

Contact Mechanics and Friction
Physical Principles and Applications

接触力学与摩擦学的 原理及其应用

(德) 瓦伦丁 L. 波波夫 著
李强 雒建斌 译

清华大学出版社



ISBN 978-7-302-26493-4



9 787302 264934 >

定价：60.00元

Contact Mechanics and Friction
Physical Principles and Applications

接触力学与摩擦学的 原理及其应用

(德) 瓦伦丁 L. 波波夫 著
李强 雒建斌 译



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书将摩擦学问题与经典力学结合起来,既反映了摩擦学领域接触、黏着、毛细力、摩擦、润滑和磨损等问题的研究进展,又着重介绍了从接触力学角度认识摩擦学的新成果。具体内容包括:(1)摩擦学中基本参数的粗略估算方法;(2)将复杂问题简化的解析计算方法和多种数值仿真方法;(3)从纳米摩擦学到地震研究的摩擦学特征;(4)摩擦学系统的动力学研究等。

本书适合高校和科研院所机械、材料、力学等专业的师生和研究人员参考,也可供相关生产企业的技术人员阅读。

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2011-4828

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

接触力学与摩擦学的原理及其应用/(德)瓦伦丁 L. 波波夫著;李强,雒建斌译.--北京:清华大学出版社,2011.10

ISBN 978-7-302-26493-4

I. ①接… II. ①波… ②李… ③雒… III. ①接触应力—力学 ②摩擦—理论 IV. ①O343.3 ②O313.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 171463 号

责任编辑:黎 强

责任校对:刘玉霞

责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:153×235 印 张:19 字 数:316 千字

版 次:2011 年 10 月第 1 版 印 次:2011 年 10 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:60.00 元

产品编号:039991-01

中文版前言

接触和摩擦的概念所包含的内容远远多于人们对其的第一印象。接触和摩擦无处不在,并且对我们的日常生活和科技进步有着重要意义。这个概念除了狭义的摩擦外,还包含了从原子级到地壳尺度的磨损、润滑、黏着、毛细作用、流变学和系统动力学等,它不仅对现实应用非常重要,而且对应着一个让人着迷的世界。本书采用统一的、全局的观点来阐述接触力学和摩擦学的各个方面。

这本书最初的构想是作为教科书,所有的章节都配有习题,因此也可以作为一本参考书。我希望本书不仅对初学者有用,而且对从事摩擦学的研究人员也有所帮助。在这本书的写作中,我尽力约束自己,不是在描绘我个人的研究成果,而是接触力学和摩擦学领域的普遍知识,但最后三章即超声波对摩擦的影响、摩擦学中的数值仿真方法和地震动力学算是例外。

我很高兴在德文版和英文版之后,本书又有了中文版,这对我来说非常高兴和荣幸,因为自 2003 年起,我一直与中国的摩擦学专家保持着合作,其中包含了合作项目、摩擦学会议、学术交流和工业协会合作等。

对于这本书的翻译和审订工作,我衷心地感谢柏林工业大学的研究助理李强和清华大学的摩擦学国家重点实验室的雒建斌教授。本书在英文版翻译过程中,我的同事 Rainer Heise 博士、Birthe Grzemba 和 Jasminka Starcevic 博士给出了很多建议,因此,我也要感谢他们的帮助。



V. L. Popov

2011 年 8 月于柏林

译者按

本书是德国柏林工业大学波波夫(V. L. Popov)教授根据自己的科研和教学经验编写而成的。波波夫教授是摩擦力学专家,在该领域取得了诸多重要成果,书中包含了作者多年的科研成果与教学中所积累的经验,其特色是将接触力学和摩擦学进行关联和结合,既反映了这方面的基础知识,又融入了作者多年来的研究进展,体现了作者优秀的教学方法和思路。因此,这是一本很好地反映从接触力学角度认识摩擦学的专著,对深入了解摩擦学是很有帮助的。

接触与摩擦二者联系紧密,在工程实际应用中是非常普遍的问题。了解界面之间的相互作用机理并加以应用,这是从事机械、力学等方面的科研和工程技术应用的热点课题之一。接触力学与摩擦学涵盖面广泛,包括了弹塑性理论、黏弹性理论、材料科学、热力学、流体力学和系统动力学等学科,研究的尺度涵盖微观的纳米级到宏观的地震科学。本书不仅阐述了接触、黏着、毛细力、摩擦、润滑和磨损等一般现象,而且重点介绍了摩擦学中一些参数的粗略估算方法、许多复杂问题的简化解析计算方法和多种数值仿真方法;同时,作者还讨论了摩擦学中的系统动力学问题,如尖叫声及其抑制、失稳和空间形态等。此外,作者还论述了“橡胶摩擦”现象,这一现象在许多技术领域中都有重要的应用价值。

本书的另一特点是给出了一些针对性很强的练习题和相应的求解过程,这不仅有助于读者加深对接触力学和摩擦学的了解,也有助于从事相关技术开发和研究的工程技术人员解决具体的技术问题。因此,本书既可以作为机械、力学等专业的研究生教材或辅助教材,也适合从事相关领域科学研究和技术工作的科研人员和工程师阅读参考。

我们殷切希望本书的翻译和出版能够对我国的接触力学和摩擦学的教学和研究工作提供必要的借鉴和启发作用。我们在本书翻译过程中虽然已竭尽全力,但难免有错误和不妥之处,希望读者批评指正。

译 者

2011 年 9 月

新平知覺
PDG

英文版序言

呈现在您面前的是英文版《接触力学与摩擦学的原理及其应用》，多数内容是由相应的德文第 1 版翻译而来(Springer 出版, 2009)。本书增加了一章关于地震的摩擦问题。第 15 章补充了关于弹性流体的一节。另外, 在一些章节的“习题”部分增加了新的举例。

本书得到了 J. Gray 的大力支持, 是他将德语版翻译过来, 没有他, 这项工作是不可能完成的。我要感谢 G. G. Kocharyan 教授和 S. Sobolev 教授在地震动力学方面给出的重要建议和意见。R. Heise 博士对各章的习题解答和订正做出了重要贡献, 我真诚地感谢 J. Starcevic 博士在本书编写中的全力支持, 感谢 Ch. Koll 女士的绘图, 感谢 R. Heise, M. Popov, M. Heß, S. Kürscher 和 B. Grzemba 等人在校对中的帮助。

V. L. Popov

2009 年 11 月于柏林

资源分享
PDG

德文版序言

对于希望能更好地了解接触力学和摩擦物理学的人来说,他会很快发现,没有任何一个领域比它更多元化,更吸引人,更让人兴奋。它涵盖的知识面非常广泛,如弹塑性理论、黏弹性理论、材料科学、流体力学(包括牛顿和非牛顿流体)、热动力学、电动力学、系统动力学等。接触力学和摩擦物理学的应用也十分广泛,从纳米领域的测量技术到地震的研究,几乎包括了工程摩擦的所有领域。学习了接触力学和摩擦物理学的人,能够对工程科学中不同的方法有一个全面的掌握。

本书的目的之一是清楚地阐述该领域的多个重要分支,并理清它们之间的关系。首先是接触力学的经典理论,包括黏着和毛细作用;接着是宏观摩擦理论、润滑、现代纳米摩擦学基础、摩擦机械的系统动力学(包括振动)、高弹性体摩擦、磨损等。在某些特定的情况下,这些领域之间的相互影响非常复杂。在实际中,摩擦学问题总是以不同的方式表现出来,没有一个简单的方法能解决摩擦学问题。唯一的通用方法就是我们必须先从摩擦学的观点了解这个系统。本书的另外一个目的就是讲述怎样了解这个系统。

作者一直坚信,机械接触和摩擦的本质通常比它们的表象要简单得多。如果一个人能够定性评估自己,他就可以理解机械接触和摩擦中很多不同层面的定性评估。因此,这本书很重视定性评估的方法。

分析计算中,我们采用了一些经典举例,像搭积木一样来理解和解决一系列现实问题。

摩擦学中很多的实际问题,尤其是摩擦系统的最优化问题,是很难得到解析解的。因此,本书对接触力学和摩擦的数值模拟方法进行了概述,并重点介绍了统一模型中在不同空间尺度中,若干个与接触力学有关的过程的综合方法。

这不仅是一本教科书,也可以作为这个领域的参考书。书中除了描述基本原理之外,还举了很多特别的例子,作为对应章节的习题。同时也提供了简单的习题解答。

这本书的基础来源于作者在柏林工业大学的教学讲义《接触力学与摩擦物理学》，所以这些材料能够在一或两个学期内完成学习。

本书的编写，得到了同事们的很大帮助。力学研究所“系统动力学和摩擦物理”的同事们对本书的完成做出了很多贡献，在此，我非常感谢 M. Schargott 博士、T. Geike 博士、M. Hess 先生和 J. Starcevic 博士。J. Starcevic 博士在本书编写中给了我全力的支持，M. Hess 先生仔细校对了所有公式，我要向他们表示诚挚的谢意。同时，我要感谢 Ch. Koll 女士为本书耐心的绘图，感谢 M. Popov 和 G. Putzar 博士的校对，感谢交通运输和机械系统的院长给我一个学期的时间来研究，使我能在此期间完成这本书。

V. L. Popov

2008 年 10 月于柏林

新学网
PDG

目 录

| | |
|--------------------------|----|
| 第 1 章 绪论 | 1 |
| 1.1 接触和摩擦现象及其应用 | 1 |
| 1.2 接触力学和摩擦物理学的历史 | 3 |
| 1.3 本书的结构 | 6 |
| 第 2 章 接触问题的定性分析——无黏着法向接触 | 7 |
| 2.1 材料性能 | 8 |
| 2.2 简单接触问题 | 10 |
| 2.3 三维弹性连续体接触的评估计算方法 | 13 |
| 习题 | 16 |
| 第 3 章 黏着接触的定性分析 | 19 |
| 3.1 物理背景 | 20 |
| 3.2 曲面间黏着力的计算 | 23 |
| 3.3 弹性体之间黏着力的定性估计 | 24 |
| 3.4 粗糙度对黏着的影响 | 25 |
| 3.5 胶带 | 26 |
| 3.6 范德华力和表面能的补充内容 | 27 |
| 习题 | 28 |
| 第 4 章 毛细作用力 | 32 |
| 4.1 表面张力和接触角 | 33 |
| 4.2 接触角滞后 | 35 |
| 4.3 压力和曲率半径 | 35 |
| 4.4 毛细桥梁 | 36 |
| 4.5 刚性平面和刚性球体之间的毛细力 | 37 |
| 4.6 粗糙表面的液体 | 37 |
| 4.7 毛细力和摩擦学 | 38 |
| 习题 | 39 |

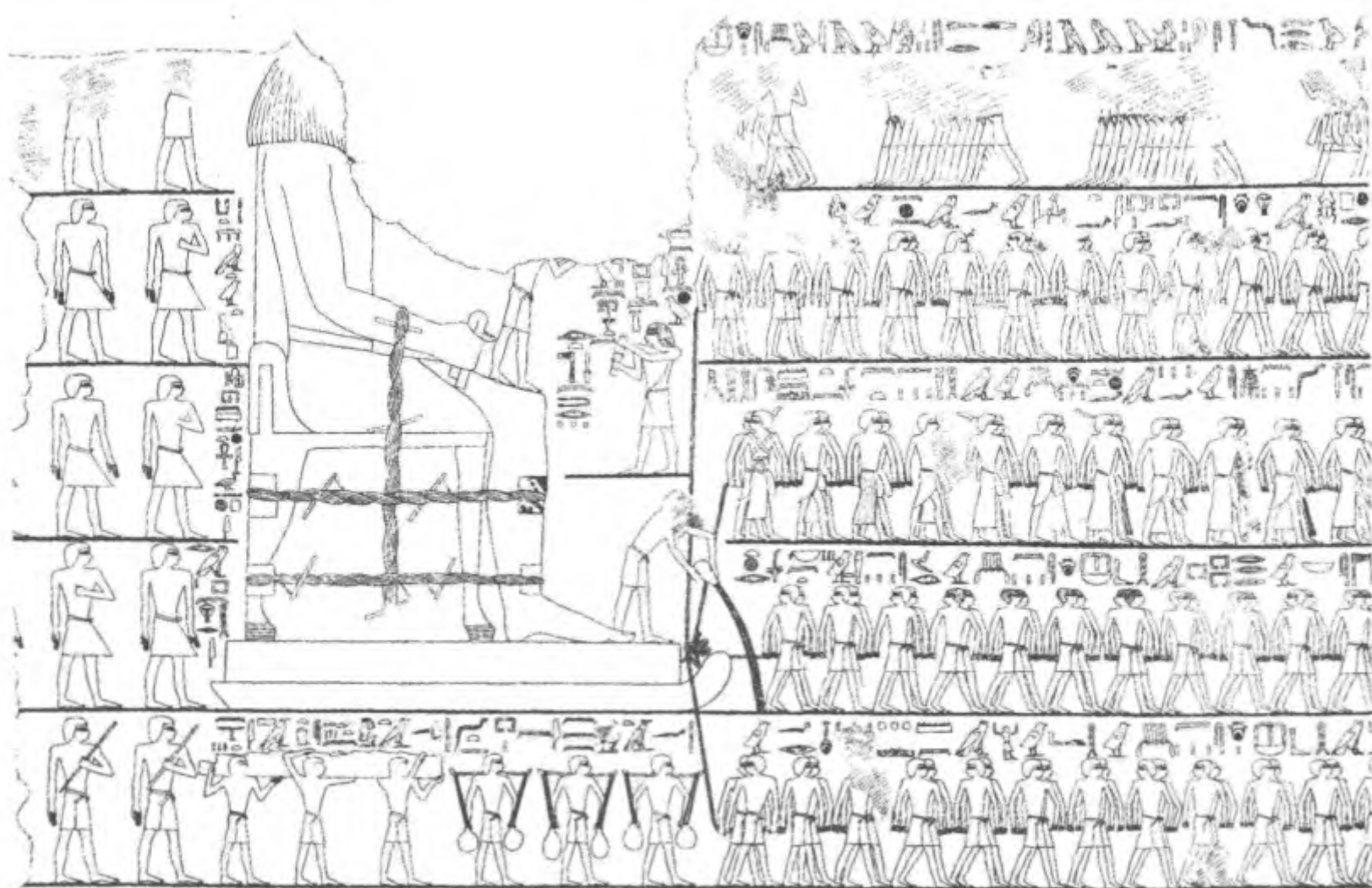
| | |
|-------------------------------|-----|
| 第 5 章 接触问题的精确解法——赫兹接触 | 43 |
| 5.1 表面力作用下弹性半空间体的变形 | 44 |
| 5.2 赫兹接触理论 | 46 |
| 5.3 两个曲面弹性体之间的接触 | 48 |
| 5.4 刚性锥头和弹性半空间体的接触 | 50 |
| 5.5 赫兹接触的内部应力 | 51 |
| 习题 | 52 |
| 第 6 章 接触问题的精确解法——黏着接触 | 56 |
| 习题 | 61 |
| 第 7 章 粗糙表面之间的接触 | 63 |
| 7.1 Greenwood 和 Williamson 模型 | 64 |
| 7.2 微凸体的塑性变形 | 68 |
| 7.3 电接触 | 69 |
| 7.4 热接触 | 71 |
| 7.5 接触机械刚度 | 72 |
| 7.6 密封 | 72 |
| 7.7 粗糙度和黏着 | 73 |
| 习题 | 74 |
| 第 8 章 切向接触问题 | 81 |
| 8.1 切向力作用下弹性半空间体的变形 | 82 |
| 8.2 分布切向力作用下弹性半空间体的变形 | 82 |
| 8.3 无滑动切向接触问题 | 84 |
| 8.4 考虑滑动的切向接触问题 | 85 |
| 8.5 无滑动刚性圆柱压头 | 87 |
| 习题 | 88 |
| 第 9 章 滚动接触 | 91 |
| 9.1 滚动接触过程的定性讨论 | 92 |
| 9.2 平稳滚动接触的应力分布 | 94 |
| 习题 | 98 |
| 第 10 章 库仑摩擦定律 | 102 |
| 10.1 概述 | 102 |
| 10.2 静摩擦与动摩擦 | 103 |
| 10.3 摩擦角 | 104 |

| | | |
|---------------|--------------------------------------|------------|
| 10.4 | 摩擦系数与接触时间的关系 | 104 |
| 10.5 | 摩擦系数与法向力的关系 | 106 |
| 10.6 | 摩擦系数与滑动速度的关系 | 107 |
| 10.7 | 摩擦系数与表面粗糙度的关系 | 107 |
| 10.8 | 库仑对摩擦定理起源的观点 | 108 |
| 10.9 | Bowden 和 Tabor 理论 | 109 |
| 10.10 | 摩擦系数与温度的关系 | 111 |
| | 习题 | 112 |
| 第 11 章 | Prandtl-Tomlinson 干摩擦模型 | 120 |
| 11.1 | 概述 | 120 |
| 11.2 | Prandtl-Tomlinson 模型的基本性质 | 122 |
| 11.3 | 弹性失稳 | 125 |
| 11.4 | 超滑 | 128 |
| 11.5 | 纳米机械:微电机与纳米电机的概念 | 128 |
| | 习题 | 132 |
| 第 12 章 | 摩擦引起的振动 | 135 |
| 12.1 | 摩擦力与速度为减函数关系时的摩擦失稳 | 136 |
| 12.2 | 有弹性力分布的系统中的失稳 | 138 |
| 12.3 | 临界阻尼和尖叫声的最优化抑制 | 140 |
| 12.4 | 主动抑制尖叫声 | 141 |
| 12.5 | 尖叫时的强度 | 143 |
| 12.6 | 稳定性标准与系统刚度的关系 | 144 |
| 12.7 | 自锁-滑动 | 147 |
| | 习题 | 149 |
| 第 13 章 | 接触中的热效应 | 153 |
| 13.1 | 概述 | 154 |
| 13.2 | 微接触中的瞬现温度 | 154 |
| 13.3 | 热机械的失稳 | 156 |
| | 习题 | 157 |
| 第 14 章 | 润滑系统 | 159 |
| 14.1 | 两个平行面之间的流动 | 160 |
| 14.2 | 流体动力润滑 | 161 |
| 14.3 | 黏性黏着 | 163 |

| | | |
|---------------|---------------------------|------------|
| 14.4 | 润滑剂流变学 | 166 |
| 14.5 | 边界层润滑 | 167 |
| 14.6 | 弹性流体动力学 | 168 |
| 14.7 | 固体润滑剂 | 170 |
| | 习题 | 171 |
| 第 15 章 | 高弹体的黏弹性能 | 177 |
| 15.1 | 概述 | 177 |
| 15.2 | 应力弛豫 | 178 |
| 15.3 | 频率相关的复数剪切模量 | 179 |
| 15.4 | 复模量的性质 | 181 |
| 15.5 | 黏弹性材料中的能量耗散 | 182 |
| 15.6 | 复模量的测量 | 183 |
| 15.7 | 流变学模型 | 184 |
| 15.8 | 橡胶的简单流变学模型(标准模型) | 186 |
| 15.9 | 温度对流变学性能的影响 | 187 |
| 15.10 | 组合曲线 | 188 |
| 15.11 | Prony 级数 | 189 |
| | 习题 | 192 |
| 第 16 章 | 橡胶摩擦和橡胶接触力学 | 195 |
| 16.1 | 高弹体和刚性粗糙面之间的摩擦 | 196 |
| 16.2 | 滚动阻力 | 200 |
| 16.3 | 高弹体的黏着接触 | 202 |
| | 习题 | 204 |
| 第 17 章 | 磨损 | 208 |
| 17.1 | 概述 | 208 |
| 17.2 | 磨粒磨损 | 209 |
| 17.3 | 黏着磨损 | 212 |
| 17.4 | 低摩擦磨损的条件 | 214 |
| 17.5 | 磨损作为摩擦区材料的运输工具 | 215 |
| 17.6 | 高弹体的磨损 | 216 |
| | 习题 | 218 |
| 第 18 章 | 超声振动影响下的摩擦行为 | 220 |
| 18.1 | 超声振动在宏观角度对摩擦的影响 | 221 |

| | | |
|-----------------|-----------------------------|------------|
| 18.2 | 超声振动在微观角度对摩擦的影响 | 225 |
| 18.3 | 静摩擦力与振幅函数关系的实验研究 | 227 |
| 18.4 | 动摩擦力与振幅函数关系的实验研究 | 229 |
| | 习题 | 230 |
| 第 19 章 | 摩擦物理学中的数值仿真方法 | 233 |
| 19.1 | 概述 | 234 |
| 19.2 | 接触问题从三维到一维的简化 | 237 |
| 19.3 | 宏观摩擦学系统中的接触问题 | 238 |
| 19.4 | 多元接触问题的降维方法 | 241 |
| 19.5 | 降维和黏弹性质 | 244 |
| 19.6 | 降维模型中应力的表达 | 245 |
| 19.7 | 降维模型框架中的计算步骤 | 246 |
| 19.8 | 降维方法框架中的黏着、润滑、空穴和塑性变形 | 246 |
| | 习题 | 247 |
| 第 20 章 | 地震与摩擦 | 250 |
| 20.1 | 概述 | 251 |
| 20.2 | 地震的量化 | 252 |
| 20.3 | 岩石的摩擦定律 | 254 |
| 20.4 | 在速率相关和状态相关摩擦下滑动的稳定性 | 256 |
| 20.5 | 地震成核和后期滑动 | 259 |
| 20.6 | 前震和余震 | 262 |
| 20.7 | 块介质和断层结构的连续介质力学 | 262 |
| 20.8 | 地震可以预测吗? | 265 |
| | 习题 | 266 |
| 附录 | | 269 |
| 扩展阅读文献 | | 272 |
| 各章压题图片说明 | | 279 |
| 索引 | | 281 |

第 1 章 绪论



1.1 接触和摩擦现象及其应用

接触力学和摩擦物理是工程科学的基础性学科,在结构安全设计和节能设计中是必不可少的。其应用十分广泛,例如离合器,刹车片,轮胎,衬套和球轴承,压缩机,铰链,垫圈,铸造,机加工,冷成型,超声波电焊,电触头等。这些应用从接触单元或接触副的应力分析,包括了润滑和材料设计对摩擦的影响,延伸到微观和纳米技术的应用。人们对摩擦现象的兴趣已经持续了几百年甚至上千年,直至今天摩擦仍然在新产品和技术的发展中扮

演着重要的角色。

典型的摩擦接触例子就是轮轨接触,此接触中我们最感兴趣的就是材料强度和力的传递性能。接触能够传递机械力(螺纹),能够导电导热,以及防止材料的流失(密封)。原子力显微镜尖端和基材的接触或者两个地壳板块间的接触也是摩擦接触的例子。接触和摩擦现象存在于不同尺度领域,从纳米微小尺度到千兆米的庞大尺度,但它们有很多共同点,可以采用相似的方法加以处理。现代研究和技术表明,接触力学和摩擦物理拥有巨大的应用空间,从马达蛋白、心肌收缩到地震动力学,涵盖了工业摩擦学中的很多领域。

摩擦会导致能量的损耗,而且在微接触中会出现极端应力,同时还会导致微细裂缝和表面磨损。我们经常在设计中会尽力减小摩擦来减少能量损耗。但是有时候摩擦也是必需的,如果没有摩擦,我们就无法享受优美的钢琴曲,甚至无法行走和开车。在很多例子中,摩擦不能最小化,反而要最大化,比如刹车过程中轮胎和路面的摩擦。磨损也是一样,不能总是将其最小化,快速可控研磨技术为工艺处理打下很好基础,例如磨削、抛光、喷砂等。

摩擦磨损总是与黏着现象紧密联系在一起。对于黏着而言,了解两个物体是否紧密接触非常重要。从宏观尺度上讲,当两个刚性物体(如金属、木块)相互接触时,黏着的作用可以忽略,但若其中一个接触物体较为柔软时,黏着就变得非常重要,这点可以应用到很多领域。对黏合剂的使用,我们可以从接触力学中学到很多。在微观技术领域,黏着就显得更加重要,在微观尺度上摩擦力和黏着力已成为一个应用研究问题,被命名为“黏着摩擦”。

