3.3 耗散系统的混沌运动

对于 n 维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in R^n \tag{7.3.25}$$

耗散意味着

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) < 0, \quad \forall \mathbf{u} \in R^n \tag{7.3.26}$$

根据场论, 由向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 描述的流的体积随着时间增加而收缩。对于 n 维非自治系统, 将其改写成 $n+1$ 维的自治系统后也有类似结果。这表明, 随着时间增加, 耗散系统的稳态运动最终将收缩到 R^n 中的一个低维点集 A 上。因此, 点集 A 称为系统的**吸引子**。

对于吸引子 A , 若有点集 $U \subset R^n$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(\mathbf{u}) \in A, \quad \forall \mathbf{u} \in U \tag{7.3.27}$$

则称点集 U 是吸引子 A 的**吸引域**。

显然, 渐近稳定的平衡点、闭轨、环面运动都是吸引子, 其维数分别是 0、1 和 2。以 van der Pol 振子为例, 与其渐近稳定自激振动对应的极限环是一维吸引子, 极限环的内外区域都是其吸引域。那么, 混沌运动是否有吸引子呢? 这要分为几种情况。

(1) 吸引性混沌运动

这是最早发现的混沌现象。这种稳态混沌运动最终缩聚到相空间中的一个低维点集 A , 该集合被称作**混沌吸引子**。在绝大多数情况下, 点集 A 是具有无穷自相似结构的分形点集。所以, 又被称作**奇怪吸引子**。混沌吸引子 A 的吸引域 U 一般是相空间中的连通域, 但一般具有极为复杂的分形边界。如何定量描述混沌吸引子将在下一章讨论。

(2) 非吸引性混沌运动

非吸引性混沌运动是指系统有可能在相当长的过渡阶段中呈现混沌运动的性态, 但最终呈周期或概周期运动。这种现象又被称作**瞬态混沌**。系统产生瞬态混沌的条件是: 周期或概周期运动的吸引域具有分形边界, 并且与不稳定周期运动的吸引域相互嵌套。这时, 系统运

动对位于分形边界附近的初始状态异常敏感,但最终仍被吸引到周期运动或概周期运动上。例如,受简谐激励的阻尼摆在一定的参数组合下就具有这种分形边界的周期吸引子。另外,在多种受简谐激励的机械系统数值仿真中也观察到了瞬态混沌。

(3) 奇怪非混沌吸引运动

这种运动的吸引子具备像奇怪吸引子一样的分形结构,但从它出发的轨线并不随时间呈指数发散。因此,这是一种对初值不甚敏感的运动。仅从统计数据上看不出这种吸引子与稳态混沌的奇怪吸引子有差异。该现象已在受双谐波概周期激励的阻尼摆和自激振子的数值仿真中被证实。

7.3.4 通向混沌运动的途径

自发现混沌现象以来,研究最多的一个问题就是考察系统在某一参数缓慢变化下如何由普通稳态运动转变为混沌运动,简称为**通向混沌的途径**。以下扼要介绍5种已被人们认识的现象,其中前3种自20世纪70年代起就受到了人们的广泛重视,后两种的发现和研究则晚得多。

(1) 倍周期分叉

7.2节已通过Logistic映射介绍了重复倍周期分叉会导致混沌,这种通向混沌的途径非常普遍地存在于各种非线性动力系统中。由于这是最早发现通向混沌的一条途径,因而得到了深入的研究。在众多研究中,最为杰出的就是Feigenbaum的发现。他基于重整化群思想证明的普适常数可适用于任何倍周期分叉通向混沌的过程,并为探索混沌的内在规律找到了一条道路。

例如,将Hénon映射中参数 $b=0.3$ 固定,让参数 a 由小到大变化,则可观察到无穷多次相似的倍周期分叉,直至出现混沌。表7.3.1列出了发生倍周期分叉的参数值和间隔比,它们完全符合Feigenbaum指出的规律。对于如此精细的无穷自相似结构,没有理论指导显然无法确定 $n>5$ 以后的分叉值 a_n 。

表 7.3.1 Hénon 映射的倍周期分叉

分叉次数 n	周期数 2^n	分叉值 a_n	a_n 的间隔比 δ_n
1	2	0.3675	
2	4	0.9125	4.844
3	8	1.026	4.3269
4	16	1.051	4.696
5	32	1.056 536	4.636
6	64	1.057 730 83	4.7748
7	128	1.057 980 893 1	4.6696
8	256	1.058 034 452 15	4.6691
9	512	1.058 045 923 04	4.6691
10	1024	1.058 048 379 80	4.6694
11	2048	1.058 048 905 931	

(2) 阵发性

阵发性一词来自于湍流理论。在研究混沌中使用**阵发性**表示系统的时域响应随着参数变化出现了规则与不规则运动随机交替,随着参数继续变化,不规则运动所占时间段越来越长,最后系统完全进入不规则运动。

图 7.3.2 给出了下述受迫 Duffing 系统阵发性现象的位移时间历程

$$\begin{cases} \ddot{u} + 0.25\dot{u} - u + u^3 = f \sin t \\ u(0) = 0.0, \quad \dot{u}(0) = 0.0 \end{cases} \quad (7.3.28)$$

当激励幅值由 $f = 0.265$ 缓慢增加到 $f = 0.266$ 时,系统位移由原来某一平衡点附近的微振动为主、不规则振动为辅(上图),突然变为以围绕两个平衡点的大幅度不规则振动为主(下图)。混沌运动似乎突然爆发出来。

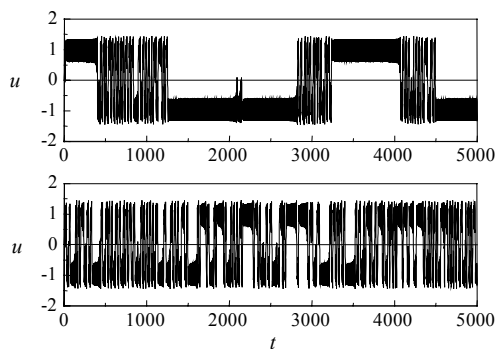


图 7.3.2 受迫 Duffing 系统的阵发性现象

现以 $[0,1]$ 区间上的 Logistic 映射为例,说明阵发性来自于映射的奇数次周期分叉。根据 Logistic 映射的定义

$$u_{k+1} = f(u_k, p) = pu_k(1 - u_k) \quad (7.3.29)$$

其映射的图解过程如图 7.3.3 所示,点 $u_0 \in [0,1]$ 经过一次映射后成为 $f(u_0, p)$, 其对应的 u_1 是 $f(u_0, p)$ 向图中 45° 直线水平投影交点的横坐标;如此重复便可得到后继映射序列 $u_k = f^k(u_0, p), k = 2, 3, \dots$ 。当 Logistic 映射所含的参数 $p > 3.57$ 时,映射出现了一系列奇数次周期分叉。例如,当 $p = 1 + \sqrt{8}$ 时,映射具有周期 3 分叉,曲线 $f^3(u, p)$ 与 45° 直线在三点相切。若 $p \approx 1 + \sqrt{8}$, $f^3(u, p)$ 与 45° 直线几乎相切,点 u_0 的映射序列要通过许多次映射才能通过图 7.3.4 中的狭窄走廊。特别是在走廊最狭窄处,映射点几乎接近周期 3 不动点。这样,在时间历程上就会出现一段时间的周期 3 运动。当映射点走出走廊后,便会进入瞬态混沌,但很快又进入三个走廊中的下一个,重复上述过程。这时若继续改变参数,则走廊会加宽,从而使接近周期 3 运动的运动消失。

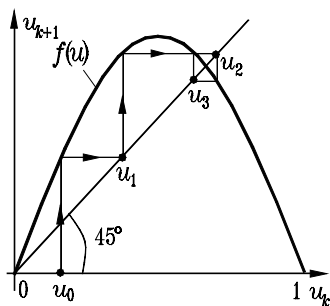


图 7.3.3 Logistic 映射示意

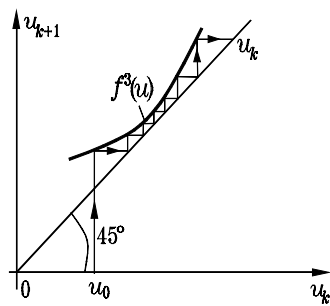


图 7.3.4 映射接近切分叉时的狭窄走廊

(3) 概周期分叉

人们很早就猜测, 概周期运动若发生分叉则会产生混沌运动, 而湍流就是经过无限多次概周期分叉而来。如果将平衡点、闭轨视为 0 维环面 T^0 和 1 维环面 T^1 , 则对湍流发生机理有如下猜测: $T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow \dots \rightarrow T^k \rightarrow \dots \rightarrow$ 混沌, 其中 $T^0 \rightarrow T^1$ 就是平衡点的 Hopf 分叉, $T^1 \rightarrow T^2$ 是闭轨的 Naimark-Sacker 分叉。

目前, 理论和实验都证明, $T^2 \rightarrow$ 混沌的途径是通有的, 即在外界干扰下具有一定的鲁棒性, 从而可被观测。人们基于圆周映射, 像研究 Logistic 映射一样发现了这种道路的普适性。此外, 其他环面通向混沌的研究也有许多进展, 例如 $T^3 \rightarrow$ 混沌的途径已被否定, $T^4 \rightarrow$ 混沌的途径得到了肯定。

(4) 激变^[27,28]

激变是指混沌吸引子的数目或尺寸在系统控制参数缓慢变化时发生跃变的现象。具体可分为:

- a. **边界激变**: 混沌吸引子突然出现或消失;
- b. **内部激变**: 混沌吸引子尺寸突变;
- c. **合并激变**: 多个混沌吸引子突然合并或一个混沌吸引子突然分裂。

产生激变的前提是系统同时具有混沌吸引子和鞍型不动点。如果不动点的稳定流形是混沌吸引子的吸引域边界, 随着系统参数变化, 混沌吸引子与不动点稳定流形间距离不断减小, 最终与其相接触。这时, 混沌吸引子及其吸引域自然一起遭到破坏而消失, 这即为边界激变。内部激变则是由于随着系统参数变化, 混沌吸引子在其吸引域内与鞍型不动点相接触, 引起吸引子尺寸的突变。合并激变是多个混沌吸引子在其吸引域公共边界上与鞍型不动点相触, 合并为一。研究表明, 随着系统参数变化, 吸引性混沌与非吸引性混沌会经过激变相互转化。激变现象已在受简谐激励的刚度立方非线性系统和含间隙系统的数值仿真中屡屡出现。

(5) 擦边分叉^[29,30,31]

如果系统中含有间隙、弹性约束等连续但局部不可微的力学因素, 系统微分方程的向量场在切换面上不可微。当系统控制参数变化时, 系统的周期运动会与向量场的切换面擦边相切, 此后立即改变原来的稳定性变化趋势而产生**擦边分叉**。从擦边到分叉的快慢与向量场 Jacobi 矩阵在切换面上的阶跃幅度相关。如果系统中含有局部弹性预紧、干摩擦等不连续力学因素, 则系统运动微分方程的向量场在切换面上发生第一类间断, 向量场的 Jacobi 矩阵在切换面上产生无限大阶跃。随着系统控制参数变化, 周期运动与切换面擦边即失稳, 并导致突发的混沌运动。近年来, 对碰撞系统的这种擦边诱发混沌的现象已有不少理论和实验研究。例如, 已开始用擦边分叉理论来揭示转子系统中的碰摩现象。

7.4 混沌运动的控制*

对多数力学系统而言, 人们不希望其产生难以预测的混沌运动。因此, 控制混沌的主要目的是消除已有的混沌运动, 或降低其振动幅度。从原则上讲, 通过对力学系统进行修改或施加控制总会影响混沌运动的生存条件, 从而可设法消除或抑制混沌运动。例如: 采用动力吸振器可消除简谐激励下 Duffing 振子的混沌运动; 应用经典的随机最优控制技术可抑制

Lorenz 热对流中的混沌; 当系统同时存在周期运动和混沌运动时, 采用迁移和输送控制可实现混沌运动与周期运动间的切换。然而, 这些控制方法尚未利用混沌的内在动力学特性, 实现中往往要对原系统作较大的修改或输入较大的控制能量。

1990年, 美国物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出了一种利用混沌内在特性的控制策略。该策略仅对系统某一控制参数作时变小扰动, 即可将系统的混沌运动稳定到指定的周期运动上。此后, 一些学者对该策略作了推广并用多种实验证实了其有效性, 掀起了控制混沌乃至利用混沌的研究热潮。本节着重介绍由这三位学者姓氏命名的 OGY 控制方法以及对它的改进, 其他方面的研究可参见综述[32]。

7.4.1 OGY 方法

对于 Smale 马蹄意义下的混沌吸引子, 其中稠密地嵌有无限多不稳定周期运动, 而混沌运动可各态历经地接近这些不稳定周期运动。OGY 方法的基本思想是: 先确定吸引子中嵌入的各种不稳定周期运动, 选择其中之一作为控制目标, 等待混沌运动游荡到该周期运动附近时对系统某一控制参数进行小扰动, 将混沌运动稳定到该周期运动上。具体地说, 该方法可分为以下两步。

(1) 确定控制目标

借助 Poincaré 截面, 可以用含控制参数 p_k 的 n 维 Poincaré 映射来描述所关心的有限维动力系统

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{u}_k, p_k), \quad \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n, \quad p_k \in \mathbb{R}^1, \quad k=0,1,2,\dots \quad (7.4.1)$$

设控制参数 $p_k = \bar{p}$ 时该映射呈混沌性态, 其混沌吸引子中稠密地嵌有任意周期的鞍型不动点, 即原系统的不稳定周期运动。根据需要选择其中某一不动点 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 为控制目标, 且不妨设其仅有一维不稳定流形 $W^u(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 。此外, 还需在不动点 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 处指定一邻域, 以便对进入该邻域的映射点实施控制。

(2) 确定控制策略

一旦映射点 \mathbf{u}_k 游荡到指定的邻域内, 就可考虑通过对控制参数 p_k 的扰动, 将 \mathbf{u}_k 稳定到 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 上。原则上讲, 这有多种方案。方案之一是通过改变参数 p_k , 使映射点 \mathbf{u}_{k+1} 落到不动点 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 的稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 上, 从而使后继映射点沿着 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 趋于 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 。以图 7.4.1 为例, 不动点 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 具有一维不稳定流形 $W^u(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 和二维稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 。希望实施控制后, 映射点 \mathbf{u}_{k+1} 落到与 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 相切的平面上, 然后随着后继映射, 逐渐沿着 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 趋于 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 。

为确定参数扰动量 $p_k - \bar{p}$, 将映射(7.4.1)在不动点 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$ 和参数 \bar{p} 附近线性展开

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{u}_k, p_k) = \mathbf{u}_F(\bar{p}) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_F(\bar{p})) + \mathbf{b}(p_k - \bar{p}) \quad (7.4.2)$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 分别是映射(7.4.1)在 $(\mathbf{u}_F(\bar{p}), \bar{p})$ 处关于 \mathbf{u}_k 的 Jacobi 矩阵和关于 p_k 的偏导数向量。求解矩阵 \mathbf{A} 的特征值问题, 设其特征值 λ_r 满足 $|\lambda_r| > 1$, 相应的左特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}_r$ 。它自然与其他特征值的右特征向量正交, 而这些右特征向量是稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 的切向量。因此, 只要令

$$\boldsymbol{\varphi}_r^T [\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_F(\bar{p})] = 0 \quad (7.4.3)$$

即可使映射点 \mathbf{u}_{k+1} 落在稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_F(\bar{p}))$ 附近。由式(7.4.3)解出

$$p_k = \bar{p} + \frac{\lambda_r \boldsymbol{\varphi}_r^T [\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_F(\bar{p})]}{\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{b}} \quad (7.4.4)$$

经过几次重复映射, 映射点便趋于 $\mathbf{u}_F(\bar{p})$, 而此时 $p_k = \bar{p}$ 。

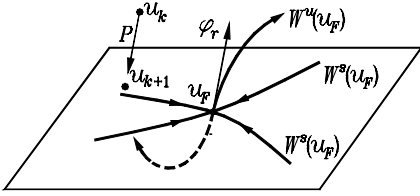


图 7.4.1 OGY 控制策略示意

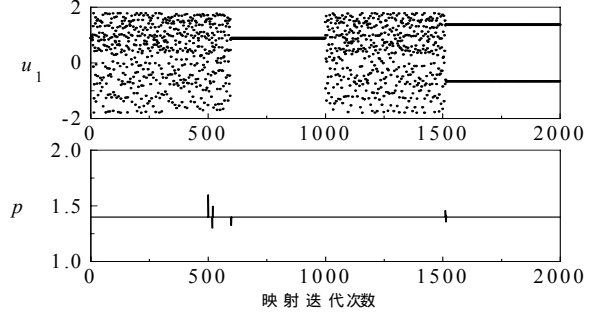


图 7.4.2 Hénon 映射的混沌控制

以 7.2 节讨论过的 Hénon 映射为例, 将参数 a 取作随映射次数 k 变化的控制参数 a_k 。对于 $1 \leq k \leq 500$, 保持 $a_k = 1.4$, 映射序列呈混沌状态。当 $501 \leq k \leq 1000$ 时, 启动控制, 使混沌状态稳定到周期 1 不动点 $(0.8839, 0.8839)$ 上。随后关闭控制, 映射序列再次出现混沌。当 $1501 \leq k \leq 2000$ 时, 再启动控制, 使混沌状态稳定到周期 2 不动点 $(-0.6661, 1.3661)$ 上。整个过程中映射点坐标 u_{1k} 和控制参数 a_k 的变化如图 7.4.2 所示。

OGY 控制的主要特点如下: 一是可选择混沌吸引子中嵌入的任意周期运动作为控制目标, 改善系统特性; 二是控制目标嵌入在当前的混沌运动中, 所需的控制参数摄动量 $p_k - \bar{p}$ 很小; 三是可通过实验数据来拟合线性化映射(7.4.2), 勿需原系统的数学模型。

OGY 方法提出不久, 美国学者 Ditto 等成功地利用正弦交变磁场实现了控制磁弹性重力屈曲梁的混沌响应实验。他们基于实验数据重构短周期运动, 然后拟合出控制所需的局部线性化映射, 以磁场强度的直流分量作为控制参数, 在 0.796 A/m 的最大可调范围内将混沌运动稳定在周期运动上长达 20 万个周期。此后, 不少实验支持了 OGY 方法。

7.4.2 OGY 方法的改进与推广

OGY 方法的精髓是选择混沌吸引子中嵌入的不稳定周期运动为目标, 等待混沌运动游荡到目标附近时通过线性控制将混沌运动稳定到周期运动上。近年来, 许多学者基于这一思想对 OGY 方法作了改进和推广。

(1) 极点配置^[33]

美国学者 Romeiras 等根据控制论中的极点配置方法对 OGY 策略中控制参数摄动量的确定作了推广。针对控制参数 p_k , 引入控制强度为待定向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性反馈

$$p_k - \bar{p} = -\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_F(\bar{p})), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n \quad (7.4.5)$$

改写线性化映射(7.4.2)为

$$\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_F(\bar{p}) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}^T) [\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_F(\bar{p})] \quad (7.4.6)$$

在满足可控性前提下,可借助线性控制论中的极点配置公式确定向量 σ ,使矩阵 $A-b\sigma^T$ 的全部特征值位于单位圆内,从而使后继映射点 u_{k+1} 趋于不动点 $u_F(\bar{p})$ 。

不难证明,OGY方法要求后继映射点沿稳定流形趋于不动点,是一种控制时间最优的特殊极点配置。放弃这一要求后可允许 A 有复特征值,控制的实现也更加灵活。

(2) 连续反馈控制^[34]

在OGY方法中,系统控制参数在相邻两次映射之间定常。因此,OGY策略主要适用于稳定那些发散比较慢的不稳定周期运动。为改进这一不足,波兰学者Pyragas将OGY控制思想推广到直接控制由微分方程描述的动力系统。他提出下述控制策略

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f_1(u_1, u_2) \\ \dot{u}_2 = f_2(u_1, u_2) + \sigma^T [u_2 - u_{2F}] \end{cases} \quad (7.4.7)$$

其中 $u_{2F}(t)$ 是嵌入在混沌吸引子中待稳定周期运动的分量, σ 是控制强度向量。这种控制可在任何时刻启动且勿需局部线性化,但控制强度向量 σ 的选取需经过大量试算。

(3) 不连续系统的混沌控制^[35]

当机械系统具有干摩擦、预紧弹性约束时,其运动微分方程具有不连续向量场。若系统运动与向量场切换面擦边,则Poincaré映射在对应状态处不光滑,并且常诱发混沌运动。由于混沌吸引子中嵌入的是擦边或几乎擦边的周期运动,将其作为控制目标便遇到不光滑映射的混沌控制问题。作者以周期激励下含预紧弹性约束的振子为例,提出了从系统状态采样数据中重构分段线性化映射的方法,然后对分段线性化映射进行分区极点配置,构造出一种分段线性反馈控制策略。

7.4.3 参数自调节控制方法

参数自调节控制属于最简单的自适应控制。仍考虑映射(7.4.1)所确定的动力系统,通常将参数自调节控制问题表述为

$$\begin{cases} u_{k+1} = P(u_k, p_k) \\ p_{k+1} = p_k + g(u_k - u_F(\bar{p})) \end{cases} \quad \begin{matrix} (7.4.8a) \\ (7.4.8b) \end{matrix}$$

其中向量函数 $g(\cdot)$ 描述控制参数 p_{k+1} 随系统状态 u_k 偏离目标状态 $u_F(\bar{p})$ 的误差而自调节的规律,最常用的是线性自调节规律

$$p_{k+1} = p_k - \sigma^T (u_k - u_F(\bar{p})) \quad (7.4.9)$$

显然,正确设计控制强度向量 σ 是控制成败的关键。对于一维映射的渐近稳定不动点 $u_F(\bar{p})$,在充分小的 σ 下受控映射可渐近稳定地趋于 $u_F(\bar{p})$ 。但该结论并不适于高维映射。此外,作为目标的不动点 $u_F(\bar{p})$ 可能稳定也可能不稳定。参数自调节规律(7.4.8)将混沌运动控制到不稳定不动点上的能力非常有限。以一维映射为例,它只有在线性化映射特征值 $\lambda \in (-3, 1)$ 时有效,且控制强度向量 σ 的取值范围很窄。

作者将参数自调节控制律修改为^[36]

$$p_{k+1} = \bar{p} - \sigma^T (u_k - u_F(\bar{p})) - \varepsilon(p_k - \bar{p}) \quad (7.4.10)$$

将映射(7.4.8a)在 $(u_F(\bar{p}), \bar{p})$ 附近线性化,连同上述控制律合写为

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} - u_F(\bar{p}) \\ p_{k+1} - \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ -\sigma^T & -\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k - u_F(\bar{p}) \\ p_k - \bar{p} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} u_k - u_F(\bar{p}) \\ p_k - \bar{p} \end{bmatrix} \quad (7.4.11)$$

改写上式中的矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} A & b \\ -\sigma^T & -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\sigma^T \quad \varepsilon] \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A} - \bar{b} \bar{\sigma}^T \quad (7.4.12)$$

与问题(7.4.6)相对照易见, $\bar{\sigma}$ 的选取是一个扩张维数的线性映射极点配置问题。因此, 可选择 $\bar{\sigma}$ 使矩阵 L 的特征值均位于单位圆内, 从而使后继映射点 u_{k+1} 趋于不动点 $u_F(\bar{p})$ 。

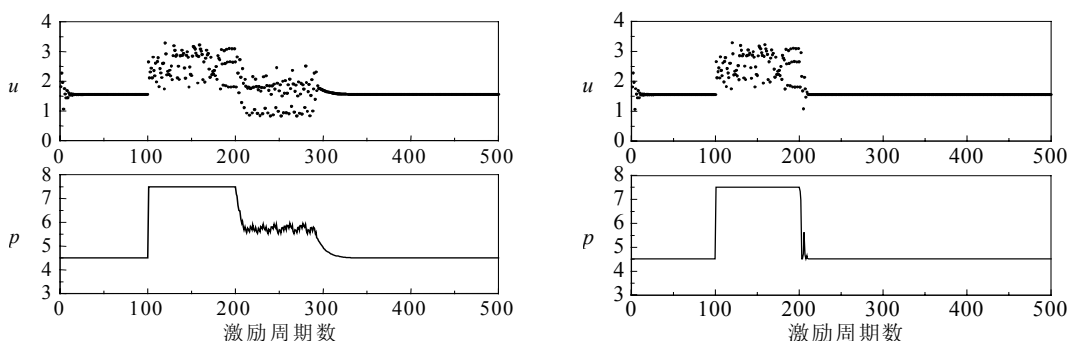
这提供了一种设计高维映射控制强度的方法, 且不必考虑原映射不动点的稳定性。这种参数自调节规律相当于放松了式(7.4.9)对 $\varepsilon=1$ 的约束, 给极点配置带来了灵活性。仍以具有特征值 λ 的一维映射为例, 为使受控映射渐近稳定, 取 $\varepsilon = -\lambda$ 可保证对任意的 λ 均存在等宽度的 σ 取值范围。

为了说明方法的有效性, 考察激励幅值 p 可控的受迫 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t) + 0.1\dot{u}(t) + u^3(t) = p \cos t \quad (7.4.13)$$

通过对系统状态在整倍激励周期时刻的采样, 系统动力学可由一含控制参数 p 的二维 Poincaré 映射来描述。

先对初始静止的系统施加定常幅值为 $p=4.5$ 的简谐激励, 100 个激励周期后系统运动被吸引到稳定的 P-1 轨道上。在此后 100 个激励周期中, 将激励幅值阶跃扰动为 $p=7.5$, 使系统进入混沌运动。然后, 将受控系统极点配置在 -0.1 、 0.0 和 0.0 , 启动控制策略将系统状态引导回原来的稳定 P-1 轨道。图 7.4.3 给出了控制策略(7.4.9)和(7.4.10)的效果, 后者的过渡过程明显要短。