本书介绍的另外一个跟黏着很相似的现象是毛细效应,这种现象出现在少量流体当中。在精密机械如钟表中,空气中的水分会产生毛细作用力,破坏机械的精度。但是毛细效应也可以加以利用,如控制通往摩擦区域的润滑剂的流量。

在讲述接触和摩擦的书中,总是不可避免地讲到与之相应的声音现象。车闸、轮轨接触和轴承这些接触现象不仅消耗能量和材料,同时会发出刺耳的声音,严重的甚至会影响人的听力。如今很多工程中由于技术原因产生的噪声成为了主要问题。与摩擦力性质紧密相关的振动问题也同样是本书的讨论内容之一。

如果按照投资多少来衡量摩擦学中哪方面最重要,毫无疑问,润滑技术

一定是第一位。但本书中不可能对这方面的相关内容作过多的介绍,当然,流体润滑和弹流润滑动力学的基本原理是必不可少的。

我们对接触力学和摩擦学的研究是为了能够控制摩擦、磨损和黏着,从而达到我们的期望。为此,本书对接触和摩擦磨损现象与材料性能和系统性能的关系研究做了详细的介绍。

1.2 接触力学和摩擦物理学的历史

对摩擦学的应用及其重要性的第一印象应该按照其历史发展来表达。摩擦学(tribology)这个词是 Peter Jost 于 1966 年 5 月提出的,作为一个工程研究课题,融合了摩擦、磨损和润滑。摩擦学这个名字虽然较新,但关于摩擦学的研究历史非常久远。火的发现就来源于摩擦生热。车轮和简单衬套的发明,使用流体来减少摩擦磨损在公元前几千年就已经被应用,这都是摩擦学的应用。在对摩擦学历史的简短回顾中,我们从文艺复兴时期达·芬奇(Leonardo da Vinci)在这方面的贡献开始。

在 Codex-Madrid I(1495)中,达·芬奇描述了他发明的球轴承,低摩擦合金合成物,以及他对摩擦磨损现象的实验研究。他是第一个定量研究摩擦定律的工程师,他得到的结论用今天的语言总结,那就是以下两条摩擦基本定律:

- (1) 摩擦力和法向压力或法向载荷成正比;
- (2) 摩擦力与接触面积的大小无关。

达·芬奇也是提出摩擦系数这个术语的第一人,而且他通过实验测出的摩擦系数的大小就是典型的 0.25。

在科学发展史上,就像多次发生的那样,这些结论也被人们遗忘。约 200 多年后,这些结论又被法国的物理学家阿蒙顿(Guillaume Amontons)于 1699 年重新发现,而摩擦力与法向压力成正比,这条定律就是我们所知的“阿蒙顿定律”。

雷诺德·欧拉(Leonard Euler)在用实验研究摩擦力的同时,也花费了大量精力采用数学观点来研究,他介绍了静摩擦力和动摩擦力的区别,解决了绳索摩擦力的问题,这可能是历史上第一个采用分析方法解决的接触问题(1750 年)。他也是采用数学方法处理干摩擦定律的第一人,这种方法推动了以后的发展。我们要感谢他将 μ 作为摩擦系数,欧拉的研究理念为:摩擦发生在小三角不规则的物体之间,摩擦系数与这些不规则物体的斜率

成正比。这个研究理念以不同的形式存在了 100 多年,今天的 Tomlinson 模型在研究粒子级别的摩擦中同样也用到了这个观点。

对于摩擦实验做出杰出贡献的是法国工程师库仑(Charles Augustin Coulomb)。干摩擦定律就是根据他的名字命名的。库仑肯定了阿蒙顿的结论,并提出了这个观点:一阶近似中,滑动摩擦力与滑动速度无关。他对相对滑动物体做了非常精确的定量的干摩擦实验,包括这些滑动物体的材料、表面成分、润滑状况、滑动速度、静摩擦中停留时间、环境湿度和温度等。直到 1781 年他的著作《简单力学理论》的出版,静摩擦和动摩擦之间的区别才被定量验证和建立。库仑采用了和欧拉相同的摩擦力起源的理念,并且增加了一项对摩擦力的贡献,那就是我们现在所说的黏着。同样也是库仑,发现了当时的简单摩擦定律中的偏差。比如,他发现物体仍处于静止时,静摩擦力的增长随着时间的积累而增大。库仑的研究走在了时代的前列,他的著作包括了摩擦学的几乎所有内容,这些内容后来发展成为了摩擦学的主要分支。甚至测量仪器——摩擦计(tribometer)的名称也来源于库仑。

与滑动摩擦不一样,滚动摩擦的研究在历史上没有扮演一个重要的角色,这可能是因为滚动摩擦比滑动摩擦要小很多,而且人们并未对此感到烦恼。第一位研究滚动摩擦本质的是罗伯特·胡克(Robert Hooke),他研究了物体在塑性表面的滚动,现在看来,这些研究中很多重要的理念都是正确的。1841—1842 年莫林(Morin)和裘布依(Dupuit)关于滚动摩擦定律展开了激烈的讨论,结果表明,摩擦的本质与材料、载荷参数息息相关。莫林认为,滚动摩擦力与滚动体的半径成反比,而裘布依认为,应该与半径的平方根成反比。根据今天的研究来看,二者均是正确的,只是适用于不同的情况。

雷诺(Osborne Reynolds)首次采用实验方法测出轮轨滚动接触区域的细节情况:总是有一部分接触发生但没有移动,有一部分区域发生了滑动。这是第一次尝试将摩擦接触放置在放大镜下观察,同时也意味着静摩擦和动摩擦具有严格区分的时代的结束。雷诺也对滚动并带有部分滑动存在时的能量损失做出了解释。定量的理论是卡特(Carter)于 1926 年在赫兹的接触力学的基础上推导出来。

为了减少摩擦,人类对接触表面进行润滑已经有了几百年的历史,但是随着工业需求的增长,要求研究者不断采用实验和理论的方法来增加对润滑的了解。1883 年佩特洛夫(N. Petrov)对滑动轴承做了实验,得到了关于动力润滑的很多重要的方程。1886 年雷诺发表了关于动力润滑的理论。

其中,他提出的“雷诺方程”为流体动力润滑系统的计算奠定了基础。根据该流体动力润滑理论,摩擦系数约为 $\mu \approx h/L$, 其中 h 是油膜厚度, L 是摩擦接触长度。只要两个表面没有靠近到油膜厚度比两接触面的粗糙度更重要的程度,雷诺的这个结论就是正确的。这样的系统后来被斯特里贝克 (Stribeck) 于 1902 年归类于混合摩擦领域,后来被广泛研究。摩擦系数与润滑剂黏度、滑动速度、平均压力的关系(原文为摩擦力与滑动速度的关系)被命名为斯特里贝克曲线。

载荷更大或润滑不足的情况后来开始被研究,在这种情况下,只有一些润滑油的分子层保持在接触的物体之间,这种边界润滑的性质于 1919—1922 年由哈迪(Hardy)进行了研究。研究表明,只有油脂的分子层对两个接触物体之间的摩擦力有重要影响。他测试了润滑剂分子量和金属表面与摩擦力的关系,也正确认识到,润滑剂黏着在金属表面。对于摩擦力的减小源于润滑剂分子之间的相互作用,今天称之为“根植分子”(原文为“嫁接液体”)。

20 世纪中期,与干摩擦的研究类似,在接触力学中出现了两个杰出的人物:鲍登(Bowden)和泰伯(Tabor)。他们首次提出了接触物体表面粗糙度的重要性,正是因为这种粗糙度,两物体的真实接触面积成数量级地小于名义表面接触面积。这种观点大大改变了很多摩擦学研究的方向,人们重新认识到库仑的黏着观点是一种可能的摩擦机理。1949 年鲍登和泰伯提出一个理念,认为干净金属表面间滑动摩擦的起源可以用冷焊点的形成和剪切来解释。按照这种观点,对于各向同性的塑性材料,摩擦系数近似等于临界剪切应力和硬度的比值的 $1/6$ 。对于很多无润滑的金属对(例如钢对钢、钢对铜、钢对铁等)而言,摩擦系数 μ 确实为 0.16 左右。

鲍登和泰伯关于粗糙表面的研究打开了接触力学的新篇章。而说到这方面的先驱工作者,我们必须提到阿查德(Archard),他在 1957 年得到这样的结论:粗糙弹性表面的接触面积近似正比于法向力。随后格林伍德(Greenwood)、威廉姆森(Williamson, 1966)、布什(Bush, 1975)和佩尔森(Persson, 2002)都在这方面做出了重要贡献,这些研究的主要结论是:当微观接触的情况(压力、微观接触的大小)与法向力无关时,粗糙表面的真实接触面积近似正比于法向力。

随着汽车工业的发展,汽车速度和动力的不断增大,橡胶摩擦成为一项重要技术。对高弹体摩擦机理的了解,尤其是今天被多数人接受的这个结论——高弹体的摩擦力与材料变形和流变产生的能量损耗有关,都可以归功于格劳希(Grosch)在 1962 年的研究。

接触力学为今天对摩擦现象的理解奠定了明确的基础。历史上,与纯接触力学相比,摩擦现象更早被人们从本质上来加以研究。轨道的发展更成为准确计算应力值的催化剂,因为在轮轨接触中,应力能达到钢的最大承载能力。

古典接触力学与海因里希·赫兹(Heinrich Hertz)息息相关。1882年赫兹解决了两个曲面弹性体的接触问题。直至今天,这个古典结论仍然是接触力学的基础。其后近一个世纪,约翰逊(Johnson)、肯德尔(Kendall)和罗伯茨(Roberts)才发现了黏着接触的相似理论(JKR理论),这种迟到可能是因为从总体看来,固体之间并没有互相黏着,直到微观技术发展后,工程师们才开始研究黏着问题。几乎同时,德里亚金(Derjagin)、米勒(Müller)和托波罗夫(Toporov)也提出了黏着接触的另一种理论。经过最初激烈的争论后,泰伯认为两种理论都正确,只是适用的情况不同。

令人惊奇的是,尽管磨损现象具有明显的重要性,但人们对其的研究却很迟。这可能是因为磨损主要是通过微观接触的相互作用产生的,而这些研究是在鲍登和泰伯的研究之后才成为摩擦学的一个分支。磨粒磨损定律是1956年赫鲁晓夫(M. Kruschov)通过实验测试得到的,并由阿查德于1966年验证,研究表明,磨损是正比于载荷和滑动距离的,反比于较软的接触体的硬度。这些磨粒磨损定律的检验都由泰伯和拉宾诺维奇(Rabinowicz)完成。尽管有这些研究,磨损机理,尤其是有少量磨损发生的情况下的磨损机理,在今天仍难以解释摩擦现象。

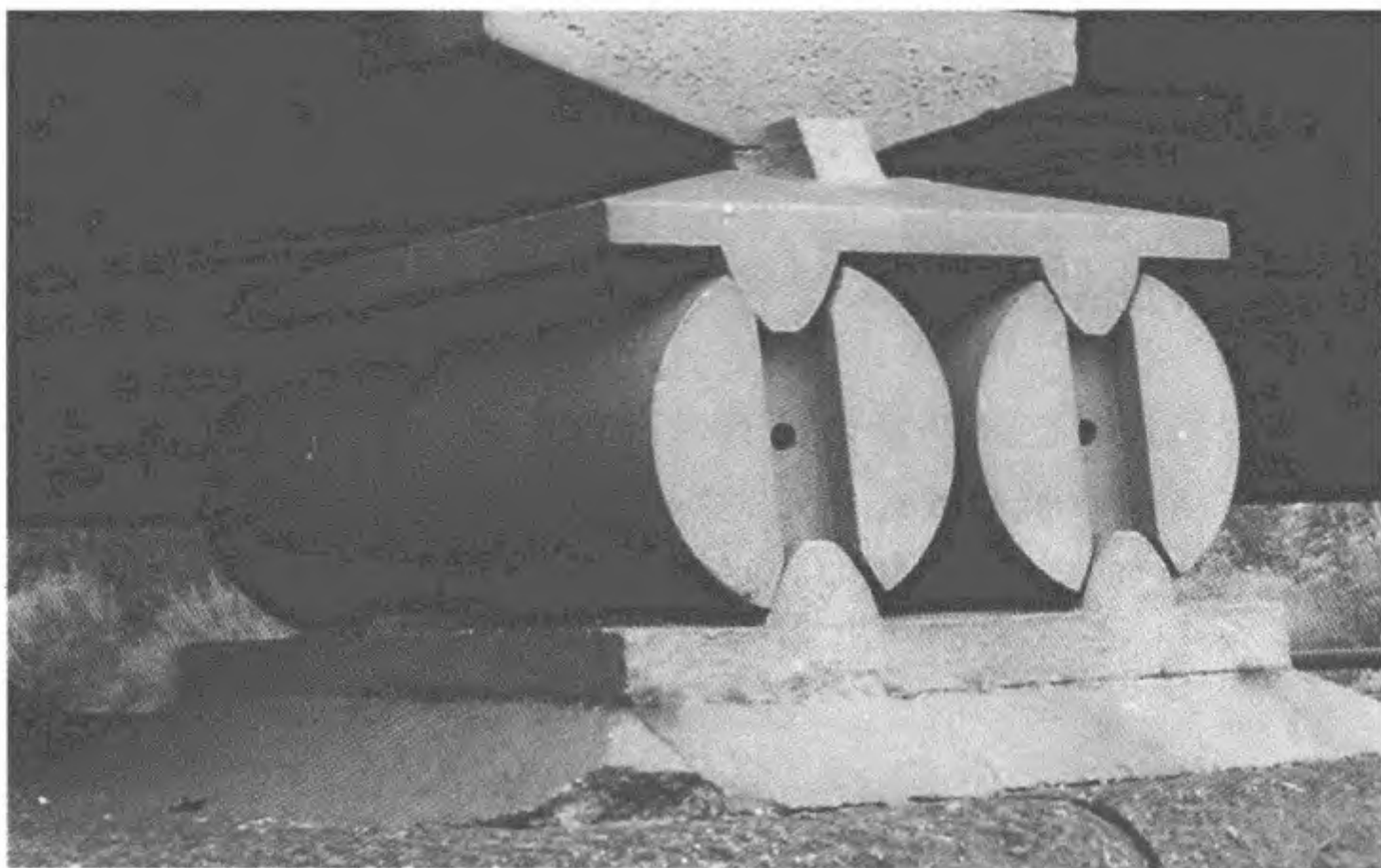
从20世纪90年代开始,接触力学经历了重生。对原子级摩擦过程的实验研究方法(原子力显微镜,摩擦力显微镜,石英-水晶微平衡计,表面张力仪器等)和数值模拟推动了固体摩擦领域研究的迅速发展。同时,微技术的发展也从本质上推动了接触力学和摩擦物理学最大限度的发展。拥有严格精密的控制系统使科学实验者能拥有很好的测量系统,例如控制润滑剂油膜层的厚度、原子量级上两个固定表面的相对位移等。然而,古典摩擦学和纳米摩擦学之间仍存在空白,但现在应该消除这一空白了。

1.3 本书的结构

在真实系统中,接触和摩擦总是通过很多方式手牵手交织在一起。我们作理论分析时,首先必须将二者分开。从接触力学开始研究接触和摩擦现象,在研究中,我们先对简单但综合的不同现象进行定量的分析,然后,依次按照摩擦现象、润滑和磨损的顺序,深入研究接触问题的严格解决方法。

第 2 章

接触问题的定性分析——无黏着法向接触



我们从法向接触来开始考虑接触问题。法向接触问题表述为：由于力垂直作用于两个物体的表面而造成它们相互接触。一个突出的例子就是火车的轮轨接触。法向接触的理论中有两个重要的关系：

(1) 接触作用力和物体法向位移的关系。这个关系决定了系统的接触刚度和动态性能；

(2) 作用力和接触应力的关系。作用力和接触应力是否超过了临界值？

如果两个物体在几何上没有接触，也就不会有接触现象、摩擦以及磨损。就这种意义来说，可以把法向接触看做所有摩擦学现象的一个基本先决条件。仍然需要注意的是，通常法向力会导致切向相对运动，这是因为

接触中物体的横向收缩不同,因此表层摩擦力开始起作用。如果认为摩擦力的本质是由于物体表面微观粗糙凸起的接触而产生的,那么可以看到,在接触问题中甚至是最简单的接触问题中,法向载荷、切向载荷和摩擦力都会纠结在一起。在一阶近似中,我们可撇开复杂的问题,先研究纯法向接触问题。假设在接触区域没有摩擦力出现,同时暂且忽略不计吸引力,即黏着力。

即使对于最简单例子,接触问题的数值分析或解析解也是很复杂的。但是,另一方面,接触问题简单的定性理解还是可以得到的。因此,我们从定性分析开始讨论接触现象,这些分析也可以用于很多可靠性估算和定量估算中。对于很多经典的接触问题,精确的分析将在后面章节中讲述,我们会讨论一系列不同形式的物体之间的接触问题,像堆积木一样将其用于更多的复杂的接触问题中。

2.1 材料性能

本书假设读者已经熟悉弹性力学理论的基本原理。本章中,我们简要概述一下重要材料参数的定义,这与接触力学问题的定性分析密切相关。这些概述只是基本原理,不能取代弹性和塑性理论的普遍定义和方程。

(1) 弹性性能

单轴拉伸试验中,一根初始长度为 l_0 ,横截面积为 A 的细长杆被拉长 Δl ,拉伸力 F 和横截面积的比值即为拉伸应力:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

伸长量和初始长度的比值即为拉伸应变或形变:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2)$$

图 2.1 为很多金属和非金属的应力-应变图,当应力较小时,应力与应变成正比关系:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.3)$$

比例系数 E 为材料的弹性模量。材料的伸长与横截面的缩小有关,可用泊松比(或横截面收缩系数) ν 来描述。不可压缩材料的泊松比为 $\nu=1/2$ 。

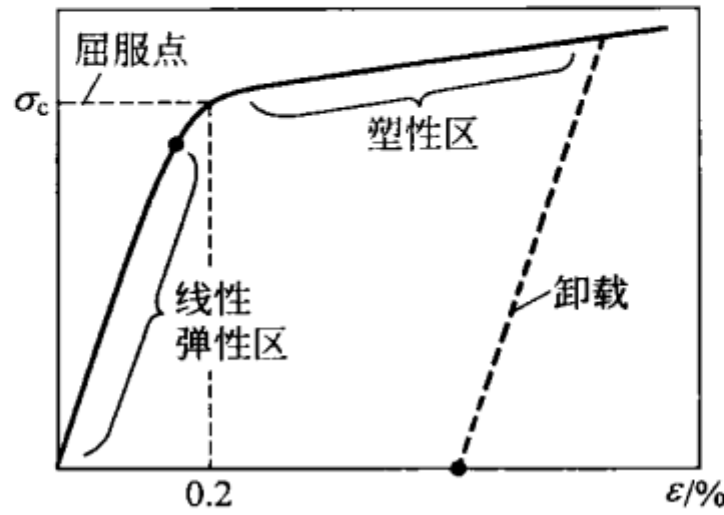


图 2.1 多数金属和非金属材料的应力-应变图

相类似的,剪切模量定义为剪切应力和产生的剪切应变的比值。剪切模量 G 与弹性模量和泊松比的关系为:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

因为流体静压的作用,应力与体积变化的比值称为压缩模量,即

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.5)$$

发生弹性变形的物体,潜在的能量被储存,单位体积储存的能量称为能量密度 E_v (在不引起歧义的情况下简称为能量,下同),可用以下公式计算:

$$E_v = \frac{1}{2}\epsilon\sigma = \frac{1}{2}E\epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.6)$$

剪切应变的能量密度为:

$$E_v = \frac{1}{2}G\epsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2G} \quad (2.7)$$

(2) 塑性性能

材料达到屈服点后,应力-应变曲线从原来的线性关系发生很大转折,接近水平,即材料开始发生塑性变形。塑性变形可以描述为:卸载后,材料变形仍然存在,不能恢复到原状。一般来说,从弹性到塑性的转变很快,而且是连续变化的,所以没有明确的“屈服点”。通常,屈服点定义为塑性变形量达到 0.2% 时的应力 σ_c 。

屈服点取决于材料变形的情况。对于摩擦现象,屈服应力取决于集中应变强化阶段(极限屈服应力),通常可在摩擦加载后的表面看见。也就是说,在摩擦学应用中,我们采用集中应变强化阶段的屈服应力的极限值为屈服应力,即变形中不再有重要的硬化现象发生,材料可以看做一阶近似理想

弹性-塑性。

计算理想弹塑性材料屈服点的一个简单方法就是硬度测试,即测试坚硬锥尖穿入被测表面的凹痕(见图 2.2)。法向力和凹痕面积的比值就是压痕硬度,或者可简单地描述为:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A} \quad (2.8)$$

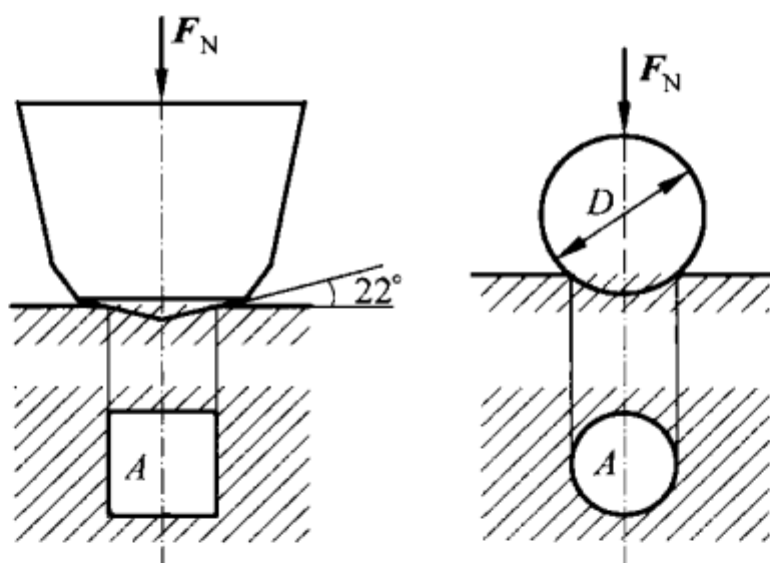


图 2.2 Vickers 和 Brinell 硬度测试

Tabor 的理论和实验验证表明,多数情况下,硬度约为屈服应力的 3 倍^①:

$$\sigma_0 \approx 3\sigma_c \quad (2.9)$$

硬度的测量在摩擦学描述中发挥了重要作用,因为摩擦过程本质上是微观凸起来解释的,这种微观接触的相互作用与硬度测试很相似。凹痕硬度与压头的形状关系不大,一阶近似中,这点可以忽略。

在接触力学和摩擦学中,材料的很多性能关联性很强,如弹性模量、硬度、热膨胀系数、表面能等。有关的实验数据见 Ernest Rabinowicz 的著作 *Friction and Wear of Materials*^②。

2.2 简单接触问题

接触问题中最简单的就是接触的变形完全由几何形状来决定。下面的四个举例就属于这种情况。

① D. Tabor, *The Hardness of Metals*, Oxford: Oxford University Press, 1951.

② E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*(Second Edition), John Wiley & Sons Inc., 1995.