(a) 控制策略(7.4.9)

(b) 控制策略(7.4.10)

图 7.4.3 Duffing 系统的参数自调节控制

7.4.4 实现控制中的关键问题

(1) 基于延迟坐标的控制策略

上述控制策略能否实现的关键之一是其对测控硬件的要求。在实验中构造 Poincaré 截面并非易事, 对于高维系统, 需要大量的传感器及采样通道。一种简化方案是根据嵌入定理用

系统状态 $\mathbf{u}(t)$ 的标量观测函数 $f(\mathbf{u}(t))$ 构造 m 维**延迟坐标向量**^①

$$\mathbf{w} = [f(\mathbf{u}(t)), f(\mathbf{u}(t+\tau)), f(\mathbf{u}(t+2\tau)), \dots, f(\mathbf{u}(t+(m-1)\tau))]^T \quad (7.4.14)$$

如果混沌吸引子落入一 n_A 维流形, 则当 $m = 2n_A + 1$ 时, $\mathbf{w}(t)$ 就可完整描述混沌吸引子。因此, 实验中仅需一个传感器和单个采样通道。对于混沌控制所关心的吸引子局部嵌入特性, 只需取 $m = n_A$; 而取延时 τ 使采样序列的自相关首次获得极小值。

德国学者 Dressler 等首先认识到^[37]: 若控制参数时变, 则延迟坐标向量 $\mathbf{w}(t)$ 依赖于控制参数在时间段 $(t, t + (n-1)\tau)$ 内的变化。以受周期 T 激励的系统为例。取 Poincaré 截面为固定激励相位下的状态子空间, 记 l 是满足 $(n-1)\tau \leq lT$ 的最小整数, 则映射(7.4.1)在延迟坐标向量 $\mathbf{w}(t)$ 下形如

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{Q}(\mathbf{w}_k, p_k, p_{k-1}, \dots, p_{k-l}) \quad (7.4.15)$$

为了基于延迟坐标进行混沌控制, 需根据映射(7.4.14)对控制策略作少量修改。方法之一是采用下述扩阶状态向量代替原状态向量

$$\tilde{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_k, p_{k-1}, \dots, p_{k-l}]^T \quad (7.4.16)$$

这可使上述控制策略保持形式不变。Dressler 等研究了当 $l=1$ 时基于延迟坐标的 OGY 方法, 根据映射(7.4.15)建立了两种控制策略。经数值仿真发现: 用基于延迟坐标的映射来控制混沌时, 计入控制参数的变化历史尤为必要。

(2) 过渡过程

控制混沌成功的一个重要指标是过渡过程的长短, 即从等待控制时机到将混沌运动完全稳定到目标运动上所需的时间。以 OGY 方法所需的过渡时间 \hat{t} 为例, 它由两部分组成。一是等待映射点游荡到不动点邻域中所需时间 \hat{t}_1 , 二是控制启动后到周期运动稳定所需时间 \hat{t}_2 。通常, $\hat{t}_2 \ll \hat{t}_1$ 。等待时间 \hat{t}_1 与不动点邻域的半径 δ 及映射的信息维数 D 呈指数关系

$$\hat{t}_1 \propto \delta^{-D} \quad (7.4.17)$$

因此, 实验中应取足够大的 δ 来缩短等待时间。当然, 过大的 δ 会降低局部线性化映射的有效性, 导致控制失败。

美国学者 Shinbrot 等根据混沌运动以指数速率发散的特点, 提出了一种对控制参数小摄动来实现映射点快速转迁的方法^[38]。其思路是: 将映射(7.4.1)关于系统状态和控制参数线性展开, 获得 Poincaré 截面上的微线段 S , 将 S 映射 n_1 次使其像 S' 大约有单位长度; 再将目标映射点所在邻域 V 逆映射 n_2 次使其像 V' 首次与 S' 相交; 根据 S' 上距 V' 中心最近的点可确定微线段 S 上对应的原像, 从而得知所需的控制参数摄动量。这样, 等待时间减至

$$\hat{t}_1 \propto -\ln(\delta) \quad (7.4.18)$$

数值仿真表明: 原需 6062 次迭代方可获得的 Hénon 映射点转迁只需 12 次迭代便可实现, 而 4 维映射的迭代次数可由 10^{11} 次降为 35 次。

这种快速转迁已成为利用混沌的技术, 对于实现力学系统的运动快速控制很有意义。例如, 船用起重机吊装的货物会因船体受波浪冲击而不规则摆动, 造成卸货过程难以精确定位。

^① 参见 8.5 节中 8.5.1 的讨论。

数值仿真和实验表明, 使用该方法可使货物快速定位, 加速卸货过程。

习 题

- 1 举例说明混沌现象的基本特征。
- 2 考察单峰映射

$$u_{r+1} = u_r^2 + p, \quad u_0 = 0, \quad p \in [-2, 2]$$

- (1) 讨论参数 p 由 2 逐渐减小时映射所发生的分叉;
- (2) 采用数值方法研究映射随参数 p 变化的行为。
- 3 考察由式(7.2.20)所定义的 Hénon 映射, 从其不动点 $u_{F2} = (-1.5839, -1.5839)$ 附近的某点出发进行反复迭代, 对得到的映射序列进行解释。
- 4 确定系统 $\ddot{u} + u - u^3 = 0$ 的平衡点及其类型, 并写出异宿轨线方程。
- 5 考察平方非线性系统

$$\ddot{u} + u - u^2 = \varepsilon(-\mu\dot{u} + f \cos \omega t)$$

求其对应保守系统的同(异)宿轨线, 并采用 Melnikov 方法求同(异)宿轨横截相交的条件。

- 6 根据式(7.2.20)所定义的 Hénon 映射, 取 $a = 1.3$ 且 $b = 0.3$, 通过数值迭代产生混沌序列。试对参数 a 作微小实时摄动, 采用 OGY 方法控制映射的混沌。

第 8 章 非线性动力系统的数值分析

本书介绍的定量分析方法主要适用于求取低维、弱非线性动力系统的近似解，而定性分析方法主要适用于分析系统的一些局部动力学行为。但工程中大量的动力学问题具有维数高、非线性强、系统参数可变化等特点，有时还必须涉及系统初始状态对系统长期动力学行为的影响这样的全局动力学问题。早在 Euler 时代，人们就意识到，必须发展数值方法来解决非线性动力系统的响应计算问题。但数值分析方法的真正发展和成功应用还要归功于 20 世纪 70 年代以来迅猛发展的计算机技术以及基于几何概念的非线性动力学定性理论。

8.1 瞬态运动计算

系统瞬态运动计算的任务是要用数值方法求解如下常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u} \in R^n, t > t_0 \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (8.1.1)$$

高精度、高效地解决这一问题不仅对于许多实际系统的瞬态响应计算与评估具有重要意义，还将为计算非线性系统各种稳态响应乃至分叉提供基本的工具。

求解问题(8.1.1)的基本思路是：对于给定的终止时刻 t_{end} ，取足够大的正整数 N ，将时间段 $[t_0, t_{\text{end}}]$ 离散为

$$t_k = t_0 + k\Delta t, \Delta t = (t_{\text{end}} - t_0) / N, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (8.1.2)$$

在每个短时间间隔内对方程(8.1.1)积分，根据积分中值定理，存在 $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$ 使得

$$\mathbf{u}(t_{k+1}) = \mathbf{u}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{v}(s), s) ds = \mathbf{u}(t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{v}(s_k), s_k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (8.1.3)$$

显然，若能通过某种计算方法得到上述 $s_k, k = 1, 2, \dots, N$ 的近似值，则可获得 $\mathbf{u}(t)$ 在 $[t_0, t_{\text{end}}]$ 上的离散近似值 $\mathbf{u}_k, k = 1, 2, \dots, N$ 。根据计算 s_k 所采用的信息仅来自区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 或 $[t_{k-j}, t_{k+1}], j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ，计算初值问题(8.1.1)的方法可以分为**单步法**和**多步法**。

鉴于这些方法已比较成熟，在方法的理论基础方面有许多系统性很强的计算数学专著，而各种著名的数学软件包均提供了经过代码优化的程序，使用者一般勿需自己编写程序。因此，本书侧重介绍几种常用方法的基本思路及使用体会。

8.1.1 单步法

最基本的单步法是 **Euler 折线法**。它有向前和向后两种格式，即取 $s_k = t_k$ 或 $s_k = t_{k+1}$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{f}(\mathbf{u}_k, t_k) \Delta t \quad (8.1.4)$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1}, t_{k+1}) \Delta t \quad (8.1.5)$$

式(8.1.5)的右端含有 u_{k+1} , 要解方程才能求出 u_{k+1} , 被称作**隐式算法**。与之相对应, 式(8.1.4)被称作**显式算法**。这两种格式非常简单, 但计算精度比较低。

提高精度的一种自然想法是用向量场的平均代替 $f(u(s_k), s_k)$, 即

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{2}[f(u_k, t_k) + f(u_{k+1}, t_{k+1})]\Delta t \quad (8.1.6)$$

受此启发, 人们采用向量场在 $[t_k, t_{k+1}]$ 内多点的信息构造计算格式, 这就是提高单步法精度的基本思路。现介绍两种最常用的显式单步法。

(1) 4阶定步长 Runge-Kutta 方法

该方法基于对 u_{k+1} 在 u_k 处 Taylor 展开式的修正。一般取到 4 阶导数项。其计算格式为

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \quad (8.1.7)$$

式中

$$\begin{cases} b_1 = f(u_k, t_k)\Delta t, & b_2 = f(u_k + \frac{b_1}{2}, t_k + \frac{\Delta t}{2})\Delta t \\ b_3 = f(u_k + \frac{b_2}{2}, t_k + \frac{\Delta t}{2})\Delta t, & b_4 = f(u_k + b_3, t_k + \Delta t)\Delta t \end{cases} \quad (8.1.8)$$

显然, 这种格式用到了向量场从 (u_k, t_k) 到 (u_{k+1}, t_{k+1}) 之间 4 个点的信息, 即每前进一步要 4 次计算向量场。如果向量场与 u 无关, 则该方法简化为计算定积分的 Simpson 格式

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{6}[f(t_k) + 4f(t_k + \frac{\Delta t}{2}) + f(t_{k+1})] \quad (8.1.9)$$

Runge-Kutta 法具有中等求解精度, 并且计算格式非常简单, 所以应用很广。MAPLE 和 MATLAB 等数学计算软件平台上均有这一算法。该方法的一个不足是使用者需要根据经验事先给定步长。根据作者的经验, 如果能事先估计到计算结果中最高谐波分量的频率 f_{\max} , 可根据计算精度要求取积分步长 Δt 为

$$\frac{1}{50f_{\max}} \leq \Delta t \leq \frac{1}{10f_{\max}} \quad (8.1.10)$$

(2) 3—4 阶 Runge-Kutta-Fehlberg 方法

为了改进定步长 Runge-Kutta 方法的上述不足, Fehlberg 提出分别用 p 阶和 $p+1$ 阶定步长 Runge-Kutta 法完成一步积分, 然后根据结果的差异对当前积分步长进行修正, 对下一步积分步长给出预估。

以 3—4 阶计算格式为例, 先依次用下述格式计算步长为 Δt_k 时的积分

$$\hat{u}_{k+1} = u_k + \sum_{j=1}^3 c_j f_j, \quad \tilde{u}_{k+1} = u_k + \sum_{j=1}^4 d_j f_j \quad (8.1.11)$$

$$f_j = f(u_k + \sum_{i=0}^{j-1} b_{ji} f_i \Delta t_k, t_k + a_j \Delta t_k), \quad j=0,1,2,3,4 \quad (8.1.12)$$

其中诸系数见表 8.1.1。这样构造格式的方便之处是, 对向量函数的定值 $f_j, j=0,1,2,3$ 在计算 \hat{u}_{k+1} 和 \tilde{u}_{k+1} 时可公用, 所以共计算向量函数 5 次, 而不是 $3+4=7$ 次。

表 8.1.1 3-4 阶 Runge-Kutta-Fehlberg 方法的系数

j	a_j	b_{ji}				c_j	d_j
		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$		
0	0	0	—	—	—	$\frac{79}{490}$	$\frac{229}{1470}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	—	—	—	0	0
2	$\frac{7}{15}$	$\frac{77}{900}$	$\frac{343}{900}$	—	—	$\frac{2175}{3626}$	$\frac{1125}{1813}$
3	$\frac{35}{38}$	$\frac{805}{1444}$	$\frac{77175}{54872}$	$\frac{97125}{54872}$	—	$\frac{2166}{9065}$	$\frac{13718}{81585}$
4	1	$\frac{79}{490}$	0	$\frac{2175}{3626}$	$\frac{2166}{9065}$	—	$\frac{1}{18}$

然后, 检查两种方法的差异: 若对于给定的误差上限 $\varepsilon > 0$, 有 $\|\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_{k+1}\| > \varepsilon$, 则表明步长 Δt_k 过大, 可将其减少一半后重新计算。若 $\|\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_{k+1}\| \leq \varepsilon$, 则表明这步积分是成功的, 下一步的积分步长可预估为

$$\Delta t_{k+1} = \alpha \Delta t_k \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\|\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_{k+1}\|}}, \quad \alpha = 0.9 \sim 0.95 \quad (8.1.13)$$

一般地, 若用 p 阶和 $p+1$ 阶定步长 Runge-Kutta 格式, 则将上式中根号次数改为 $p+1$ 。这种方法的优点是精度可事先给定, 不足之处是程序比较长。

8.1.2 多步法*

单步法在完成由 t_k 时刻到 t_{k+1} 时刻的积分时没有利用 t_k 之前已有的信息, 从而计算精度受到影响。而为了提高精度, 不得不多次计算从 (\mathbf{u}_k, t_k) 到 $(\mathbf{u}_{k+1}, t_{k+1})$ 的向量场, 增加了计算工作量。采用多步法则可改善这一不足。当然, 多步法无法用于整个求解过程的第一步或头几步的计算, 这又需要单步法的帮助。

多步法的基本思路是利用在 t_k 之前求解过程中获得的信息 $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \dots, \mathbf{u}_{k-m+1}$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{u}_k, t_k), \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-1}, t_{k-1}), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-m+1}, t_{k-m+1})$, 构造区间 $[t_{k-m+1}, t_{k+1}]$ 上的插值多项式向量, 用它代替原向量函数在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上积分, 进而得到 \mathbf{u}_{k+1} 。

一般地, 可将多步法的计算格式写为

$$\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \mathbf{u}_{k-j} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-j}, t_{k-j}) \Delta t \quad (8.1.14)$$

其中 $2m+1$ 个系数 $a_j, b_{-1}, b_j, j=0, 1, \dots, m-1$ 将由 m 次插值多项式在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 的积分值所确定。如果 $b_{-1} = 0$, 则格式是显式的; 否则是隐式的, 需要解方程得到 \mathbf{u}_{k+1} 。根据不同的选择, 常用的几种多步法如下。

(1) Admas-Bashforth 预测法

记插值多项式的次数为 K ，该方法选定

$$m = K, \quad a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad b_{-1} = 0 \quad (8.1.15)$$

然后构造多项式，积分得到 $K+1$ 个系数如表 8.1.2。显然，其 1 阶格式就是 Euler 向前法。

表 8.1.2 Adams-Bashforth 方法的系数

阶次 K	a_0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
3	1	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	0	0
4	1	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$-\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	0	0
5	1	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$	0
6	1	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{9982}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{475}{1440}$

(2) Admas-Moulton 校正法

这种方法取

$$m = K - 1, \quad a_0 = 1, \quad a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K - 1 \quad (8.1.16)$$

然后构造多项式，积分得到 K 个系数如表 8.1.3 所示。该方法是隐式的，其 1 阶格式就是 Euler 向后法。

表 8.1.3 Adams-Moulton 方法的系数

阶次 K	a_0	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
3	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	0	0
4	1	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0
5	1	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$	0
6	1	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$

一般来说, 隐式算法比同阶次的显式算法精度高, 数值稳定性好。但隐式算法需要求解关于未知向量 \mathbf{u}_{k+1} 的非线性方程。以 Admas-Moulton 方法为例, 需要求解

$$\overset{\text{def}}{\mathbf{g}(\mathbf{u}_{k+1})} = [\mathbf{u}_{k+1} - b_{-1}\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-j}, t_{k-j})\Delta t] - [a_0\mathbf{u}_k + \sum_{j=0}^{m-1} b_j\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-j}, t_{k-j})\Delta t] = 0 \quad (8.1.17)$$

因积分步长一般不会很大, 可取 \mathbf{u}_k 作为 \mathbf{u}_{k+1} 的近似, 采用 8.2 节将要介绍的 Newton-Raphson 迭代法求出给定精度的 \mathbf{u}_{k+1} 。当然, 这会增加计算工作量。

(3) Gear 方法

这种方法取

$$m = K, \quad b_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, K \quad (8.1.18)$$

然后构造多项式, 积分得到 $K+1$ 个系数如表 8.1.4 所示。该方法也是隐式的, 其 1 阶格式仍是 Euler 向后法。

表 8.1.4 Gear 方法的系数

阶次 K	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_{-1}
1	1	0	0	0	0	0	1
2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	0	0	$\frac{6}{11}$
4	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$	0	0	$\frac{12}{25}$
5	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$	0	$\frac{60}{137}$
6	$\frac{360}{147}$	$-\frac{450}{147}$	$\frac{400}{147}$	$-\frac{225}{147}$	$\frac{72}{147}$	$-\frac{10}{147}$	$\frac{60}{147}$

Gear 方法除了具有一般隐式算法的优点外, 还适合于求解刚性微分方程。所谓**刚性微分方程**是指方程的解中包含频率相差悬殊的重要成分。例如, 由刚硬弹簧联接的两柔性部件系统的运动明显具有这种特征。又如, 在多柔体系统中, 部件高频弹性振动叠加在极低频率的刚体运动之上。对非线性动力系统的高频激励常常会诱发低频振动, 所以兼顾高低频振动成分的精度对于计算结果的可靠性非常重要。为了保证结果中高频成分的精度, 需要用很小的积分步长, 从而产生过大的累积误差; 而为了照顾低频成分的精度, 应采用比较大的积分步长, 从而产生过大的截断误差; 这就是困难所在。人们对刚性微分方程的计算已做了大量研究, 目前 Gear 方法是最常用的算法。

8.1.3 应用中的问题*

(1) 方法的选择

首先, 所介绍的几种方法各有特色。一般来说, 若采用定步长方法, 各种方法在计算精度和效率上差异并不大。然而, 对一些特殊问题, 不同方法的效果是不同的。例如:

a. 如果微分方程向量场具有不光滑甚至间断切换面, 则采用低阶单步法比较好。因为, 高阶方法和多步法通常隐含了对向量场高阶光滑性的要求。

b. 如果向量场的表达式非常复杂, 采用多步法的效率优于单步法。对 **Admas-Bashforth** 预测法, 每步只需补充计算向量场一次, 对于 **Admas-Moulton** 校正法, 每步的计算次数取决于 **Newton-Raphson** 迭代次数。

c. 对于刚性微分方程, 只有 **Gear** 方法有效。

(2) 变积分步长的考虑

根据 **Runge-Kutta-Fehlberg** 方法的理论和实践, 在计算中对方法的阶次和积分步长进行优化可以提高计算精度及效率。因此, 大型计算数学软件包中提供的各种方法通常具有变阶次和变步长功能。上述多步法需要等间隔构造插值函数。一旦改变步长, 势必要通过插值来计算解在过去若干离散时刻的值并重新计算向量场, 使多步法的优点大打折扣。放弃等间隔构造插值函数的多步法见文献[39]。

此外, 若需对计算结果进行时间序列分析或 **FFT** 计算, 使用变步长方法时需要对计算任务或计算结果作特殊处理。要么事先指定所需的时间间隔 $[t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots$, 仅在各间隔内允许变步长; 要么对变步长计算结果进行插值, 获得所需时刻的解向量。

(3) 选择其他方法的可能性

工程问题的多样性和复杂性还促使人们发展了一些具有鲜明特色的方法。目前, 在计算工程动力学问题时常用到如下两类特色互补的方法。

a. 结构动力学中的直接积分法

柔性结构的动力学方程经离散后是二阶常微分方程组, 自由度高达成千上万。若将其改为一阶常微分方程组, 则是维数惊人的问题, 计算量极大。而像地震响应分析等结构动力学问题所涉及的响应时间历程并不长, 精度要求不是很高。所以, 力学家们针对二阶常微分方程组的特点, 提出了一些精度不高, 但计算效率比较高的算法, 例如中心差分法、**Wilson- θ** 法、**Newmark** 法以及样条 - 加权残数法等^[39,40]。这些方法已在许多结构动力学教科书中介绍, 并被广泛地配置于有限元计算软件。

b. 辛算法

尽管本节所介绍的方法具有比较高的计算精度, 但出于数值稳定性的考虑, 它们一般被设计成是自身耗散的, 即具有所谓**计算阻尼**。例如, 用 4 阶定步长 **Runge-Kutta** 方法计算单自由度无阻尼系统的自由振动, 经过 10 万步积分, 相轨线会自行趋于平衡点。出于计算 **Hamilton** 系统的长期动力学行为需要, 计算数学家根据 **Hamilton** 系统所具有的辛几何结构, 提出了**辛算法**^[41]。这种算法本身是一种保(面)积变换, 不会引入计算阻尼, 可有效提高计算保守系统长期动力学问题的精度。这类算法也可提高弱阻尼系统以及其他接近失稳系统的长期动力学计算精度。

8.2 稳态运动的计算

对于耗散系统, 其相轨线总是随着时间延续而趋于某一渐近稳定的吸引子。根据 7.3 节的讨论, 这种吸引子可能是平衡点、周期运动、概周期运动乃至混沌运动。其中, 系统的平

平衡点和周期运动是工程师最为关心的。

如果采用计算系统瞬态响应的办法来求解稳态响应, 则有如下问题: 一是只能求得渐近稳定的稳态响应, 二是计算时间太长, 对于接近失稳的吸引子尤为耗时。因此, 本节讨论计算非线性动力系统平衡点和周期运动的专门方法。

8.2.1 平衡点的求解

求解非线性动力系统的平衡点是一静力学问题, 归结为寻求 n 维向量 \mathbf{u} 满足如下非线性代数方程

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} \in R^n \quad (8.2.1)$$

其中光滑函数 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 是动力系统的向量场。如果将此作为一般的数学问题求解, 则非常困难。因为无论是解的数目, 还是解向量 \mathbf{u} 在 R^n 中的大致分布皆悬而未知。纯粹从计算数学角度提出的方法可参见文献[42]。

对于许多工程问题, 其背景可提供一些解决上述问题的有用信息。例如对于单自由度自治系统, 其平衡方程为

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ p(u_1, u_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.2.2)$$

由此得平衡点位置坐标应满足的一元非线性方程

$$p(u_1, 0) = 0 \quad (8.2.3)$$

如果 $p(u_1, 0)$ 是关于 u_1 的多项式, 可用多项式求根程序获得其全部根; 否则, 可在工程问题所给定的位移范围内, 用对分法求出全部根。从而获得全部平衡点 $(u_{1k}, 0), k = 1, 2, \dots$ 。

对于多自由度系统, 如果可猜测出待求解向量 \mathbf{u} 的某一近似, 则可采用下述 Newton-Raphson 迭代法求得解向量 \mathbf{u} 。若不然, 则采用下述的参数延续算法。

(1) Newton-Raphson 迭代法

设已知方程(8.2.1)解向量的 \mathbf{u}_s 一个粗略估计 \mathbf{u}_k , 但代入方程(8.2.1)后残差过大。即对于给定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}_k)\| \geq \varepsilon \quad (8.2.4)$$

构造迭代解 \mathbf{u}_{k+1} , 使得

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}_k) + D\mathbf{f}(\mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) = 0 \quad (8.2.5)$$

如果向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 的 Jacobi 矩阵 $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_k)$ 可逆, 则由式(8.2.5)可解出

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - [D\mathbf{f}(\mathbf{u}_k)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{u}_k) \quad (8.2.6)$$

此时若

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1})\| < \varepsilon \quad (8.2.7)$$

则取 $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{k+1}$, 结束迭代。否则重复上述过程。由于在上述计算过程中已得到近似的 Jacobi 矩阵 $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_s)$, 因此可顺便计算其特征值, 判断平衡点的稳定性。

在数学上可证明, Newton-Raphson 迭代法具有超线性收敛速度。在实践中, 一般 3~4 次迭代即可获得满足工程精度需要的解向量。该方法的一个不足之处是, 它对初始迭代向量的要求比较高。若迭代 7~8 次后方程的残差仍不理想, 一般应考虑更换初始迭代向量。

(2) 参数延续算法

选择某一系统参数 (或引入一参数) $p \in R^1$, 将方程(8.2.1)改写为

$$f(u, p) = 0, \quad u \in R^n, \quad p \in R^1 \quad (8.2.8)$$

使得当参数 p 取某一常数 p_0 时, 方程

$$f(u, p_0) = 0, \quad u \in R^n \quad (8.2.9)$$

成为线性方程或易于求解的方程。将参数区间 $[p_0, p]$ (或 $[p, p_0]$) 离散为 $p_0, p_1, \dots, p_n = p$, 记方程(8.2.9)和(8.2.8)的解分别为 $u(p_0)$ 和 $u(p)$ 。显然, 原任务便可简化为: 从方程(8.2.9)求解 $u(p_0)$; 然后以 $u(p_0)$ 作为 $u(p_1)$ 的近似, 通过 Newton-Raphson 迭代法求得 $u(p_1)$; 如此重复, 直至求得 $u(p)$ 。