(1) 平行六面体

最简单的接触问题是一个六面长方体和一个光滑无摩擦的刚性平面的接触(见图 2.3)。长方体被压在平面时会发生弹性变形。如果平面不是刚性的,长方体会压入到平面中,这段距离定义为“压入深度”。

但事实上,长方体不会压入平面中,而是发生变形,缩短了长度 d ,如果长方体长宽比非常大,那么单轴向应力作用下所产生的作用力为:

$$F = EA \frac{d}{l} \quad (2.10)$$

式中 E 为弹性模量, A 为横截面积, l 为长方体的长度。可以看出,作用力与压入深度 d 成正比。

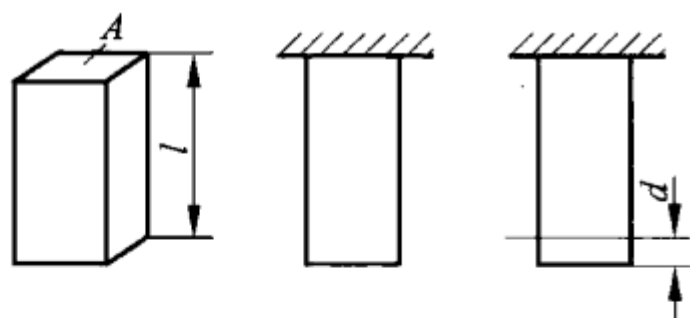


图 2.3 弹性六面体和刚性平面的接触

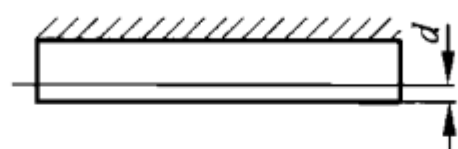


图 2.4 弹性薄板和刚性平面的接触

(2) 薄板

如果六面体的长度远小于另外两个方向(见图 2.4),那么在横截面方向变形可以忽略,主要是单轴向发生变形。按照弹性力学理论,这种情况下的作用力为:

$$F = \tilde{E} A \frac{d}{l} \quad (2.11)$$

式中

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.12)$$

对金属而言, $\nu \approx 1/3$, 则 $\tilde{E} \approx 1.5E$ 。对于高弹体来说,它可以看做是体积不可压缩材料, $\nu \approx 1/2$, 而且在单向压缩情况下,模量 $\tilde{E} \approx K$ 比 E 大很多(约 10^3 倍):

$$\tilde{E} \approx KE \quad (2.13)$$

(3) 球形凸起

接下来我们研究薄壁弹性球体凸起压在一个刚性平面产生的接触问题(见图 2.5)。

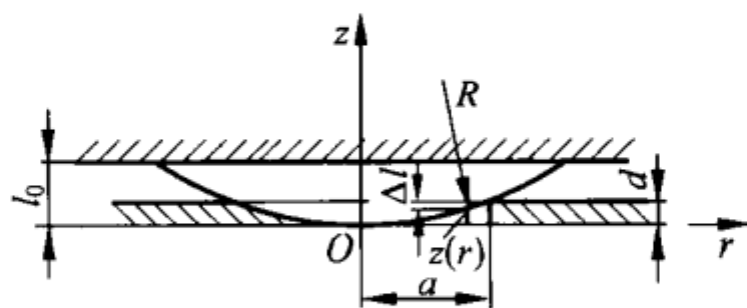


图 2.5 薄壁弹性球体与刚性平面的接触

假设球体凸起的最大厚度为 l_0 , 曲率半径为 R 。接触半径定义为 a , 压入深度为 d 。为了简单起见, 假设在感兴趣的这部分接触区域中, 位移满足下面的几何条件: $d \ll l_0, l_0 \ll a$, 那么球体凸起的每一个离散单元都在单轴向发生了变形, 对于单轴向变形, 采用模量 \tilde{E} (见式(2.12))。

曲率半径为 R 的球体凸起, 在接近接触区域中心的位置, 可以得到:

$$z = -\sqrt{R^2 - r^2} + R \frac{r^2}{2R} \quad (2.14)$$

从图 2.5 可以看出, 接触半径 a 和压入深度 d 的关系为 $d = a^2 / (2R)$, 则可以解出接触半径为:

$$a = \sqrt{2Rd} \quad (2.15)$$

沿坐标轴 r , 球体凸起表面的竖直方向的位移为 $\Delta l = d - r^2 / (2R)$, 相对应的塑性应变可以用下式来表达:

$$\epsilon(r) = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d - r^2 / (2R)}{l_0} \quad (2.16)$$

则接触区域的应力和总作用力方程最终为:

$$\begin{cases} \sigma(r) = \tilde{E}\epsilon(r) \\ F = \tilde{E} \int_0^a 2\pi r \left(\frac{d - r^2 / (2R)}{l_0} \right) dr = \tilde{E} \frac{\pi}{l_0} R d^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

可以看出, 这种情况下的接触力与压入深度的平方成正比。最大应力发生在接触区域的中心, 大小为:

$$\sigma(0) = \tilde{E} \frac{d}{l_0} = \left(\frac{\tilde{E} F}{\pi l_0 R} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

(4) 刚性圆柱体外的弹性薄板和刚性平面的接触

另外一个经常看到的例子就是, 长度为 L 的刚性圆柱体外面覆盖一层厚度为 l_0 弹性薄层 (见图 2.6)。假设压入深度远小于薄层厚度, 接触半径远大于薄层厚度, 再次研究单轴向变形。薄层表面各点的位移为 $u_z = d -$

$x^2/(2R)$, 则可以得到应变值为:

$$\epsilon(x) = \frac{u_z}{l_0} = \frac{d - x^2/(2R)}{l_0} \quad (2.19)$$

总作用力为

$$F = 2 \int_0^{\sqrt{2Rd}} \tilde{E} L \left(\frac{d - x^2/(2R)}{l_0} \right) dx = \frac{4}{3} \sqrt{2} \frac{\tilde{E} L R^{1/2}}{l_0} d^{3/2} \quad (2.20)$$

最大应力发生在接触区域的中间, 大小为:

$$\sigma(0) = \left(\frac{9F^2 \tilde{E}}{32L^2 R l_0} \right)^{1/3} \quad (2.21)$$

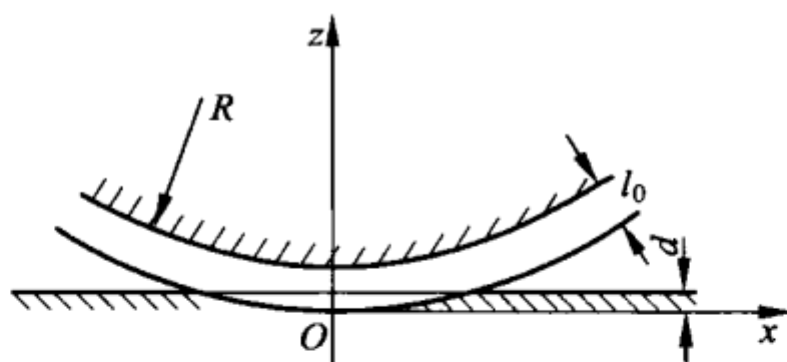


图 2.6 圆柱体外覆盖的弹性薄板和刚性平面的接触

2.3 三维弹性连续体接触的评估计算方法

1. 刚性圆柱头和弹性半空间体的接触

现在, 我们研究一个刚性圆柱头和一个弹性半空间体的接触(见图 2.7(a))。利用这个例子来解释接触力学中用于定性评估的一些重要的观点。

如果应力分布在一个特征长度为 D 的有限表面区域内(见图 2.7(b)), 这个区域称为严重变形区域, 那么整个半空间体的总体变形和应力与尺寸为 D 的体积在三维空间的总变形和应力属于同一数量级。超过这个严重变形区域, 应力以 r^{-2} (r 为远离接触表面的距离) 衰减。也就是说, 这个体积(约为 D^3)就是能量和力分布的主要空间^①。

对于一阶定性评估, 采用下面的假设足够了: 在上面提到的体积中, 变

① 应力和应变的特征“压入深度”一定与接触面积的特征尺寸属于同一数量级, 这个事实来自量纲的原因。事实上, 弹性力学理论的平衡方程没有包含任何长度量纲的因子。因此, 任意平衡问题的求解都一定不包含长度参数, 除了边界条件给出的长度外。

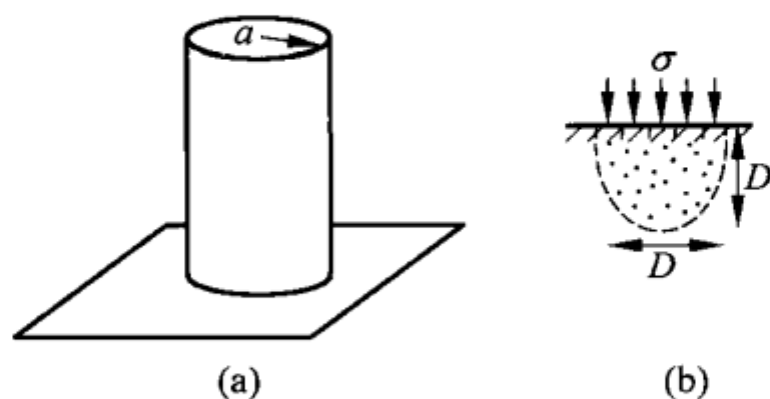


图 2.7

(a) 刚性圆柱头和弹性半空间体的接触；(b) 弹性半空间体的严重变形区域

形是恒定的,并且只有这部分体积发生变形。当然这是对连续体的变形分布和应力分布很粗略的估计。但这种评估确实对接触力和压入深度、接触半径的定性关系给出了近似正确的结果,这里需要增加一个系数,该系数的量级为 $1\sim 10$,并可以通过数值分析和计算得到。

我们将这种简单的评估方法用于刚性压头的情况。若圆柱的直径为 $2a$,则 $2a$ 体积内三向均发生严重变形。如果压头压入深度为 d ,可以估计应变量为 $\epsilon \approx d/(2a)$,从而得到应力为 $\sigma \approx E\epsilon \approx Ed/(2a)$,接触作用力为 $F \approx \sigma(2a)^2 \approx 2Eda$ 。可以看出接触力与压入深度和接触半径成正比。将此估值与第5章的精确值比较会发现很有趣的结果,精确值为:

$$F = 2E^* da \quad (2.22)$$

式中 $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ 。金属材料 $\nu \approx 1/3$ 。估值和精确值的误差小于 10% ,这个例子很好地说明了这种评估方法不仅可用于定性估计,也可以用于定量估算。

方程(2.22)表明,压入深度与法向力成正比。力 F 和位移的比值称为接触刚度系数:

$$c = 2E^* a \quad (2.23)$$

需要强调的是,这里的刚度系数与接触半径成正比,并非接触面积。

2. 刚性球体和弹性半空间的接触

现在,我们研究一个半径为 R 的刚性球体和弹性半空间的接触^①(见图2.8)。仍然采用定性评估,精确的计算见第5章。

如果球体和弹性半空间表面没有弹性作用,我们可以得到压入深度为

^① 对于法向接触来讲,弹性球体和刚性平面接触,还是刚性球体和弹性半空间体接触,都一样。

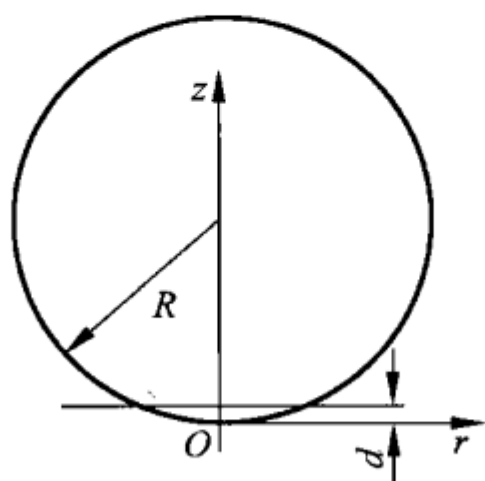


图 2.8 赫兹接触问题

d , 接触半径 $a \approx \sqrt{2Rd}$, 接触面积为:

$$A = \pi a^2 \approx 2\pi R d \quad (2.24)$$

根据给定的估算方法, 严重变形区域的大小等于接触直径 $2a$ 。这个区域内弹性应变为 $\epsilon \approx d/(2a)$, 则应力的量级为 $\sigma \approx E \frac{d}{2a}$, 产生的作用力

$$F = \sigma A \approx \frac{Ed}{2a} \pi a^2 \approx \frac{Ed}{2} \pi \sqrt{2Rd} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} E d^{3/2} R^{1/2}。$$

可以看出, 作用力与 $d^{3/2}$ 成正比, 与下面的精确值^①相比, 系数相差约为 1.5 倍。

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad (2.25)$$

如果半空间体发生了塑性变形, 法向力和接触面积的比值为:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A} \quad (2.26)$$

根据公式(2.24)可以得到

$$F_N = 2\pi\sigma_0 R d \quad (2.27)$$

在塑性区域内, 力与压入深度成正比。平均应力保持不变, 仍等于材料的硬度。

3. 刚性圆柱体和弹性半空间的接触

刚性圆柱体和弹性半空间体的接触(见图 2.9)中, 接触半径和球体接触的例子一样, 估算为 $a \approx \sqrt{2Rd}$ 。应力的量级为 $Ed/(2a)$, 接触面积为 $2La$, L 为圆柱体长度, 则作用力为:

$$F \approx \frac{Ed}{2a} 2La = ELd$$

而精确值为:

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d \quad (2.28)$$

从这个例子可以看出, 简单估算和精确值之间的差距也是很小的。作用力和压入深度成正比, 与圆柱半径无关。接触刚度可以定义为作用力和垂直位移 d 的比值:

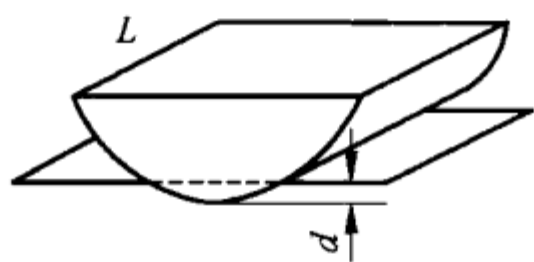


图 2.9 刚性圆柱体和弹性半空间的接触

① 见第 5 章。

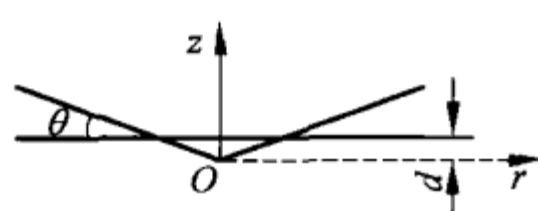
$$c = \frac{\pi}{4} E^* L \quad (2.29)$$

在塑性区域,可以得到

$$F_N \approx \sigma_0 2aL \approx 2^{3/2} \sigma_0 L R^{1/2} d^{1/2} \quad (2.30)$$

4. 刚性圆锥体和弹性体的接触

这个例子中,接触半径定义为 $a \tan \theta = d$ (见图 2.10)。应变估算为 $\epsilon \approx$



$d/(2a) = \frac{1}{2} \tan \theta$ 。平均应力的数量级为:

$$\sigma \approx E \epsilon \approx \frac{1}{2} E \tan \theta \quad (2.31)$$

图 2.10 圆锥和平面的接触 σ 与压入深度无关。法向作用力的估算为:

$$F_N \approx \frac{\pi}{2} E \frac{d^2}{\tan \theta} \quad (2.32)$$

可以看出,法向力与压入深度的平方成正比。精确值^①为:

$$F_N = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\tan \theta} \quad (2.33)$$

如果应力(见式(2.31))小于材料硬度,仅发生弹性变形。其他情况下,我们可以假设变形是塑性的,此时通过估算得到的法向力为:

$$F_N = \pi \sigma_0 \frac{d^2}{\tan^2 \theta} \quad (2.34)$$

习题

习题 1 计算半径为 R , 厚度为 h 的高弹体圆薄板在平面接触区域的力和位移的关系、有效弹性模量和剪切应力分布。假设材料是不可压缩的。

解答: 考虑两种不同的情况。

(1) 薄板与两边均固定(见图 2.11)

我们分两步来解决: 首先, 我们计算薄板弹性势能与压入深度 d 的函数关系, 然后对

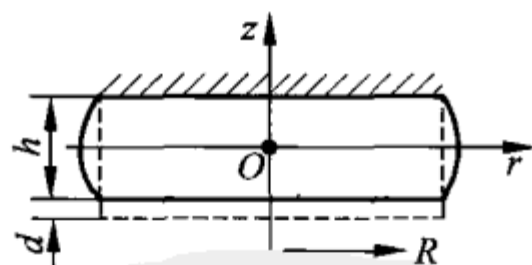


图 2.11 不可压缩高弹体圆薄板和两个刚性平面的接触, 薄板两边均与平面固定

^① I. N. Sneddon. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. Int. J. Eng. Sci., 1965, 3: 47-57.

势能中 d 求导,可以得到法向力。为了计算弹性势能,我们采用下列方程计算薄板中各点的位移:

$$u_r(r, z) = C \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \frac{r}{R}$$

这个方程满足:无滑动位置 $z = \pm h/2$, 有 $u_r = 0$ 。材料为不可压缩,可以得到:

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} u_r(R, z) dz = \frac{1}{3} \pi R C h^3$$

计算出 $C = \frac{3Rd}{h^3}$, 则位移为:

$$u_r(r, z) = \frac{3rd}{h^3} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$$

这个例子中,大部分势能与切变有关,剪切应变为:

$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{6d}{h^3} rz$$

能量密度为:

$$E_v = \frac{1}{2} G \epsilon_{rz}^2 = \frac{18Gd^2 r^2 z^2}{h^6}$$

总能量为:

$$U = \frac{18Gd^2}{h^6} \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi G R^4}{4h^3} d^2$$

作用在表面上的力为:

$$F_N = \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{3\pi G R^4}{2h^3} d$$

与式(2.10)比较,可以得到有效弹性模量满足: $\frac{3\pi G R^4}{2h^3} d = E_{\text{eff}} \pi R^2 \frac{d}{h}$ 。

因此有:

$$E_{\text{eff}} = \frac{3}{2} G \left(\frac{R}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{R}{h} \right)^2$$

根据这个结果,有效模量与薄板半径和厚度比值的平方成正比,远大于弹性模量 E 。接触表面静态应力为:

$$\sigma_{rz} \left(r, z = \frac{-h}{2} \right) = G \epsilon_{rz} \left(r, z = \frac{-h}{2} \right) = G \frac{3d}{h^2} r = E \frac{d}{h^2} r$$

从圆形薄板中心到边缘呈线性增大,最大为:

$$\sigma_{rz, \text{max}} = \frac{ERd}{h^2}$$

假设有静摩擦,摩擦系数为 μ_s ,并满足下面的情况,则接触面是不会发生滑动的:

$$\frac{\sigma_{rz, \max}}{\sigma_{zz}} = \frac{\sigma_{rz, \max} \pi R^2}{F_N} = \frac{2h}{R} \leq \mu_s$$

(2) 薄板上表面与刚性平面固定,下表面发生无摩擦滑动(见图 2.12)

我们采用下面方程:

$$u_r(r, z) = C_1 (h^2 - z^2) \frac{r}{R}$$

这个方程满足:上表面无滑动, $u_r(r, h) = 0$; 下表面自由滑动, $\left. \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ 。材料不可压缩,可以得到:

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_0^h u_r(R, z) dz = \frac{4}{3} \pi R h^3 C_1$$

得到 $C_1 = \frac{3Rd}{4h^3}$, 位移为:

$$u_r(r, z) = \frac{3d}{4h^3} (h^2 - z^2) r$$

剪切应变为:

$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{3d}{2h^3} zr$$

能量密度为:

$$E_v = \frac{1}{2} G \epsilon_{rz}^2 = G \frac{9d^2}{8h^6} z^2 r^2$$

总能量为:

$$U = G \frac{9d^2}{8h^6} \int_0^R \int_0^h r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi G d^2 R^4}{16h^3}$$

表面作用力为:

$$F_N = \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{3\pi G R^4}{8h^3} d$$

可以看出,该作用力仅为情况(a)两面固定时的四分之一。

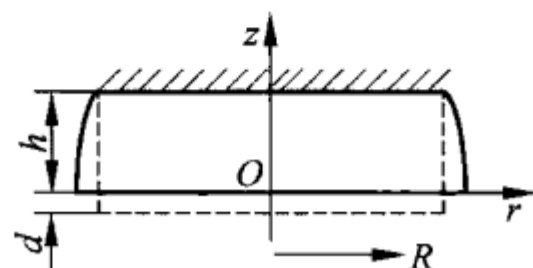
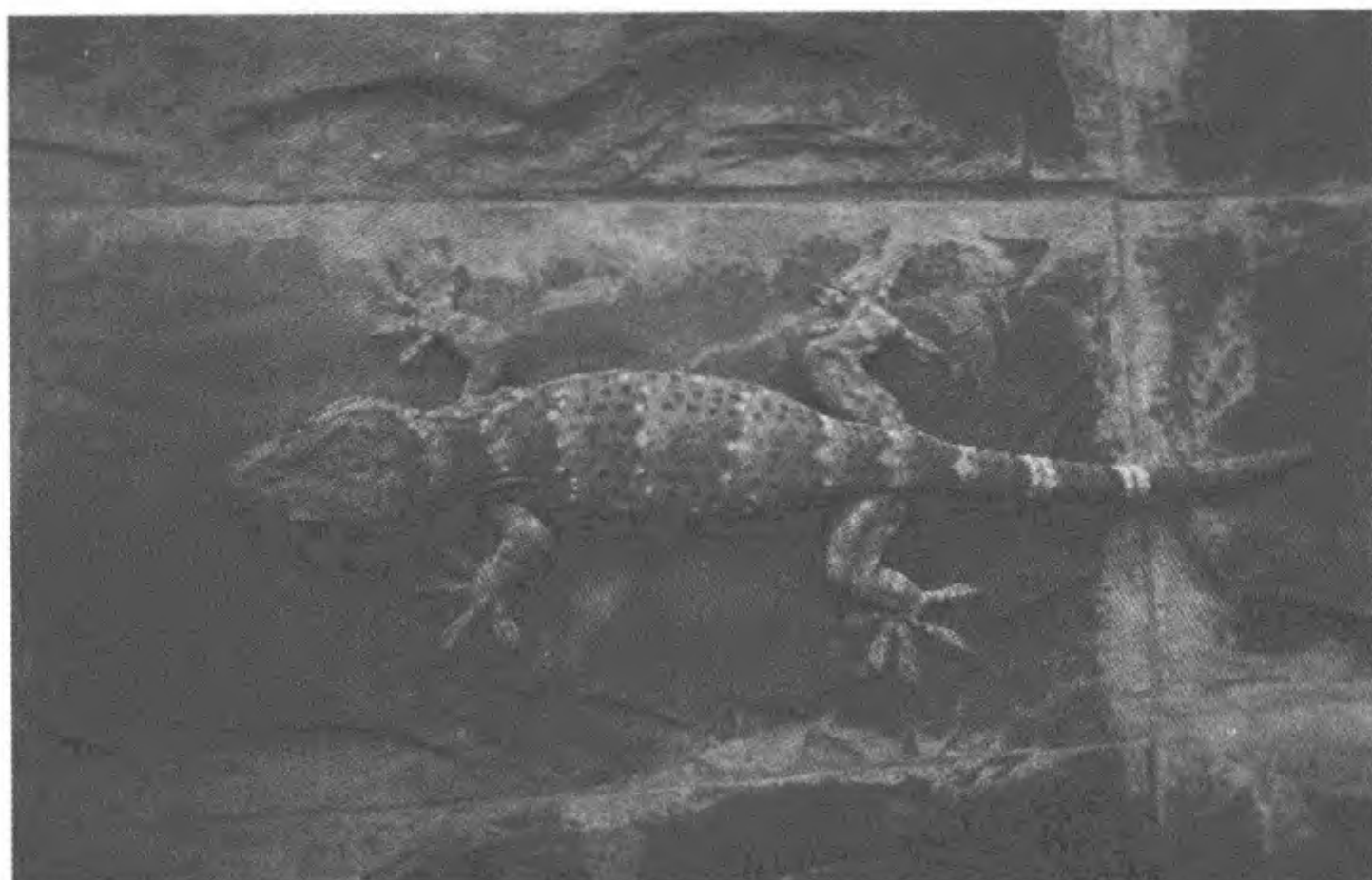


图 2.12 不可压缩高弹体圆薄板和一个无摩擦刚性平面的接触,薄板上表面与平面固定

第 3 章

黏着接触的定性分析



前面一章的分析中,我们假设接触表面没有发生黏着。但实际上,两个接触物体之间有微弱的相互作用力,这种作用力随着物体之间距离的减小而迅速增大。这种力造成了物体间的相互吸引,称之为黏着力。黏着力在很多应用领域扮演着重要的角色。例如粘扣就是由黏着力引起的,胶带、不干胶条信封都是黏着力的例子。

满足下面的一种情况,黏着力就发挥重要作用:

- ① 物体表面十分光滑(例如计算机硬盘);
- ② 接触的一方材料较软(例如橡胶或生物组织);
- ③ 微观系统中,通常黏着力比体积力影响更大,因为体积力和表面力