需要指出的是: 在使用参数延续算法求解过程中, 可能会有某一参数值 p_k 使得矩阵 $Df(u(p_k))$ 不可逆, 从而导致 Newton-Raphson 迭代法失败。根据定义 6.5.1, 这种现象对应于系统平衡点的静态分叉。如何处理分叉问题留待 8.3 节讨论。

8.2.2 周期运动的求解

考察具有周期激励的 n 维非自治系统

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t), \quad u \in R^n, \quad t > 0 \quad (8.2.10)$$

其中

$$f(u, t) = f(u, t + T_0), \quad \forall t > 0, \quad T_0 > 0 \quad (8.2.11)$$

现讨论如何求解该系统的 m 倍周期运动

$$u(t) = u(t + T), \quad \forall t > 0, \quad T = mT_0, \quad m \text{ 为正整数} \quad (8.2.12)$$

与平衡点相比, 周期运动的存在性和数目是更为困难的问题。在工程中, 一般仅求解出所关心的一部分周期运动。此处给出两种方法, 即打靶法和增量谐波平衡法。

(1) 打靶法

在 $n+1$ 维空间中定义 n 维 Poincaré 截面

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, t) \mid \text{mod}(t, T) = 0\} \quad (8.2.13)$$

然后在 Σ 上定义 Poincaré 映射

$$P(u) = u + \int_0^T f(v(s), s) ds, \quad u \in \Sigma \quad (8.2.14)$$

以及 Σ 上的非线性算子方程

$$Q(u) \stackrel{\text{def}}{=} P(u) - u = 0, \quad u \in \Sigma \quad (8.2.15)$$

显然, 系统 m 倍周期运动(8.2.12)与 Poincaré 截面 Σ 的交点 \mathbf{u}_F 就是 Poincaré 映射的不动点, 即方程(8.2.15)的解向量。

根据 8.2.1 的讨论, 求解方程(8.2.10)的周期运动可归结为求解方程(8.2.15)的解向量 \mathbf{u}_F 。一般可采用参数延续算法获得 \mathbf{u}_F 的一个近似 $\mathbf{u}_k \in \Sigma$, 然后用 Newton-Raphson 方法构成下述迭代式, 进而确定更加接近 \mathbf{u}_F 的向量 \mathbf{u}_{k+1}

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k - DQ(\mathbf{u}_k)^{-1} Q(\mathbf{u}_k) \\ &= \mathbf{u}_k - [DP(\mathbf{u}_k) - I]^{-1} [P(\mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k]\end{aligned}\quad (8.2.16)$$

不难看出, 这种求解过程是先将近似不动点 $\mathbf{u}_k \in \Sigma$ 映射为 $P(\mathbf{u}_k) \in \Sigma$, 然后根据误差 $[P(\mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k]$ 作修正, 获得新的近似不动点 \mathbf{u}_{k+1} , 再进行映射并检查误差, 犹如打靶。因此, 人们称这种方法为**打靶法**。

在实际计算时, 将点 \mathbf{u}_k 的 Poincaré 映射(8.2.14)视作如下初值问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), & \mathbf{u} \in R^n \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_k \end{cases}\quad (8.2.17)$$

在 $t = T$ 时刻的解, 即 $P(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}(T)$ 。这可以用 8.1 节的方法来获得。而根据定理 6.4.7, Poincaré 映射在 \mathbf{u}_k 处的 Jacobi 矩阵可归结为如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = Df(\mathbf{u}, t) \Phi, & \Phi \in R^{n \times n} \\ \Phi(0) = I \end{cases}\quad (8.2.18)$$

在 $t = T$ 时刻的解, 即 $DP(\mathbf{u}_k) = \Phi(T)$ 。由于 $\Phi(T)$ 可按列分别计算, 从而也可用 8.1 节的方法来完成, 相当于求解 n 个初值问题。因此, 每步打靶过程要计算 $n+1$ 个初值问题。

与计算平衡点时相类似, 由于在计算过程中得到了 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵 $DP(\mathbf{u}_F)$, 因此可顺便计算其特征值, 判断周期运动的稳定性。当 Jacobi 矩阵 $DP(\mathbf{u}_F)$ 具有特征值 1 时, 矩阵 $DQ(\mathbf{u}_F)$ 不可逆, 求解过程将遇到困难。这对应于周期运动的静态分叉, 8.3 节将对此进行讨论。

最后需要指出, 上述格式的打靶法仅适用于周期激励的非自治系统。对于自治系统来说, 其周期运动的周期 T 一般是未知的。此时, 需要对打靶过程进行改进, 将周期 T 也作为待求的未知量^[39]。

(2) 增量谐波平衡法^[43]

仍考察非自治系统(8.2.10)的周期解问题。设 $\mathbf{u}(t)$ 是待求周期运动(8.2.12)的一个近似解, 记其修正解为

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) + \Delta \mathbf{u}(t) \quad (8.2.19)$$

将修正解代入方程(8.2.10)后取线性近似, 得到增量 $\Delta \mathbf{u}(t)$ 所满足的微分方程

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = Df(\mathbf{u}, t) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{u}} \quad (8.2.20)$$

现在的任务是求解增量 $\Delta \mathbf{u}(t)$, 进而获得更接近于真实解的 $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ 。

如果将 $\mathbf{u}(t)$ 和 $\Delta \mathbf{u}(t)$ 皆限定于周期函数空间内, 其有限 Fourier 展开为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=0}^N (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t), \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{T} \quad (8.2.21)$$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \sum_{k=0}^N (\Delta \mathbf{a}_k \cos k\omega t + \Delta \mathbf{b}_k \sin k\omega t) \quad (8.2.22)$$

其中 $\mathbf{a}_k \in R^n, k=0,1,\dots,N$ 和 $\mathbf{b}_k \in R^n, k=1,2,\dots,N$ 是 $2N+1$ 个已知的参数向量, 而 $\Delta \mathbf{a}_k \in R^n, k=0,1,\dots,N$ 和 $\Delta \mathbf{b}_k \in R^n, k=1,2,\dots,N$ 是 $2N+1$ 个未知向量。将式(8.2.21)和(8.2.22)代入方程(8.2.20), 得到具有时变系数的线性代数方程

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{P}_k(t) \Delta \mathbf{a}_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_k(t) \Delta \mathbf{b}_k = \mathbf{r}(t) \quad (8.2.23)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{P}_k(t) = Df\left(\sum_{k=0}^N (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t), t\right) \cos k\omega t + (k\omega \sin k\omega t) \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_k(t) = Df\left(\sum_{k=0}^N (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t), t\right) \sin k\omega t - (k\omega \cos k\omega t) \mathbf{I} \\ \mathbf{r}(t) = f\left(\sum_{k=0}^N (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t), t\right) + \sum_{k=0}^N (k\omega)^2 (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t) \end{cases} \quad (8.2.24)$$

\mathbf{I} 为单位阵。采用 Galerkin 方法可将方程(8.2.24)化为 $2N+1$ 个线性代数方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^N (\mathbf{A}_{kj} \Delta \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_{kj} \Delta \mathbf{b}_k) = \mathbf{E}_j, & j=0,1,2,\dots,N \\ \sum_{k=0}^N (\mathbf{C}_{kj} \Delta \mathbf{a}_k + \mathbf{D}_{kj} \Delta \mathbf{b}_k) = \mathbf{F}_j, & j=1,2,\dots,N \end{cases} \quad (8.2.25)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{kj} = \int_0^T \mathbf{P}_k(t) \cos j\omega t dt, & \mathbf{B}_{kj} = \int_0^T \mathbf{Q}_k(t) \cos j\omega t dt, & \mathbf{C}_{kj} = \int_0^T \mathbf{P}_k(t) \sin j\omega t dt \\ \mathbf{D}_{kj} = \int_0^T \mathbf{Q}_k(t) \sin j\omega t dt, & \mathbf{E}_j = \int_0^T \mathbf{r}(t) \cos j\omega t dt, & \mathbf{F}_j = \int_0^T \mathbf{r}(t) \sin j\omega t dt \end{cases} \quad (8.2.26)$$

由方程(8.2.25)解出 $\Delta \mathbf{a}_k \in R^n, k=0,1,\dots,N$ 和 $\Delta \mathbf{b}_k \in R^n, k=1,2,\dots,N$, 代回式(8.2.22)即得到增量 $\Delta \mathbf{u}(t)$, 进而由式(8.2.19)得到修正解 $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ 。

此时, 若 $\|\Delta \mathbf{u}(t)\|/\|\mathbf{u}(t)\|$ 已足够小, 则表明不必继续修正。否则, 将修正解再作为近似解 $\mathbf{u}(t)$ 重复上述过程, 直至 $\|\Delta \mathbf{u}(t)\|/\|\mathbf{u}(t)\|$ 足够小为止。

(3) 对两种方法的进一步讨论^[44]

a. 从求解工作量看: 打靶法是在 Poincaré 截面 $\Sigma \subset R^n$ 上寻找不动点 \mathbf{u}_F , 其计算过程涉及到求解 $n+1$ 个 n 维常微分方程初值问题以及求解一个 n 维的线性代数方程; 增量谐波平衡法则是在空间 $R^{(2N+1)n}$ 中寻找一解向量 $[\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_N^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{b}_N^T]^T$, 其求解过程涉及到计算式(8.2.26)中 $(2N+1)(2N+2)n^2$ 个数值积分和求解一个 $(2N+1)n$ 维线性代数方程。自然, 后者的计算量大。

b. 从求解精度看: 打靶法求出的是近似周期运动, 增量谐波平衡法则是精确的周期运动。

但后者的正确性依赖于对谐波成分的正确假设。

c. 从数值稳定性看：增量谐波平衡法比较好，打靶法则与待求周期运动关于初始条件的敏感性有关。因此，已有学者在时间段 $[0, T]$ 上建立多个 Poincaré 截面，将原来的 Poincaré 映射分解为几个映射的复合，构成了多级打靶法^[39]。

d. 这两种方法本质上都是 Newton-Raphson 迭代法，需要计算 Jacobi 矩阵 $Df(u, t)$ 。当系统含有间隙、预紧约束、干摩擦等非光滑因素时，计算 $Df(u, t)$ 要做特殊处理。为此，作者提出一种曲线拟合法，可免去计算 $Df(u, t)$ ，通过系统瞬态响应来预测周期运动^[45]。

8.3 局部分叉的计算

根据 6.7 节的分析，引入 Poincaré 映射后，周期运动的分叉归结为不动点的分叉，从而与平衡点的分叉有相似之处。本节着重讨论平衡点分叉的计算方法，读者不难将其推广到周期运动的分叉。

8.3.1 分叉计算的任务

考察含有参数 p 的系统平衡方程

$$f(u, p) = 0, \quad u \in R^n, \quad p \in R^1 \quad (8.3.1)$$

设已得到参数 $p = p_0$ 时系统的一个平衡点 $u(p_0) = u_0$ ，不失一般性，现讨论参数 $p > p_0$ 时系统平衡点 $u(p)$ 的演化情况。这一问题不仅具有广泛的实际背景，而且与 8.2 节中的参数延续算法密切相关。

为了求解 $p > p_0$ 时系统的平衡点 $u(p)$ ，将方程(8.3.1)对参数 p 求导数，得到

$$A(u, p)u' + D_p f(u, p) = 0 \quad (8.3.2)$$

其中

$$A(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} D_u f(u, p), \quad u' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{du}{dp} \quad (8.3.3)$$

如果对于任意的 $p > p_0$ ，下述条件得以满足

$$\det A(u, p) \neq 0 \quad (8.3.4)$$

则可由(8.3.2)得到 $p > p_0$ 时系统平衡点 $u(p)$ 所满足的初值问题

$$\begin{cases} u' = -A(u, p)^{-1} D_p f(u, p) \\ u(p_0) = u_0 \end{cases} \quad (8.3.5)$$

这样就可从 $u(p_0)$ 出发，采用 8.1 节的数值积分方法求得平衡点 $u(p)$ 。条件(8.3.4)意味着随着参数 p 的变化，平衡点 $u(p)$ 不出现静态分叉。

如果条件(8.3.4)不能满足，则存在某一参数 p_c 使平衡点 $u_c = u(p_c)$ 成为方程(8.3.1)的奇异点。从计算平衡点的角度看，需要解决以下两个问题：一是随着参数 p 的增加，如何准确定位分叉参数值 $p = p_c$ ？二是如何处理 $p > p_c$ 后平衡点 $u(p)$ 的求解问题？

8.3.2 奇异点的确定

为了在计算过程中确定分叉点，定义一**检验函数**如下

$$q(u, p) \stackrel{\text{def}}{=} \det A(u, p) \quad (8.3.6)$$

显然，它满足 $q(u_c, p_c) = 0$ 。

参考图 8.3.1，根据当前（第 k 步）的检验函

数值 $q_k \stackrel{\text{def}}{=} q(u(p_k), p_k)$ 以及前一步的检验函数值

$q_{k-1} \stackrel{\text{def}}{=} q(u(p_{k-1}), p_{k-1})$ ，可写出

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{p_k - p_c}{p_{k-1} - p_c} \quad (8.3.7)$$

由此得到线性插值预报

$$p_c = \frac{p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}}{q_k - q_{k-1}} \quad (8.3.8)$$

为了提高定位的准确性，当 $q_{k-1}q_k < 0$ 时，可在 $[p_{k-1}, p_k]$ 内用对分法、0.618 法或 Newton-Raphson 迭代法获得 p_c 。

8.3.3 通过奇异点*

根据 6.5 节知，奇异点分为转折点和分叉点两类。以下分别讨论这两种情况。

(1) 转折点

先考察一维系统的平衡方程，在转折点 (u_c, p_c)

处，平衡方程的偏导数满足

$$Df_u(u_c, p_c) = 0, \quad Df_p(u_c, p_c) \neq 0 \quad (8.3.9)$$

方程的解曲线是图 8.3.2 所示的“抛物线”，在转折点附近关于参数 p 平衡点的 u 值不唯一。受图 8.3.2 的启发，可以颠倒 u 和 p 的功能，将 p 作为待求的未知量，以 u 作为参数，在转折点 (u_c, p_c) 附近寻求函数关系 $p(u)$ 。更一般地，可引进新的参数 s ，寻求参数形式的解曲线方程。

对于 n 维系统的平衡方程(8.3.1)，转折点 (u_c, p_c) 所满足的条件是

$$\text{rank}[D_u f(u_c, p_c)] = n-1, \quad \text{rank}[D_u f(u_c, p_c) \quad D_p f(u_c, p_c)] = n \quad (8.3.10)$$

选择与转折点 (u_c, p_c) 非常邻近的点 (u_k, p_k) 为参考点（其中 $p_k < p_c$ ），以从该点起度量的弧长 s 为参数，寻求参数形式的解曲线方程

$$u = u(s), \quad p = p(s), \quad s > 0 \quad (8.3.11)$$

其中弧长 s 足够短，从而满足

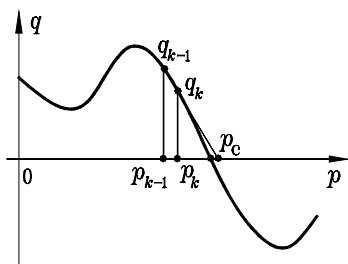


图 8.3.1 基于两点插值的预报

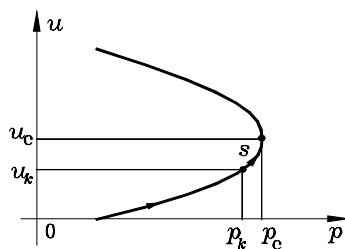


图 8.3.2 通过转折点

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_k) + (p - p_k)^2 - s^2 = 0 \quad (8.3.12)$$

将方程(8.3.1)和(8.3.12)合并, 写成扩维的平衡方程

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, p, s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}(s), p(s)) \\ [\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_k]^T [\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_k] + [p(s) - p_k]^2 - s^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (8.3.13)$$

将上式对弧长 s 求导数得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) & \mathbf{D}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) \\ 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k)^T & 2(p - p_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2s \end{bmatrix} = 0 \quad (8.3.14)$$

其中 $(\)' \stackrel{\text{def}}{=} d/ds$ 。根据条件(8.3.10), 有

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}_c, p_c) & \mathbf{D}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_c, p_c) \\ 2(\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_k)^T & 2(p_c - p_k) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (8.3.15)$$

因此, 可由方程(8.3.14)解出导数 \mathbf{u}' 和 p' , 构成初值问题

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) & \mathbf{D}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) \\ 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k)^T & 2(p - p_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ p_k \end{bmatrix} \quad (8.3.16)$$

通过求解初值问题(8.3.16), 可使参数延续算法顺利通过转折点 (\mathbf{u}_c, p_c) 。该方法通常被称作**弧长方法**。

以一维平衡方程为例, 其对应的初值问题(8.3.16)是

$$\begin{bmatrix} u' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \frac{u - u_k}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ p_k \end{bmatrix} \quad (8.3.17)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{D_u f(u, p)}{D_p f(u, p)(u_k - u)} = O(\|u - u_c\|) \quad (8.3.18)$$

若视 ε 在 (u_c, p_c) 附近定常, 则由(8.3.17)可解出以弧长为参数的近似解曲线

$$\begin{cases} (u - u_k)^2 = s^2 \\ p - p_k = \varepsilon s \end{cases} \quad (8.3.19)$$

消去弧长参数得“抛物线”方程

$$p = p_k + \varepsilon(u - u_k)^2 \quad (8.3.20)$$

(2) 静态分叉点

仍先考察一维系统的平衡方程, 在静态分叉点 (u_c, p_c) 处, 平衡方程的偏导数满足

$$Df_u(u_c, p_c) = 0, \quad Df_p(u_c, p_c) = 0 \quad (8.3.21)$$

而其二阶偏导数满足 6.5 节中的某一种非退化条件。图 8.3.3 是这种情况下的典型解曲线, 在分叉点 (u_c, p_c) 处, 有两条以上的解曲线发生交叉。这时, 可以从原方程出发, 用优化方法 (例如 Powell 单纯形方法^[42]) 搜索出解曲线在分叉点所有可能的分支方向, 然后逐一选择这些方向, 继续进行求解。

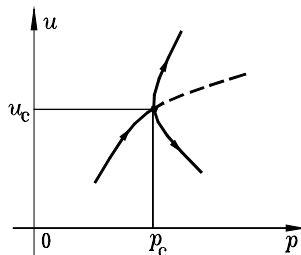


图 8.3.3 通过分叉点

现考察由方程(8.3.1)描述的含参数 p 的 n 维系统平衡点静态分叉问题。当前的主要任务是将问题降维, 然后用优化方法确定各解支在分叉点的切方向。

将参数 p 也视作状态变量, 则系统在 $n+1$ 维空间中的平衡方程为

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{v}) \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{u}, p) \in R^{n+1} \quad (8.3.22)$$

定义 $n+1$ 阶方阵

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) & \mathbf{D}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3.23)$$

分叉点 $\mathbf{v}_c = (\mathbf{u}_c, p_c)$ 应满足的条件是

$$\text{rank} \mathbf{A}(\mathbf{v}_c) = \text{rank} [\mathbf{D}_u \mathbf{f}(\mathbf{u}_c, p_c) \quad \mathbf{D}_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_c, p_c)] < n \quad (8.3.24)$$

这说明 $n+1$ 阶方阵 $\mathbf{A}(\mathbf{v}_c)$ 至少有 $m \geq 2$ 个零特征值, 记 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是与这些零特征值对应的一组线性无关特征向量, 则 $\mathbf{A}(\mathbf{v}_c)$ 的零空间为

$$N(\mathbf{A}(\mathbf{v}_c)) = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \quad (8.3.25)$$

它与 \mathbf{v}_c 的中心流形相切。根据中心流形定理, 如果以 $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ 为向量场构成动力系统, 其平衡点只能位于中心流形上。因此, 可以设平衡方程(8.3.22)在 \mathbf{v}_c 附近的解为

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_c + \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k \quad (8.3.26)$$

以下讨论如何确定上式中的系数 a_1, \dots, a_m 。

设近似解(8.2.26)使 $\|\mathbf{f}(\mathbf{v})\|_2$ 在以 \mathbf{v}_c 为球心、以 d 为半径的球面 $S_d(\mathbf{v}_c)$ 上取极小值

$$\min_{\mathbf{v} \in S_d(\mathbf{v}_c)} \|\mathbf{f}(\mathbf{v})\|_2 \quad (8.3.27)$$

引入 Lagrange 乘子 b , 可将式(8.3.27)化为无条件极值问题

$$\min [\|\mathbf{f}(\mathbf{v})\|_2 + b(\sum_{k=1}^m a_k^2 - d^2)] \quad (8.3.28)$$

从而可导出极值必要条件

$$\begin{cases} \varphi_k^T \mathbf{A}^T(\mathbf{v}) \mathbf{f}(\mathbf{v}) + 2ba_k = 0, & k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{k=1}^m a_k^2 - d^2 = 0 \end{cases} \quad (8.3.29)$$

或更具体的

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{A}^T (\mathbf{v}_c + \sum_{k=1}^m a_k \boldsymbol{\varphi}_k) \mathbf{f}(\mathbf{v}_c + \sum_{k=1}^m a_k \boldsymbol{\varphi}_k) + 2ba_k = 0, & k=1, 2, \dots, m \\ \sum_{k=1}^m a_k^2 - d^2 = 0 \end{cases} \quad (8.3.30)$$

这是一组已降维至 $m+1$ 的非线性方程。在多数实际问题中 $2 \leq m \ll n$ ，可以用 Powell 单纯形法找出该方程组全部可能的解，代回式(8.3.26)得到近似解。

在许多实际问题中 $m=2$ ，且只有两个解支在分叉点相交，例如跨临界分叉和叉型分叉。由于一个解的半个分支已由参数延续法求出，可以记向量 $\boldsymbol{\psi}_1$ 为该解支在分叉点的切矢量，而取另一解支的试探切矢量为满足如下正交条件的单位矢量 $\boldsymbol{\psi}_2$

$$\boldsymbol{\psi}_1^T \boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\psi}_1^T (a_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + a_2 \boldsymbol{\varphi}_2) = 0 \quad (8.3.31)$$

然后取

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \delta \boldsymbol{\psi}_2, \quad \delta = O(\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_c\|) \quad (8.3.32)$$

作为试探解，通过 Newton-Raphson 迭代法提高其逼近真实解支的程度。

高维动力系统平衡点的分叉计算是一个尚未完全解决的问题。20 世纪末期的主要研究进展可参见文献[46]，该文还讨论了本书没有涉及的 Hopf 分叉计算方法。

8.4 全局特性的计算*

有限维非线性动力系统的全局特性分析主要研究系统初始状态对系统长时间历程动力学行为的影响。具体地说，对于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \Omega \subset R^n \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (8.4.1)$$

就是要研究初始条件 $\mathbf{u}_0 \in \Omega \subset R^n$ 对稳态解 $\mathbf{u}(t)$ 的影响。对这一问题进行理论研究的难度很大，目前仅对二维自治系统获得了比较完整的研究结果。如果从数值计算角度研究该问题，从原则上讲可以将区域 Ω 离散为具有代表性的点集，然后以点集中每一点作为系统初始状态，采用 8.1 中的方法计算初值问题至足够长的时间，记下系统的稳态运动行为。这种方法理论上可行，但计算量很大。以 $n=3$ 的 Lorenz 系统为例，若将所关心的立方体区域 Ω 离散为 100^3 个点，用双精度 Runge-Kutta 法计算自每点出发的相轨线至 1000 步，总计数值积分 10^9 步。这在 Pentium-III 计算机上大约需要 4 个小时。因此，这种方法很少使用。

8.4.1 胞映射方法

这是美国学者 Hsu（徐皆苏）在 20 世纪 80 年代初提出的一种方法，已被成功地应用于研究 $n=2, 3, 4$ 等低维况下非线性动力系统的全局特性分析。

现以具有周期激励的系统为例来说明这一方法。考察

$$\dot{u} = f(u, t) \equiv f(u, t + T_0), \quad u \in \Omega \subset R^n, \quad T_0 > 0 \quad (8.4.2)$$

该方法的基本思想是将 Ω 离散为一系列单元 (称作胞), 取第 i 胞中一点作为系统初始状态, 计算由此出发的相轨线至 $t = T_0$, 记下此时它落入的胞号 j , 这样就形成了一个胞与胞之间的整数映射 $p(i) = j$ 。如果胞尺寸足够小, 可认为系统在胞中各点的行为是相同的, 从而只需讨论映射序列的性质。这样可免去对每条相轨线数值积分到稳态的要求, 将全局分析的工作量降低 2~3 个数量级。以下先叙述几个基本概念, 再介绍三种胞映射方法。

(1) 基本概念

现以图 8.4.1 所示的矩形区域 $\Omega = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ 为例, 说明胞的定义。将 Ω 离散为 $N = n_1 \times n_2$ 个小矩形, 依次记为 Ω_k , 称作第 k 个胞, $k = 1, 2, \dots, N$ 。此外, 将 Ω 以外的区域 $R^2 - \Omega$ 定义为陷胞, 记作 Ω_0 。