是跟尺寸相关的,也就是说尺寸越小,表面现象占的比重越大(如微机械仪器、原子力显微镜和生物组织等)。

黏着在橡胶摩擦中多见,尤其在汽车轮胎材料的发展中非常重要。

本章我们将解释黏着力的物理起源,定性地讨论黏着接触计算的基本理念。

3.1 物理背景

根据色散力或范德华力,如果电中性原子之间的距离等于或大于本身的尺寸时,就会互相吸引。

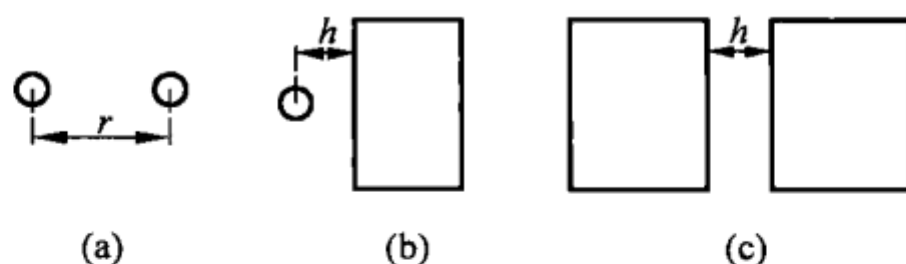


图 3.1

(a) 两个原子间的吸引; (b) 一个原子和一个半空间体的吸引;
(c) 两个半空间体之间的吸引

两个距离为 r 的中性原子之间的吸引(见附录)可用 Lennard-Jones 势来近似描述: $U = \frac{C_1}{r^{12}} - \frac{C}{r^6}$ 。平衡距离 $r_0 = (2C_1/C)^{1/6}$ 。为了便于简化,我们采用下列估算(见图 3.2)来代替势:

$$U_{\text{at-at}} = \begin{cases} -\frac{C}{r^6}, & r \geq r_0 \\ \infty, & r < r_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

这种简化对很多重要的参数,如平衡距离和结合能等,影响并不大,却有利于计算。

分两步来计算两个距离为 h 的表面光滑粒子的吸引力。首先,计算一个原子和一个由相同原子构成的三维体(密度为 n)之间的相互作用能(见图 3.3(a))^①:

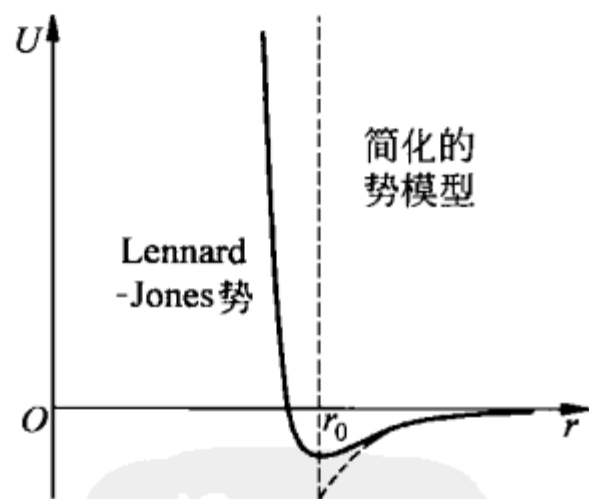


图 3.2 Lennard-Jones 势图和简化的势模型
[见式(3.1)]

① 该计算忽略了物体内部原子之间的相互作用,计算仍然有效,但需要用线性系数来校正。关于范德华力的补充内容见 3.6 节。

$$U_{\text{at-sol}} = - \int \frac{Cn dV}{R^6} = - Cn \int_0^\infty dz \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{1}{[(h+z)^2 + r^2]^3} = - \frac{\pi Cn}{6h^3} \quad (3.2)$$

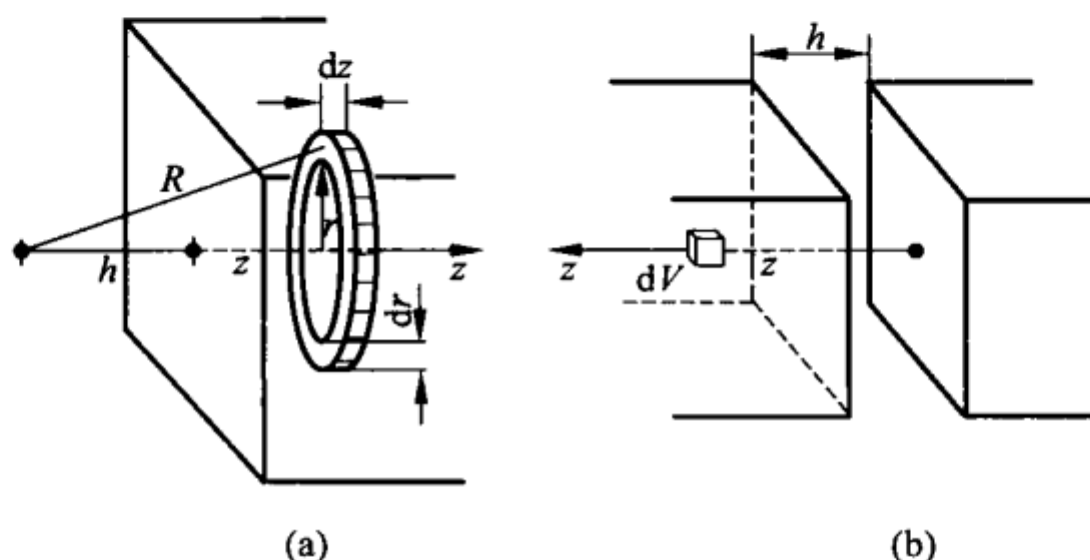


图 3.3

(a) 一个原子和一个三维体的相互作用势的计算；

(b) 两个距离 h 的三维体之间相互作用势的计算

第二步,计算两个固体的平行面之间的相互作用能。假设每个固体都由同种原子组成(见图 3.1(c)和图 3.3(b))。这种相互作用能是第一个物体沿 z 轴的积分乘以物体表面积 A 和原子密度 n 得到的。单位面积的相互作用能为:

$$\frac{U_{\text{sol-sol}}}{A} = - \int_h^\infty \frac{\pi Cn^2}{6z^3} dz = - \frac{\pi Cn^2}{12h^2} = - \frac{Q}{h^2} \quad (3.3)$$

式中 $Q = \pi Cn^2/12$ 。如果二者从很远的距离移动到一起“直接接触”(接近 r_0),则单位面积相互作用力做的功为:

$$\frac{W}{A} = \frac{Q}{r_0^2} \quad (3.4)$$

为了把二者拉开,需要外力做同样的功。建立两个表面,需要做的功用式(3.4)计算,这个数值的一半称为物体的表面能密度 γ (或表面张力)^①:

$$\gamma = \frac{Q}{2r_0^2} \quad (3.5)$$

这个数值决定了与黏着有关的所有接触性能。典型的不同固体和液体的表面能见表 3.1。

^① 因为将两个物体分开的单位作用能为 2γ ,因此接触力学中,有些作者将 2γ 称为表面能(例如 K. Johnson 的著作 *Contact Mechanics*)。

表 3.1 不同固体和液体的表面能密度

| (1) 分子晶体和金属的表面能 | |
|--|--|
| 材 料 | 表面能密度 $\gamma_s/(10^{-2}\text{J/m}^2)$ |
| 尼龙 | 4.64 |
| 半硬质聚氯乙烯(PVC) | 3.9 |
| 聚苯乙烯 | 3.30 |
| 聚乙烯 | 3.0 |
| 石蜡 | 2.50 |
| 聚四氟乙烯(Teflon) | 1.83 |
| NaCl | 16 |
| Al ₂ O ₃ | 64 |
| Si | 128 |
| Al | 112 |
| Ag | 144 |
| Fe | 240 |
| W | 450 |
| (2) 液体的表面能 | |
| 液 体 | 表面能密度 $\gamma_l/(10^{-2}\text{J/m}^2)$ |
| 水 | 7.31 |
| 汽油 | 2.88 |
| 正戊烷 | 1.60 |
| 正辛烷 | 2.16 |
| 正十二烷(C ₁₂ H ₂₆) | 2.54 |
| 正十六烷(C ₁₆ H ₃₄) | 2.76 |
| 正十八烷(C ₁₈ H ₃₈) | 2.80 |

现在估算一下范德华力。(3.3)式中,将单位面积势能对 h 求导,可以得到两个距离 h 的光滑表面间单位面积的相互作用力为:

$$\sigma = -\frac{1}{A} \frac{\partial U_{\text{sol-sol}}}{\partial h} = -\frac{2Q}{h^3}$$

(3.6)

“直接接触”(如 $h \approx r_0$)时范德华应力为:

$$\sigma = \frac{F}{A} = -\frac{2Q}{r_0^3} = -\frac{2}{r_0} \frac{Q}{r_0^2} = -\frac{4\gamma}{r_0}$$

(3.7)

对多数金属而言, $\gamma \approx \frac{1}{2} \text{ J/m}^2$ 是个典型的数值, 当 $r_0 \approx 4 \times 10^{-10} \text{ m}$ 时, 可以计算出 $\sigma = 10^{10} \text{ N/m}^2$, 这就意味着, 1 cm^2 的接触表面可以承受 100t 的重量 (远远大于图 3.4(a) 所示)!

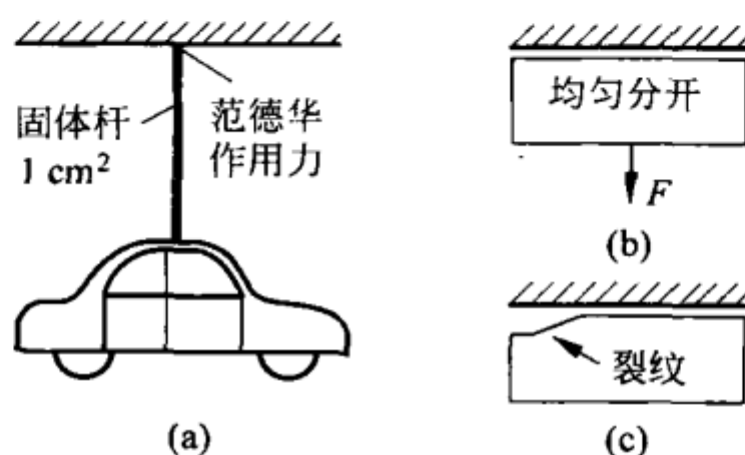


图 3.4

- (a) 光滑原子表面间的范德华力远大于人们日常生活经验的猜测;
(b), (c) 现实系统中却会因为表面粗糙和已有裂缝的增长而大大下降

这么大的黏着力在现实生活中却没有看到过。Kendall 在他的著作 *Molecular Adhesion and Its Applications* (Kluwer Academic, 2001) 中阐述了这个观点:

“固体之间有相互黏着的倾向, 但问题是要解释为什么它们却没有发生黏着, 而不是为什么会发生黏着!”

这个矛盾的黏着观点可解释为, 分子键的裂面在宏观尺度上是不均匀的 (见图 3.4(b)), 确切地说, 是裂纹沿着已有缺陷扩展, 急剧减小了黏着力 (见图 3.4(c))。表面的粗糙也会导致黏着力的急剧下降 (见 3.4 节, 粗糙度对黏着的影响)。

3.2 曲面间黏着力计算

首次计算出两个曲面固体之间的黏着力的是 Bradley (1932)^①。我们近似计算间距为 h 的一个半径为 R 的刚性球体与一个相同材料的刚性平面之间的相互作用能, 采用下面假设 (后面很多接触问题会用到): 接触面积远小于球体半径, 因此可以近似认为两个物体表面是平行的, 但是二者之间的距离仍然与纵坐标有关 (“近似半空间体”)。

① R. S. Bradley. *Phil. Mag.*, 1932, 13: 853.

式(3.3)给出了距离 $z=h+r^2/2R$ (图 3.5) 时单位面积的相互作用能, 对整个区域积分, 可以得到:

$$U_{\text{plane-sphere}} = - \int_0^\infty \frac{Q}{(h + r^2/(2R))^2} 2\pi r dr = - \frac{2\pi RQ}{h} \quad (3.8)$$

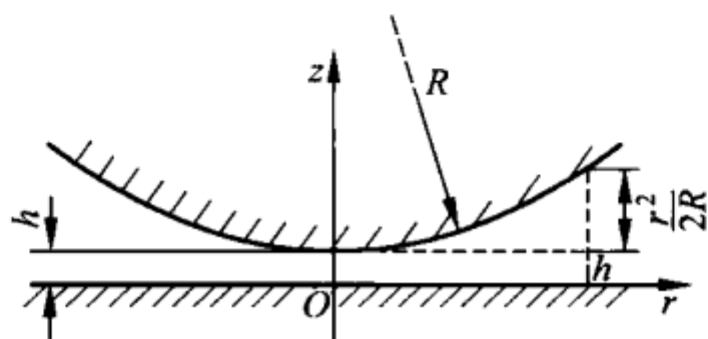


图 3.5 半径为 R 的刚性球体和刚性平面的黏着力计算

对相互作用能表达式中 h 求导, 得到相互作用力 $F = -\partial U/\partial h$:

$$F = - \frac{2\pi RQ}{h^2} \quad (3.9)$$

直接接触时 ($h \approx r_0$) 有:

$$F_{\text{adh}} = - \frac{2\pi RQ}{r_0^2} = - 4\pi\gamma R \quad (3.10)$$

这个计算结果与弹性变形体之间的黏着力(见第 6 章)相差仅为 $4/3$ 倍。

3.3 弹性体之间黏着力的定性估计

从最简单的例子开始阐述光滑的刚性平面和光滑的弹性方块的接触(见图 3.6)。由于黏着力的作用, 方块和平面相互黏在一起, 要将它们分开, 必须施加作用力在上面。假设在方块的自由端施加一拉伸应力 σ 。在此应力作用下, 方块伸长 d 。拉伸材料的弹性势能密度为 $E\epsilon^2/2 = \sigma^2/(2E)$ 。将势能密度乘以方块的体积就是总势能: $U_{\text{el}} = \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A$, A 为方块

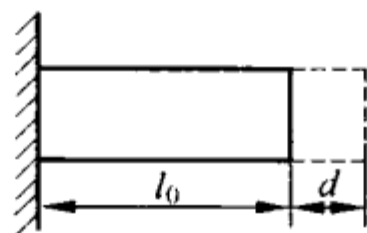


图 3.6 矩形方块和光滑墙面的黏着

横截面积。

现在讨论一下方块自发地从刚性平面分开所需要的条件。将二者分开, 必定会产生两个新面, 这个过程需要的势能为 $U_{\text{adh}} = 2\gamma A$ 。当闭合物理系统的总势能减小到下面情况时: $U_{\text{adh}} - U_{\text{el}} = 2\gamma A - \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A < 0$, 二者会自

发分开,此时的极限应力为:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{4E\gamma}{l_0}} \quad (3.11)$$

可以看出,“失效应力”随着弹性模量 E 和表面能密度 γ 的增大而增大,随着弹性方块厚度的增大而减小。因此,黏着的应用中有这样的规则:黏着层越薄,结合力就越强^①。但是,这个规则受到表面粗糙度的限制,并非越薄越好。

第二个例子,讨论一个刚性球体和一个弹性平面的接触。假设这两个物体表面绝对光滑。压入深度为 d ,则接触半径为 $a \approx \sqrt{2Rd}$ (与第2章无黏着情况类似)。如果应力作用在有限的弹性半空间区域内,线性特征尺寸为 $2a$,则势能主要存储在体积为 $(2a)^3$ 的空间。因此,可以认为,多数情况下只有图 2.7(b) 描述的体积空间发生了严重变形。弹性应变为 $\epsilon \approx d/(2a)$,能量密度为 $E\epsilon^2/2$,总弹性能等于 $U_{el} \approx \frac{E}{2}\epsilon^2 (2a)^3 = E2^{1/2}R^{1/2}d^{5/2}$ 。表面能为 $U_{adh} = -2\gamma\pi a^2 = -4\pi\gamma Rd$,则系统的总能量为:

$$U_{tot} \approx E2^{1/2}R^{1/2}d^{5/2} - 4\pi\gamma Rd \quad (3.12)$$

作用在系统的力为 $F \approx \frac{\partial U_{tot}}{\partial d} \approx 5E2^{-1/2}\sqrt{R}d^{3/2} - 4\pi\gamma R$ 。当 $d=0$ 时,黏着力为作用在物体上的最大负作用力,即

$$F_{adh} \approx -4\pi\gamma R \quad (3.13)$$

第6章中,该模型的精确计算结果为 $F_{adh} = -3\pi\gamma R$,有趣的是两个弹性物体之间的黏着力和两个刚性物体之间的黏着力为同一个数量级(见式(3.10))。

3.4 粗糙度对黏着的影响

宏观世界中黏着力非常小,往往被人们忽视,主要是因为几乎所有物体表面在不同的尺度上都有粗糙度。为了定性地讨论粗糙度的影响,我们先考虑一个光滑的弹性物体和一个粗糙的刚性平面的接触。

假设粗糙表面的特征波长为 l ,高为

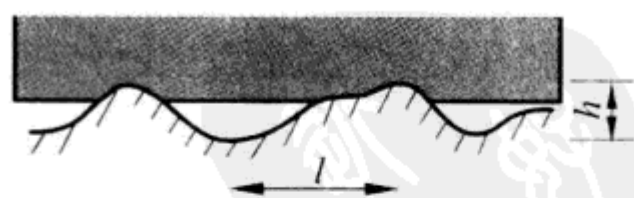


图 3.7 弹性介质和粗糙刚性平面的接触

^① 注意:多数黏合剂(凝固后)是小弹性模量的弹性媒介,因此在计算弹性能时,只有黏结层的能量是必须考虑进去的。

h 。如果弹性物体的变形结果是波谷被完全填满,则存储的弹性能为 $U_{el} \approx \frac{1}{2} G \epsilon^2 l^3 \approx \frac{1}{2} G \left(\frac{h}{l} \right)^2 l^3 = \frac{1}{2} G l h^2$ ①,同时表面能减少 $U_{adh} \approx 2\gamma l^2$ 。如果黏着能量足够大,能产生这样的变形,那么物体要自发变形并且黏着在整个表面,需满足 $U_{el} < U_{adh}$ 或

$$h^2 < \frac{4\gamma l}{G} \quad (3.14)$$

如果粗糙度远小于临界粗糙度,物体表面就可以看做绝对光滑。粗糙度很大时,可以看做只有一些接触点,黏着力非常小。临界粗糙度不仅和表面能密度 γ 有关,还跟弹性剪切模量 G 有关。因此,弹性模量很小的材料也可以黏着在很粗糙的表面,其中一个典型的例子就是橡胶,它的剪切模量约为 1 MPa 左右②,比坚硬的固体,如金属,要小 5 个数量级。对于坚硬的物体,公式(3.14)的情况仅适用于非常光滑的抛光表面。典型的粗糙度参数中, $h \approx 1 \mu\text{m}$, $l \approx 100 \mu\text{m}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 计算结果为 $\frac{Gh^2}{4\gamma l} \approx 10^2 \gg 1$ 。这种情况下黏着力就非常小,可以忽略了。

3.5 胶带

胶带作为黏着物理应用的另外一个例子,这里讨论一下它的能量平衡条件。假设一段宽度为 L 的软薄膜,一部分放在刚性平面上(见图 3.8(a))。在力 F 的作用下,胶带被拉长,将单位面积的胶带与刚性平面分开所需要的能量称为“有效表面能”,记为 γ^* 。计算胶带被拉的角度(在给定的作用力下),假定分离线处于平衡,讨论长度为 l_0 的 OA 段(见图 3.8(b))。

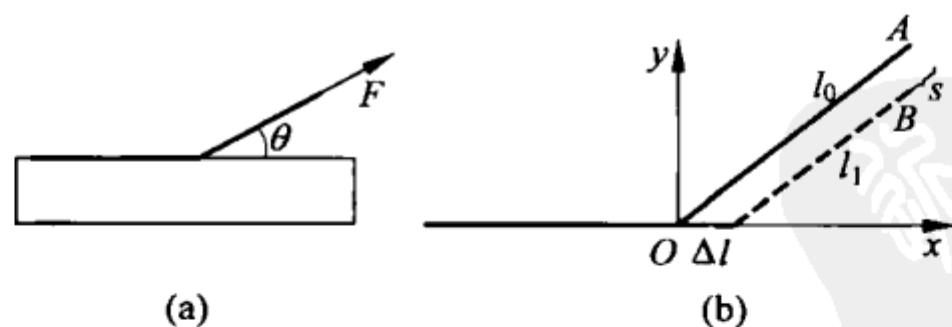


图 3.8 外力作用下部分胶带与平面接触的示意图

① 精确的计算见本章习题 1。

② 无填充的纯橡胶。

根据虚功法则,对于平衡系统,所有的力对系统内任意一个微小位移所做的功的总和等于零。考虑这样一个位移,它等于胶带与平面分离的长度 Δl 。产生这个位移,表面能会增加 $\gamma^* L\Delta l$;黏着力做的功就应该等于 $-\gamma^* L\Delta l$ 。同时,在点 B 位置,沿力作用的方向,胶带的位移为 s ,则力 F 做的功等于 Fs ,平衡条件为 $Fs = \gamma^* L\Delta l$ 。由图中可以看出 $s = \Delta l(1 - \cos\theta)$,因此 $F_0(1 - \cos\theta) = \gamma^* L$ 。可以得到临界“分离力” F_0 为:

$$F_0 = \frac{\gamma^* L}{1 - \cos\theta} \quad (3.15)$$

垂直于平面的单位长度极限分离力等于物体的表面能。如果作用力的方向为 π (胶带的反向),则极限拉力减少一半。

3.6 范德华力和表面能的补充内容

I. E. Dzyaloshinskii、E. M. Lifschitz 和 L. P. Pitaevskii 在 1961 年对范德华力理论进行了扩展^①: 范德华力主要取决于两个物体及它们中间媒介的介电常数。如果媒介的介电常数 ϵ_m 小于两物体的介电常数,即 $\epsilon_m < \epsilon_1, \epsilon_2$,这两个物体就会相互吸引;如果介于两者之间($\epsilon_1 < \epsilon_m < \epsilon_2$),这两个物体相互排斥。后一种效果用于原子力显微镜,来阻止黏着力和相关的不稳定性。

根据该理论,两个物体间的范德华力的粗略近似值与 $\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_m)(\epsilon_2 - \epsilon_m)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ 成正比。如果两物体之间的介质是真空($\epsilon_m = 1$),那么范德华力始终是正的(两物体相互吸引),并且正比于 $\frac{(\epsilon_1 - 1)(\epsilon_2 - 1)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ 。公式(3.5)给出了一个计算相对表面能密度的粗略经验法则,其中对于不同的物体,平衡距离 r_0 是近似相等的,表面能的主要差别是因为不同的极化率或介电常数产生的。

相对表面能密度定义为:将物体从平衡距离 r_0 开始分开所需要的单位面积的能量。材料1的两个物体的相对表面能密度与 $\gamma_{11} = 2\gamma_1 \propto \frac{(\epsilon_1 - 1)^2}{2\epsilon_1}$ 成正比。同样,材料2的两个物体的相对表面能密度与 $\gamma_{22} = 2\gamma_2 \propto \frac{(\epsilon_2 - 1)^2}{2\epsilon_2}$ 成正比。

^① I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifschitz, L. P. Pitaevskii. General theory of van der Waals' forces. Sov. Phys. Usp., 1961, 4: 153-176.

比。材料分别为 1 和 2 的两个物体的相对表面能密度 $\gamma_{12} \propto \frac{(\epsilon_1 - 1)(\epsilon_2 - 1)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, 从中可以得到^①:

$$\gamma_{12} \approx \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}} = 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \quad (3.16)$$

两个固体的相对表面能密度大概等于它们本身表面能密度的几何平均值。对于两个不同材料的物体, 方程(3.11)和(3.13)中, γ 应该由相对表面能密度的一半 $\gamma_{12}/2$ 来代替。

习题

习题 1 一个光滑的弹性体(橡胶)和一个刚性粗糙表面接触, 粗糙表面特征为波长 l , 高为 \hat{h} 。弹性体媒介的“宽度” L 远大于 l , 假设粗糙度模型为 $z = \hat{h}\cos(2\pi x/l)$, 计算 \hat{h}/l 为多大时, 波谷被完全填满? $l = 100 \mu\text{m}$ 时, 橡胶仍然完全黏在刚性表面的最大允许粗糙度是多少? 纯橡胶的剪切模量 G 约为 1 MPa , 和橡胶接触的刚性面的相对表面能约为 $\gamma_{12} \approx 3 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$ 。

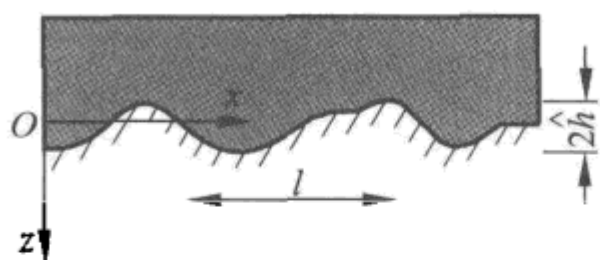


图 3.9 波形刚性表面和弹性介质(橡胶)的完全接触

解答: 对于各向同性的线弹性介质来说, 应该满足下列平衡关系:

$$\nabla \text{div} \mathbf{u} + (1 - 2\nu)\Delta \mathbf{u} = 0$$

根据边界条件: $u_z(x, z=0) = \hat{h}\cos kx$, $\sigma_{zx}(x, z=0) = 0$ (水平方向没有摩擦), 上述平衡方程的解为:

$$u_z = \hat{h} \left(1 - \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \cos kx \cdot e^{kz}$$

和

$$u_x = \hat{h} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \sin kx \cdot e^{kz}$$

其中 $k = 2\pi/l$ 。根据应力张量普遍方程:

$$\sigma_{ik} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{l=x,y,z} u_l \delta_{il} + \frac{E}{1+\nu} u_{ik}$$

这里, 令 $u_{ik} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, 我们可以得到表面法向应力:

^① 我们用算术平均 $(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ 代替几何平均 $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$, 在近似计算中是可以接受的。

$$\sigma_x \Big|_{z=0} = \frac{E \hat{h} k \cos kx}{2(1-\nu^2)}$$

在长为 l 的这部分介质中,水平方向存储的弹性能可以计算为:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^l u_z(x) \sigma_x(x) L dx = \frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)}$$

如果弹性能小于表面能 $\gamma_{12} L l$,橡胶将黏着在整个表面:

$$\frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)} < \gamma_{12} L l$$

表面临界波幅为:

$$\hat{h}_c^2 = \frac{4\gamma_{12} l (1-\nu^2)}{\pi E} = \frac{2\gamma_{12} l (1-\nu)}{\pi G}$$

(将此结果与式(3.14)的估算比较!)。根据给定的数据和 $\nu \approx 0.5$,可以算出临界粗糙度为 $h_c \approx 1 \mu\text{m}$ 。

习题 2 给定一个带有波形曲面的刚性物体($h = \hat{h} \cos kx$)。估算金箔最大厚度 t_c 为多少时,仍然能够仅靠黏着力粘在表面上? 其中 $E = 80 \text{ GPa}$, $\gamma_{12} = 2 \text{ J/m}^2$, $l = 2\pi/k = 100 \mu\text{m}$, $\hat{h} = 1 \mu\text{m}$ 。分两种情况研究:(1) 弹性能仅由拉伸决定;(2) 弹性能仅由弯曲决定。

解答:

(1) 取金箔的一段(长 l)研究,由于横截面方向的挠度 $w(x)$,这部分的拉长量为:

$$\Delta l \approx \frac{1}{2} \int_0^l w'^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \hat{h}^2 k^2 \sin^2(kx) dx = \frac{\pi^2 \hat{h}^2}{l}$$

则存储的弹性能为:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{L t \pi^4 \hat{h}^4}{l^3}$$

式中, L 为箔片的宽度; ν 为泊松比。如果该能量小于黏着能 $\gamma_{12} L l$,则箔片能够完全黏着在表面:

$$t < \frac{2\gamma_{12} l^4}{\pi^4 \hat{h}^4} \frac{1-\nu^2}{E}$$

根据题目给出的数据,可以算出 $t < 46 \mu\text{m}$ 。

(2) 长 l 的这部分弯曲箔片的弹性能为:

$$U_{el} = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} L \int_0^l w''^2 dx = \frac{Et^3}{48(1-\nu^2)} L k^4 \hat{h}^2 l$$

如果该能量小于黏着能 $\gamma_{12} Ll$, 则箔片能够完全黏着在表面:

$$t^3 < \frac{48\gamma_{12}}{k^4 \hat{h}^2} \frac{(1-\nu^2)}{E} = \frac{3\gamma_{12} l^4}{\pi^4 \hat{h}^2} \frac{(1-\nu^2)}{E}$$

根据题目给出的数据, 可以算出 $t_c \approx 4.1 \mu\text{m}$ 。

比较(1)和(2), 可以发现: 在给定粗糙度的基础上, 完全黏着标准主要是由箔片的弯曲刚度决定的, 因此, 最终箔片的临界厚度应该是 $t_c \approx 4.1 \mu\text{m}$ 。

习题 3 很多昆虫具有黏着在光滑表面的机能。图 3.10(a)展示了一个简化的模型, 其中考虑了昆虫足的本质关系。计算: (1) 压入深度和法向力的关系; (2) 外部法向力接近于零时, 最大接触半径; (3) 分离力和原先挤压力之间的关系。给定: $\gamma_{12}, A_0, k = EA_0/l_0, l_0$ 。

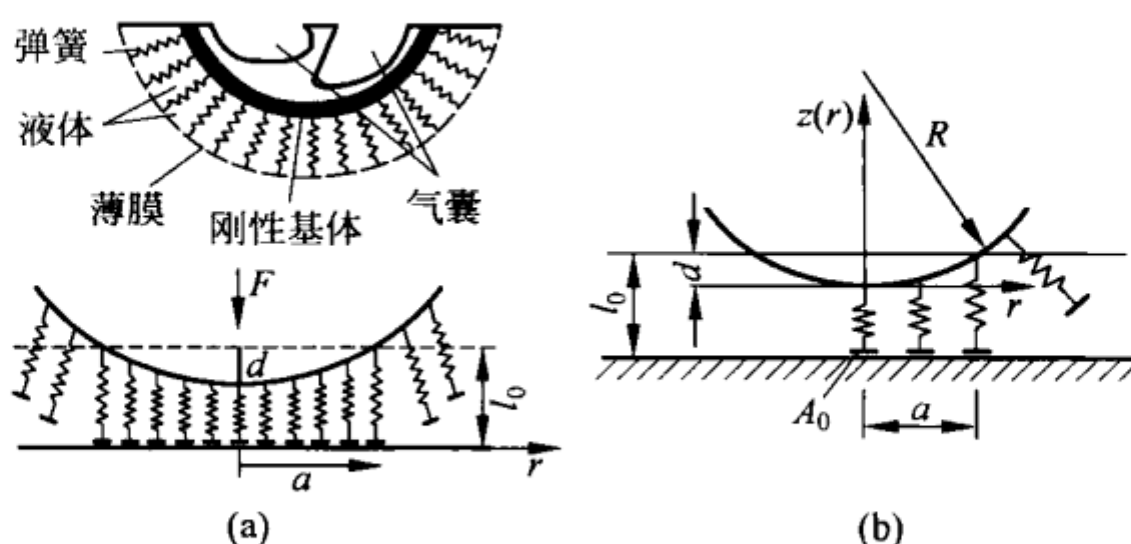


图 3.10

(a) 昆虫“黏着足底”的结构; (b) 黏着力计算图示

解答: 与刚性平面接触的弹簧长度可用下式来计算: $l(r) = l_0 - d + r^2/(2R)$ 。当弹簧压缩到两个平面非常接近的时候, 接触区域边缘的弹簧长度为 l_0 : $l_0 - d + a^2/(2R) = l_0$ 。接触半径为 $a = \sqrt{2dR}$, 则总压缩力为:

$$F_N = -\frac{k}{A_0} \int_0^a \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr = \frac{\pi k R d^2}{A_0} = \frac{\pi E R d^2}{l_0}$$

如果足用力踩在表面上, 然后在外力 F 的作用下拉开, 则接触面积由这个条件决定: 边界弹簧处于临界状态。极限伸长量可根据式(3.11)计算 $\Delta l = \sqrt{\frac{2\gamma_{12} l_0}{E}}$ 。根据约束条件 $l(a_{\max}) = l_0 - d + \frac{a_{\max}^2}{2R} = l_0 + \sqrt{\frac{2\gamma_{12} l_0}{E}}$, 可计算出接触半径为:

$$a_{\max}^2 = 2R \left(d + \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} \right)$$

则作用在足上的力为：

$$\begin{aligned} F_A &= -\frac{k}{A_0} \int_0^{a_{\max}} \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr \\ &= -\frac{\pi k}{2A_0} a_{\max}^2 \left(\sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} - d \right) = -\frac{\pi E}{l_0} R \left(\frac{2\gamma_{12}l_0}{E} - d^2 \right) \end{aligned}$$

这个作用力的最大负值称为黏着力。

$$|F_{A,\max}| = 2\pi\gamma_{12}R$$

根据任意压缩力 F_N 的计算,可以得到下列黏着力^①:

$$F_A(F_N) = \begin{cases} F_{A,\max}, & F_N \geq F_{A,\max} \\ 2\sqrt{F_{A,\max}F_N} - F_N, & F_N < F_{A,\max} \end{cases}$$

① M. Schargott, V. L. Popov, S. Gorb. Spring model of biological attachment pads. J. Theor. Biology, 2006, 243: 48-53.

第4章 毛细作用力



在固体表面和液体之间,或者有少量液体存在的两个固体之间,都存在一种重要的相互作用力,我们称之为毛细力。正是通过毛细力的作用,液体才能湿润固体,液体之间才会互相排斥。植物的器官中,水分的运输全都是通过毛细力的作用完成的。毛细力导致了润滑油发生我们不期望的扩散,但在永久润滑系统中也能使润滑剂传输到摩擦位置。微观技术中,毛细力是小零件之间“静摩擦”的重要原因之一。毛细力对摩擦力,尤其是静摩擦力的影响非常大。

4.1 表面张力和接触角

在很多不同的情况下,影响毛细力的最重要的物理参数就是表面张力和接触角。为了弄清液体表面张力的概念,我们设想一个方形线框中的肥皂薄膜(见图 4.1)。如果拉动边框的一边,油膜面积变大,表面能就会增加。由于位移 Δx ,能量会增加 $\Delta E = 2\gamma l \Delta x$,其中 γ 为液体的表面能密度,经常简称为“表面能”;倍数 2 是因为油膜有两面。根据虚功原理,能量的变化应该等于外力所做的功 $W = F \Delta x = 2\gamma l \Delta x$,从而得到 $F = 2\gamma l$,也就是说,作用在线框边缘的均布载荷为 $f = F/l = 2\gamma$ 。因为油膜有两面,则每面的均布载荷都等于 γ ,也就是表面能。因此,每个自由表面处于“张力”状态,这也就是“表面张力”这个词的来源。

如果一滴液体静止于固体表面,液体表面会形成一个明确的角度 θ (见图 4.2)。平衡状态下,这个角度只与系统的热力学性质有关,称这个角为接触角。分析固体和液体接触时,接触角对大多数重要性能都有影响。

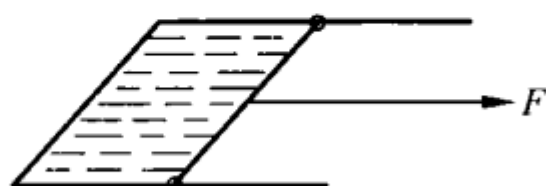


图 4.1 解释表面张力的肥皂泡实验

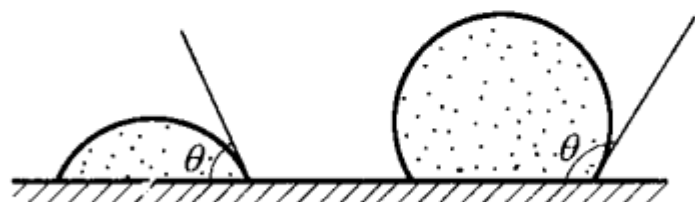


图 4.2 液滴与固体表面接触

液滴的分界线上,有固、液、气三个界面相互接触(见图 4.3(a)),每个界面都有相应的表面张力在作用。平衡状态时,有:

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta \quad (4.1)$$

式中, γ_{sv} 是固体和气体的相对表面能; γ_{sl} 是固体和液体的相对表面能; γ_{lv} 是液体和气体的相对表面能; 接触角 θ 是 0 到 π 中任意的角度,这取决于这三个相对表面能。若接触角小于 $\pi/2$,则称液体湿润给定表面;若接触角大于 $\pi/2$,则称液体“排斥”给定表面。若液体是水,接触角小于 $\pi/2$,我们称表面是亲水的;若接触角大于 $\pi/2$,则称表面是憎水的。接触角大于 $\pi/2$ 和小于 $\pi/2$,这个区别的意义是通过毛细桥梁的研究阐明的。如果接触角为零,我们说表面可完全湿润,此时,液滴扩散形成一层无限大的薄膜(宏观可见)。完全湿润的条件为:

$$\gamma_{sv} - \gamma_{sl} = \gamma_{lv} \quad (4.2)$$

当 $\gamma_{lv} < \gamma_{sv} - \gamma_{sl}$ 时,液体会扩散,直到厚度薄到几个分子直径那么大,这种薄油膜的扩散称为“蠕动”,这个过程需要的驱动力根据下式计算:

$$\gamma_{\text{creep}} = \gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma_{lv} \quad (4.3)$$

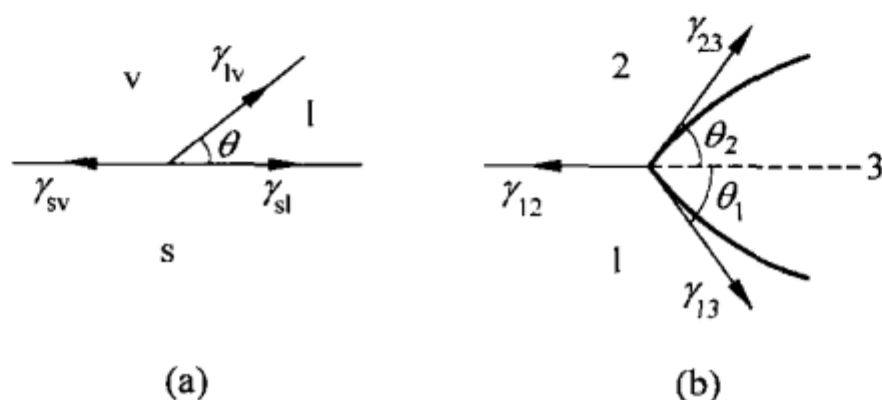


图 4.3 接触角与接触线

(a) 液体和固体接触线的平衡计算; (b) 两种液体接触线的平衡计算

平衡方程(4.1)仅考虑了水平方向的力平衡。在垂直方向,这些表面张力的分量和刚性物体的反作用力也是平衡的。两种液体接触时(或者处于热动力平衡中两个固体的接触,比如长期暴露于高温后),必须将两个方向的分量都考虑进去(见图 4.3(b))。因此,这两个特征接触角满足下列方程:

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} \cos \theta_1 + \gamma_{23} \cos \theta_2 \quad \text{且} \quad \gamma_{13} \sin \theta_1 = \gamma_{23} \sin \theta_2 \quad (4.4)$$

液滴能否完全湿润表面,取决于三者的表面能。但是,经验表明,湿润性主要由液体和固体的表面能决定。如果两个表面仅有范德华力作用,那二者界面的表面能(密度)可根据下式来估算^①:

$$\gamma_{sl} \approx \gamma_s + \gamma_l - 2 \sqrt{\gamma_s \gamma_l} \quad (4.5)$$

需要注意的是,这个表面能的估算与式(3.16)中固体表面能的估算不一样,其物理来源不一样(对固体来说,是使二者分开所需要的力,液体是重组所需要的力)。两种液体相同的话,式(4.5)中的能量就等于零。

观察式(4.5),根据图 4.4 中边界上力的平衡,可以得到:

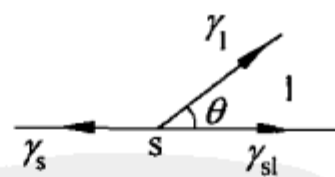


图 4.4 表面能已知的液体和固体之间的接触角估算

^① F. M. Fowkes. Dispersion force contributions to surface and interfacial tensions, contact angles and heats of immersion. In: Contact Angle, Wettability and Adhesion. American Chemical Society, 1964, 99-111.

$$\gamma_s = \gamma_l + \gamma_s - 2\sqrt{\gamma_l\gamma_s} + \gamma_l\cos\theta \quad (4.6)$$

从而可以计算出接触角的大小：

$$\cos\theta = 2\sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_l}} - 1 \quad (4.7)$$

如果方程的右边等于 1 (接触角 $\theta=0$, 完全可湿润), 则 $\gamma_s \approx \gamma_l$; 等于 -1 ($\theta=\pi$, 完全被排斥) 是永远达不到的; 接触角等于 $\pi/2$ 时, $\gamma_l \approx 4\gamma_s$ 。式(4.3)中蠕动的驱动力为 $\gamma_K = \gamma_s - \gamma_{ls} - \gamma_l = -2\gamma_l + 2\sqrt{\gamma_l\gamma_s} = 2(\sqrt{\gamma_l\gamma_s} - \gamma_l)$, 当 $\gamma_l \approx \gamma_s/4$ 时, 达到最大。

表面能非常小的油(如硅油, $\gamma_l \approx 2.1 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$)能湿润所有的固体表面(聚四氟乙烯除外, 见表 3.1)。它们会在不知不觉中污染工厂。润滑剂会从需要润滑的摩擦位置扩散出来, 干扰机器零部件, 造成功能失效。我们可以通过防油扩散处理来阻止不想要的扩散, 也就是在固体表面加一层薄膜, 使固体表面被排斥, 来减小机器零件的表面张力。

4.2 接触角滞后

到现在为止, 我们一直假设, 在接触线上除了表面张力外, 没有其他力的作用。如果是液体和固体接触, 那么在接触线上也会有摩擦力作用, 式(4.1)的平衡方程就改为

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv}\cos\theta \pm f_R \quad (4.8)$$

式中 f_R 为接触线上单位长度的摩擦力。摩擦力的正负取决于液滴的移动方向。因此, 实际接触角取决于运动方向。这种现象称为接触角滞后现象。根据滞后, 可以定义摩擦力。该摩擦力使液滴能粘在宏观光滑倾斜的表面上。这在很多技术应用中都很有趣。

接触线上的摩擦力可由固体表面粗糙、多相性或者固体原子结构所引起。由于这些因素, 液滴的能量取决于它在固体表面所处的位置。因此, 才可能产生静摩擦。

4.3 压力和曲率半径

如果液体表面是曲面, 那么液滴“内表面”和“外表面”会产生一个压力差。对图 4.5(a)中的球形液滴, 压力差可以很容易算出来。如果将一定量的液体“抽”到液滴中, 那么半径会增加 dR , 表面积增加 $dA = 8\pi R dR$, 由于

压力差,做的功为 $dW = (p_1 - p_2)dV = (p_1 - p_2)4\pi R^2 dR$,它等于表面能的变化^① $\gamma_1 dA = \gamma_1 8\pi R dR$,由此可得:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2\gamma_1}{R} \quad (4.9)$$

如果忽略重力,那液滴内任意一点的压力都相等,因此曲率半径也是不变的:液滴成部分圆球状。在固体平面,液滴总是球体的一部分(见图 4.2)。

非球体表面的普遍结果为:

$$\Delta p = \gamma_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.10)$$

式中 R_1 和 R_2 为主曲率半径。这里要强调的是,在方程(4.10)中,曲率半径也可能是负的。曲率半径的正负要看曲面中心在液体表面的里面还是外面。对于马鞍状表面,曲率半径有正有负(见图 4.5(c))。

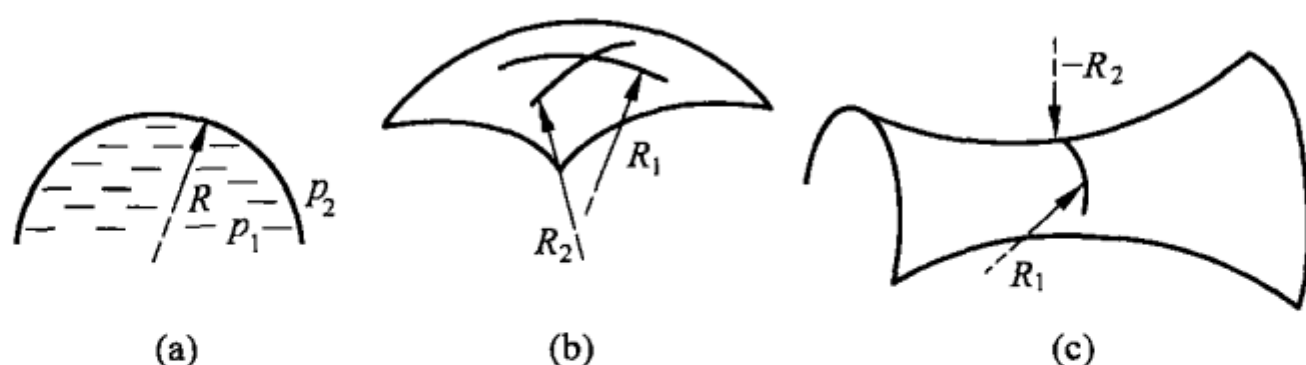


图 4.5 曲面的不同主曲率半径

4.4 毛细桥梁

观察这样的现象:一个刚性圆柱体和一个固体平面离得很近,二者之间有少量液体(见图 4.6)。为了便于简化,假设“接触双方”的材料相同。

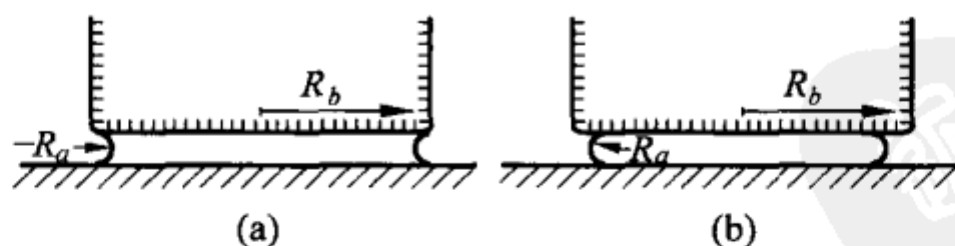


图 4.6

(a) 接触角小于 $\pi/2$ 时的毛细桥梁; (b) 接触角大于 $\pi/2$ 时的毛细桥梁

^① 通常简单地把气-液界面的表面张力看做是液体的表面张力, $\gamma_1 = \gamma_{lv}$ 。

平衡状态时,液体形成一个毛细桥梁,该毛细桥梁有两个曲率半径。较大的半径 R_b 始终是正的。较小半径的正负取决于接触角大于还是小于 $\pi/2$ 。对接触角较小的可湿润表面来说, R_a 是负的。液体里存在一个减小的压力,该压力产生了一个力,我们称之为毛细力。为了保持系统平衡,必须施加相反的作用力。压力差乘以毛细桥梁的面积,可得到毛细力:

$$F_{\text{cap}} = A\gamma_l \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right) \approx -A\gamma_l \frac{1}{R_a} \quad (4.11)$$

式中假设 $|R_a| \ll |R_b|$ 。但是,如果表面不能被给定液体湿润(接触角大于 $\pi/2$),那么接触双方排斥。这个性能解释了由接触角大于或小于 $\pi/2$ 所决定的“可湿润”表面和“排斥”表面(对于水来说,是亲水表面和憎水表面)之间的区别。

4.5 刚性平面和刚性球体之间的毛细力

讨论一个刚性球体和一个相同材料的刚性平面之间的毛细力。接触角为零(完全可湿润),如图 4.7 所示。假设毛细桥梁半径为 r ,球体半径为 R 。毛细桥梁高度 $h \approx r^2/(2R)$,表面积 $A = \pi r^2$ 。(小)曲率半径 $r_0 = h/2$ 。因为 $|r_0| \ll |r|$,则液体里最终的压力差为:

$$\Delta p = -\frac{\gamma_l}{r_0} = -\frac{2\gamma_l}{h} = -\frac{4\gamma_l R}{r^2} \quad (4.12)$$