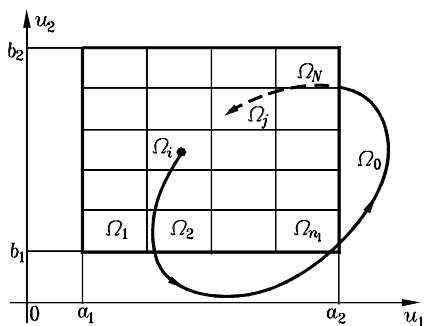


图 8.4.1 胞的定义

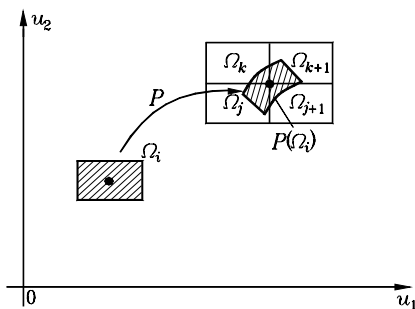


图 8.4.2 典型胞的映射

如果系统在 t_m 时刻的状态 $u(t_m) \in \Omega_i$, 引入离散状态变量 $z(m) = i$ 来表征这一事件。图 8.4.1 中自 $u(t_m) \in \Omega_i$ 出发的相轨线在 t_{m+1} 时刻落入 $u(t_{m+1}) \in \Omega_j$, 则将该事件记作 $z(m+1) = j$ 。由此可定义两种映射

$$u(t_{m+1}) = P(u(t_m)) \stackrel{\text{def}}{=} u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(u, t) dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.4.3)$$

和

$$j = p(i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.4.4)$$

前者是由相空间中点 $u(t_m)$ 到点 $u(t_{m+1})$, 故称作点映射。当 Ω 取为 Poincaré 截面 Σ 上的区域时, 这就是 Poincaré 映射。后一映射是由第 i 胞到第 j 胞的, 故称作胞映射。当胞的尺寸非常小时, 可想象胞映射与点映射很接近。但两者有所不同。例如, 由图 8.4.2 可见, 式(8.4.4)并不意味着

$$\Omega_j = P(\Omega_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.4.5)$$

采用胞映射的主要目的是仅对胞中有代表性的点作一次点映射, 然后用胞映射分析其后继动力学行为, 即映射序列的行为。

(2) 简单胞映射

由于式(8.4.5)不能普遍成立, 在胞映射中必须引入一些假设方可完成后继映射, 构造映

射序列。简单胞映射引入的两个基本假设是：

- a. 胞的尺寸足够小，从而以胞 Ω_i 的中心点代表 Ω_i 中的全部点，即认为

$$p(i) = j \Leftrightarrow P(\Omega_i) = \Omega_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.4.6)$$

- b. 一旦某个胞的中心点被映入陷胞 Ω_0 ，则不再关心其后继行为，即约定对任意的 i

$$p(i) = 0 \Leftrightarrow P(\Omega_i) = \Omega_0 \quad \text{且} \quad p(0) = 0 \quad (8.4.7)$$

基于这样假设的方法自然很粗糙，但它体现了 Hsu 的最初思想。根据规则 (8.4.6) 和 (8.4.7)，可以对 Ω 中的胞进行如下分类。

- a. **周期胞**：若有正整数 k 使得

$$z(m+k) = p^k(z(m)) = z(m) \quad (8.4.8)$$

则称胞 $\Omega_m, \Omega_{m+1}, \dots, \Omega_{m+k}$ 构成一**周期 k 胞集**。当 $k > 1$ 时，它是一个胞集。当 Ω 是 Poincaré 截面 Σ 上的区域时，周期 k 胞集是周期 k 不动点的近似。因此，称周期 k 胞集上的离散变量为**周期 k 运动**，记作 $\bar{z}(1), \bar{z}(2), \dots, \bar{z}(k)$ 或 \bar{z} 。

b. **平衡胞**：它是周期胞在 $k=1$ 时的特款。当 t_m 任意时，它是平衡点的近似。此外由式 (8.4.7) 知，陷胞 Ω_0 也是平衡胞。

- c. **吸引域**：若有某一整数关系 $1 \leq i \leq k$ 使

$$p^r(z(j)) = \bar{z}(i) \quad (8.4.9)$$

则称胞 Ω_j 与周期 k 运动 \bar{z} 相隔 r 步。与周期 k 运动 \bar{z} 相距不超过 r 步的胞集称作其 **r 步吸引域**，记作 $A_r(\bar{z})$ 。周期 k 运动 \bar{z} 的**吸引域**定义为胞集 $\bigcup_{r=0}^{+\infty} A_r(\bar{z})$ 。

由于 Ω 被离散为有限多个胞，在简单胞映射下，对 Ω 中所有胞的映射序列（即长期动力学行为）可分类为：

- 陷胞 Ω_0 的吸引域；
- 某一周期 k 运动 \bar{z} ；
- 周期 k 运动 \bar{z} 的吸引域。

当然，周期运动可能有多个，相应的吸引域也有多个。

总结上述分析的结果，可列出简单胞映射的主要算法流程：先用 8.1 节中的数值积分方法对 Ω 中 N 个胞的中心点做一次点映射，用二元整数数组记录其映射关系

$$j = p(i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.4.10)$$

然后对 $i=1, 2, \dots, N$ 依次检查映射序列 $i \rightarrow p(i) \rightarrow p^2(i) \rightarrow \dots$ ，其结果不外乎两类：

- 存在整数 $r > 0$ 使 $h^r(i) = 0$ ，即 Ω_i 是陷胞 Ω_0 的吸引域，结束检查；
- 存在整数 $r \geq 0$ 使 $h^{k+r}(i) = h^r(i)$ ，即 Ω_i 是周期 k 运动的吸引域，结束检查。

文献[47]给出了实现简单胞映射的具体算法。

(3) 广义胞映射

为了放弃简单胞映射中的不合理假设(8.4.6)，Hsu 提出了广义胞映射法^[47]。他从研究 $P(\Omega_i) \subset \Omega_j$ 的可能性出发，记

$$p_i^{\text{def}}(m) = \text{Probability}[z(m) = i], \quad p_j^{\text{def}}(m+1) = \text{Probability}[z(m+1) = j] \quad (8.4.11)$$

并引入条件概率

$$p_{ji}^{\text{def}} = \text{Probability}[z(m+1) = j | z(m) = i] \quad (8.4.12)$$

根据全概率公式得

$$p_j(m+1) = \sum_{i=1}^N p_{ji} p_i(m) \quad (8.4.13)$$

这种方法比较精确，但概率计算涉及到 Markov 链理论，比较复杂。

(4) 插值胞映射

为了兼顾计算精度和效率，美国学者 Tongue 等从插值角度对简单胞映射进行了改造^[48]，作者根据插值思想提出的一种改进方案如下。称 Ω 中第 i 行第 j 列胞为 (i, j) 胞，将其中心点 u_{ij}^0 的一次点映射记作

$$u_{ij}^1 \stackrel{\text{def}}{=} P(u_{ij}^0) = u_{ij}^0 + \int_0^{T_0} f(u, t) dt, \quad i=1, 2, \dots, n_1, \quad j=1, 2, \dots, n_2 \quad (8.4.14)$$

为了分析映射点 u_{ij}^1 的后继演化序列 $u_{ij}^2, u_{ij}^3, \dots, u_{ij}^m, u_{ij}^{m+1}, \dots$ ，采用与 u_{ij}^m 相邻的三个胞中心点的首次点映射建立对 u_{ij}^m 进行点映射的线性逼近，即插值映射。

具体地说，不妨设 u_{ij}^m 落入了由 u_{rs}^0 、 $u_{r(s+1)}^0$ 和 $u_{(r+1)s}^0$ 三个胞中心点组成的三角形中，并且与 u_{rs}^0 的距离最小。用它们的点映射 u_{rs}^1 、 $u_{r(s+1)}^1$ 和 $u_{(r+1)s}^1$ 构造 u_{ij}^m 的下一近似映射

$$u_{ij}^{m+1} = P(u_{ij}^m) \approx u_{rs}^0 + DP(u_{rs}^0) \Delta u \quad (8.4.15)$$

其中

$$DP(u_{rs}^0) \approx \left[\frac{u_{(r+1)s}^1 - u_{rs}^1}{\Delta u_1}, \frac{u_{r(s+1)}^1 - u_{rs}^1}{\Delta u_2} \right], \quad \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \Delta u = u_{ij}^m - u_{rs}^0 \quad (8.4.16)$$

与 Tongue 采用的四点插值相比，这种方案不仅简单，而且可以适应 $P(\Omega_i)$ 发生很大畸变的恶劣情况。

事实上，插值映射可用于对胞 (i, j) 中任意点的后继分析。即可以基于比较粗的胞划分（例如 100×100 的平面网格）对中心点做一次点映射，然后对比较细的胞（例如 300×300 的平面网格）进行后继映射分析。这无疑可兼顾计算精度和效率。

使用插值胞映射时，能否正确判定不动点是一关键。首先，不动点的判据要随胞尺寸作调整。过粗会导致虚假不动点，过细会导致虚假的无周期点。其次，映射次数要根据系统阻尼的大小而定，对小阻尼系统需多次迭代使瞬态运动衰减到足够程度。

例 8.4.1 用插值胞映射方法研究如下单摆受迫振动的全局特性

$$\ddot{u} + 0.2\dot{u} + \sin u = 2 \cos t \quad (\text{a})$$

解：将方程(a)写作扩张相空间中的自治系统

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\sin u_1 - 0.2u_2 + 2\cos u_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

定义 Poincaré 截面为

$$\Sigma = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_3 = \text{mod}(u_3, 2\pi)\} \quad (\text{c})$$

在 Σ 上取矩形域 $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-5, 5]$, 将其划分为 100×100 个胞, 对每个胞的中心点做一次点映射, 然后用 300×300 个胞进行分析, 得到了图 8.4.3 所示结果。图中白色和黑色两个区域分别是两个周期 1 不动点的吸引域, 它们具有非常复杂的分形边界。Tongue 曾用相同的胞数计算过此例, 得到的吸引域边界比较模糊, 且吸引域内有一些游离点, 是虚假的混沌运动。图 8.4.3 的结果与 Tongue 采用 751×751 个胞的计算精度相当。

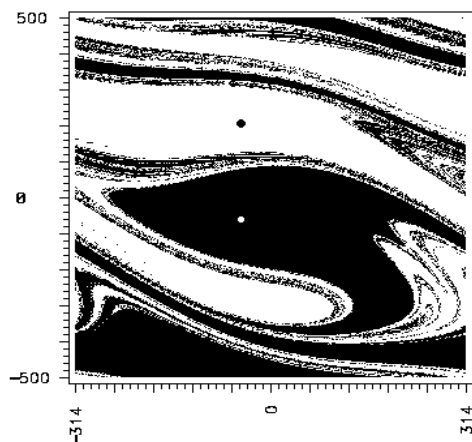


图 8.4.3 受迫振动单摆的全局特性

8.4.2 不变流形的计算

在许多实际问题中, 需要确定系统鞍型平衡点 (或周期运动) 的不变流形。一方面, 其不稳定流形提供了渐近稳定平衡点 (或周期运动) 的吸引域边界 (例如如图 4.1.2 所示)。另一方面, 稳定流形与不稳定流形横截相交是产生 Smale 马蹄意义下混沌的前提。现以鞍型平衡点为例, 讨论不变流形的计算问题。读者可通过建立 Poincaré 映射, 将周期运动转化为 Poincaré 映射的不动点, 进而计算其不变流形^[49]。

考察 n 维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \quad (8.4.17)$$

设它在平衡点 \mathbf{u}_s 处具有 $n-1$ 维稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_s)$ 和 1 维不稳定流形 $W^u(\mathbf{u}_s)$, 即 Jacobi 矩阵 $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_s)$ 具有 $n-1$ 个实部为负的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 和一个正特征值 λ_n 。先讨论不稳定流形 $W^u(\mathbf{u}_s)$ 的计算问题。

记 λ_n 所对应的归一化特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}_n$, 它在 \mathbf{u}_s 处与不稳定流形 $W^u(\mathbf{u}_s)$ 相切。将 $W^u(\mathbf{u}_s)$ 按是否与 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 同向分为 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 和 $W^{u-}(\mathbf{u}_s)$ 。显然, 两者的计算无本质区别。以 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 为例, 如果能找到与 \mathbf{u}_s 相邻近的点 $\mathbf{u}_0 \in W^{u+}(\mathbf{u}_s)$, 将 \mathbf{u}_0 与 \mathbf{u}_s 的连线作为 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 的第一段近似, 然后计算初值问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (8.4.18)$$

即可得到 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 。因此, 问题的关键是如何获得 \mathbf{u}_0 ? 通常, 可以取

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_s + a\boldsymbol{\varphi}_n, \quad 0 < a \ll 1 \quad (8.4.19)$$

作为 \mathbf{u}_0 的近似。

然而, 参数 a 的选择并非易事。显然, 过大的 a 不能保证 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 与 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 足够接近。如果 a 过小, 要计算很长时间才能获得 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 。更为糟糕的是, 当 a 小到与计算平衡点的误差相当时, 可能会出现图 8.4.4 所示的情况。即由于计算得到的平衡点位于 $\hat{\mathbf{u}}_s$, 使 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 可能更接近于 $W^{u-}(\mathbf{u}_s)$ 。这自然会导致后继计算失败。

为了选择好 a , 可要求其下限满足

$$a_{\min} \gg \varepsilon + \delta \|\mathbf{u}_s\| \quad (8.4.20)$$

其中 ε 和 δ 分别是求解平衡点时的绝对误差上界和相对误差上界。然后, 暂取 $a = 2a_{\min}$, 由式(8.4.19)得到 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 。自 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 出发计算方程(8.4.18)和对应派生线性系统, 直至 $t = 1/\lambda_n$ 。此时, 两个解之差是

$$\Delta = \mathbf{u}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) - \hat{\mathbf{u}}_0 \mathbf{e} \quad (8.4.21)$$

只要 $|\Delta|$ 足够小, 就可继续增加 a 的值, 直至 $a_{\max} = 1$ 。从计算实践看, 当 λ_n 比较小时, $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 比较弯曲, 需要选小一些的 a 。反之, 则可选大些的 a 。

由于所选的 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 难以精确落在 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 上, 随着时间的延续, 计算出的不稳定流形 $\hat{W}^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 会逐渐偏离 $W^{u+}(\mathbf{u}_s)$, 最终失去可信性。因此, 最好通过对自不同 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 出发的 $\hat{W}^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 进行比较来验证其可靠性。究竟 $\hat{W}^{u+}(\mathbf{u}_s)$ 在多大范围内有效仍是值得探讨的问题。

对于一维稳定流形 $W^s(\mathbf{u}_s)$, 选择适宜的 $\hat{\mathbf{u}}_0$ 后采用逆向时间 ($t \rightarrow -\infty$) 的数值积分即可得到其近似解。如果是高维稳定流形, 则计算变得非常复杂。

例 8.4.2 考察具有负刚度的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + 0.1\dot{u} - u + u^3 = 0 \quad (a)$$

计算其鞍点的不变流形。

解: 将方程(a)改写为状态变量形式的二维自治系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 - u_1^3 - 0.1u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (b)$$

系统的鞍点是 (0,0), 易见

$$D\mathbf{f}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

其特征值和相应的归一化特征向量为

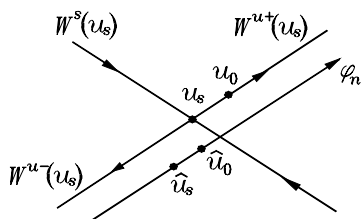


图 8.4.4 初始点的错误选择

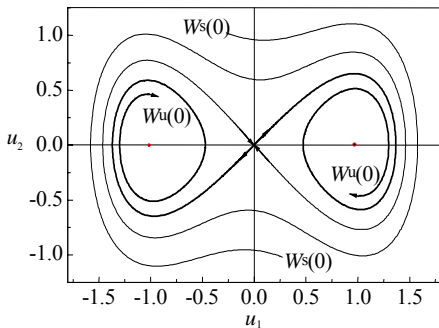


图 8.4.5 Duffing 振子鞍点的不变流形

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.0513, & \boldsymbol{\varphi}_1 = [0.6892 \quad -0.7245]^T \\ \lambda_2 = 0.9513, & \boldsymbol{\varphi}_2 = [0.7245 \quad 0.6892]^T \end{cases} \quad (\text{d})$$

取 $\alpha = 0.1$ ，用 4 阶 Runge-Kutta 法配合上述方法，计算得到鞍点 (0,0) 的不变流形如图 8.4.5 所示。

8.5 混沌的统计分析

本节讨论如何根据非线性动力系统的计算或实验结果来判断混沌现象，并分析其内在特性。在研究实际系统的混沌问题时，像 Melnikov 方法这样的解析手段寥寥无几。因此，对混沌的判断和对其特性的分析必须使用数值方法，特别是统计方法和信息论方法。而正是有了计算机和这些现代方法，对混沌的研究才有今天这样丰硕的成果。

8.5.1 混沌序列的判断

非线性动力系统的计算或实测响应数据常常看上去杂乱无章。人们需要判断，这种不规则数据代表的是混沌运动，还是受到各种测量、计算误差污染的周期运动或概周期运动。例如，已知系统某个自由度的稳态位移等间隔采样序列 $u(t_j), j=1,2,\dots,N$ ，并且 N 足够大，需要判断系统在该点的运动状态是否是混沌的。通常，可采用下述方法来进行检验。

(1) 谱分析

由于混沌运动是非周期的，因此可对序列 $u(t_j), j=1,2,\dots,N$ 作 Fourier 变换，观察其幅值谱或功率谱。周期运动和概周期运动一般具有一个或多个突出的谐波成分，而混沌运动和瞬态运动的谱成分比较复杂，在比较宽的频带内具有明显的连续谱。为了剔除瞬态运动，计算或实验采样时要有足够长的等待时间，要确保系统已进入稳态运动。

(2) 吸引子的 Poincaré 截面

周期运动和概周期运动的相轨线在 Poincaré 截面上为孤立的不动点和封闭曲线，而混沌吸引子的 Poincaré 截面是具有无穷自相似结构的离散点集。因此，可通过构造 Poincaré 截面来观察序列 $u(t_j), j=1,2,\dots,N$ 的特征。一般可先对位移序列进行数值积分得到速度序列，形成一条相轨线序列 $(u(t_j), \dot{u}(t_j)), j=1,2,\dots,N$ 。若系统受到周期激励，可以用激励周期为间隔对相轨线序列进行采样；若不然，可根据上述幅值谱中最低阶峰对应的周期进行采样。将二次采样得到的新序列 $(u(t_{j_k}), \dot{u}(t_{j_k})), k=1,2,\dots,M$ 在 (u, \dot{u}) 平面上以离散点绘出。只要 M 足够大，就可观察到吸引子在 Poincaré 截面上的特征。

(3) 吸引子的重构

吸引子的重构不是一种独立的方法，而是为了减少构造吸引子 Poincaré 截面的工作量而提出的辅助手段。一般来说，为了完整描述一个 n 维动力系统的吸引子 A ，应对系统的状态 $\mathbf{u} \in R^n$ 进行测量，获得向量采样序列 $\mathbf{u}(t_j), j=1,2,\dots,N$ ，然后构造吸引子 A 的各个 Poincaré 截面。这不仅工作量大，而且对传感器和采样系统的要求很高。下面将说明，如果动力系统具有光滑的向量场，仅用一个标量采样序列就可构造该系统吸引子的 Poincaré 截面。

具体地说，可以从某个自由度的位移序列 $u(t_j), j=1,2,\dots,N$ 出发，通过选择一个适宜的

时间滞后量 $\tau = t_k - t_j, k - j = m > 0$, 构造如下 n 维向量的时间序列

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_j) &\stackrel{\text{def}}{=} [u(t_j) \quad u(t_j + \tau) \quad u(t_j + 2\tau) \quad \cdots \quad u(t_j + n\tau)]^T \\ &= [u(t_j) \quad u(t_{j+m}) \quad u(t_{j+2m}) \quad \cdots \quad u(t_{j+nm})]^T, \quad j=1, 2, \dots, N-nm \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

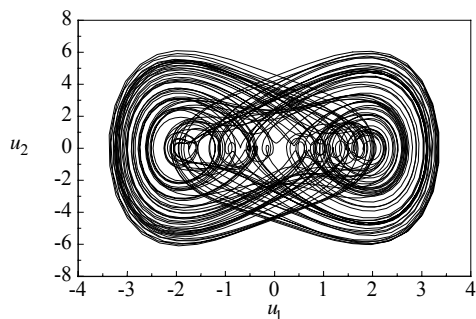
不难证明, 系统状态向量 $\mathbf{u}(t_j)$ 与向量 $\mathbf{v}(t_j)$ 是一一对应的。事实上, 如果给定 $\mathbf{u}(t_j)$, 则 $\mathbf{u}(t_j)$ 已定, 由常微分方程解的唯一性知 $\mathbf{v}(t_j)$ 唯一; 若给定 $\mathbf{v}(t_j)$, 则可构造一常微分方程边值问题, 将 $\mathbf{u}(t_j)$ 唯一确定下来。因此, 可以将向量 $\mathbf{v}(t_j)$ 作为系统的状态向量来构造吸引子 A 的 Poincaré 截面。通常称 $\mathbf{v}(t_j)$ 为**延迟坐标 (向量)**。

对于耗散系统, 随着时间延续, 其吸引子 A 最终要缩聚到某一 n_A 维流形上, 而 $n_A \ll n$ 。此时, 可以在降维的相空间中研究 A 。Takens 证明, 为了保证 A 所在的复杂流形能嵌入进降维的相空间, 该相空间的维数至少应是 $2n_A + 1$ [50]。因此, 采用 $2n_A + 1$ 维延迟坐标向量 $\mathbf{v}(t_j)$ 即可构造 A 。

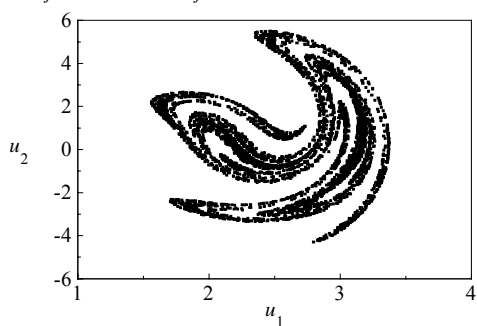
能否成功使用延迟坐标技术的关键是选择适当的时滞 τ , 亦即 m 。若 m 过小, 则 $u(t_{j+m})$ 与 $u(t_j)$ 几乎相同, 不是独立坐标; 而若 m 过大, 对于混沌吸引子而言, $u(t_{j+m})$ 与 $u(t_j)$ 毫不相干。一种适中的选择方法是, 计算序列 $u(t_j), j=1, 2, \dots, N$ 的自相关函数序列

$$r_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N u(t_j) u(t_{j+k}), \quad k=0, 1, 2, \dots, N \quad (8.5.2)$$

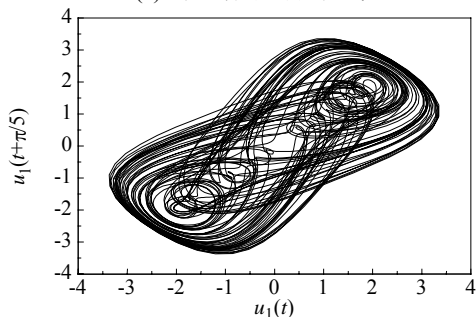
取 m 为 r_k 获得极小值所对应的最小 k 值。这时, $u(t_{j+m})$ 携带 $u(t_j)$ 所不具备的最多信息。



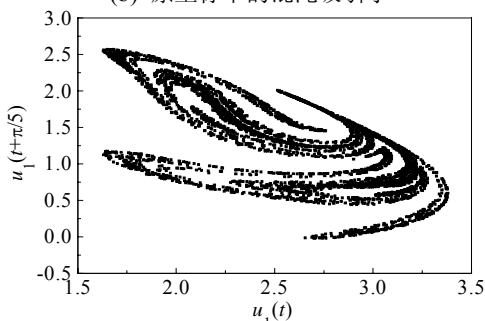
(a) 原坐标下的相轨线



(b) 原坐标下的混沌吸引子



(c) 延迟坐标下的相轨线



(d) 延迟坐标下的混沌吸引子

图 8.5.1 Ueda 混沌吸引子的不同表示

再次考察系统(7.1.3), 其混沌吸引子被称为 **Ueda 吸引子**。图 8.5.1 给出了在坐标 (u, \dot{u}) 和延迟坐标 $(u(t), u(t + \pi/5))$ 下的相轨线及吸引子的 Poincaré 截面 ($\text{mod}(t, 2\pi) = 0$)。

最后需要指出, 上述几种方法都是定性的, 使用中会掺杂进观测者的主观判断。特别当 N 不是足够大, 或序列 $u(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$ 带有系统瞬态响应时, 会大大影响判断的准确性。因此, 实践中还需采用更可靠的定量方法。

8.5.2 Lyapunov 指数

对于平衡点和周期运动, 人们常用系统在平衡点的 Jacobi 矩阵特征值实部以及周期运动扰动方程的特征指数实部来判断其稳定性。Lyapunov 指数是对上述特征值和特征指数的一种推广, 给出了对系统任意相邻相轨线平均发散程度或平均收敛程度的一种度量。因此, 它可用于包括平衡点、周期运动、概周期运动乃至混沌运动的稳定性描述, 是目前判断混沌最可靠的一种定量方法。

(1) 连续动力系统的 Lyapunov 指数

a. 基本概念

现考察连续动力系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1 \quad (8.5.3)$$

的相轨线 $\bar{\mathbf{u}}(t)$, 研究其相邻相轨线 $\mathbf{u}(t)$ 与它的距离随时间延续的发散程度。记

$$\mathbf{w}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t), \quad \mathbf{w}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(0) - \bar{\mathbf{u}}(0) \quad (8.5.4)$$

对于充分小的 $\|\mathbf{w}(t)\|$, $\mathbf{w}(t)$ 满足线性变系数常微分方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{u}}, t)\mathbf{w} \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \end{cases} \quad (8.5.5)$$

定义 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ 与有初始距离 \mathbf{w}_0 的相邻轨线间的 **Lyapunov 指数**为

$$\sigma(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{w}(t)\|}{\|\mathbf{w}_0\|} \quad (8.5.6)$$

通常, 人们关心相轨线的发散程度, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $\|\mathbf{w}_0\|$ 在定义中并不起作用。事实上,

$$\sigma(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{w}(t)\|}{t} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{w}_0\|}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{w}(t)\|}{t} \quad (8.5.7)$$

线性微分方程(8.5.5)的解 $\mathbf{w}(t)$ 可由基本解矩阵 $\mathbf{W}(t)$ 中各列的线性组合给出

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{w}_0 = \sum_{k=1}^n w_{0k} \mathbf{W}_k(t) \quad (8.5.8)$$

其中 $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$ 。因此, 可引入 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ 与基本解矩阵 $\mathbf{W}(t)$ 中各列向量间的 Lyapunov 指数

$$\sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{W}_k(t)\|}{t}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (8.5.9)$$

通常约定（若不然，则重新排序）

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \quad (8.5.10)$$

b. 基本性质

现考察 $\sigma(\bar{u}, w_0)$ 与诸 $\sigma_k(\bar{u})$ 间的关系。为了简单起见，不妨设 $\bar{u}(t)$ 是平衡点或闭轨。因此，方程(8.5.5)是常系数或周期系数的线性微分方程。根据基本解的结构以及约定(8.5.10)，对于充分长的时间 t 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(t)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n w_{0k} \mathbf{W}_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n w_{0k} \mathbf{p}_k(t) e^{\lambda_k t} \right\| = \left| e^{\lambda_1 t} \right| \left\| w_{01} \mathbf{p}_1(t) + \sum_{k=2}^n w_{0k} \mathbf{p}_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_1)t} \right\| \\ &\rightarrow \left| e^{\lambda_1 t} \right| \|w_{01} \mathbf{p}_1(t)\| = |w_{01}| \|\mathbf{W}_1(t)\| \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

其中 $\mathbf{p}_k(t), k=1, 2, \dots, n$ 是常向量或周期函数向量。若 $w_{01} \neq 0$ ，则有

$$\sigma(\bar{u}, w_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{w}(t)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |w_{01}|}{t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{W}_1(t)\|}{t} = \sigma_1(\bar{u}) \quad (8.5.12)$$

该结论对于任意相轨线 $\bar{u}(t)$ 也成立。一般地，若 $w_{0j}=0, j=1, 2, \dots, k-1$ ，但 $w_{0k} \neq 0$ ，则有

$$\sigma(\bar{u}, w_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{W}_k(t)\|}{t} = \sigma_k(\bar{u}) \quad (8.5.13)$$

这说明，诸 $\sigma_k(\bar{u})$ 从大到小依次制约相轨线 $\bar{u}(t)$ 的扩张速度。

以具有系数矩阵 \mathbf{A} 的线性定常系统为例，其任意解的扰动 $\mathbf{w}(t)$ 均满足原系统方程，从而有

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{k=1}^n w_{0k} \mathbf{W}_k(t) = \sum_{k=1}^n w_{0k} \boldsymbol{\varphi}_k e^{\lambda_k t} \quad (8.5.14)$$

其中 $\lambda_k, \boldsymbol{\varphi}_k, k=1, 2, \dots, n$ 是矩阵 \mathbf{A} 的特征值和特征向量。因此

$$\begin{aligned} \sigma_k(\bar{u}) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{W}_k(t)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |e^{\lambda_k t}| + \ln \|\boldsymbol{\varphi}_k\|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |e^{\lambda_k t}|}{t} = \operatorname{Re}(\lambda_k), \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8.5.15)$$

这说明：对于线性定常系统，Lyapunov 指数就是系统矩阵特征值的实部。读者不难证明，对于具有周期系数的线性系统，Lyapunov 指数与系统的特征指数实部相同。因此，Lyapunov 指数是对系统特征值和特征指数的一种推广。

对于线性系统，根据(8.5.10)式所约定的 Lyapunov 指数排序还给出一个有用的结论，即存在如下子空间序列

$$W_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n\}, \quad W_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n\}, \quad \dots, \quad W_n = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\varphi}_n\} \quad (8.5.16)$$

满足

$$\dim W_1 = n, \quad \dim W_2 = n-1, \quad \dots, \quad \dim W_{n-1} = 2, \quad \dim W_n = 1 \quad (8.5.17)$$

$$W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_{n-1} \supset W_n \quad (8.5.18)$$

对于平衡点的初始扰动

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{i=k}^n c_i \boldsymbol{\varphi}_i \in W_k, \quad c_i \in R^1 \quad (8.5.19)$$

当时间 t 充分长时, 所有的 $e^{\sigma_i t}, i > k$ 与 $e^{\sigma_k t}$ 相比皆可忽略不计, 因此

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=k}^n c_i \boldsymbol{\varphi}_i e^{\sigma_i t} \rightarrow c_k \boldsymbol{\varphi}_k e^{\sigma_k t} \quad (8.5.20)$$

c. Lyapunov 指数与吸引子的关系

由于 Lyapunov 指数的定义包含了 $t \rightarrow +\infty$ 的要求, 因此它可以度量系统吸引子的稳定性, 甚至成为划分吸引子类型的判据。以 3 维耗散自治系统为例, 对于渐近稳定平衡点, 其 3 个 Lyapunov 指数的符号为 $(-, -, -)$, 这表明相邻相轨线沿空间的 3 个方向收缩, 最终缩聚到该平衡点上。对于渐近稳定闭轨, 其 Lyapunov 指数的符号为 $(0, -, -)$, 表明相邻相轨线沿闭轨切方向既不收缩也不扩张, 而沿其他两个方向最终缩聚到闭轨上。对于渐近稳定的环面运动, 其 Lyapunov 指数的符号为 $(0, 0, -)$, 即相邻相轨线沿环面切平面上的任意方向无收缩和扩张, 而沿环面的法线方向缩聚到环面上。对于混吸引子, 其 Lyapunov 指数的符号为 $(+, 0, -)$, 即相轨线沿某一方向发散, 而沿另一方向收缩, 这种矛盾折中的结果是相轨线发生无限多次的拉伸与折叠。表 8.5.1 给出了 n 维系统吸引子与 Lyapunov 指数的关系。

表 8.5.1 Lyapunov 指数与系统吸引子的关系

序号	吸引子类型	Lyapunov 指数
1	渐近稳定平衡点 (0 维)	$\sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) < 0, k=1, 2, \dots, n$
2	渐近稳定闭轨 (1 维)	$\sigma_1(\bar{\mathbf{u}}) = 0, \sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) < 0, k=2, 3, \dots, n$
3	渐近稳定环面 (2 维)	$\sigma_1(\bar{\mathbf{u}}) = 0, \sigma_2(\bar{\mathbf{u}}) = 0, \sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) < 0, k=3, 4, \dots, n$
4	渐近稳定 K -环面 (K 维)	$\sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) = 0, k=1, \dots, K, \sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) < 0, k=K+1, K+2, \dots, n$
5	混沌吸引子 (分数维)	$\sigma_1(\bar{\mathbf{u}}) > 0, \sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0, k=2, 3, \dots, n$
6	超混沌吸引子 (分数维)	$\sigma_1(\bar{\mathbf{u}}) > 0, \sigma_2(\bar{\mathbf{u}}) > 0, \sigma_k(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0, k=3, 4, \dots, n$

(2) 离散动力系统的 Lyapunov 指数

考察映射序列

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{P}(\mathbf{u}_j), \quad \mathbf{u}_j \in R^n, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (8.5.21)$$

为了分析映射点 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 及相邻映射点 \mathbf{u}_j 间距离随映射次数增加的变化, 引入

$$\stackrel{\text{def}}{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - \bar{\mathbf{u}}_j \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (8.5.22)$$

定义 $\bar{\mathbf{u}}_j$ 与有初始距离 \mathbf{w}_0 的映射点 \mathbf{u}_j 的 Lyapunov 指数为

$$\sigma(\bar{u}, w_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} \ln \frac{\|w_j\|}{\|w_0\|} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|w_j\|}{j} \quad (8.5.23)$$

对于充分小的 $\|w_j\|$ ，有

$$w_{j+1} = DP(\bar{u}_j)w_j = \prod_{i=0}^j DP(\bar{u}_i)w_0 \stackrel{\text{def}}{=} A(j)w_0, \quad j=0,1,2,\dots \quad (8.5.24)$$

将矩阵 $A(j)$ 的特征值 $\lambda_k(j)$ 按实部由大到小排序为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，记相应的特征向量为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 。定义映射(8.5.26)沿特征向量 φ_k 的 Lyapunov 指数为

$$\sigma_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k(j)}{j}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (8.5.25)$$

读者不难证明，式(8.5.13)对于离散动力系统也成立。

(3) Lyapunov 指数的计算

直接根据定义来计算 Lyapunov 指数存在许多技术问题。例如，计算中经常遇到病态问题；又如，实际可用的时间序列并不是无限长，甚至是不长的。以下将讨论根据系统方程来计算某一相轨线的全部 Lyapunov 指数。关于如何由实验数据计算 Lyapunov 指数可参见文献[51,52]。

此方法的基本依据是式(8.5.19)和(8.5.20)所刻划的线性系统性质，在子空间 W_k 中的任意初始扰动最终将趋于 $e^{\sigma_k t}$ 。对于选定的相轨线 $\bar{u}(t)$ ，可根据线性常微分方程(8.5.5)由大到小给出计算 Lyapunov 指数的方法。

a. σ_1 的计算

由于任意的初始扰动皆落入 W_1 ，所以任选初始扰动 w_0 ，将方程(8.5.5)数值积分至 $t = KT$ ，得到 $w(KT)$ ，其中 $T > 0$ 一般可选为 10 倍于线性化系统的最长固有周期。根据 Lyapunov 指数的定义以及式(8.5.12)，当 K 充分大时

$$\sigma_1(\bar{u}) \approx \frac{1}{KT} \ln \|w(KT)\| \quad (8.5.26)$$

对于混沌吸引子， $\sigma_1(\bar{u}) > 0$ 会导致计算 $w(KT)$ 时数值不稳定。因此，通常将积分过程在时域分为 K 段 $[0, T], [T, 2T], \dots, [(K-1)T, KT]$ ，当 $t = kT, k=1, 2, \dots, K$ 时暂停积分，将当前解向量进行范数规一，然后作为下一段积分的初始向量。如果将这样逐段处理后得到的解向量记作 $\tilde{w}(t)$ ，则

$$w(KT) = \|\tilde{w}(T)\| \|\tilde{w}(2T)\| \cdots \|\tilde{w}(K-T)\| \tilde{w}(KT) \quad (8.5.27)$$

因此

$$\sigma_1(\bar{u}) \approx \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|\tilde{w}(kT)\| = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\tilde{w}(kT)\| \quad (8.5.28)$$

计算中，可从比较大的 k 开始，观察 σ_1 随着 k 增加的变化，到变化不明显时即终止计算。

b. σ_2 的计算

由于方程(8.5.5)具有时变系数，即使 $w_0 \in W_2$ ，随着 t 的增加仍会出现 $w(t) \rightarrow e^{\sigma_1 t}$ 。下面

将设法使 $\mathbf{w}(t)$ 不完全被 $e^{\sigma_1 t}$ 主宰。

选择两个线性无关的初扰动向量 \mathbf{w}_{10} 和 \mathbf{w}_{20} ，将方程(8.5.5)数值积分至 $t = T$ ，得到两个解向量 $\mathbf{w}_1(T)$ 和 $\mathbf{w}_2(T)$ 。对 $\mathbf{w}_1(T)$ 和 $\mathbf{w}_2(T)$ 作 Gram-Schmidt 正交化和范数规一化处理，引入

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_{11} = \mathbf{v}_{11} / \|\mathbf{v}_{11}\|, & \mathbf{v}_{11} = \mathbf{w}_1(T) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{21} = \mathbf{v}_{21} / \|\mathbf{v}_{21}\|, & \mathbf{v}_{21} = \mathbf{w}_2(T) - \langle \mathbf{w}_2(T), \tilde{\mathbf{w}}_{11} \rangle \tilde{\mathbf{w}}_{11} \end{cases} \quad (8.5.29)$$

这样选择的 $\tilde{\mathbf{w}}_{11}$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}_{21}$ 彼此正交，而且保证所张的子空间与向量 $\mathbf{w}_1(T)$ 和 $\mathbf{w}_2(T)$ 所张子空间相同。以 $\tilde{\mathbf{w}}_{11}$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}_{21}$ 作为新的初始向量，继续将方程(8.5.5)数值积分至 $t = 2T$ ，得到解向量 $\tilde{\mathbf{w}}_1(2T)$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}_2(2T)$ ，然后重复上述 Gram-Schmidt 过程得到

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_{12} = \mathbf{v}_{12} / \|\mathbf{v}_{12}\|, & \mathbf{v}_{12} = \tilde{\mathbf{w}}_1(2T) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{22} = \mathbf{v}_{22} / \|\mathbf{v}_{22}\|, & \mathbf{v}_{22} = \tilde{\mathbf{w}}_2(2T) - \langle \tilde{\mathbf{w}}_2(2T), \tilde{\mathbf{w}}_{12} \rangle \tilde{\mathbf{w}}_{12} \end{cases} \quad (8.5.30)$$

如此重复下去直至 $t = KT$ ，而 K 充分大。

由于自 \mathbf{w}_{10} 出发的解向量仅当 $t = kT, k=1, 2, \dots, K$ 时进行过范数规一化处理，因此 $\tilde{\mathbf{w}}_1(t) \rightarrow e^{\sigma_1 t}$ 。而自 \mathbf{w}_{20} 出发的解向量每逢 $t = kT, k=1, 2, \dots, K$ 时进行了与 $\tilde{\mathbf{w}}_1(kT)$ 正交化的处理，从而 $\tilde{\mathbf{w}}_2(kT) \in W_2$ 。所以，当 K 充分大时得到

$$\sigma_1 \approx \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|\mathbf{v}_{1k}\| = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\mathbf{v}_{1k}\|, \quad \sigma_2 \approx \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|\mathbf{v}_{2k}\| = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\mathbf{v}_{2k}\| \quad (8.5.31)$$

这表明可同时得到最大和次大的 Lyapunov 指数。

c. 全部 Lyapunov 指数的计算

为了同时计算全部 Lyapunov 指数，只要选 n 个线性无关的初始扰动 $\mathbf{w}_{i0}, i=1, 2, \dots, n$ ，不妨就选自 $Df(\bar{\mathbf{u}}(0))$ 的特征子空间。然后分别以它们作为初始向量积分方程(8.5.5)，每逢 $t = kT, k=1, 2, \dots, K$ 时暂停下来，对解向量进行 Gram-Schmidt 正交化

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_{1k} = \mathbf{v}_{1k} / \|\mathbf{v}_{1k}\|, & \mathbf{v}_{1k} = \tilde{\mathbf{w}}_1(kT) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{2k} = \mathbf{v}_{2k} / \|\mathbf{v}_{2k}\|, & \mathbf{v}_{2k} = \tilde{\mathbf{w}}_2(kT) - \langle \tilde{\mathbf{w}}_2(kT), \tilde{\mathbf{w}}_{1k} \rangle \tilde{\mathbf{w}}_{1k} \\ \vdots & \\ \tilde{\mathbf{w}}_{nk} = \mathbf{v}_{nk} / \|\mathbf{v}_{nk}\|, & \mathbf{v}_{nk} = \tilde{\mathbf{w}}_n(kT) - \langle \tilde{\mathbf{w}}_n(kT), \tilde{\mathbf{w}}_{1k} \rangle \tilde{\mathbf{w}}_{1k} - \dots - \langle \tilde{\mathbf{w}}_n(kT), \tilde{\mathbf{w}}_{n-1k} \rangle \tilde{\mathbf{w}}_{(n-1)k} \end{cases} \quad (8.5.32)$$

最终，对于充分大的 K 得到全部 Lyapunov 指数

$$\sigma_i \approx \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|\mathbf{v}_{ik}\| = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \ln \|\mathbf{v}_{ik}\|, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8.5.33)$$

最后指出，这种算法只是众多 Lyapunov 指数算法中的一种，但却是最基本的。其他算法中也包含了不断将初始向量规一化和正交化的步骤。

8.5.3 分形与分数维*

第 7 章指出，Logistic 映射和 Hénon 映射的混沌吸引子具有无穷自相似结构，并称这样的结构为分形。一般来说，**分形**是指具有无限精细、非常不规则、无穷自相似结构和非整数维数的点集。在大自然中，海岸线、雪花、云雾这些不规则形体都属于分形。动物体内血管

的分支再分支、肺的内部结构等同样具有分形特征。虽然 1875 年德国数学家 Cantor 提出的三分集就是分形的例子,但对分形的系统研究始于 20 世纪 60 年代法国学者 Mandelbrot 探索棉花价格随时间变化的规律。这与 Lorenz 从实际问题中发现混沌具有某种巧合。30 多年来,分形理论及其应用已发展成与混沌理论及其应用并驾齐驱的非线性科学重要分支。

图形的维数和测度是其基本不变量。在传统的几何观念中,图形的维数总是自然数,而零测度点集是很稀疏的点集。然而,自 Cantor 起,数学家们就不断发现一些奇怪的几何体,用测度或整数维不足以描述其特征。

首先,考察著名的 **Cantor 三分集**,其构造如下。将实数轴上的区间 $[0, 1]$ 作三等分,去掉中间的区间 $(1/3, 2/3)$,剩下 2 个区间,各长 $1/3$;将剩下的区间 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 再作三等分,去掉各自中间的区间 $(1/9, 2/9)$ 和 $(7/9, 8/9)$,剩下 2^2 个区间,各长 $(1/3)^2$;如此重复下去,直至无穷,将最终剩下的点集记作 Ω_2 。显然, Ω_2 具有无穷自相似结构,点的分布有密有疏。该点集的测度是

$$m(\Omega_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad (8.5.34)$$

不能反映点集 Ω_1 在区间 $[0, 1]$ 中占有点的份额。

其次,考察由波兰数学家 Sierpinski 构造的 **Sierpinski 地毯**。参考图 8.5.2,将单位边长的正方形等分为 9 个小正方形,挖去中间的一个;将剩下的每个小正方形再等分为 9 个更小的正方形,挖去中间的一个;如此重复,直至无穷,并记最终结果为 Ω_2 。显然,这样形成的 Sierpinski 地毯 Ω_2 具有无穷自相似结构,点的分布有密有疏。点集 Ω_2 的测度是

$$m(\Omega_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n \times \left(\frac{1}{9}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0 \quad (8.5.35)$$

同样无法反映 Ω_2 在区间 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中占有点的份额。

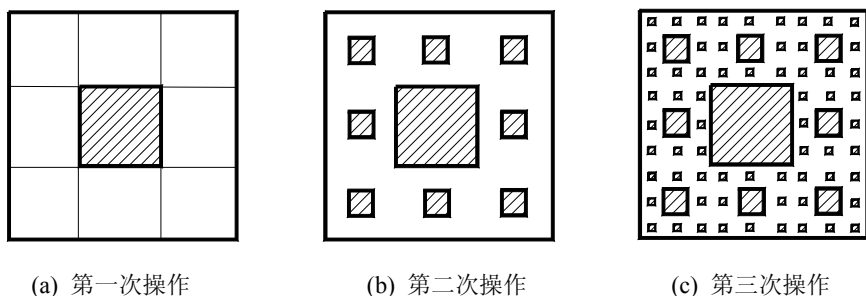


图 8.5.2 Sierpinski 地毯的构造过程

在这两个例子启发下,读者不难将任意的 n 维实心几何体挖成一个零测度点集。这自然留下一个问题,这类点集的维数是多少呢?为了刻划上述零测度点集在空间占有点的份额,人们转向拓宽维数的概念,提出了许多种维数的定义。在描述混沌吸引子方面,经常使用以下几种维数。

(1) 容积维数

先考察面积为 S 的 2 维区域 Ω 。如果它可由 $N(\varepsilon)$ 个边长为 ε 的正方形覆盖,则

$$N(\varepsilon) \approx \frac{S}{\varepsilon^2} \quad \text{即} \quad \ln N(\varepsilon) = \ln S + 2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (8.5.36)$$

由此可得到 Ω 的维数

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 2 = \dim(\Omega) \quad (8.5.37)$$

对于一般点集 $\Omega \subset R^n$ ，如果它可由 $N(\varepsilon)$ 个边长为 ε 的 n 维超立方体覆盖，定义

$$\dim_B(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (8.5.38)$$

并称其为点集 Ω 的**容积维数**或**盒维数**。

该定义中隐含的一个问题是，选择不同的覆盖是否会导致不同的容积维数？细致研究的结论的确如此。为避免歧义，一般取最小计算结果作为容积维数。

对于 Cantor 三分集 Ω_1 ，在其构造过程中第 n 步，所有点被 2^n 根长度为 $1/3^n$ 的线段所覆盖，因此其容积维数为

$$\dim_B(\Omega_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^n}{\ln[1/(1/3^n)]} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309 < 1 \quad (8.5.39)$$

类似地，可计算出 Sierpinski 地毯 Ω_2 的容积维数为

$$\dim_B(\Omega_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 8^n}{\ln[1/(1/3^n)]} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893 < 2 \quad (8.5.40)$$

由此可见，这两种具有无穷自相似结构的分形点集的维数是无理数。通常，人们习惯用**分数维**这一术语来表示分形所具有的非整数维性质。

由于混沌吸引子具有分形特征，因此容积维数是描述它的重要不变量。为了计算容积维数，可在混沌吸引子 A 所占据的空间上划分很密的网格，得到大量边长为 ε 的正方形（立方体），然后对混沌吸引子 A 所占据的小正方形（立方体）计数得到 $N(\varepsilon)$ ，最后求得 A 的近似容积维数

$$\dim_B(A) \approx \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (8.5.41)$$

根据这种方法可得到：2 维 Hénon 映射的混沌吸引子具有容积维数 1.26，而 3 维 Lorenz 系统的混沌吸引子的容积维数约为 2.06。

显然，按照上述方法来计算容积维数仅限于低维系统。根据(8.5.41)可见

$$N(\varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\dim_B(A)} \quad (8.2.42)$$

如果计算某一 $\dim_B(A) \approx 5$ 的吸引子，对于 $\varepsilon = 0.01$ 这样并非很细的网格尺度，就有 $N(\varepsilon) \approx 10^{10}$ 。这个数字只是对所计算的吸引子点数的最低要求。仅记录这些点所需的计算机内存量就已超过了现有计算机的容量。因此，不少学者致力于研究容积维数的计算方法，一种与 Monte Carlo 随机方法相结合的高效算法见文献[53]。

(2) 信息维数

容积维数建立在纯粹的度量概念基础上, 没有反映动力系统的行为。信息维数则对此有所改进。系统在空间中的位置只能在一定的精度 ε 内确定。记点集 Ω 落入边长为 ε 的第 k 个超立方体的概率为 $P_k(\varepsilon)$, Shannon 将刻画系统状态精度至 ε 量级所需的信息量定义为熵

$$I(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k(\varepsilon) \ln P_k(\varepsilon) \quad (8.5.43)$$

在此基础上, 定义 Ω 的信息维数为

$$\dim_I(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (8.5.44)$$

显然, 当 Ω 以等概率落入各超立方体时 $P_k(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, 故 $I(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$, 从而 $\dim_I(\Omega) = \dim_B(\Omega)$ 。一般情况下, $\dim_I(\Omega) \leq \dim_B(\Omega)$ 。

对于 Cantor 三分集, 如果记点位于左半区间和右半区间的概率分别为 P_L 和 P_R , 可导出其信息维数定义为

$$\dim_I(\Omega_1) = - \frac{P_L \ln P_L + P_R \ln P_R}{\ln 3} \quad (8.5.45)$$

显然, 当 $P_L = P_R = 1/2$ 时, $\dim_I(\Omega_1) = \dim_B(\Omega_1)$ 。

(3) 关联维数

点集 Ω 的关联维数也建立在点集 Ω 落入各超立方体的概率基础上, 定义为

$$\dim_C(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \ln \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k^2 \right) \quad (8.5.46)$$

这一定义反映了 Ω 中各点间距离接近程度的概率, 亦即彼此关联的程度。现给出该定义的一个直观说明。

记 Ω 中点的总数为 M , Ω 中彼此距离小于 ε 的点共计 $m(\varepsilon, M)$ 对, 定义相关函数

$$C(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{m(\varepsilon, M)}{M^2} \quad (8.5.47)$$

若 Ω 中落入第 k 个超立方体的点数是 $n_k(\varepsilon, M)$, 则有概率

$$P_k = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{n_k(\varepsilon, M)}{M} \quad (8.5.48)$$

第 k 个超立方体中的 n_k 个点构成 $n_k^2 - n_k$ 对点, 如果不计相邻立方体中彼此距离小于 ε 的点, 则有

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} (n_k^2 - n_k) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{n_k^2}{M^2} - \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{n_k}{M} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(P_k^2 - \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{P_k}{M} \right) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k^2 \end{aligned} \quad (8.5.49)$$

若计入这一因素, 应将 $C(\varepsilon)$ 修正为

$$C(\varepsilon) = \mu \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k^2, \quad \mu > 1 \quad (8.5.50)$$

并且随着 ε 缩小, μ 也缩小。根据式(8.5.50)得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \ln \left(\mu \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k^2 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \ln \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} P_k^2 \right) = \dim_C(\Omega) \quad (8.5.51)$$

这表明, 关联维数反映了 Ω 中各点之间的相关程度。

(4) Lyapunov 维数

考察 n 维自治系统某个吸引子 A , 记其 Lyapunov 指数为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$, 设有正整数 $m < n$, 使得 $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m \geq 0$, 则吸引子 A 的 **Lyapunov 维数** 定义为

$$\dim_L(A) \stackrel{\text{def}}{=} m + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m}{|\sigma_{m+1}|} \quad (8.5.52)$$