则毛细力为

$$F_{\text{cap}} = A\Delta p = -\pi r^2 \frac{4\gamma_l R}{r^2} = -4\pi\gamma_l R \quad (4.13)$$

可以看出,毛细力与球体曲率半径成正比,与液体的量无关。毛细力 F_{cap} 的大小与将球体从表面拉起来需要的力相等。

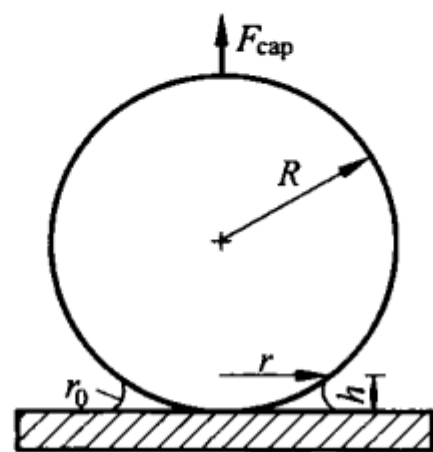


图 4.7 刚性球体和刚性平面之间的毛细桥梁

4.6 粗糙表面的液体

到现在为止,假设的固体表面都是理想光滑和平整的,但现实中几乎是不可能的。表面粗糙度会导致接触角宏观可见的变化。粗糙度不同,发生的情况也不同。如果粗糙度较小,那液体仍然能够与整个固体表面保持完

全接触(见图 4.8,到液滴的右边界)。如果空气和液滴之间没有压力差,那么液体表面各点的曲率半径之和一定等于零。

正因为如此,液体平均表面是平整的,考虑离接触线距离很小的位置,它与水平方向夹角为 θ^* (见图 4.8)。接触中均布载荷在水平方向的分量为:

$$\gamma_{sv} \cos \theta_0 - \gamma_{sl} \cos \theta_0 - \gamma_{lv} \cos \theta^* \quad (4.14)$$

为了使边界线保持平衡,平均线性作用力应该等于零:

$$(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \langle \cos \theta_0 \rangle - \gamma_{lv} \cos \theta^* = 0 \quad (4.15)$$

观察方程(4.1),可以得到

$$\cos \theta^* = \langle \cos \theta_0 \rangle \cos \theta \quad (4.16)$$

式(4.16)来自 R. N. Wenzel(1936)。因为 $\langle \cos \theta_0 \rangle$ 始终小于 1,对于亲水表面来说,这个可见的接触角总是大于“实际”接触角;对于憎水表面来说,总是小于“实际”接触角。这个方程也可以从纯粹热力学推论推导出来。

如果粗糙度轮廓的梯度较大,那么液体仍然能保持在粗糙轮廓的峰顶(见图 4.9)。如果表面形状如图 4.9(a)所示,仅当接触角大于 $\pi - \theta_{\max}$ 时,液体能保持在峰顶上,其中 θ_{\max} 是最大表面仰角。如果给液体施加外部压力,液体表面会发生弯曲,陷进粗糙度轮廓的凹坑里,直到达到失稳点,整个表面湿润,但是这会被凹坑里的空气阻碍。如果表面粗糙形状如图 4.9(c)所示,液体接触角小于 $\pi/2$,液体会保持悬挂,不能与表面发生完全接触。

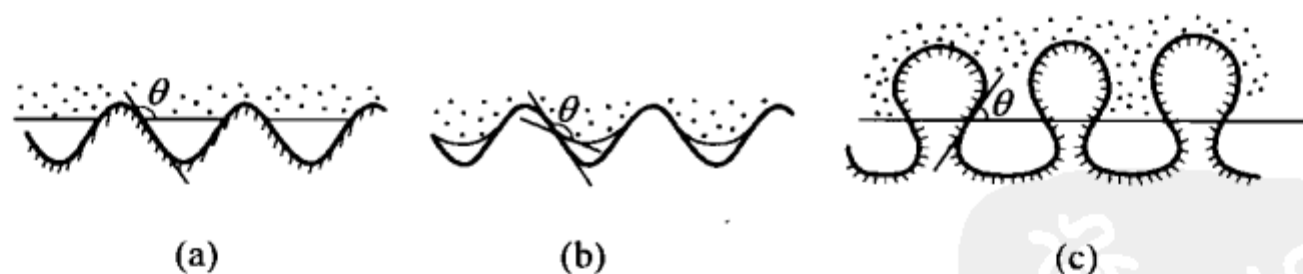


图 4.9 粗糙表面上的液体层

4.7 毛细力和摩擦学

有些情况下,毛细力会推动液体的移动。如果液滴停留在一个曲面上,它的能量会随着曲率增大而增加。因此液滴会被曲率较大的面所排

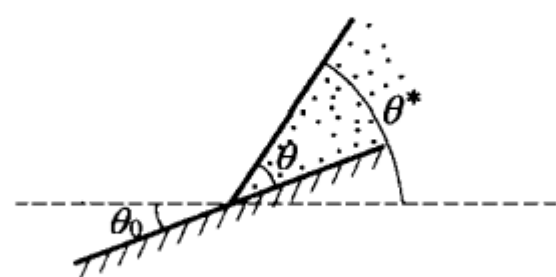


图 4.8 液体表面与倾斜固体表面的接触

挤,尤其是在边缘或尖端时(见图 4.10,也见本章习题 2)。如果液体处于一个宽度变化的毛细管或缝隙中,毛细力导致它沿着缝隙宽度较小的方向,或者毛细管直径较小的方向移动。

这种效应可以将润滑剂保持在适当的位置。在较窄的关节处,力可以大到允许永久润滑,不需要再添加。这样的例子可以在钟表机械装置、测量仪器和电表等仪器中找到。如果能让油到达期望的位置,可以利用这个效应来设计一个关节,以使油被迫向最窄的点移动。

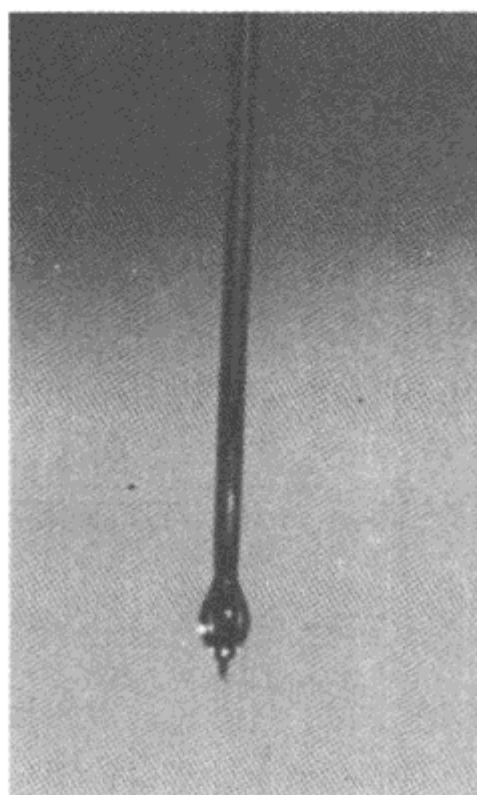


图 4.10 液滴被排挤后
远离尖端

习题

习题 1 计算停留在固体表面的液滴的总表面能。

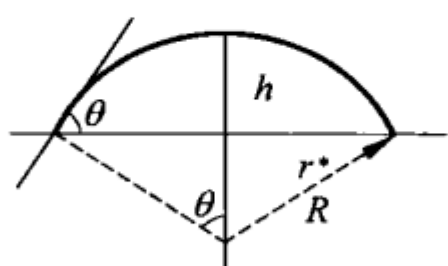


图 4.11 停留在平整固体
表面的液滴

解答: 相关符号见图 4.11, 下式为液滴的表面积 A 、体积 V 、接触角 θ 和“接触半径” r^* 的公式:

$$A = 2\pi R h, \quad V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{R - h}{R}, \quad r^{*2} = 2Rh - h^2$$

表面能之间的关系为:

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}}$$

几何参数 R 和 h 都完全由液滴的外形结构决定, 则有:

$$R^3 = \frac{3V}{\pi(1 - \cos\theta)^2(2 + \cos\theta)}, \quad h = R(1 - \cos\theta)$$

因此, 可以得到所有表面能之和的表达式为:

$$E = (\gamma_{sl} - \gamma_{sv})\pi r^{*2} + \gamma_{lv}A = \frac{3\gamma_{lv}V}{R} = \gamma_{lv}[9V^2\pi(1 - \cos\theta)^2(2 + \cos\theta)]^{1/3}$$

对于恒定的液体表面张力 γ_{lv} , 表面能总和是接触角的单调增长函数。对于非均匀表面, 接触角大小不一样, 液滴会排斥接触角大的区域, 到接触角小的位置。

习题 2 计算停留在轻微弯曲表面的液滴的总表面能(曲率半径为 R_0)。假设接触角为 $\pi/2$ (见图 4.12)。

解答: 当 $\gamma_{sv} = \gamma_{sl}$ 时, 接触角等于 $\pi/2$ 。这种特殊情况下, 表面能减小为 $E = \gamma_{lv} A$ 。从这个几何图形, 可以得到:

$$h = R + \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}},$$

$$h_0 = \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}} + R_0 - \sqrt{R_0^2 + R^2}$$

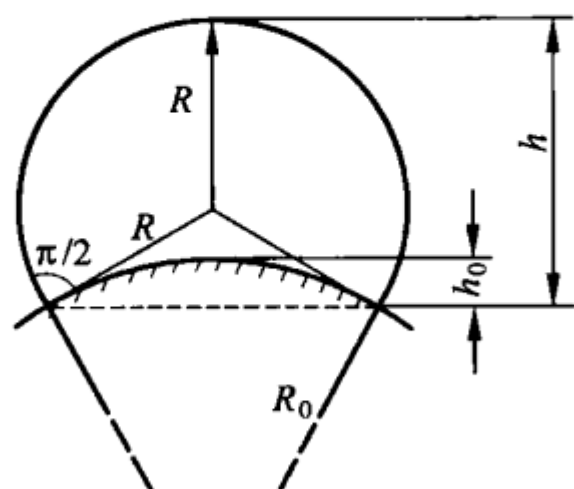


图 4.12 停留在弯曲表面的液滴(接触角等于 $\pi/2$)

体积为 $V_T = \frac{\pi}{3} [h^2(3R - h) - h_0^2(3R_0 - h_0)]$, 液滴表面积为 $A = 2\pi R h$ 。

用一阶曲率 $\kappa = 1/R_0$ 来表达体积和表面积:

$$V_T = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{3\pi R^4}{4} \kappa, \quad A = 2\pi R^2 + 2\pi R^3 \kappa$$

当半径 R 和曲率 κ (从 $\kappa = 0$ 开始) 有微小的变化时, 体积和表面的变化为:

$$dV_T = 2\pi R^2 dR + \frac{3\pi R^4}{4} d\kappa, \quad dA = 4\pi R dR + 2\pi R^3 d\kappa$$

如果体积保持不变, 则 $dR = -\frac{3}{8} R^2 d\kappa$, 表面积的变化为 $dA = \frac{1}{2} \pi R^3 d\kappa$ 。由于曲率的变化, 导致的“额外能量”为:

$$\Delta E \approx \frac{\pi \gamma_{lv} R^3}{2R_0} = \frac{3V_T \gamma_{lv}}{4R_0}$$

因此, 表面能随着基体表面曲率的增大而增加, 液滴排斥曲率较大的位置。

习题 3 计算一个高斯曲率半径为 R_1 和 R_2 的曲面和一个平面之间的毛细力, 假设两个物体表面可完全湿润。

解答: 因为液体内部各点的压力是恒定的, 曲率半径和高度 $h = 2r_0$ 也必须保持恒定。接触面积的形式由下面的约束所决定:

$$\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} = h$$

椭圆的半轴分别等于 $\sqrt{2R_1 h}$ 和 $\sqrt{2R_2 h}$, 面积为 $A = 2\pi h \sqrt{R_1 R_2}$ 。因此毛细力计算为:

$$|F| = \frac{\gamma}{r_0} A = 4\pi \gamma \sqrt{R_1 R_2}$$

习题 4 计算一个球体和一个平面之间的毛细力,接触角为 θ_1 和 θ_2 。

解答: $F = 2\pi R\gamma(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ 。

习题 5 计算液体传过一排平行圆棒所需要的压力(见图 4.13),假设圆棒之间的距离为 L 。

解答: 如果施加在液体的顶部压力为 Δp ,那么会形成一个曲率半径为 R 的均匀曲面(见图 4.13),并有关系:



图 4.13 处于一排圆棒上的液体

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta p}{\gamma_{lv}}$$

同时,圆棒表面与液体表面之间的角度必须等于接触角 θ 。如果压力增大,圆棒之间的液体就会被压进更多,一直达到临界情况。当接触角 $\theta \leq \pi/2$ 时,临界状况为圆棒两侧的液体即将汇合(见图 4.14(a),(b))。当接触角 $\theta > \pi/2$ 时,临界状况更快发生。对于完全排斥的表面,接触角 $\theta = \pi$,临界状况如图 4.14(c)所示。

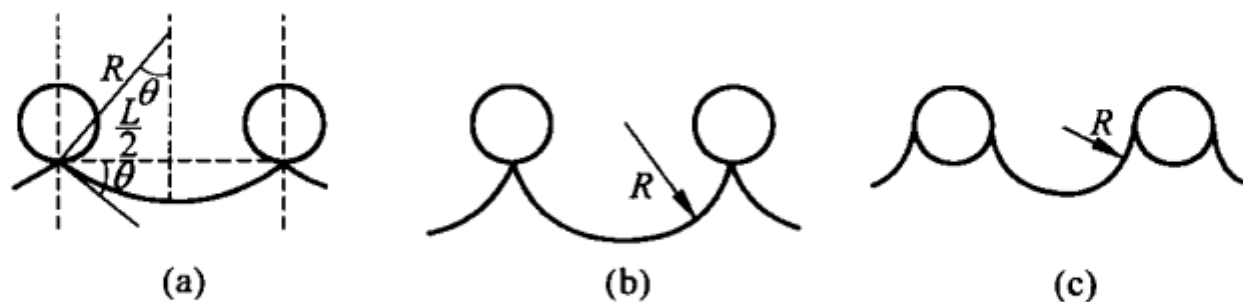


图 4.14

(a) $\theta < \pi/2$ 时的临界形态; (b) $\theta \approx \pi/2$ 时的临界形态; (c) $\theta \approx \pi$ 时的临界形态

对于可湿润表面($\theta < \pi/2$),如图 4.14(a)所示,在临界状态,有 $\frac{1}{R} = \frac{2}{L} \sin\theta$,最大压力为:

$$\Delta p = \frac{2}{L} \gamma_{lv} \sin\theta$$

对于圆棒,当 $\theta = \pi/2$ 时达到最大值,即

$$\Delta p_{\max} = \frac{2}{L} \gamma_{lv}$$

习题 6 一根圆柱销(重量 m , 长度 L)浮在水面上(见图 4.15),计算销在正常未受干扰的水面下的位移和水面能够承受的最大重量。假设水面上

每一点的倾斜都较小。

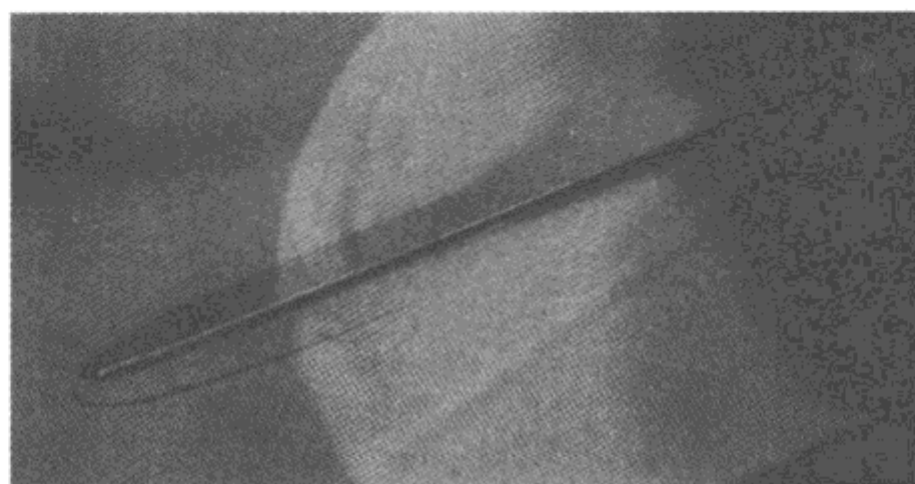


图 4.15 一根销漂浮在水面上

解答：此解答中，将用到图 4.16。在点 (x, z) 处，可用式 (4.10) 或者通过计算液体静压力差，来计算深度为 z 时表面的压力差，即

$$\Delta p = \gamma_{lv}/R = \gamma_{lv} z'' = \rho g z$$

边界条件为： $x \rightarrow \infty$ 时， $z \rightarrow 0$ ，则 $z(x)$ 微分方程的解为：

$$z = A \exp \left[- \left(\frac{\rho g}{\gamma_{lv}} \right)^{1/2} x \right]$$

发生位移的水的体积为：

$$V = 2L \int_0^\infty z(x) dx = 2AL \left(\frac{\gamma_{lv}}{\rho g} \right)^{1/2}$$

物体处于平衡状态时，根据阿基米德原理 $\rho V = m$ ，重力等于浮力，圆柱销下沉的深度为：

$$z(0) = A = \frac{m}{2L} \left(\frac{g}{\rho \gamma_{lv}} \right)^{1/2}$$

在 $x=0$ 处，表面的倾斜角为：

$$\tan \varphi = \frac{mg}{2L\gamma_{lv}}$$

从几何关系上可以很容易看出，接触角 θ 一定不会比 φ 小。表面所能承受的最大重量为：

$$mg = 2L\gamma_{lv} \tan \theta$$

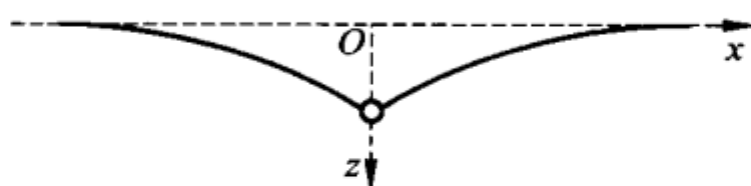
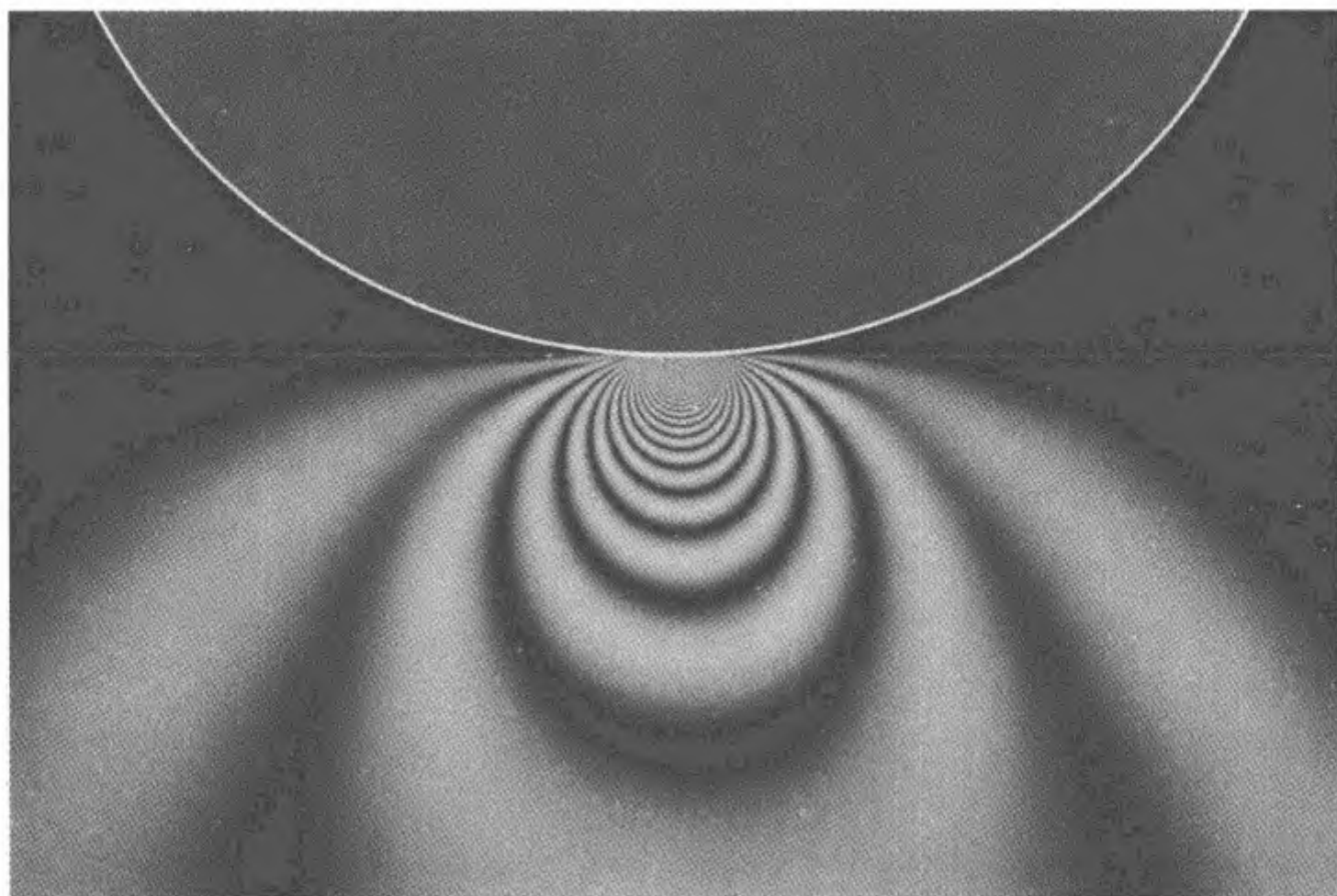


图 4.16 一根圆柱销被水面支撑漂浮

第 5 章

接触问题的精确解法——赫兹接触



本章中将举例说明“近似半空间”框架中接触问题的一种精确解。仔细分析一个刚性球体和一个弹性半空间的经典法向接触问题,该问题经常被用于分析更加复杂的模型。

作为准备步骤,先概述一些弹性力学的结论,将其直接用于接触力学中。讨论当给定应力作用在弹性半空间表面时所产生的变形。弹性体表面在力的作用下,其变形的计算(弹性力学理论的正问题)比求解接触问题要简单,因为后者的应力分布和接触面积均未知。Hertz(无黏着接触)、Johnson、Kendall 和 Roberts(黏着接触)都采用已知的“正问题”的结果来计算得到这些经典的方法,这些“正问题”的结果像积木一样构成了接触问

题解决方法的框架。

5.1 表面力作用下弹性半空间体的变形

考虑一个充满无限大半空间的弹性介质(即其唯一边界是一个无限的平面,见图 5.1)。力作用在自由表面上,介质发生变形。我们将介质的表面看做 xy 平面,填充区域作为 z 轴的正半轴。弹性半空间体变形的解析解可以从弹性力学^①教科书中找到,这里只提到力作用在 z 轴正半轴的原点时的位移公式。

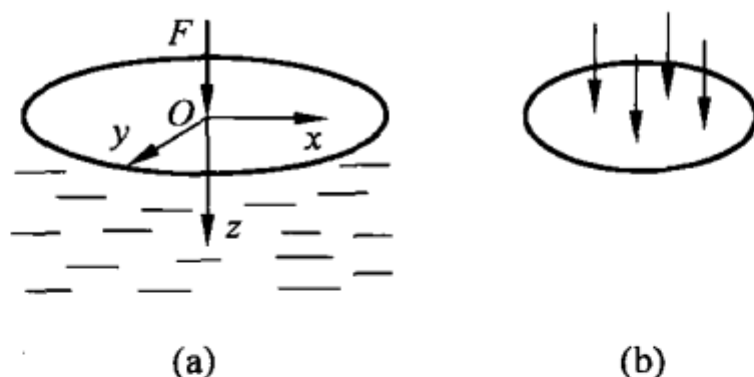


图 5.1

(a) 作用在一个弹性半空间体上的一个力;

(b) 作用在表面上的力的系统

采用下式来计算力的作用下产生的变形:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right] F_z \quad (5.1)$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)} \right] F_z \quad (5.2)$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z \quad (5.3)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

特别是当 $z=0$ 时,自由表面的位移为:

$$u_x = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} F_z \quad (5.4)$$

$$u_y = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} F_z \quad (5.5)$$

^① L. D. Landau, E. M. Lifschitz. Theory of Elasticity (Theoretical Physics, Vol. 7), 3rd edition, 1999, Butterworth-Heinemann, Oxford, 8-9.