若不存在上述 m (例如 A 是渐近稳定的平衡点或闭轨), 则定义 $\dim_L(A) = 0$ 。

Kaplan 和 Yorke 最初提出这种定义是基于一种猜测, 即由式(8.5.52)定义的维数与容积维数相等。这一猜想迄今未得到严格证明, 但得到了许多算例的支持。例如, 由式(8.5.52)得到 Hénon 混沌吸引子的 Lyapunov 维数是 1.264 ± 0.002 , 而其容积维数为 1.261 ± 0.003 。

现给出该猜测的一个直观化解释。取由吸引子 A 出发的任一相轨线, 考察一个随轨线演化的 n 维超立方体 C , 其边长为 ε 。对于充分小的 ε , 使 C 的第 i 条边与向量场 Jacobi 矩阵的第 i 个特征向量平行, 使其变化规律为 $\varepsilon e^{\sigma_i t}$, 其中 σ_i 是轨线的第 i 个 Lyapunov 指数, $i=1, 2, \dots, n$ 。为了计算容积维数, 在 $t=0$ 时用一边长为 ε 的超立方体 B 覆盖 C 。选择指标 k 使 $\sigma_{k+1} < 0$, 命 B 的各条边以速率 $\varepsilon^{\sigma_{k+1} t}$ 收缩。因此, 在 t 时刻覆盖 C 所需的超立方体 B 的数目为

$$N(t) = \frac{\varepsilon^{\sigma_1 t}}{\varepsilon^{\sigma_{k+1} t}} \cdot \frac{\varepsilon^{\sigma_2 t}}{\varepsilon^{\sigma_{k+1} t}} \cdots \frac{\varepsilon^{\sigma_k t}}{\varepsilon^{\sigma_{k+1} t}} = e^{(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k - k\sigma_{k+1})t} \quad (8.5.53)$$

由此可得到 A 的容积维数估计

$$\dim_B(A) < -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln N(t)}{\ln(\varepsilon^{\sigma_{k+1} t})} = k - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k}{\sigma_{k+1}} \quad (8.5.54)$$

取不等号的原因是这还不是最小的估计。Frederickson 等证明, 最小估计发生在 $k=m$ 时, 从而有

$$\dim_B(A) = m + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m}{|\sigma_{m+1}|} = \dim_L(A) \quad (8.5.55)$$

采用 Lyapunov 维数的好处之一是可利用计算 Lyapunov 指数的成熟算法。此外, 它可以对低维系统混沌吸引子的维数进行估计。以 3 维耗散自治系统为例, 混沌吸引子 A 的 Lyapunov 指数满足 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$, 并且 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0$ 。因此, 该吸引子的 Lyapunov 维数为

$$\dim_L(A) = 2 + \frac{\sigma_1}{|\sigma_3|} \quad (8.5.56)$$

由此可见, $2 < \dim_L(A) < 3$ 。这正是 Lorenz 吸引子所对应的情况。

(5) 几点注解

a. 每一种维数都有各自的特点, 哪一种维数最好尚属研究中的问题, 并且依赖于能否找到高效的计算方法。

b. 由于维数的计算精度很低, 所以用它来判断混沌并不可靠。吸引子维数的一个重要用途是它提供了系统建模所需的最低自由度数。譬如, 闭轨是 1 维的, 可由最低维数为 1 的系统来实现。若实验数据表明某混沌吸引子是 2.26 维的, 则系统模型的最低维数是 3。为了保证吸引子所在的复杂流形可嵌入系统的状态空间, 建模时上述系统的维数分别应取为 3 和 6。这些估计对于重构混沌吸引子以及控制混沌具有重要意义。

习 题

- 1 任选一种数值积分方法编写其程序, 选择不同的积分步长计算下述 van der Pol 系统的张弛振动

$$\begin{cases} \ddot{u} + 10(u^2 - 1)\dot{u} + u = 0 \\ u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

将计算结果与图 2.4.3 进行对比。

- 2 将 Newton-Raphson 迭代法和参数延续算法相结合, 计算例 2.3.1 中系统的平衡点。
- 3 考察简谐激励下的 Duffing 系统

$$\ddot{u}(t) + 0.1\dot{u}(t) + u(t) + 0.05u^3(t) = 0.5 \cos \omega t$$

基于 4 阶 Runge-Kutta 方法编写打靶程序, 从系统的线性近似解出发, 计算系统在 $\omega=1$ 时的周期振动。

- 4 在题 3 基础上编写弧长方法的程序, 计算激励频率 $\omega \in [0.4, 1.6]$ 时该系统周期振动的幅频曲线。
- 5 编写简单胞映射程序, 分别用 100×100 个胞和 300×300 个胞计算例 8.4.1, 并与例 8.4.1 的结果进行对比。
- 6 编写程序, 计算系统 $\ddot{u} + u - u^3 = 0$ 自右侧鞍点 $(1, 0)$ 出发的异宿轨线。
- 7 基于 4 阶 Runge-Kutta 方法编写程序, 计算系统

$$\begin{cases} \ddot{u} + 0.05\dot{u} + u^3 = 7.5 \cos t \\ u(0) = 3.0, \quad \dot{u}(0) = 4.0 \end{cases}$$

的稳态混沌运动。根据图 8.5.1 中的坐标和延迟坐标绘制吸引子的 Poincaré 截面。

- 8 阐述 Lyapunov 指数的几何意义。
- 9 构造一个二维映射序列, 使其具有一个为零的 Lyapunov 指数。
- 10 编写程序, 计算题 8 中系统稳态混沌运动的 Lyapunov 指数。

- 11 将单位正方面积分为 l^2 个小块，去掉其中的 m 个小方块 ($l \geq m+1$, l, m 为整数)。然后对每个剩下的小方块 (其面积为 $\frac{1}{l^2}$) 重复上述过程，直至无穷。证明最终形成的点集具有分维数 $D = \frac{\log(l^2 - m^2)}{\log l}$ 。

- 12 对于 Hénon 映射

$$f: \begin{cases} u_1 \rightarrow 1 + 0.3u_2 - 1.3u_1^2 \\ u_2 \rightarrow u_1 \end{cases}$$

任选正方形闭区域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 中两点，分别产生迭代序列，计算各自的容积维数。

附录 1 用 MAPLE 求解非线性动力学问题

求解非线性动力学问题涉及到大量的符号推导和数值计算。随着所研究问题的深入,许多复杂的推导和计算已非人力所及。近年来,随着计算机软件技术的飞速发展,国外相继开发出了一些通用的数学工具软件包,如 MATLAB、MAPLE、MATHEMATICA。其中 MATLAB 以数值计算见长,在控制系统与仿真中得到了广泛有效的应用。MAPLE 与 MATHEMATICA 则具有强大的符号推导功能,被称为计算机代数 (computer algebra) 软件。这些软件将符号计算、数值计算和图形显示有机地结合在一起,可以大大减少求解数学问题的时间。

本附录介绍如何用 MAPLE 求解非线性动力学问题。MAPLE 是由加拿大 Waterloo 大学开发的,目前国内广泛使用的是其 4.0 版本,其命令直观易记,计算结果可按人们所习惯的书写格式显示。MAPLE 的主要功能如下:

(1) **数学推导**: 包括 Euclidean 几何、微积分、特殊函数、积分变换、常微分方程、偏微分方程、微分几何、线性代数、抽象代数、张量代数、Lie 代数、图论、概率统计、金融分析等各领域中的各种计算。

(2) **图形显示**: 包括各种二维、三维图形及动画。

另外,MAPLE 可以将其命令转换为 C 语言代码或 Fortran 语言代码,以便在其他计算机平台上运行,还可以将 MAPLE 文件按 Tex 格式或 Html 格式输出。最新的 MATLAB 5.x 已将 MAPLE 4.0 的核心命令集成到其中,用户可在 MATLAB 平台上通过 maple(")来调用 MAPLE 的命令。但 MATLAB 不支持 MAPLE 中数学表达式的输出显示格式,也不支持 MAPLE 的绘图命令,这给推导或计算结果的阅读带来不便。科技文档处理软件 Scientific Notebook 也将 MAPLE 4.0 的核心命令集成到其中,使得数学公式即输入即得计算结果,非常方便。

A1.1 MAPLE 命令概述^[54]

(1) 基本命令

MAPLE 的工作窗口中有“菜单栏”、“工具栏”和“命令栏”。MAPLE 的**命令提示符**为“>”。在命令提示符下,通过键入“?”可打开在线求助窗口。若键入“? + Maple 命令”则打开该 Maple 命令的求助窗口,如“? plot”打开绘图命令 plot 的求助窗口。通过“? lib”可获得 MAPLE 提供的标准库函数的索引及有关帮助。而“? package”则可获得多达 30 余个解决特殊问题的软件包的索引窗口,由此可进入各个包的求助窗口。MAPLE 的使用者开发了许多实用的共享程序,如 shoot 是一个用打靶法求解两点边值问题的共享程序。利用“? share”可进入共享程序库的索引及有关帮助窗口。当然也可通过“help”菜单获得相应的求助。

MAPLE 的**赋值符**为“:=”,**命令结束符**为“;”或“:”,分别代表显示运算结果或不显示运算结果。要调用前一步的计算结果,可用双引号“”^①。采用**注释符**“#”可以对程序加以注解。MAPLE 的**基本运算符**是: + (加)、- (减)、* (乘)、/ (除)、^ (乘方与开方)、sqrt (开平方)。**关系运算符**有: <= (小于等于)、>= (大于等于)、< (小于)、> (大于)、= (等于)、

^① 在 MAPLE 5.x 版本中,该符号被换成百分号%。

$\langle \rangle$ (不等于)。**逻辑运算符**有: **and** (与)、**or** (或)、**nor** (非)。需注意的是, “=” (相等)”与 “:= (赋值)”不同。以下述赋值命令为例:

># MAPLE 中以 pi 作为希腊字母 π

>(a+b+c)*pi: d:=sqrt(");

其运行结果为

$$d := \sqrt{(a+b+c)\pi}$$

在进行符号运算时, 要区分“**表达式**”与“**函数**”是两个不同的概念。例如, 命令

>p:=a*u^2+b*u+c;

将多项式赋给 p, p 是表达式的名字, 而不是函数, 键入 p(1)是无意义的。定义函数可按如下两种方式中的任意一种

>p:=u->a*u^2+b*u+c: q:=(u,v)->a*u*v+b*v^3:

>p:=unapply(a*u^2+b*u+c, u): q:=unapply(a*u*v+b*v^3, (u,v)):

此时, p(1)和 q(1,2)的运行结果分别是 a+b+c, 2a+8b。

对于一些比较复杂的记号或表达式, 为了减少多次输入时的工作量, 可以用命令 **alias** 给它们取代号或缩写, 具体用法见例 A1.1.1。

从理论上讲, MAPLE 可给出任意精度的计算结果。在作浮点运算时, MAPLE 默认的有效数字是 10 位。有两种方式可改变计算结果的有效数字位数。一是在命令提示符下, 键入 “Digits:=n” 将有效数位设置为 n。二是利用命令 **evalf**(expr, n)使表达式 expr 的计算结果保留 n 位有效数字, 如 **evalf**(pi/3)的结果是 1.047197551, **evalf**(pi/3,18)的结果是 1.04719755119659775。要注意的是, 命令 20/3 与 20.0/3 的结果是不同的, 前者是分数 20/3, 后者是 6.666666667。

(2) 常用命令及实例

例 A1.1.1 用谐波平衡法求 Duffing 方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2(u + \varepsilon u^3) = 0 \quad (\text{A1.1.1})$$

的周期解, 其 MAPLE 程序及结果显示如下。

>restart: # 命 MAPLE 清零, 开始计算

>alias(omega=w, omega[0]=w0, epsilon=e): # 为希腊字母取代号

>eq:=diff(u(t),t\$2)+w0^2*(u(t)+e*u(t)^3)=0; # 形成 Duffing 方程并显示结果^①

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) + \omega_0^2 [u(t) + \varepsilon u^3(t)] = 0$$

>u(t):=a*cos(w*t): # 设周期解的形式

^① 在 MAPLE 中, **diff**(u(t), t\$n) 表示将 $u(t)$ 关于 t 求 n 阶导数, 一阶导数可用 **diff**(u(t),t)。若求由 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数导数 $y^{(n)}$, 可用命令 **implicitdiff**(f(x,y),y,x\$n)计算。在显示导数计算结果时, 导数符号都采用 ∂ 。求积分的命令是 **int**(f(x), x)和 **int**(f(x), x=a..b), 前者求 $f(x)$ 的不定积分, 结果是不带任意常数的原函数, 后者计算 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分。

>**combine**(eq, trig): # 将解代入方程并对三角函数作积化和差

>eq:=**collect**("", [cos(w*t), a]); # 合并同类项并显示结果

$$eq := [a(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2 a^3] \cos(\omega t) + \frac{1}{4}\varepsilon\omega_0^2 a^3 \cos(3\omega t) = 0$$

>b1c:=**coeff**(lhs(eq), cos(w*t))=0; # 取 $\cos(\omega t)$ 项的系数并令其自相平衡^①

$$b1c := a(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2 a^3 = 0$$

>w=**sqr**t(**solve**(b1c, w^2)); # 由上式求出自由振动频率 ω

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2 a^2}$$

由于 ε 是小参数, 可设 $3\varepsilon a^2/4 \ll 1$ 。用命令 **series** 或 **Taylor** 取上式在 $a=0$ 处 Taylor 级数展开的 3 阶截断多项式, 经过转换和化简得到与 3.1 节相同的结果。

> **convert**(**series**(rhs(""), a=0, 3), **polynom**): w=**simplify**("', 'symbolic');

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0 a^2$$

命令 **convert**(expr, form, options) 的作用是将表达式 expr 转化成不同的形式。级数展开式 **series**(w, A=0, 3) 中带有余项, **convert** 命令把其中的余项去掉而将展开式变为多项式。在下面的例子中将多次使用该命令, 把三角式变为指数式, 把算子方程变为微分方程, 它还可把数组变为矩阵, 等等。

例 A1.1.1 中还用到了解方程命令 **solve**。解代数方程的调用格式是 **solve**(eqs, vars) 或 **fsolve**(eqs, vars, options)。前者是一般用法, 也可用于求解不等式, 后者用于求数值解。对求解多项式方程组, 可调用以 Gröbner 基方法为基础的 **Groebner** 包或以 Ritt-吴文俊方法为基础的共享程序 **charsets**。求解常微分方程的调用格式是 **dsolve**(eqs, vars, options)^②。

例 A1.1.2 求微分方程

$$\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = t \quad (\text{A1.1.2})$$

的通解及满足初始条件 $u(0) = 3, \dot{u}(0) = -2$ 的特解。

>**dsolve**(**diff**(u(t), t\$2)+2***diff**(u(t), t)-3*u(t)=t, u(t)); # 求通解

$$u(t) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{3}t + c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$$

>**dsolve**({**diff**(u(t), t\$2)+2***diff**(u(t), t)-3*u(t)=t, u(0)=3, D(u)(0)=-2}, u(t)); # 求特解

$$u(t) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{3}t + 2e^t + \frac{11}{9}e^{-3t}$$

若要求常微分方程的数值解, 只需在选项(options)处添上 **type=numeric** 即可。还可对求解方法

^① **lhs** 表示等式的左边。类似的, **rhs** 表示等式的右边。

^② 求解偏微分方程的基本用法是 **pdsolve**(eqs, vars), 还可调用 **PDEtools**, **PDEplot** 等包中有关的命令。

加以限制, MAPLE 提供了多达十几种数值求解方法供用户选择。

在研究用常微分方程描述的动力系统时, 微分方程工具包 **DEtools** 是非常有用的工具, 提供了许多方便实用的命令。例如, **phaseportrait** 是绘制相图的命令^①, 而 **poincare** 可用来绘制 Hamiltonian 系统相图的 Poincare 截面^②, 还有 **matrix_riccati** 可用于求解矩阵 Riccati 微分方程, 以及 **Dchangevar** 作微分方程变换, 等等。

例 A1.1.3 利用 MAPLE 绘制 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 10(u_2 - u_1) \\ \dot{u}_2 = 28u_1 - u_2 - u_1u_3 \\ \dot{u}_3 = -2.667u_3 + u_1u_2 \end{cases} \quad (\text{A1.1.3})$$

的相轨线。

>with(DEtools):

>sys:=[D(u1)(t)=10*(u2(t)-u1(t)),D(u2)(t)=28*u1(t)-u2(t)-u1(t)*u3(t),D(u3)(t)=-2.667*u3(t)+u1(t)*u2(t)]: # 定义微分方程组

>var:=[u1(t),u2(t),u3(t)]: # 独立函数变量

>ini:=[u1(0)=-15,u2(0)=-15,u3(0)=28]: # 对初始条件赋值

># 1. 采用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解方程, 并将相轨线投影到 (u_1, u_2) 平面上

>phaseportrait(sys,var,t=0..30,[ini],stepsize=0.01,scene=[u1(t),u2(t)],thickness=1, linecolour=1,method=classical[rk4]);

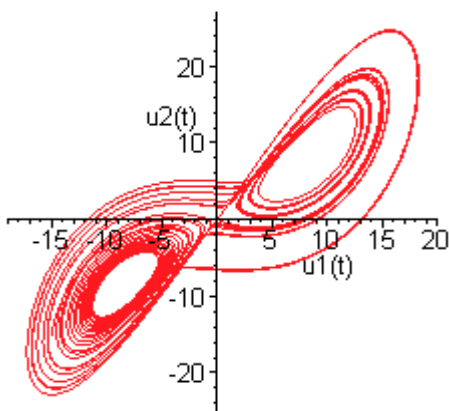


图 A1.1.1 Lorenz 方程的相轨线在 (u_1, u_2) 平面上的投影

># 2. 采用 3 阶 Runge-Kutta 方法求解方程, 并将结果投影到 (u_3, u_2) 平面上

>phaseportrait(sys,var,t=0..30,[ini],stepsize=0.01,scene=[u3(t),u2(t)],thickness=1, linecolour=1,method=classical[rk3]);

^① 在作图工具包 **plots** 中有一命令 **odeplot** 也可用于画相轨线, 见例 A1.1.7。

^② **DEtools** 中有一子包 **Poincare** 处理 Hamiltonian 系统。

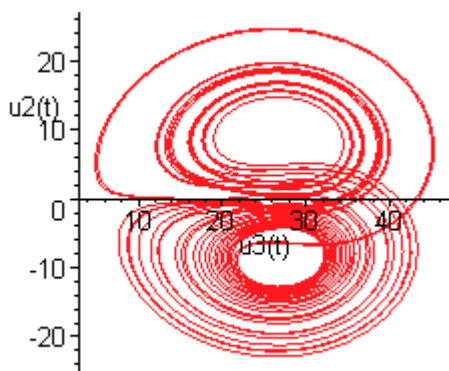


图 A1.1.2 Lorenz 方程的相轨线在 (u_3, u_2) 平面上的投影

># 3. 采用 Adams-Bashford-Moulton 预测-校正方法求解方程，投影到 (u_1, u_3) 平面上

```
>phaseportrait(sys,var,t=0..30,[ini],stepsize=0.01,scene=[u1(t),u3(t)],thickness=1,linecolour=1,met
hod=classical[abmoulton]);
```

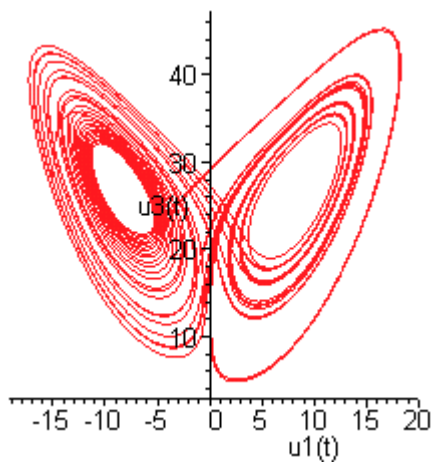


图 A1.1.3 Lorenz 方程的相轨线在 (u_1, u_3) 平面上的投影

例 A1.1.4 利用 MAPLE 将直角坐标描述的二维自治系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = a(u_1^2 + u_2^2)u_1 - [w + b(u_1^2 + u_2^2)]u_2 \\ \dot{u}_2 = a(u_1^2 + u_2^2)u_2 + [w + b(u_1^2 + u_2^2)]u_1 \end{cases} \quad (\text{A1.1.4})$$

化为极坐标形式。

```
>restart: alias(u[1]=u[1](t),u[2]=u[2](t),r=r(t),theta=theta(t)): # 定义代号
```

```
>eqs:=diff(u[1],t)=a*(u[1]^2+u[2]^2)*u[1]-(w+b*(u[1]^2+u[2]^2))*u[2],
```

```
diff(u[2],t)=a*(u[1]^2+u[2]^2)*u[2]+(w+b*(u[1]^2+u[2]^2))*u[1]; # 定义方程
```

$$eqs := \frac{\partial}{\partial t} u_1 = a(u_1^2 + u_2^2)u_1 - (w + b(u_1^2 + u_2^2))u_2, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_2 = a(u_1^2 + u_2^2)u_2 + (w + b(u_1^2 + u_2^2))u_1$$

># 其中 *eqs* 代表方程组，两个方程在 *eqs* 按前后顺序存放。若将两个方程用大括号 { } 括起来则不规定它们的先后顺序，而用中括号 [] 则规定先后顺序。

>**with(DEtools, Dchangevar):** # 仅调用微分方程工具包中的变量代换命令

>**Dchangevar**({u[1]=r*cos(w*t+theta),u[2]=r*sin(w*t+theta)},{eqs},t): {"[1]","[2]"}:

># 对方程自变量作代换并将方程组转换为集合形式，其中 "[n]" 表示前一步结果的第 *n* 项或序列的第 *n* 个位置上元素

>**solve**("",{diff(r,t),diff(theta,t)}): **simplify**("",trig): **combine**("",trig); # 求出 \dot{r} 和 $\dot{\theta}$ 并化简

$$\frac{\partial}{\partial t} r = ar^3, \quad \frac{\partial}{\partial t} \theta = br^2$$

例 A1.1.5 分析如下三维自治系统零解的稳定性

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 - u_3 + u_1^2 e^{u_2} \\ \dot{u}_2 = \sin u_1 - u_2 + u_1^2 u_2 + u_3^4 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - u_3 - e^{u_1} (\cos u_3 - 1) \end{cases} \quad (\text{A1.1.5})$$

>**with(linalg):** # 调用线性代数工具包

>f[1]:=-2*u[1]+u[2]-u[3]+u[1]^2*exp(u[2]); f[2]:=sin(u[1])-u[2]+u[1]^2*u[2]+u[3]^4:

f[3]:=u[1]+u[2]-u[3]-exp(u[1])*(cos(u[3])-1); # 定义方程右端向量场

>**jacobian**([f[1],f[2],f[3]],[u[1],u[2],u[3]]): # 计算向量场的 Jacobi 矩阵

>**subs**(u[1]=0,u[2]=0,u[3]=0,"): # 形成系统在零解处的 Jacobi 矩阵

>**Lambda=evalf(eigenvalues**("",3); # 计算 Jacobi 矩阵的特征值并取 3 位有效数字

$$\Lambda = (-2.47, \quad -0.765-0.795 \text{ I}, \quad -0.765+.795 \text{ I})$$

由于全部特征值皆有负实部，故零解是渐近稳定的。

在推导表达式时，常用到下述替换命令：**subs**(s=expr1, expr), **algsb**(expr1=expr2, expr, options), **subsop**(n=expr1,expr)。命令 **subs**(s=expr1, expr) 将 *expr* 中的符号 *s* 替换为 *expr1*；命令 **algsb**(expr1=expr2, expr, options) 把 *expr* 中所有能表示成 *expr1* 的函数的项或因子中的 *expr1* 替换为 *expr2*；而 **subsop**(n=expr1,expr) 将 *expr* 中的第 *n* 项替换为 *expr1*，其更一般用法是 **subsop**([m,n,...]=expr1,expr)。例如，由命令

>**subs**(u=sin(u),exp(u)); **algsb**(u^2=v,a*u^4+b*u^2+c); **subsop**([2,2]=exp(u),sin(u)+u*ln(u));

可分别得到 $e^{\sin(u)}$ ， $av^2 + bv + c$ ， $\sin(u) + ue^u$ 。

另外，命令 **map**(command, expr) 也很有用，其作用是对 *expr* 中的每一项都实施命令 *command*。要计算某一函数在不同点的函数值，可使用该命令。例如：

>f:=u->a*u^2+b*u+c: v:=**map**(f,[u1,u2]); # 对向量赋值

$$v := [au_1^2 + bu_1 + c \quad au_2^2 + bu_2 + c]$$

对于一些比较复杂的算法，可以通过编写子程序来实现。MAPLE 中的子程序类似于其他高级语言中的 subroutine 或 function，由 **proc** 开始，到 **end** 结束。

例 A1.1.6 由 7.2 节知，Logistic 映射 $u_{r+1} = pu_r(1 - u_r)$ 随着参数 p 的变化会发生倍周期分叉，直至发生混沌。现编写 MAPLE 程序 Logistic 验证这一结论。

```
>restart: # 对于占用较大内存的程序，这个命令尤为必要
>Logistic:= proc (u0,p1,p2,pd,n1,n2)
>   local k, itere, p, u: # 定义局部变量
>   u:={}: p:=p1: # 取 u 的初值为空集
>   while p<= p2 do
>     itere:=u0:
>     for k to n1 do
>       itere:=p*itere*(1-itere):
>     od: # 第一个 for 循环结束，略去前 n1 次迭代结果
>     for k to n2 do
>       itere:=p*itere*(1-itere):
>       u:=u union {[p, evalf(itere, 4)]}: # 命令 union 是集合的并运算符
>     od: # 第二个 for 循环结束
>     p:= p+pd
>   od: # while 循环结束
>   plot([op(u)], 'p'=p1 .. p2, style=POINT, symbol=POINT, labelfont=[TIMES,ITALIC,12]):
>end: # 结束
>Logistic(0.1,2.5,4,0.01,80,100): # 调用程序 Logistic 得到映射在区间[2.5, 4.0]上的分叉图
```