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} F_z \quad (5.6)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

如果多个力同时作用(见图 5.1(b)), 位移可通过每个力单独作用的结果相加得到。

继续研究近似半空间体, 假设接触区域和相对邻近的区域中表面梯度远小于 1, 从而在一次近似中, 表面可看做是平坦的。尽管两个表面满足接触约束, 但仍可得到表面力和位移的关系, 正如弹性半空间所表现出来的一样。

对于无摩擦接触问题, 在半空间近似的框架中, 只有 z 轴的位移分量即式(5.6)是我们感兴趣的。尤其是法向压力 $p(x, y)$ 连续分布的情况下, 表面位移可以用下式计算:

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint p(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (5.7)$$

式中

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (5.8)$$

在开始研究真正接触问题之前, 先解决两个预备问题。假设压力分布为 $p = p_0 (1 - r^2/a^2)^n$, 作用在半径为 a 的圆形区域上, 研究压力作用的区域内表面点的垂直位移。

(1) 均匀法向位移($n = -1/2$)

坐标系如图 5.1 所示, 法向应力分布为:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} \quad (5.9)$$

产生的垂直位移为^①:

$$u_z = \frac{\pi p_0 a}{E^*}, \quad r \leq a \quad (5.10)$$

接触区域内所有点的垂直位移都相等。这个结果告诉我们如何产生像假设这样的压力分布: 由刚性圆柱压头在弹性半空间的压痕产生的。作用在该区域的总力等于:

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2 \quad (5.11)$$

接触刚度为力 F 和位移 u_z 的关系:

① 详细的推导见附录。

$$c = 2aE^* \quad (5.12)$$

如果写成这样的形式:

$$c = 2E^* \beta \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (5.13)$$

式中 A 是刚性压头的接触面积, 方程(5.12)对非圆截面也是适用的。常数 β 数量级总是 1:

$$\begin{aligned} \text{圆截面: } \beta &= 1.000 \\ \text{三角形截面: } \beta &= 1.034 \\ \text{矩形截面: } \beta &= 1.012 \end{aligned} \quad (5.14)$$

(2) 赫兹压力分布($n=1/2$)

压力分布:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (5.15)$$

产生的垂直位移为(参见附录):

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2), \quad r \leq a \quad (5.16)$$

总力为:

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (5.17)$$

在压力作用的区域内外, 表面的位移见图 5.2。

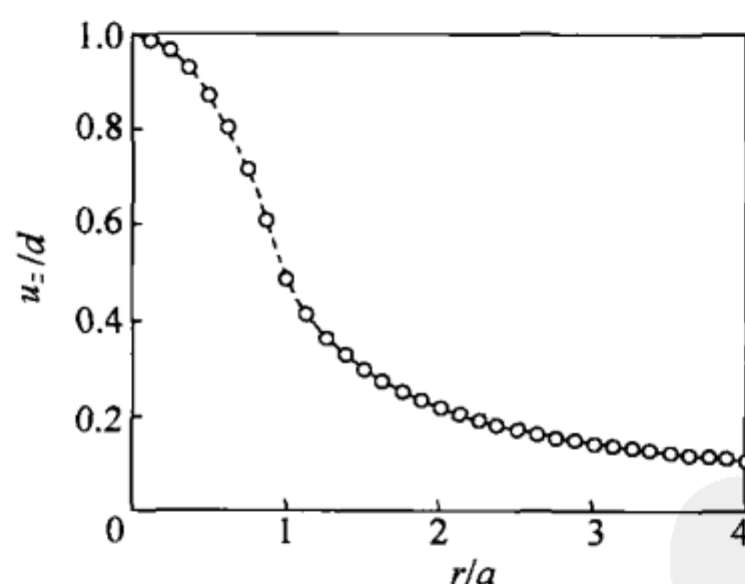


图 5.2 式(5.15)压力分布下产生的表面位移 u_z [$d = u_z(0)$ 为压入深度]

5.2 赫兹接触理论

图 5.3 从原理上说明了一个刚性球体和一个弹性半空间体的接触。在一个最初为平整的表面和一个半径为 R 的刚性球体的接触区域中, 表面上

点的位移等于：

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} \quad (5.18)$$

由式(5.16)可以看到,在式(5.15)给定的压力的作用下,产生的位移呈平方分布:

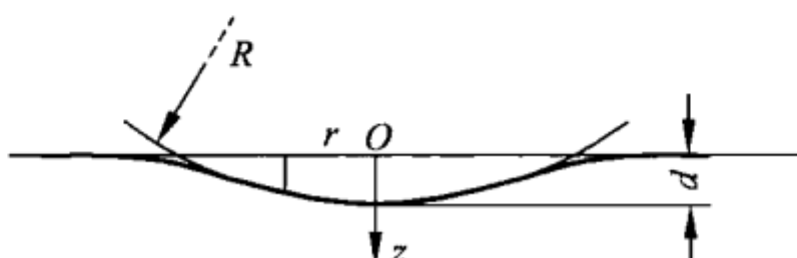


图 5.3 一个刚性球体和一个弹性半空间体的接触

找到式(5.18)中真正产生位移的参数 a 和 p_0 :

$$\frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2R} \quad (5.19)$$

因此,变量 a 和 d 必须满足下面要求:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*}, \quad d = \frac{\pi a p_0}{2E^*} \quad (5.20)$$

它应该符合接触半径

$$a^2 = Rd \quad (5.21)$$

和最大压力

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} \quad (5.22)$$

将式(5.21)和式(5.22)代入式(5.17),可以得到法向力:

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad (5.23)$$

根据式(5.22)和式(5.23),接触区域中心的压力和接触半径与法向力的关系为:

$$p_0 = \left(\frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (5.24)$$

也可以计算弹性变形的势能 U 。因为 $-F = -\partial U / \partial d$, 则势能 U 的表达式为:

$$U = \frac{8}{15} E^* R^{1/2} d^{5/2} \quad (5.25)$$

5.3 两个曲面弹性体之间的接触

赫兹理论的表达式(5.21), (5.22)和(5.23)也可以和下面的一些修正公式一起使用。

(1) 如果两个物体都是弹性的,那么可以采用下面的 E^* 表达式:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (5.26)$$

这里, E_1 和 E_2 分别是两个物体的弹性模量, ν_1 和 ν_2 是泊松比。

(2) 如果两个半径分别为 R_1 和 R_2 的球体接触(见图 5.4(a)),那么方程(5.21), (5.22)和(5.23)中也可用等效半径 R :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.27)$$

如果其中一个半径是负的,方程也是成立的(见图 5.4(b))。如果曲率中心在介质外面,曲率半径就是负的。

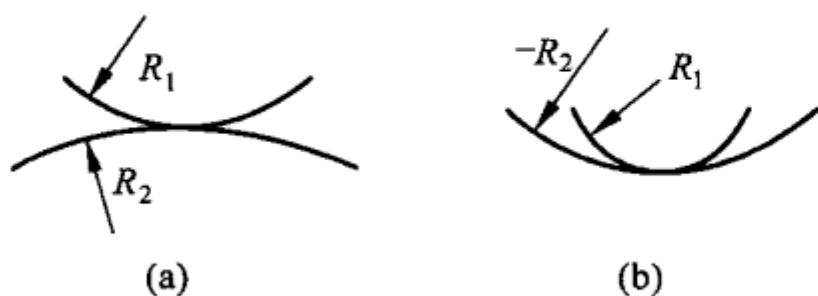


图 5.4 两个曲面物体的接触

(3) 一个弹性半空间体和一个主曲率半径为 R_1 和 R_2 的刚性体之间的接触(见图 5.5(a)),产生的接触面为椭圆。椭圆半轴为:

$$a = \sqrt{R_1 d}, \quad b = \sqrt{R_2 d} \quad (5.28)$$

则接触面积可以计算为:

$$A = \pi ab = \pi \tilde{R} d; \quad (5.29)$$

式中表面的等效高斯曲率半径为

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (5.30)$$

这个半径也可以用其他赫兹关系式中的 R 来代替^①。

① 这种描述并不准确。 R_1/R_2 的比值越接近于 1, 赫兹关系式就越准确。如果 $R_1/R_2 = 10$, 则用于椭圆接触的方程(5.23)误差为 2.5%。

压力分布为：

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (5.31)$$

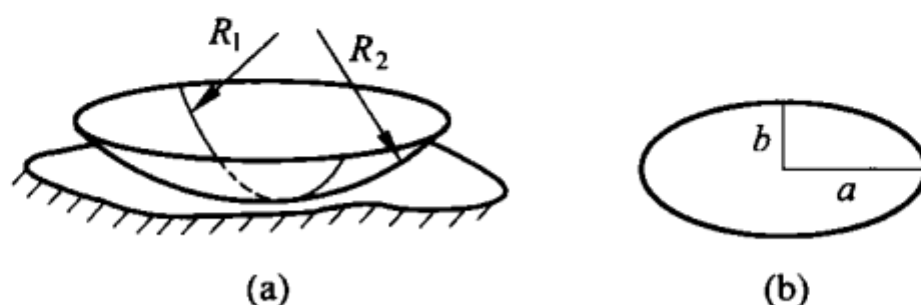


图 5.5 曲面物体(主曲率半径为 R_1 和 R_2)和弹性半空间体的接触

(4) 如果两个半径分别为 R_1 和 R_2 的圆柱体轴垂直接触(见图 5.6(a)), 那么它们在刚刚接触的时刻(未发生变形), 表面之间的距离为:

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} \quad (5.32)$$

这与(3)中主曲率半径为 R_1 和 R_2 的椭圆时的情况完全一致。因此, 如果用下面的等效半径, 赫兹关系仍然成立。

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (5.33)$$

如果两个圆柱半径相等, $R = R_1 = R_2$, 那么该接触问题就相当于半径为 R 的球体和平坦的弹性半空间体的接触。

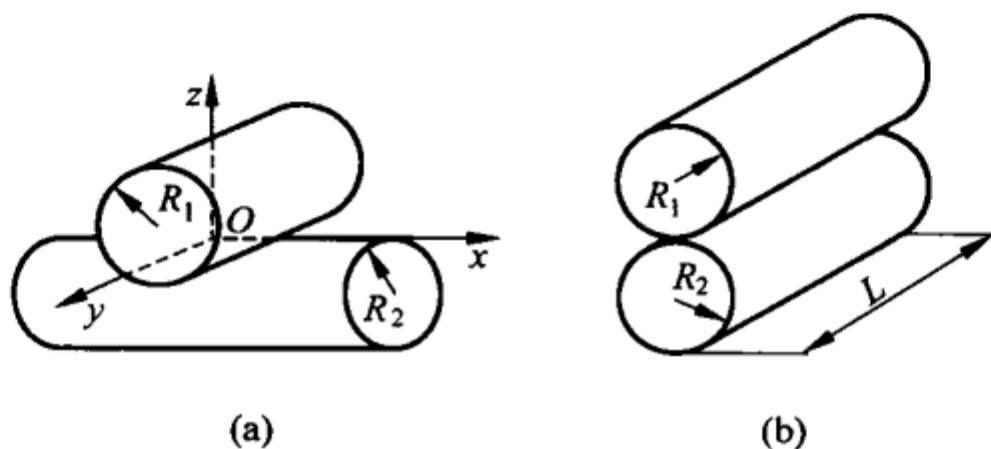


图 5.6

(a) 两个圆柱体交叉接触; (b) 两个圆柱体平行接触

(5) 两个圆柱体平行接触(见图 5.6(b)), 力与压入深度呈线性正比关系(第 2 章中已经讲过):

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d \quad (5.34)$$

有趣的是, 这个关系式中曲率半径没有出现。和两个球体接触一样, 接触半宽为:

$$a = \sqrt{Rd}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.35)$$

最大压力为:

$$p_0 = \frac{E^*}{2} \frac{d}{a} = \frac{E^*}{2} \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{E^* F}{\pi LR} \right)^{1/2} \quad (5.36)$$

5.4 刚性锥头和弹性半空间体的接触

当一个刚性圆锥体压进一个弹性半空间体时(见图 5.7(a)), 压入深度和接触半径的关系为^①:

$$d = \frac{\pi}{2} a \tan \theta \quad (5.37)$$

压力分布的表达式为:

$$p(r) = -\frac{Ed}{\pi a(1-\nu^2)} \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 1} \right) \quad (5.38)$$

应力在锥尖处(接触区域的中心)有一个对数奇点(见图 5.7(b))。总力为:

$$F_N = \frac{2}{\pi} E^* \frac{d^2}{\tan \theta} \quad (5.39)$$

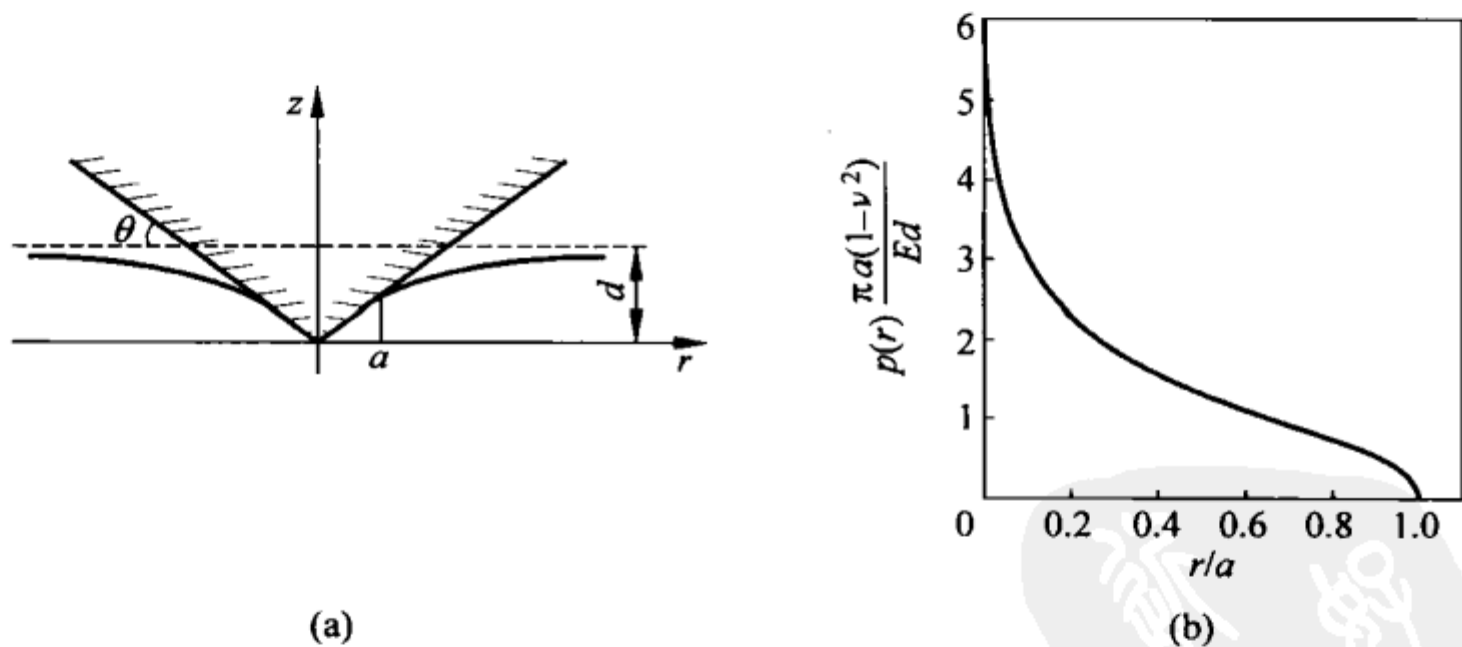


图 5.7

(a) 刚性圆锥压头和弹性半空间体的接触;

(b) 刚性圆锥压头和弹性半空间体法向接触的压力分布

^① I. N. Sneddon. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. Int. J. Eng. Sci., 1965, (3): 47-57.

5.5 赫兹接触的内部应力

力 F 垂直作用在原点,产生的应力为^①:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{x^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right] \quad (5.40)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{y^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{y^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right] \quad (5.41)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{r^5} \quad (5.42)$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{xyz}{r^5} + (1-2\nu) \frac{xy(2r+z)}{r^3 (r+z)^2} \right] \quad (5.43)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{r^5} \quad (5.44)$$

$$\tau_{zx} = \frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{r^5} \quad (5.45)$$

表面在任意法向压力分布 p 的作用下,产生的应力可以通过叠加来计算。 z 轴的法向应力 σ_{zz} 为:

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\frac{3z^3}{2\pi} \iint_{(A)} \frac{p(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{5/2}} dx' dy' \quad (5.46)$$

式中 $\iint_{(A)}$ 是沿压力所作用的区域的积分。

针对式(5.15)中的赫兹压力分布,讨论不同的结论。图 5.8 为 $\nu = 0.33$ 时沿 z 轴的应力。所有的剪切应力都为零;沿 z 轴所有的点,主轴和坐标轴保持一致。对于应力张量的分量,解析解为^②:

$$\sigma_{zz} = -p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (5.47)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p_0 \left[(1+\nu) \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \right] \quad (5.48)$$

此外,最大剪切应力 $\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|$, 见图 5.8。可以看出, $\nu = 0.33$ 时最大剪切应力出现在内部 $z \approx 0.49a$ 的位置。图 5.9 为 xy 平面 von

① H. G. Hahn. Elastizitätstheorie. Teubner, 1985.

② K. L. Johnson. Contact Mechanics(9th printing). Cambridge University Press, 2003.

Mises 等效应力：

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{1/2} \quad (5.49)$$

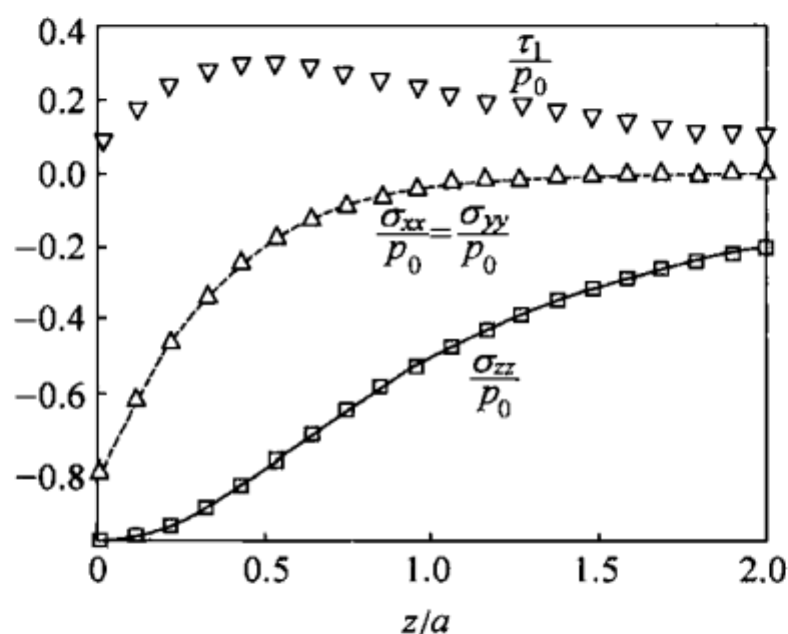


图 5.8 赫兹压力分布中沿 z 轴($x=y=0$)的应力

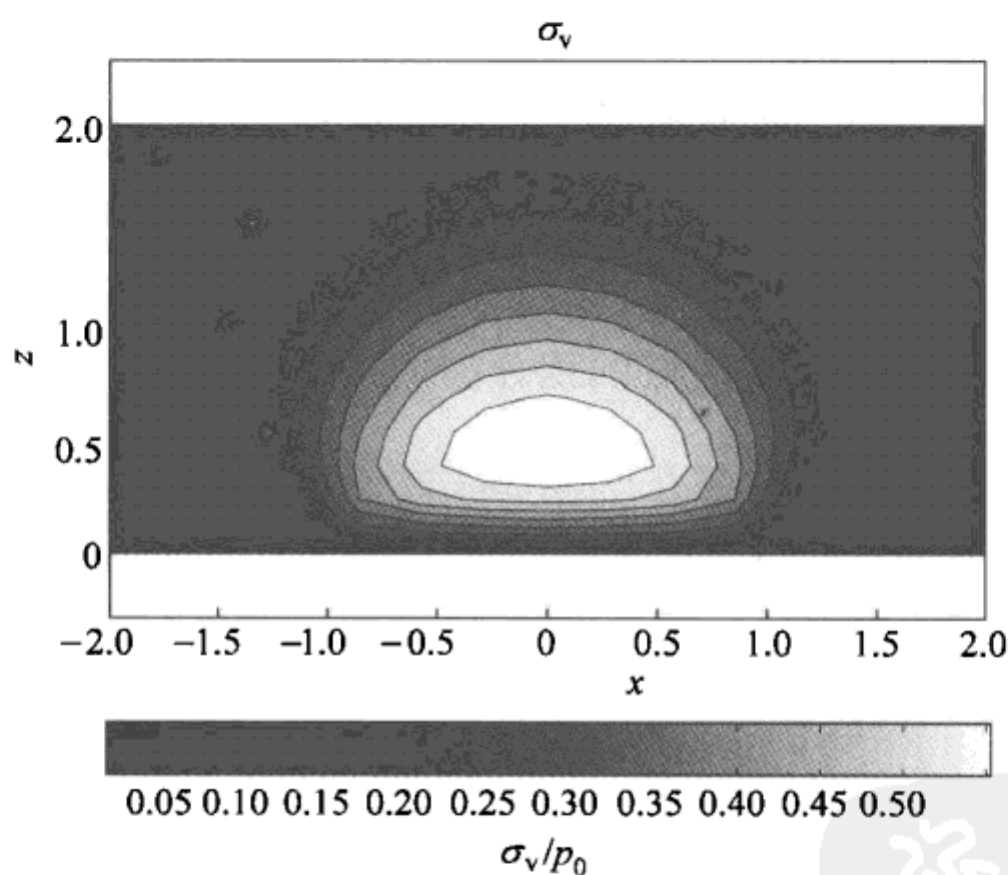


图 5.9 赫兹压力分布中(xz 平面)根据式(5.49)得出的等效应力 σ_v

习题

习题 1 估算轮轨接触的最大压力和接触面积的大小。货运火车每个轮子的最大载荷约为 $F \approx 10^5$ N, 轮子半径为 $R = 0.5$ m。

解答：在一阶近似中，轮轨接触可以看做两个半径粗略相等（为 R ）的圆柱垂直接触。因此相当于一个半径为 R 的弹性球体和一个弹性半空间体的接触。等效弹性模量 $E^* \approx \frac{E}{2(1-\nu^2)} \approx 1.2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。根据式(5.24)，接触区域中心的压力为 $p_0 \approx 1.0 \text{ GPa}$ 。接触半径为 $a \approx 6.8 \text{ mm}$ 。

习题 2 两个相同材料相同半径的圆柱接触，它们的轴线夹角为 $\pi/4$ （见图 5.10）。计算力和压入深度的关系。

解答：假设接触平面为 xy 水平面。（刚刚接触瞬间）第一个圆柱表面和这个平面之间的距离等于 $z_1 = \frac{x^2}{2R}$ ，第二个圆柱的为 $z_2 =$

$-\frac{(x-y)^2}{4R}$ ，则两个表面之间的距离为：

$$h = \frac{x^2}{2R} + \frac{(x-y)^2}{4R} = \frac{1}{R} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \right)$$