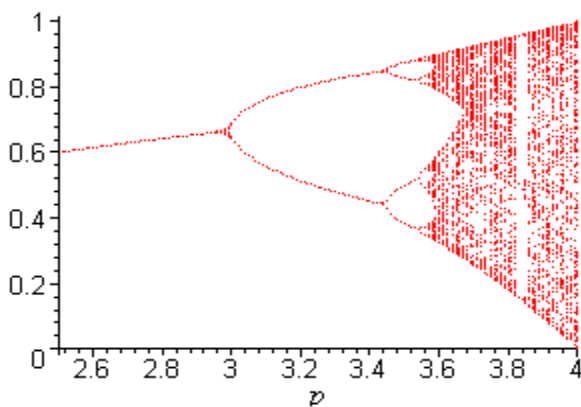


图 A1.1.4 Logistic 映射的分叉图

例 A1.1.6 用了两层循环，大循环 **while** 中嵌套了两个 **for** 循环，它们都是由 **do** 开始到 **od** 结束。循环的一般格式是：

while 循环	for 循环
while (conditions) do (statements)	for (statements) do (statements)
od;	od;

在 MAPLE 中, 绘制一元函数图形的基本用法是 **plot**($f(u)$, $u=a..b$, options), 而绘制二元函数图形的基本命令为 **plot3d**($f(u,v)$, $u=a..b$, $v=c..d$, options)。对于其他一些特殊或复杂的图形, 可由命令 **with(plots)** 调用绘图工具包 **plots** 来实现^①。**plots** 包里有许多实用的命令, 例如用命令 **implicitplot**($f(u,v)$, $u=a..b$, $v=c..d$) 可绘制由 $f(u,v)=0$ 确定的隐函数 $v=v(u)$ 及其分叉图, 利用 **odeplot** 可绘制二维动力系统的相图。

例 A1.1.7 考察具有粘性阻尼的单摆

$$\ddot{u} + c\dot{u} + k \sin u = 0 \quad (\text{A1.1.6})$$

绘制其在区域 $(u, \dot{u}) \in [-4, 4] \times [-3, 3]$ 中的相图。

首先编写一段 MAPLE 子程序 **pendphaseplot** 如下:

```
> pendphaseplot:=proc(c,k,ui,uf,n1,vi,vf,n2,ti,tf,n,vu,vv)
>   s:={}:
>   for i from 0 to n1 do
>     a:=ui+i*(uf-ui)/n1:
>     for j from 0 to n2 do
>       b:=vi+j*(vf-vi)/n2:
>       sys:=diff(u(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-k*sin(u(t))-c*v(t):
>       fcns:={u(t), v(t)}:
>       q:=dsolve({ sys,u(0)=a,v(0)=b },fcns,type=numeric,method=rkf45):
>       p:=plots[odeplot](q,[u(t),v(t)],ti..tf,numpoints=n,
>         view=[vu,vv],scaling=CONSTRAINED):
>       s:=s union p:
>     od:
>   od:
>   plots[display]([op(s)])
> end:
```

其中, 命令 **odeplot** 和前面已用到的 **phaseportrait** 都是先利用有关命令求出常微分方程的数值解, 再用绘图命令将相轨线绘制出来。对于单摆, 选取参数取值后调用 **pendphaseplot**, 可分别得到 $c=0$ 和 $c=0.5$ 时系统的相图。

```
> pendphaseplot(0,2,-4,4,10,-3,3,6,-5,5,100,-10..10,-5..5); # 无阻尼情形
```

^① 另一个绘图工具包 **plottools** 中有许多画特殊几何曲线、曲面、形体的命令。

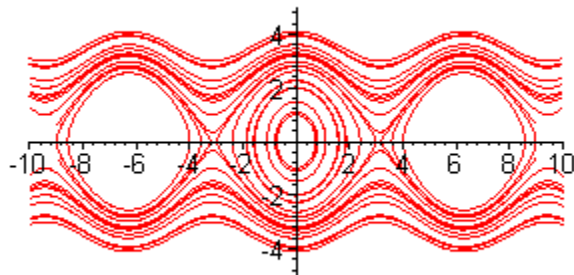


图 A1.1.5 无阻尼非线性单摆的相图

`>pendphaseplot(0.5,2,-4,4,8,-3,3,6,-5,5,100,-10..10,-6..6);` # 有阻尼情形

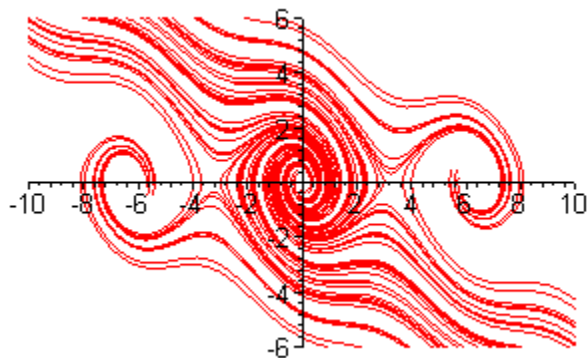


图 A1.1.6 阻尼非线性单摆的相图

无疑，MAPLE 的这些丰富绘图功能对于了解非线性动力系统的性质有很大帮助。

在研究碰撞、摩擦等分段描述的问题时需要用条件语句。MAPLE 中的条件语句为

条件语句 1	条件语句 2
if (conditions) then statements else statements fi :	if (conditions) then (statements) elif (conditions) then (statements) else (statements) fi : ... fi :

其中 **else** 段是可省略的

例 A1.1.8 用 MAPLE 语言描述含间隙振子的分段线性弹性力

$$p(u) = \begin{cases} 2u+1, & u < -1 \\ u, & |u| \leq 1 \\ 2u-1, & u > 1 \end{cases} \quad (\text{A1.1.7})$$

该函数可以用条件语句来描述

```
>p:=u->if u<-1 then 2*u+1 elif -1 <= u and u <= 1 then u else 2*u-1 fi:
```

```
>p:=proc (u) if u<-1 then 2*u+1 elif -1 <= u and u <=1 then u else 2*u-1 fi end:
```

在 MAPLE 中, 还可利用命令 **piecewise**(cond1,f_1,cond2,f_2,...,condn,f_n,f_otherwise)来定义分段函数。因此, 本例的函数可表示为:

```
>u->piecewise(u<-1, 2*u+1, -1<=u and u<=1, u, 2*u-1):
```

A1.2 建立弹性梁的非线性振动方程

1.2 节介绍了如何建立弹性梁的非线性运动微分方程并进行化简。现采用 MAPLE 来导出这些方程。为了使公式表示简洁, 此处某些表达式中项的位置与 MAPLE 显示的略有不同。

># 1. 初始化

```
>restart: alias(rho=r,theta=th): # 为希腊字母取代号
```

```
>sin(th):=diff(w(x,t),x); cos(th):=1-diff(w(x,t),x)^2/2: # 取三角函数为梁挠度的 2 阶截断
```

```
>M(x,t):=E*I*(1-3*diff(w(x,t),x)^2/2)*diff(diff(w(x,t),x),x): # 弯矩表达式
```

```
>N(x,t):=E*A*(diff(u(x,t),x)+diff(w(x,t),x)^2/2)*cos(th): # 轴向力表达式
```

># 2. 形成梁的动力方程

```
>eq:='r*A*diff(u(x,t),t$2)-(diff(N(x,t)*cos(th)+diff(M(x,t),x)*sin(th)*cos(th), x)*cos(th))',
      'r*A*diff(w(x,t),t$2)-(diff(N(x,t)*sin(th)-diff(M(x,t),x)*cos(th)*cos(th), x)*cos(th))';
```

$$\begin{aligned} \text{eq} := & \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x,t) \cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial x} M(x,t) \sin(\theta) \cos(\theta) \right] \cos(\theta), \\ & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x,t) \sin(\theta) - \frac{\partial}{\partial x} M(x,t) \cos(\theta)^2 \right] \cos(\theta) \end{aligned}$$

># 将动力方程取 2 阶截断, 分别得到

```
>eqa:=collect(simplify(eq[1],[diff(w(x,t),x)^3=0]),diff(w(x,t),x))=0;
```

$$\begin{aligned} \text{eqa} := & \left[\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] - \left[EA \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \right. \\ & \left. 6EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{3}{2} EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{25}{2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

```
>eqb:=collect(simplify(eq[2],[diff(w(x,t),x)^3=0]),diff(w(x,t),x))=0;
```

$$\begin{aligned} \text{eqb} := & [\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 3EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] - [EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 11EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & [2EA (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{4}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 3EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{21}{2} EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] (\frac{\partial w}{\partial x})^2 = 0 \end{aligned}$$

># 3. 化简：忽略横向运动对纵向运动的影响，假定纵向运动定常并忽略纵向惯性效应，即轴向载荷为常量，得到仅含横向位移的动力方程。

>subs(diff(u(x,t),x\$2)=0,diff(u(x,t),x)=-P[0]/E/A,lhs(eqb)): # 将简化条件代入上述方程

>eqb:=collect(",diff(w(x,t),x))=0;

$$\begin{aligned} \text{eqb} := & [\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 3EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] - [11EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}] \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & \frac{1}{2} [-P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 6EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 21EI (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3] (\frac{\partial w}{\partial x})^2 = 0 \end{aligned}$$

># 取梁的第一阶固有振型，采用 Galerkin 方法将用偏微分方程化为单自由度常微分方程。

>w(x,t):=sin(pi*x/l)*q(t): # 取梁的横向位移为第一阶固有振型

>int(lhs(eqb)*sin(pi*x/l),x=0..l): # 代入 Galerkin 条件进行积分

>algsubs(sin(pi)=0,"): algsubs(cos(pi)=-1,"): # 对三角函数的值化简

>collect(expand("/(r*A*1/2)),q(t))=0; # 得到单自由度常微分方程

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{\rho A} \left\{ \left(\frac{\pi^4 EI}{l^4} - \frac{\pi^2 P_0}{l^2} \right) q(t) + \left[-\frac{5\pi^6 EI}{4l^6} + \frac{\pi^4 (4P_0 + 3EA)}{8l^4} \right] q^3(t) - \frac{21\pi^8 EI}{16l^8} q^5(t) \right\} = 0$$

A1.3 Duffing 振子的主共振与 1/3 次亚谐共振

本节用多尺度法来研究受简谐激励的 Duffing 系统

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 = F \cos(\omega t) \quad (\text{A1.3.1})$$

以下分别考察系统的主共振与 1/3 亚谐共振及其稳定性。

(1) 主共振及其稳定性

取 $\zeta\omega_0 = \varepsilon\mu$, $F = \varepsilon f$, 采用两时间尺度 $t_1 = t$, $t_2 = \varepsilon t$, 求方程的一次近似解。

># 1. 初始化

>restart: alias(epsilon=e, omega=w, omega[0]=w0, t[1]=t1, t[2]=t2): # 取代号

>e:=(t1,t2)->e: w0:=(t1,t2)->w0: a:=(t1,t2)->a: f:=(t1,t2)->f: mu:=(t1,t2)->mu: # ε , ω_0 , a , f , μ 为常(函)数

>ode:=(D@@2)(u)+2*mu*e*D(u)+w0^2*u+e*w0^2*u^3-e*f*cos(omega*t)=0; # 定义方程

$$\text{ode} := (D^{(2)})(u) + 2\mu\varepsilon D(u) + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 - \varepsilon f \cos(\omega t) = 0$$

>e_order:=1: # 定义 ε 的阶数

>ode:=subs(D=sum('e^(i-1)*D[i]',i=1..(e_order+1)),ode): # 代入微分算子 $D = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2}$

># 2. 求一次近似解

>u:=sum('v[i]*e^i',i=0..e_order); 定义一次近似解

$$u := v_0 + v_1 \varepsilon$$

># 将解及微分算子代入方程并略去 ε 的高次项, 分离 ε 的系数得

>ode:=simplify(collect(ode,e),{e^2=0}):

>for i from 0 to e_order do eq[i]:=coeff(lhs(ode),e,i)=0 od;

$$eq[0] := D_{1,1}(v_0) + \omega_0^2 v_0 = 0$$

$$eq[1] := D_{1,1}(v_1) + \omega_0^2 v_1 - f \cos(\omega t) + 2D_{1,2}(v_0) + 2\mu D_1(v_0) + \omega_0^2 v_0^3 = 0$$

># 为了求解算子方程 eq[1], 将其转换为微分方程并将激励表示为指数函数

>remove(has,lhs(eq[1]),cos): convert("(t1,t2),diff):

>eq[1]:=-convert(f*cos(w0*t1+sigma*t2),`exp`);

$$eq[1] := \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} v_1(t_1, t_2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} v_0(t_1, t_2) + 2\mu \frac{\partial}{\partial t_1} v_0(t_1, t_2) + \omega_0^2 v_1(t_1, t_2) + \omega_0^2 v_0^3(t_1, t_2) - \frac{f}{2} (e^{I(\omega_0 t_1 + \sigma t_2)} + e^{-I(\omega_0 t_1 + \sigma t_2)})$$

># 方程 eq[0]的解为 $v_0 = A(t_2) \cos(\omega_0 t_1 + B(t_2))$, 其指数函数形式为

>v[0]:=A(t2)*cos(w0*t1+B(t2)): convert(",`exp`"): v[0]:=unapply(",(t1,t2));

$$v_0 := (t_1, t_2) \rightarrow \frac{A(t_2)}{2} (e^{I(\omega_0 t_1 + B(t_2))} + e^{-I(\omega_0 t_1 + B(t_2))})$$

># 将 eq[0]的解代入方程 eq[1]得共振条件

>expand(eq[1]): collect(",exp(I*w0*t1)): coeff(",exp(I*w0*t1),1):

>map(x->x*exp(-I*B(t2)),"): combine(",`exp`):

># 作幅角变换 $B(t_2) = \sigma t_2 - C(t_2)$ 化简共振条件

>subs(I*B(t2)=I*sigma*t2-I*C(t2),B(t2)=sigma*t2-C(t2),"): conds:=combine(",`exp`):

$$conds := -A(t_2)\omega_0(\sigma - \frac{\partial}{\partial t_2} C(t_2)) + \frac{3}{8}\omega_0^2 A^3(t_2) + I\omega_0 \frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2) - \frac{f}{2} e^{IC(t_2)} + I\mu\omega_0 A(t_2)$$

># 分离实部与虚部即得共振解的振幅与幅角应满足的微分方程 cond1=0, cond2=0

>convert(conds,`trig`):

>cond1:=collect(coeff("",I,0),[diff(A(t2),t2),cos(C(t2))]);

>cond2:=collect(coeff("",I,1),[diff(A(t2),t2),sin(C(t2)),cos(C(t2))]);

$$cond1 := -A(t_2)\omega_0(\sigma - \frac{\partial}{\partial t_2} C(t_2)) + \frac{3}{8}\omega_0^2 A^3(t_2) - \frac{f}{2} \cos C(t_2)$$

$$\text{cond2} := \omega_0 \frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2) - \frac{f}{2} \sin C(t_2) + \mu \omega_0 A(t_2)$$

># 3. 稳态解的幅频方程

>A(t2):=A: C(t2):=C: cond1=0; cond2=0;

$$-A\omega_0\sigma + \frac{3}{8}\omega_0^2 A^3 - \frac{f}{2}\cos C = 0$$

$$- \frac{f}{2}\sin C + \mu\omega_0 A = 0$$

># 利用 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ 导出幅频方程

>remove(has,(cond1),cos)^2+remove(has,cond2,sin)^2=simplify(select(has,cond1,cos)^2+select(has,cond2,sin)^2,`trig`);

$$(-A\omega_0\sigma + \frac{3}{8}\omega_0^2 A^3)^2 + \mu^2 A^2 \omega_0^2 = \frac{1}{4} f^2$$

># 将上式两边同乘以 ε^2 ，得用原系统参数表示的幅频方程

>af_eq:=subs(f=F,sigma=w-w0,A^3=e*A^3,mu=zeta*w0,");

$$af_eq := (-A\omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{3}{8}\omega_0^2 \varepsilon A^3)^2 + \zeta^2 A^2 \omega_0^4 = \frac{1}{4} F^2$$

>e:=0.1: F:=0.1: zeta:=0.01: w0:=1: # 数值例子 1

>with(plots, implicitplot):

>implicitplot(af_eq,omega=0..4,A=0..6,numpoints=10000,axes=box,labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12]); # 绘制幅频曲线

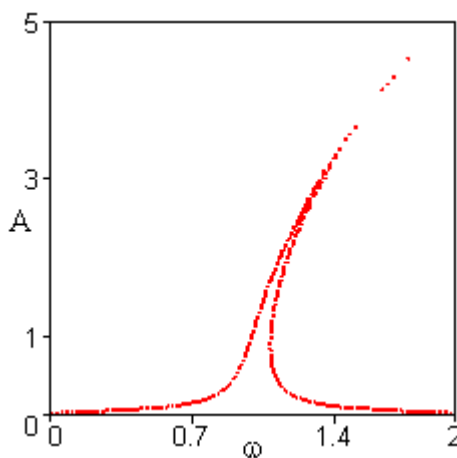


图 A1.3.1 刚度硬化 Duffing 系统的幅频曲线

>e:=-0.1: # 数值例子 2

>implicitplot(af_eq,omega=0..2,A=0..6,numpoints=10000,axes=box,labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12],tickmarks=[[0,0.5,1,1.5,2],[0,1,2,3,4,5]]); # 绘制幅频曲线

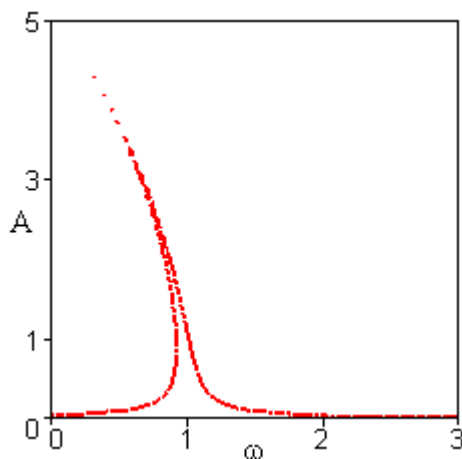


图 A1.3.2 刚度软化 Duffing 系统的幅频曲线

># 4. 稳态解的稳定性

> e:='e': A:='A': F:='F': zeta:='zeta': w0:='w0': # 解除各变量的赋值使其重新成为变量

># 注意到振幅 $A(t_2)$ 与幅角 $C(t_2)$ 的微分方程组右端函数分别是 $-\text{cond2}$, $-\text{cond1}/A$, 从而

> **linalg[jacobian]**([-cond2,-cond1/A],[A,C]): # 计算一阶方程组右端函数的 Jacobi 矩阵

> **subs**(cos(C)=**solve**(cond1,cos(C)),sin(C)=**solve**(cond2,sin(C))),":

> **map**(**simplify**,"): # 化简 Jacobi 矩阵

> **linalg[charpoly]**(" ,lambda): **p:=collect**(" ,lambda): # 求其特征多项式

$$p := \lambda^2 + 2\lambda\mu\omega_0 + \mu^2\omega_0^2 + \omega_0^2\sigma^2 - \frac{3}{2}\sigma\omega_0^3A^2 + \frac{27}{64}\omega_0^4A^4$$

> **coeff**(p,lambda,0): # 稳定性条件为 **coeff**(p,lambda,0)>0

> **stab_cond:=subs**(A^4=e^2*A^4,mu=zeta*w0,sigma^2=(w-w0)^2,

op(1,")=(w-w0)*e***op**(1,")/sigma,"): # 用原参数表示稳定性条件

$$\text{stab_cond} := \zeta^2\omega_0^4 + \omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 - \frac{3}{2}(\omega - \omega_0)\varepsilon\omega_0^3A^2 + \frac{27}{64}\omega_0^4\varepsilon^2A^4$$

> **af_eq**: # 幅频方程

$$(-A\omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{3}{8}\omega_0^2\varepsilon A^3)^2 + \zeta^2A^2\omega_0^4 = \frac{1}{4}F^2$$

> w0:=1: zeta:=0.01: e:=0.1: F:=0.1: # 再看数值例子 1

> **p1:=implicitplot**(stab_cond,w=0.4,A=0..6,numpoints=10000,axes=BOX,view=[0.4,0..6],color=blue): # 在后台绘出临界稳定边界

> **with**(plots, **textplot**): **with**(plots, **display**):

> **p2:=textplot**([2.5,5,`unstable region`],align={ABOVE,RIGHT}): # 标注

> **p3:=implicitplot**(af_eq,w=0..2,A=0..6,numpoints=6000,axes=box,thickness=2): # 在后台绘制幅频曲线

`>display({p1,p2,p3},ytickmarks=[0,2,4,6],labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12]);` # 显示后台绘图结果

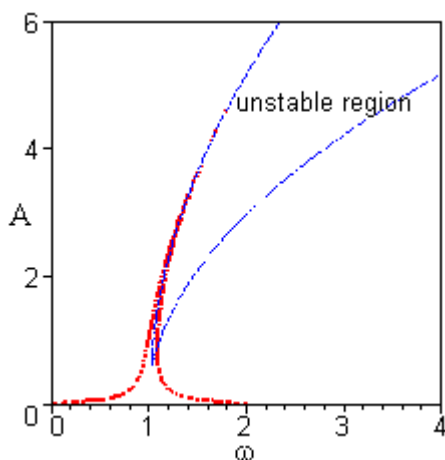


图 A1.3.3 刚度硬化 Duffing 系统的幅频曲线及不稳定区

`>e:=-0.1;` # 再看数值例子 2

`>p1:=implicitplot(stab_cond,w=0..3,A=0..6,numpoints=10000,axes=BOX,color=blue);` # 在后台绘制临界稳定边界

`>p2:=textplot([2,3,`stable region`],align={ABOVE,RIGHT});` # 标注

`>p3:=implicitplot(af_eq,w=0..3,A=0..6,numpoints=6000,axes=box,thickness=2);` # 在后台绘制幅频曲线

`>display({p3,p2,p1},xtickmarks=[0,1,2,3],labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12]);`

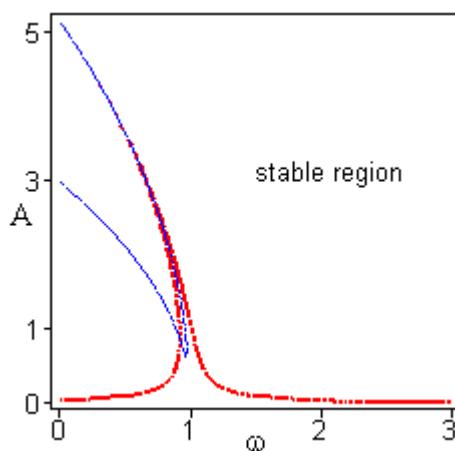


图 A1.3.4 刚度软化 Duffing 系统的幅频曲线及稳定区

(2) 1/3 次亚谐共振及其稳定性

仍取 $\zeta\omega_0 = \varepsilon\mu$ ，但 $F = f = O(1)$ ， $\omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma$ 。此时的求解程序类似于主共振情况，故略去大部分注解。

># 1.初始化

>restart: alias(epsilon=e, omega=w, omega[0]=w0, t[1]=t1, t[2]=t2, beta=b):

>e:=(t1,t2)->e: w0:=(t1,t2)->w0: a:=(t1,t2)->a: f:=(t1,t2)->f: mu:=(t1,t2)->mu:

>ode:=(D@@2)(u)+2*mu*e*D(u)+w0^2*u+e*w0^2*u^3-f*cos(omega*t)=0;

$$ode := (D^{(2)})(u) + 2\mu\epsilon D(u) + \omega_0^2 u + \epsilon \omega_0^2 u^3 - f \cos(\omega t) = 0$$

>e_order:=1:

>ode:=subs(D=sum('e^(i-1)*D[i]',i=1..e_order+1),ode):

>u:=sum('v[i]*e^i',i=0..e_order):

>ode:=simplify(collect("",e),{e^(e_order+1)=0}):

>for i from 0 to e_order do eq[i]:=coeff(lhs(ode),e,i)=0 od;

$$eq[0] := D_{1,1}(v_0) + \omega_0^2 v_0 - f \cos(\omega t) = 0$$

$$eq[1] := D_{1,1}(v_1) + 2D_{1,2}(v_0) + 2\mu D_1(v_0) + \omega_0^2 v_0^3 + \omega_0^2 v_1 = 0$$

># 2.导出共振条件

>eq[1]:=convert(eq[1](t1,t2),diff);

$$eq[1] := \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} v_1(t_1, t_2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} v_0(t_1, t_2) + 2\mu \frac{\partial}{\partial t_1} v_0(t_1, t_2) + \omega_0^2 v_0^3(t_1, t_2) + \omega_0^2 v_1(t_1, t_2) = 0$$

># eq[0]的解 $v_0(t_1, t_2)$ 及其指数形式

>v[0]:=b*cos(3*w0*t1+sigma*t2)+A(t2)*cos(w0*t1+B(t2));

>convert(",`exp`): v[0]:=unapply(",(t1,t2));

>expand(lhs(eq[1])): eq:=collect(",exp(I*w0*t1)): coeff(",exp(I*w0*t1),1):

>map(x->x*exp(-I*B(t2)),"): combine(",`exp`):

>conds:=subs(I*B(t2)=(I*sigma*t2-I*C(t2))/3,B(t2)=(sigma*t2-C(t2))/3,");

$$conds := \frac{3}{8} \omega_0^2 \beta A^2(t_2) e^{iC(t_2)} - \omega_0 A(t_2) \left[\frac{\sigma}{3} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_2} C(t_2) \right] + I \mu \omega_0 A(t_2) + I \omega_0 \frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2) + \frac{3}{4} \omega_0^2 \beta^2 A(t_2) + \frac{3}{8} \omega_0^2 A^3(t_2)$$

>convert(conds,`trig`): cond1:=coeff(",I,0); cond2:=coeff("",I,1);

$$cond1 := \frac{3}{8} \omega_0^2 \beta A^2(t_2) \cos C(t_2) - \omega_0 A(t_2) \left[\frac{\sigma}{3} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_2} C(t_2) \right] + \frac{3}{4} \omega_0^2 \beta^2 A(t_2) + \frac{3}{8} \omega_0^2 A^3(t_2)$$

$$cond2 := \frac{3}{8} \omega_0^2 \beta A^2(t_2) \sin C(t_2) + \mu \omega_0 A(t_2) + \omega_0 \frac{\partial}{\partial t_2} A(t_2)$$

3.稳态解的幅频方程

>A(t2):=A: C(t2):=C: cond1=0; cond2=0;

$$\frac{3}{8}\omega_0^2\beta A^2\cos C - \frac{1}{3}\omega_0 A\sigma + \frac{3}{4}\omega_0^2\beta^2 A + \frac{3}{8}\omega_0^2 A^3 = 0$$

$$\frac{3}{8}\omega_0^2\beta A^2\sin C + \mu\omega_0 A = 0$$

```
>remove(has,cond1,cos)^2+remove(has,cond2,sin)^2=simplify(select(has,cond1,cos)^2
+select(has,cond2,sin)^2,`trig`):
```

```
>af_eq:=subs(b^2=e*beta^2,mu=zeta*w0,sigma=w-w0,A^3=e*A^3, lhs("")) = e^2*rhs("");
```

用原参数表示幅频方程

$$af_eq := [-\frac{1}{3}A\omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2\beta^2 A + \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0^2 A^3]^2 + \zeta^2\omega_0^4 A^2 = \frac{9}{64}\varepsilon^2\omega_0^4\beta^2 A^4$$

># 4. 稳态解的稳定性

```
>with(linalg):
```

```
>jacobian([-cond2/w0, -normal(3*cond1/A/w0)], [A,C]):
```

```
>subs(cos(C)=solve(cond1,cos(C)), sin(C)=solve(cond2,sin(C)), "): map(simplify, "):
```

```
>det(lambda-"): p:=collect(",lambda); # 稳态解对应的 Jacobi 矩阵及其特征多项式
```

$$p := \lambda^2 + 2\mu\lambda - 3\mu^2 - \frac{1}{3}\sigma^2 + \frac{3}{2}\sigma\omega_0\beta^2 - \frac{27}{16}\omega_0^2\beta^4 + \frac{27}{64}\omega_0^2 A^4$$

```
>coeff(p, lambda, 0):
```

```
>stabil_cond:=subs(A^4=e^2*A^4,mu=zeta*w0,sigma^2=(w-w0)^2,b^4=b^4*e^2,
```

```
select(has,coeff(p,lambda,0),3/2) = e*(w-w0)* select(has,coeff(p,lambda,0), 3/2)/sigma, "):
```

$$stab_cond := -3\zeta^2\omega_0^2 - \frac{1}{3}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{3}{2}\varepsilon(\omega - \omega_0)\omega_0\beta^2 - \frac{27}{16}\varepsilon^2\omega_0^2\beta^4 + \frac{27}{64}\varepsilon^2\omega_0^2 A^4$$

```
>af_eq: # 幅频方程
```

$$[-\frac{1}{3}A\omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0^2\beta^2 A + \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0^2 A^3]^2 + \zeta^2\omega_0^4 A^2 = \frac{9}{64}\varepsilon^2\omega_0^4\beta^2 A^4$$

```
>e:=0.5: F:=10: w0:=1: b:=F/2/(1-w^2): zeta:=0.02: # 数值例子
```

```
>with(plots, implicitplot): with(plots, textplot): with(plots,display):
```

```
>with(plottools, arrow): # 调用 plottools 包中画箭头的命令
```

```
>p1:=implicitplot(stabil_cond,w=3..6,A=0..3,numpoints=1000,axes=BOX,color=blue):
```

```
>p2:=implicitplot(af_eq,w=3..6,A=0..3,numpoints=1000,axes=box, thickness=2):
```

```
>p3:=textplot( [4.5, 1.9, `unstable`] ):
```

```
>p4:=textplot( [3.7, 2.8, `stable`] ):
```

```
>p5:=arrow([4.5,2.], [4.5,2.3],.005,.03,.1):
```

```
>p6:=arrow([3.7,2.7], [3.7,2.4],.005,.03,0.1):
```

```
>display({p1,p2,p3,p4,p5,p6},labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12],view=[3..6,0..4],tickmarks=[
[3,4,5,6],[0,1,2,3,4]]);
```

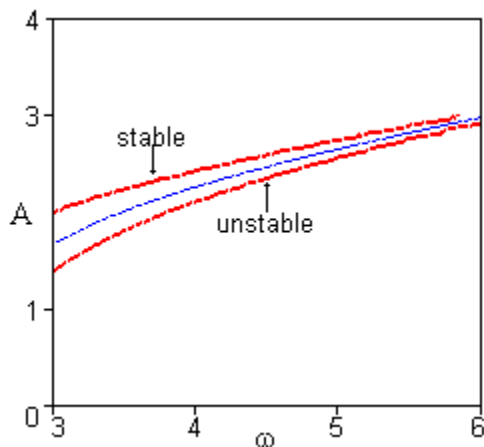


图 A1.3.5 1/3 次亚谐波共振的幅频曲线及其稳定性

A1.4 两自由度非线性振动方程的强迫振动

本节用谐波平衡法求解下述两自由度非线性振动方程的强迫振动

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2(u_1 + u_1^2) - \mu\omega_2^2(u_2 - u_1) = F \sin(\omega t) \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2(u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A1.4.1})$$

1. 定义系统方程和解的形式

>restart: alias(omega[1]=w1,omega[2]=w2,omega=v,u[1]=u1,u[2]=u2, A[1]=A1,A[2]=A2):

>eq1:=diff(u1(t),t,t)+w1^2*u1(t)*(1+u1(t)^2)-mu*w2^2*(u2(t)-u1(t))-F*sin(v*t):

>eq2:=diff(u2(t),t,t)+w2^2*(u2(t)-u1(t)):

>u1(t):=A1*sin(v*t): u2(t):=A2*sin(v*t):

2. 将解代入系统方程、化简并取出一次谐波项的系数

>eq1:=collect(combine(eq1,trig),[sin(v*t),cos(v*t),A1]):

$$eq1 := \left[\frac{3}{4}\omega_1^2 A_1^3 + (\omega_1^2 + \mu\omega_2^2 - \omega^2)A_1 - \mu\omega_2^2 A_2 - F \right] \sin(\omega t) - \frac{1}{4}\omega_1^2 A_1^3 \sin(3\omega t)$$

>eq2:=collect(combine(eq2,trig),[sin(v*t),cos(v*t),A1]):

$$eq2 := [-\omega_2^2 A_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)A_2] \sin(\omega t)$$

>b1c1:=coeff(eq1,sin(v*t)): b1c2:=coeff(eq2,sin(v*t)):

3. 幅频方程

>subs(A2=solve(b1c2,A2),b1c1): normal("): numer("): # 用命令 numer 获得分式的分子

>af_eq1:= collect(",[v,w1,w2])=0; # 振幅 A₁ 与 ω 的关系

$$af_eq1 := 4A_1\omega^4 + [(-3A_1^3 - 4A_1)\omega_1^2 - 4A_1(1 + \mu)\omega_2^2 + 4F]\omega^2 + (3A_1^3 + 4A_1)\omega_1^2\omega_2^2 - 4F\omega_2^2 = 0$$

>subs(A1=solve(b1c2,A1),b1c1): normal("): numer("):

>af_eq2:= collect(",[v,w1,w2])=0; # 振幅 A₂ 与 ω 的关系

$$af_eq2 := -3\omega_1^2 A_2^3 \omega^6 + (4A_2 \omega_2^4 + 9A_2^3 \omega_1^2 \omega_2^2) \omega^4 + [(-9A_2^3 - 4A_2) \omega_1^2 \omega_2^4 - 4A_2(1 + \mu) \omega_2^6] \omega^2 + (3A_2^3 + 4A_2) \omega_1^2 \omega_2^6 - 4F \omega_2^6 = 0$$

4. 给定参数下的幅频曲线

```
>with(plots): w1:=1.0: w2:=1.0: mu:=0.1: F:=0.1/sqrt(3):
>p1:=implicitplot(subs(A1=-A3,lhs(af_eq1)),v=0..2,A3=0..1.5,axes=box,numpoints=3000,
thickness=1):
>p2:=implicitplot(lhs(af_eq1),v=0..2,A1=0..1.5,axes=box,numpoints=3000,thickness=1):
>display({p1,p2},labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12],tickmarks=[[0,0.7,1.4,2],[0,0.5,1,1.5]]);
```

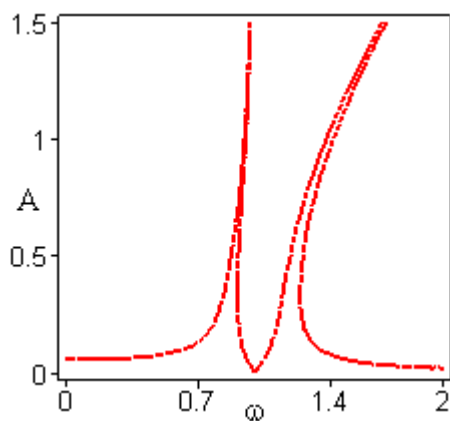


图 A1.4.1 第一个自由度的位移幅频曲线

```
>p3:=implicitplot(subs(A2=-A4,lhs(af_eq2)),v=0..2,A4=0..1.5,axes=box,numpoints=3000,
color=blue,thickness=2):
>p4:=implicitplot(lhs(af_eq2),v=0..2,A2=0..1.5,axes=box,numpoints=3000,
color=blue,thickness=2):
>display({p3,p4},labels=[w,A],labelfont=[SYMBOL,12],tickmarks=[[0,0.7,1.4,2],[0,0.5,1,1.5]]);
```

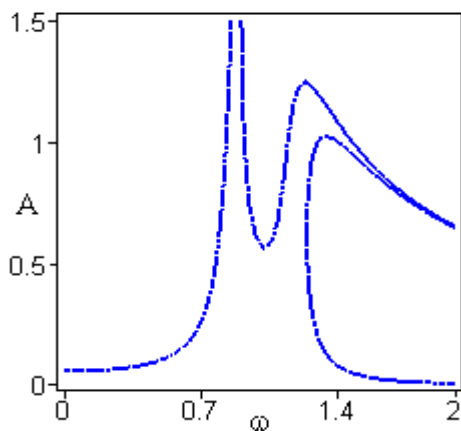


图 A1.4.2 第二个自由度的位移幅频曲线

最后需要指出, 本附录旨在引起初学者对 MAPLE 的兴趣, 进而在 MAPLE 的帮助下学习本书并完成习题。因此, 附录中的程序力求易读, 而过程并非最优。希望这有助于初学者轻松地跨入非线性动力学的大门, 将学习时的注意力从传统的、繁重的数学推导中解脱出来。

附录 2 Lyapunov 方程的可解性条件

定理 A2.1.1: 任给矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 和对称矩阵 $C \in R^{n \times n}$, Lyapunov 方程

$$A^T B + BA = C \quad (\text{A2.1.1})$$

有唯一对称矩阵解 $B \in R^{n \times n}$ 的充分必要条件是矩阵 A 的特征值 $\lambda_r, r=1, 2, \dots, n$ 满足

$$\lambda_r + \lambda_s \neq 0, \quad r \leq s, \quad r, s=1, 2, \dots, n \quad (\text{A2.1.2})$$

证明: 根据线性代数, 存在满秩矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 使得

$$\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{a}_{ij}] = P^{-1} A P \quad (\text{A2.1.3})$$

其主对角线元素从上到下依次为矩阵 A 的特征值 $\lambda_r, r=1, 2, \dots, n$ 。将式(A2.1.3)代入式(A2.1.2), 得到

$$\tilde{A}^T \tilde{B} + \tilde{B} \tilde{A} = \tilde{C} \quad (\text{A2.1.4})$$

其中

$$\tilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{b}_{ij}] = P^T B P, \quad \tilde{C} \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{c}_{ij}] = P^T C P \quad (\text{A2.1.5})$$

将式(A2.1.4)展开得到

$$\begin{cases} 2\lambda_1 \tilde{b}_{11} = \tilde{c}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \tilde{b}_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{b}_{12} = \tilde{c}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \tilde{b}_{11} + \tilde{a}_{23} \tilde{b}_{12} + (\lambda_1 + \lambda_3) \tilde{b}_{13} = \tilde{c}_{13} \\ \dots\dots \end{cases} \quad (\text{A2.1.6})$$

这是关于 $n(n+1)/2$ 个未知量 $\tilde{b}_{ij}, i \leq j=1, 2, \dots, n$ 的线性方程组, 其系数矩阵呈下三角形, 对应的 $n(n+1)/2$ 阶行列式为

$$\Delta = \prod_{1 \leq r \leq s \leq n} (\lambda_r + \lambda_s) \quad (\text{A2.1.7})$$

因此, 方程(A2.1.6)有唯一解的充分必要条件是式(A2.1.2)。由方程(A2.1.6)的解构成对称矩阵 \tilde{B} , 代回式(A2.1.5)得到对称矩阵 $B = P^{-T} \tilde{B} P^{-1}$ 。证毕。

名词索引

(按数字、英语字母、汉语拼音排序)

数字			
1/3 次亚谐共振	68,69	Poincaré-Birkhoff 规范型	133
3 次超谐共振	69,72	Poincaré 环域定理	38
英语字母		Poincaré 截面	141
Admas-Bashforth 预测法	193	Poincaré 映射	142
Admas-Moulton 校正法	193	Poincaré 指数	40
Bendixson 定理	38	Routh-Hurwitz 判据	125
Cantor 三分集	217	Runge-Kutta 方法	191
Duffing 系统	4	Runge-Kutta-Fehlberg 方法	191
Euler 折线法	190	r 步吸引域	206
Floquet 定理	85	Sarkovskii 定理	172
Galerkin 方法	15,60	Sierpinski 地毯	217
Galerkin 条件	60	Smale-Birkhoff 定理	174
Gear 方法	194	Smale 马蹄映射	173
Hénon 映射	174	Ueda 吸引子	212
Hopf 分叉	155,158	汉语拼音	
KBM 方法	52	A	
Liénard 图解法	37	鞍点	27
Logistic 映射	170	鞍结点	146,148
Lyapunov-Schmidt 方法	150	B	
Lyapunov 函数	121	半定号函数	121
Lyapunov 维数	220	半负定函数	121
Lyapunov 意义下的稳定性	120	半正定函数	121
Lyapunov 直接方法	121	胞	205
Lyapunov 指数	212	胞映射	205
Mathieu 方程	6	饱和	115
Melnikov 函数	179	保积特性	84
m 倍周期运动	137	保守系统	3
Naimark-Sacker 分叉	161,164	倍周期分叉	161,162
Newton-Raphson 迭代法	196	闭轨	28
OGY 方法	184	边界激变	183
PB 规范型	131	变号函数	121
Poincaré-Andronov-Hopf 定理	158	不变集	173
		不变流形的计算	208

不变子空间	128	分叉点	146
不动点	142	分叉值	147
不稳定	25	分段线性系统	5
不稳定子空间	128,144	分数维	218
C		分形	175,216
擦边分叉	183	幅频响应方程	66
参激振动	6	负常号函数	121,130
参数估计	16	负定函数	121
参数激励	6	G	
参数延续算法	197	概周期运动	164
叉形分叉	149	刚度渐软	4
插值胞映射	207	刚度渐硬	4
常号函数	121,130	刚性微分方程	194
超混沌吸引子	215	共振	135
超临界叉形分叉	150	共振的阶	135
次共振	68	骨架线	66
猝息	77	关联维数	219
D		广义胞映射	206
打靶法	198	广义坐标	7
单步法	190	轨道不稳定	140
单值矩阵	84	轨道渐近稳定	140
点映射	205	轨道稳定	140
定号函数	121	H	
动态分叉	155	耗散系统	34
对称破缺	166	合并激变	183
多步法	190	盒维数	218
多尺度法	57	横截同宿点	174
E		横截异宿点	174
二次 Hopf 分叉	164	弧长方法	202
F		环面运动	164
非保守系统	5	混沌	170
非双曲不动点	144	混沌吸引子	174,180
非双曲型平衡点	129	混沌运动	169
非线性参数估计	16	J	
非线性刚度	4	基本解矩阵	84
非自治系统	6	激变	183
分叉	146	激励频率失调参数	64

极限点	146	奇点	25
极限环	38	奇怪吸引子	175,180
计算阻尼	195	奇结点	27
加法型参激组合共振	117	奇线	28
检验函数	201	奇异点	146
减法型参激组合共振	118	奇异摄动法	46
简单胞映射	205	奇异摄动展开	46
渐近稳定	26	全局分叉	166
焦点	28	R	
接缝法	24	容积维数	218
结点	27	S	
截断 PB 规范型	133	熵	219
静态分叉	146,161	摄动法	43
静态分叉点	147	渗透	115
局部不稳定流形	128,144	失步	80
局部分叉	166	时变参数系统	80
局部稳定流形	128,144	实验建模	3
局部中心流形	128,144	双曲不动点	144
K		双曲型平衡点	129
跨临界分叉	149	瞬态混沌	180
快时变参数	82	T	
L		特征乘数	84
离散动力系统	142	特征指数	84
理论建模	3	跳跃现象	68
M		同步	78
慢时变参数系统	80	同宿点	174,175
模型辨识	16	同宿轨线	175
N		同调方程	132
内部激变	183	同调算子	132
内共振	97	退化结点	28
P		W	
派生解	43	稳定	25
派生系统	26	稳定性边界	87
平衡胞	206	稳定子空间	128,143
平衡点	25	无穷小上界	130
平均法	48	X	
Q		吸引域	180,206

吸引子	180	有势力	3
吸引子的重构	210	Z	
显式算法	191	增量谐波平衡法	198
线性参数估计	16	张弛振动	35
陷胞	205	阵发性	182
相轨线	23,142	正常号函数	121,130
相频响应方程	66	正定函数	121
相平面	23	正规解	85
相图	23	直接摄动法	44
向量场	23	质量系数	8
谐波平衡法	61	中心	28
辛算法	195	中心流形定理	128,144
信息维数	219	中心流形方法	152
旋转数	40	中心子空间	128,143
Y		周期	142
亚临界叉形分叉	150	周期 k 胞集	206
延迟坐标	211	周期 k 运动	206
延迟坐标向量	188	周期胞	206
一致渐近稳定	129	周期点	142
一致稳定	129	周期轨道	137,142
一致有效展开	46	主共振	64
异宿点	174,176	转折点	146
异宿轨线	176	自激振动系统	35
隐式算法	191	自治系统	6
永年项	45,47	组合共振	74

参考文献

- 1 Visitin A. *Differential Models of Hysteresis*. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- 2 李岳锋, 胡海岩. 非线性系统参数识别的能量法. 振动工程学报, 1991; 4(3): 34~40
- 3 胡海岩, 李岳锋. 具有记忆特性的非线性减振器参数识别. 振动工程学报, 1989; 2(2): 17~27
- 4 Masri S F, et al. Non-parametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1979; 46(2): 433~447
- 5 Masri S F, et al. Identification of nonlinear dynamic systems using neural networks. *Journal of Applied Mechanics*, 1993; 60(1): 123~133
- 6 梁艳春, 王政, 杨晓伟. 基于神经网络方法的包装件非线性特性识别方法研究. 力学学报, 1997; 29(4): 497~500
- 7 李岳锋, 胡海岩. 非线性系统参数识别频域法. 南京航空学院学报, 1991; 23(4): 45~50
- 8 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989: 120~125, 71~73, 204~212, 221~223
- 9 王海期. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 1992: 73~77
- 10 陈予恕. 非线性振动. 天津: 天津科学技术出版社, 1983: 45~51
- 11 Mickens R E. Comments on the method of harmonic balance. *Journal of Sound and Vibration*, 1984; 94(3): 456~460
- 12 Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1979: 183~184, 386~387, 387~395
- 13 凌复华. 线性阻尼会扩大 Mathieu 方程的稳定域吗? 力学与实践, 1985; 7(2): 36~37
- 14 Oueini S S, Nayfeh A H. Experimental implementation of saturation control. In: van Campen D H. *Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997: 263~270
- 15 褚亦清, 李翠英. 非线性振动分析. 北京: 北京理工大学出版社, 1996: 1105~1106
- 16 舒仲周. 运动稳定性. 成都: 西南交通大学出版社, 1989: 37~39
- 17 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京: 人民教育出版社, 1983: 372~377
- 18 Chow S N, Hale J K. *Methods of Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1981
- 19 Golubitsky M, Schaeffer D G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Vol. 1, New York: Springer-Verlag, 1985
- 20 Marsden J E, McCracken M. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. New York: Springer-Verlag, 1976
- 21 Czolczynski K, et al., Controlling Hopf bifurcation in mechanical engineering. In: van Campen D H. *Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997: 83~89
- 22 Iooss G. *Bifurcation of Maps and Applications*. Amsterdam: North-Holland, 1979

- 23 胡海岩. Symmetry and bifurcations of the periodic response of an externally forced nonlinear oscillator. *Journal of Vibration Engineering*, 1994; SEI: 26~35
- 24 Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1990
- 25 Gukenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. 2nd Edition, Springer-Verlag, 1986: 235~236
- 26 Wiggins S. *Global Bifurcation and Chaos: Analytical Methods*. New York: Springer-Verlag, 1988
- 27 Ott E. *Chaos in Dynamic Systems*. New York: Cambridge University Press, 1993: 277~291
- 28 Kleczka M. *Methoden zur Verzweigungsanalyse mit Anwendung auf einen Spielschwinger*. Dusseldorf: VDI Verlag, 1991: 119~125
- 29 胡海岩. 分段线性系统动力学的非光滑分析. *力学学报*, 1996; 28(4): 483~488
- 30 胡海岩. Primary resonance of a harmonically forced oscillator with a pair of symmetric set-up elastic stops. *Journal of Sound and Vibration*, 1997; 207(3): 393~401
- 31 Chin W, et al. Grazing bifurcations in impact oscillations. *Physical Review E*, 1994; 50(6): 4427~4444
- 32 胡海岩. 力学系统混沌的主动控制. *力学进展*, 1996; 26(4): 453~463
- 33 Romeiras F J, et al. Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D*, 1992; 58(1): 165~192
- 34 Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1992; 170(6): 421~428
- 35 胡海岩. Controlling chaos of a dynamical system with discontinuous vector field. *Physica D*, 1997; 106(1): 1~8
- 36 胡海岩. An adaptive control scheme for recovering periodic motion of chaotic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1997; 199(2): 269~274
- 37 Dressler U, Nische G. Controlling chaos using time delay coordinates. *Physical Review Letters*, 1992; 68 (1): 1~4
- 38 Shinbrot T, et al. Using chaos to direct trajectories to targets. *Physical Review Letters*, 1990; 65(26): 3215~3218
- 39 凌复华等. 常微分方程数值方法及其在力学中的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1990: 40~43, 136~139, 66~72
- 40 Bathe K J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982
- 41 秦兆孟. 辛几何及哈密尔顿力学. *力学与实践*, 1990; 12(6): 1~20
- 42 王德人. 非线性方程组解法与最优化方法. 北京: 人民教育出版社, 1979
- 43 Chen Yushu, Leung A Y T. *Bifurcation and Chaos in Engineering*. London: Springer-Verlag, 1998: 312~315
- 44 胡海岩. 非光滑动力系统周期响应的数值分析. *南京航空学院学报*, 1992; 24(4): 394~402

- 45 胡海岩. Numerical scheme of locating the periodic response of non-smooth non-autonomous systems of high dimension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995; 123(1): 53~62
- 46 武际可, 周昆. 力学与实践, 1994; 16(1): 1~8
- 47 Hsu C S. *Cell-to-Cell Mapping*. New York: Springer-Verlag, 1987
- 48 Tougue B H, Gu K. Interpolated cell mapping of dynamical systems, *Journal of Applied Mechanics*, 1988; 55(4): 461-466
- 49 Parker T S, Chua L O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989: 154~165
- 50 Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand D, Young L S. *Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1980: 366~381
- 51 Wolf A, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985; 16: 285~317
- 52 Zeng X, et al. Estimating the Lyapunov exponent spectrum from short time series of low precision. *Physical Review Letters*, 1991; 66(24): 3229~3232
- 53 Hunt F, Sullivan F. Efficient algorithms for computing fractal dimensions In: Mayer-Kress G. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. New York: Springer-Verlag, 1986: 74~81
- 54 Heck A. *Introduction to Maple*. New York: Springer-Verlag, 1996
- 55 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1989
- 56 袁世杰, 吕哲勤. 多刚体系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
- 57 胡海岩. 机械振动与冲击. 北京: 航空工业出版社, 1998
- 58 戴德成. 非线性振动. 南京: 东南大学出版社, 1993
- 59 丁文镜. 工程中的自激振动. 长春: 吉林教育出版社, 1988
- 60 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988
- 61 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992
- 62 张锦炎, 钱敏. 微分动力系统导引. 北京: 北京大学出版社, 1991
- 63 张芷芬. 向量场的分叉理论基础. 北京: 高等教育出版社, 1997
- 64 刘曾荣. 混沌的微扰判据. 上海: 上海科技教育出版社, 1994
- 65 汪富泉, 李后强. 分形几何与动力系统. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993