用下面的方程计算主曲率，作为这个二次型的特征值

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4R} - \kappa & -\frac{1}{4R} \\ -\frac{1}{4R} & \frac{1}{4R} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - \frac{\kappa}{R} + \frac{1}{8R^2} = 0$$

解出 $\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm 1/\sqrt{2}}{2R}$ 。对应的主曲率半径为 $R_{1,2} = \frac{2R}{1 \pm 1/\sqrt{2}}$ 。得出高斯曲率

半径为 $\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{2}R$ 。因为两个圆柱材料相同，根据式(5.26)， $E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$ 。根据式(5.23)可得到力和压入深度的关系为：

$$F = \frac{2^{7/4}}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} R^{1/2} d^{3/2}$$

习题 3 计算一个弹性球体（半径为 R ）和一个平整的墙面撞击过程中的接触时间（Hertz, 1882）。

解答：将刚刚接触时球心的位置作为原点，假设球心的位移为 x 。根据式(5.25)、 $d=x$ （ d 换为 x ）和式(5.26)中的 E^* ，可以得到系统的势能。在接触的这段时间里，存储的能量为：

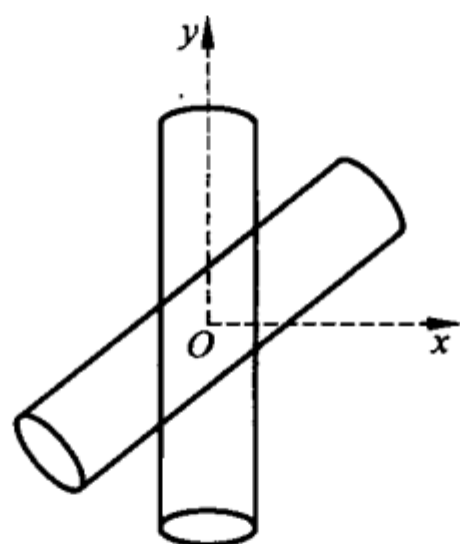


图 5.10 夹角为 $\pi/4$ 的两个相同圆柱之间的接触（从上面看）

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{8}{15} E^* R^{1/2} x^{5/2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

最大位移发生在速度 dx/dt 等于零时, 此时 x_0 为:

$$x_0 = \left(\frac{15}{16} \frac{mv_0^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}$$

接触时间 τ (这个过程中, x 从 0 变化到 x_0 , 然后再回到 0) 为:

$$\tau = \frac{2}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^{5/2}}} = \frac{2x_0}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2.94x_0}{v_0}$$

习题 4 计算一个球体和一面墙撞击中的最大接触压力。

解答: 习题 3 已经计算了最大压入深度 x_0 , 根据式 (5.22) 可以计算出最大压力 p_0 等于:

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{x_0}{R} \right)^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{15}{16} \frac{E^{*4} m v_0^2}{R^3} \right)^{1/5} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi E^{*4} \rho v_0^2 \right)^{1/5}$$

式中 ρ 为材料密度。

例如, 一个刚性球体以 $v_0 = 1$ m/s 的速度撞在一面钢制墙上 (假设纯弹性碰撞), 则有:

$$p_0 \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi (10^{11})^4 (7.8 \times 10^3) \times 1 \right)^{1/5} = 3.2 \times 10^9 \text{ Pa}$$

习题 5 计算一个轴对称弹性体和一个刚性平面接触的接触刚度 $-\delta F_N / \delta d$, 接触面积为 A (见图 5.11)。

解答: 考虑接触区域是半径为 a 的圆形。由于压入深度 δd 的微小增加, 接触面积的变化过程可以分为两步:

首先, 目前的接触区域刚性地移动了 δd (见图 5.12(b)), 因此根据式 (5.12), 法向力变化了 $\delta F_N = 2aE^* \delta d$ 。第二步, 剩余升高的边界区域必须移动相同的距离 (见图 5.12(c))。法向力的增加与面积 $2\pi a \delta a$ 成正比, 与剩余升高的边界区域的高度成正比。因此, 对于第二步, 力的微小变化是高阶的, 可以忽略。刚度为:

$$c = \frac{\delta F_N}{\delta d} = 2aE^*$$

可以看出, 接触刚度仅取决于接触半径, 与对称体的外观没有精确的关

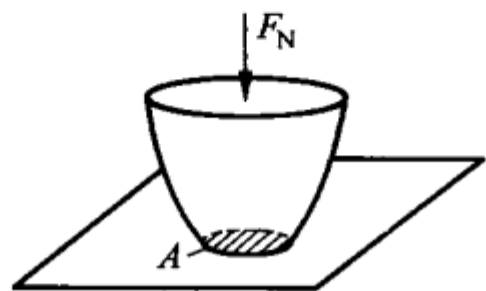


图 5.11 轴对称弹性体和刚性平面的接触

系。对于非对称体,方程(5.13)的刚度也是适用的。

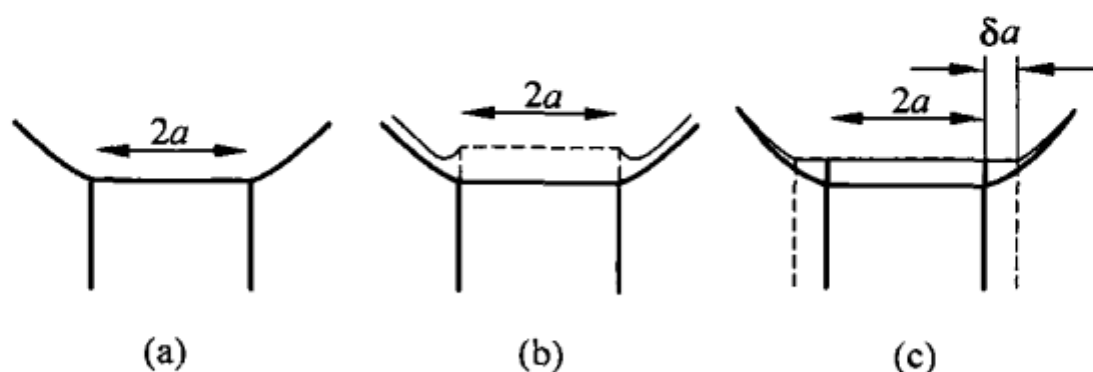


图 5.12 计算刚度

习题 6 均匀分布应力 p_0 作用在半径为 a 的圆形接触区域,计算圆心和边界的位移。

解答: 由式(5.7),可以得到圆形区域中心的位移:

$$u_z(0) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^a p_0 \frac{2\pi r}{r} dr = \frac{2p_0 a}{E^*}$$

边界的位移为

$$u_z(a) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2a} p_0 \frac{2\varphi(r)r}{r} dr = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} 2\varphi(r) dr$$

积分变量 r 的定义见图 5.13。通过 $2\varphi = \pi -$

$2\arcsin\left(\frac{r}{2a}\right)$ 来计算角度 φ 。因此,可以得到:

$$\begin{aligned} u_z(a) &= \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} \left(\pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2a}\right) \right) dr \\ &= \frac{2ap_0}{\pi E^*} \int_0^1 (\pi - 2\arcsin(\xi)) d\xi = \frac{4ap_0}{\pi E^*} \end{aligned}$$

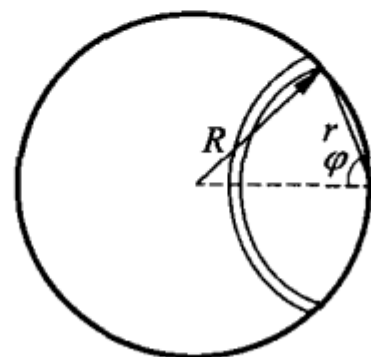
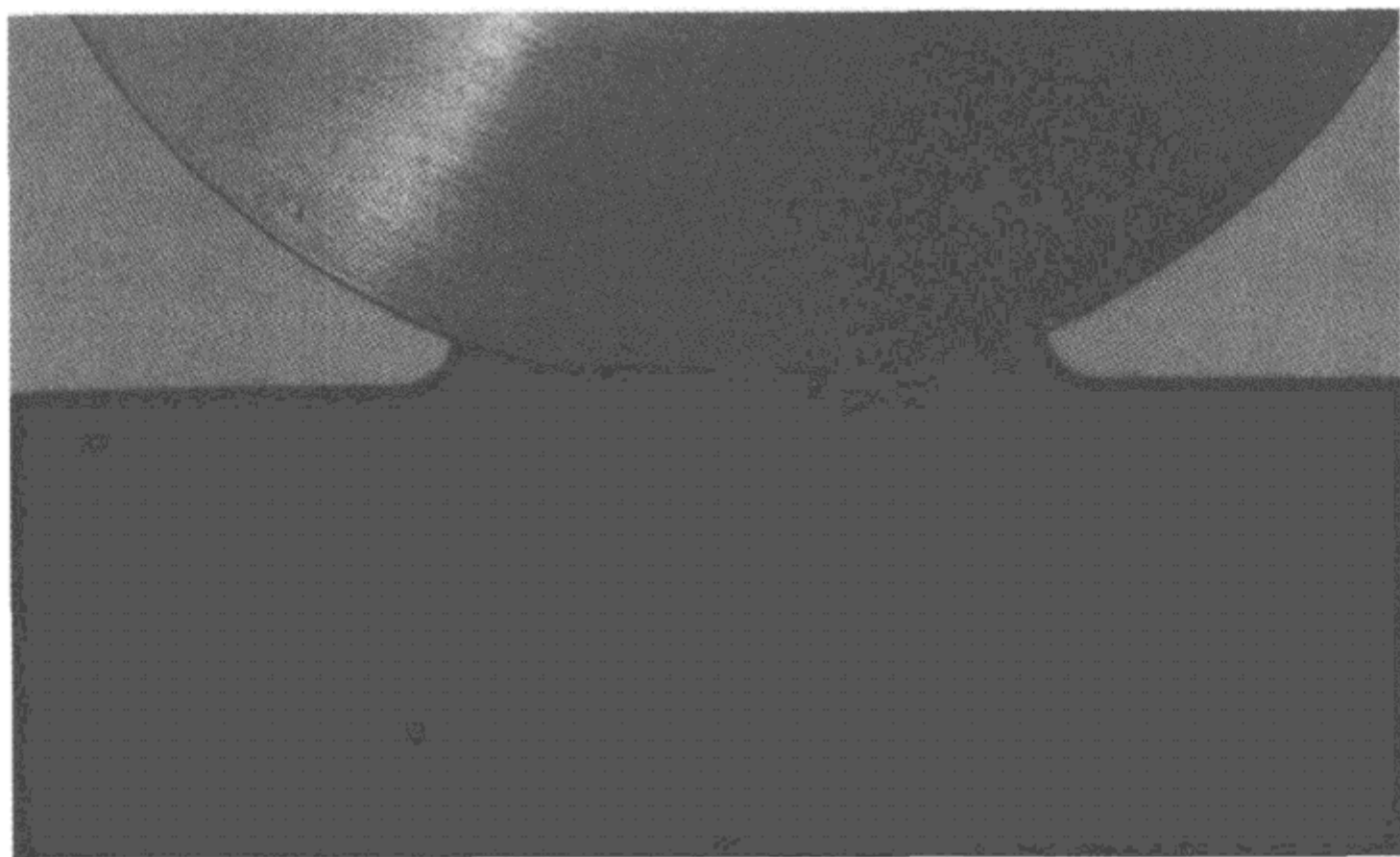


图 5.13 习题 6 的积分计算

第 6 章

接触问题的精确解法——黏着接触



两个表面曲率很小的弹性体的法向接触问题(无黏着)由赫兹于 1882 年解出,50 年后 Bradley 提出了一个刚性球体和一个刚性平面之间黏着法向接触问题的解法,求出的黏着力为 $F_A = 4\pi\gamma R$,其中 γ 为表面能。弹性体之间的黏着接触由 Johnson、Kendall 和 Roberts 于 1971 年解出(称为 JKR 理论),得到的黏着力为 $F_A = 3\pi\gamma R$ 。1975 年,Derjaguin、Müller 和 Toporov 发表了一个可替换的黏着理论,即 DMT 理论。1976 年,经过激烈的讨论后,Tabor 认为 JKR 理论和 DMT 理论均正确,属于一个问题的不同情况。对于绝对刚体,Bradley 的理论有效;对于小刚性球体,DMT 理论有效;对于大柔性球体,JKR 理论有效。这些不同情况的差别很小,JKR 理论对黏着的描述相对较好,甚至覆盖了 DMT 理论范围。这可能是为什么

在描述黏着接触时,JKR 理论更加流行。因此,本章只讨论 Johnson、Kendall 和 Roberts 的 JKR 理论。

黏着接触的经典理论由 Johnson、Kendall 和 Roberts 于 1971 年得出,命名为 JKR 理论。讨论一个半径为 R 的弹性球体和一个刚性平面的接触。两个物体之间总是存在相互吸引力(范德华力),使得弹性球体和光滑平面接触时会形成一个“脖颈”(见图 6.1)。

接触半径定义为 a ,假设压入深度为 d , $a \ll R$,其中 $R-d$ 是从球心到刚性平面的距离。

为了使球体表现为图 6.1(b)的形式,球体表面上所有发生位移的点,在变形后都处于水平刚性平面上。

从图 6.2 可以看出,竖直方向的位移满足下列方程:

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} \quad (6.1)$$

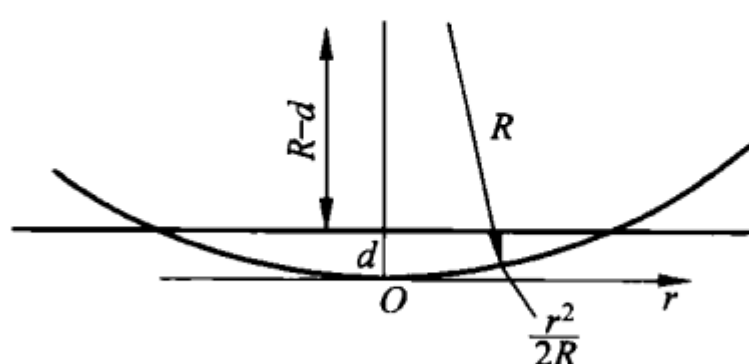
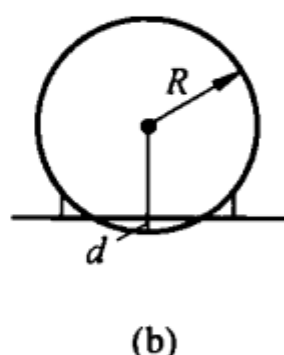
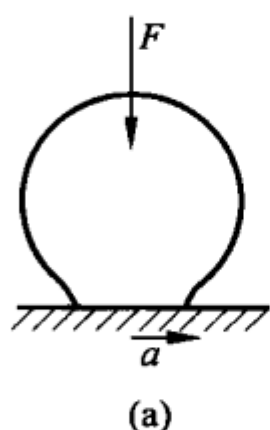


图 6.1 两个物体发生黏着接触时
形成一个“脖颈”

图 6.2 弹性球体和刚性平面的几何接触

根据前面章节的结果可知,压力分布为:

$$p = p_0 (1 - r^2/a^2)^{-1/2} \quad (6.2)$$

产生的竖直位移为:

$$u_z = \frac{\pi}{E^*} p_0 a \quad (6.3)$$

而压力分布为:

$$p = p_0 (1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (6.4)$$

所产生的位移为:

$$u_z = \frac{\pi}{4E^*} p_0 (2a^2 - r^2) \quad (6.5)$$

很明显,这两种压力分布同时作用在接触区域,会产生位移的二次分布,这与式(6.1)的几何结果应该一致。

因此,我们将采用下面的压力分布:

$$p = p_0 (1 - r^2/a^2)^{-1/2} + p_1 (1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (6.6)$$

根据叠加原理,对应的位移为:

$$u_z = \frac{\pi a}{E^*} \left[p_0 + \frac{1}{2} p_1 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) \right] \quad (6.7)$$

令式(6.1)和式(6.7)相等,可以得到:

$$\frac{\pi a}{E^*} \left(p_0 + \frac{p_1}{2} \right) = d, \quad \frac{\pi p_1}{4E^* a} = \frac{1}{2R} \quad (6.8)$$

则有:

$$p_1 = \frac{E^*}{\pi} \frac{2a}{R}, \quad p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right) \quad (6.9)$$

式(6.9)的两个结果包含了3个未知量: p_1 , p_0 和 a (给定压入深度 d)。对于给定的压入深度,为了能确定应变和应力状态,需要增加一个约束。因此,我们采用这个要求:系统的总能量在常数 d 达到最小。

球体的能量由弹性和黏着贡献组成。由于球体的弹性变形,产生的势能可计算为:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_{\text{接触面积}} p(\mathbf{x}) u_z(\mathbf{x}) dx dy \quad (6.10)$$

这个公式对任意线性弹性系统是适用的。将式(6.6)和式(6.1)代入式(6.10)中,可以得到:

$$U_{el} = \pi d \int_0^a r \left[p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} + p_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) dr \quad (6.11)$$

令 $\xi = 1 - r^2/a^2$, 则 $d\xi = -2rdr/a^2$, 可以得到:

$$U_{el} = \frac{\pi da^2}{2} \left[p_0 \left(2 - \frac{2}{3} \frac{a^2}{dR} \right) + p_1 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15} \frac{a^2}{dR} \right) \right] \quad (6.12)$$

根据式(6.9),有:

$$U_{el} = E^* \left(d^2 a - \frac{2}{3} \frac{da^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right) \quad (6.13)$$

总能量为^①:

① 这里 γ_{12} 是相对表面能。

$$U_{\text{tot}} = E^* \left(d^2 a - \frac{2}{3} \frac{da^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right) - \gamma_{12} \pi a^2 \quad (6.14)$$

令系统总能量达到最小,可得到平衡状态时的接触半径,即

$$\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial a} = E^* \left(d^2 - 2 \frac{da^2}{R} + \frac{a^4}{R^2} \right) - 2\gamma_{12} \pi a = E^* \left(d - \frac{a^2}{R} \right)^2 - 2\gamma_{12} \pi a = 0 \quad (6.15)$$

则得到下式:

$$d = \frac{a^2}{R} \pm \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}} \quad (6.16)$$

将这个关系式代入式(6.14),得到关于接触半径的总能量的方程为:

$$U_{\text{tot}} = E^* \left(\frac{8}{15} \frac{a^5}{R^2} + \frac{\gamma_{12} \pi a^2}{E^*} \pm \frac{4}{3} \frac{a^3}{R} \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}} \right) \quad (6.17)$$

式中负号对应能量最低的情况。将能量对球心位移 d 求导,可以得到作用在球体的总作用力:

$$F = - \frac{dU_{\text{tot}}}{dd} = - \frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial d} - \frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial a} \frac{da}{dd} \quad (6.18)$$

这里必须记住,对于给定的 d, a 的值仅对应于 U_{tot} 最小,也就是 $\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial a} = 0$ 。因此,代替式(6.18),采用一个更加简单的方程:

$$F = - \frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial d} = E^* \left(2da - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right) \quad (6.19)$$

将式(6.16)代入这个方程,得到关于力与接触半径的方程:

$$F = E^* \left[2 \left(\frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}} \right) a - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right] = E^* \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{R} - \left(\frac{8\gamma_{12} \pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right] \quad (6.20)$$

力达到负值最大时(对 a 求导为零),则有:

$$a = a_{\text{crit}} = \left(\frac{9}{8} \frac{\gamma_{12} \pi R^2}{E^*} \right)^{1/3} \quad (6.21)$$

因而有:

$$F_A = - \frac{3}{2} \gamma_{12} \pi R \quad (6.22)$$

这个力的绝对值称为黏着力。

对于无量纲变量: $\tilde{F} = F/|F_A|$, $\tilde{a} = a/a_{\text{crit}}$, 式(6.20)可变为下面的形式:

$$\tilde{F} = \tilde{a}^3 - 2\tilde{a}^{3/2} \quad (6.23)$$

其图形见图 6.3(a)。

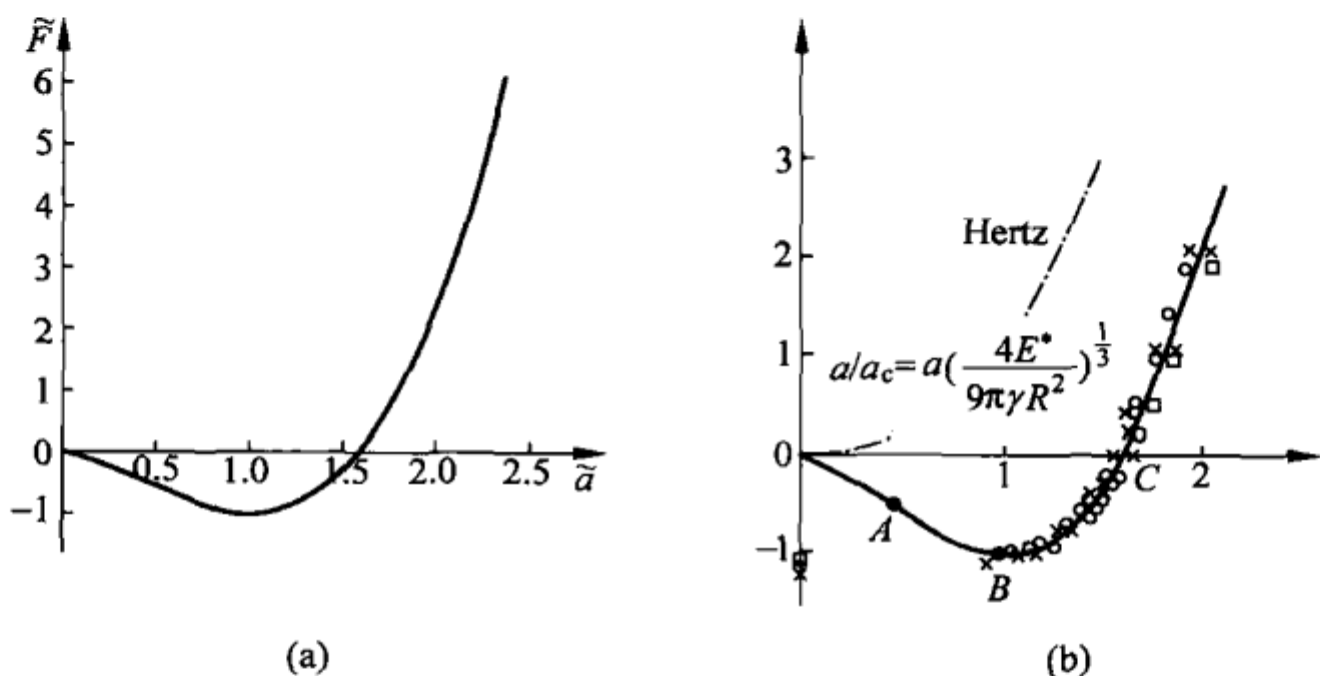


图 6.3

(a) 规范化力与规范化接触半径的关系；(b) Johnson 不同半径的明胶球的实验数据：24.5 mm, 79 mm 和 255 mm (K. L. Johnson, Contact Mechanics, Cambridge University Press, Ninth printing, 2003)

将式(6.21)代入式(6.16), 则临界状态的压入深度为(对应的式(6.16)带负号):

$$d_{\text{crit}} = - \left(\frac{3\pi^2 \gamma_{12}^2 R}{64 E^{*2}} \right)^{1/3} \quad (6.24)$$

引入无量纲压入深度 $\tilde{d} = d/|d_{\text{crit}}|$, 则可以采用无量纲形式重新表达式(6.16), 即

$$\tilde{d} = 3\tilde{a}^2 - 4\tilde{a}^{1/2} \quad (6.25)$$

该式和式(6.23)定义了无量纲法向力与无量纲压入深度的关系, 如图 6.4 所示。

图 6.4 中的实线描述了这个关系。对很多黏着问题, 仅在我们关心的区间, 如果压入深度与 d_{crit} 为同一数量级, 则可以用下式很好地近似表达(见图 6.4 虚线):

$$\tilde{F} \approx -1 + 0.12(\tilde{d} + 1)^{5/3} \quad (6.26)$$

黏着接触区域的压力分布方程见式(6.6)和式(6.9)。要注意的是 p_1 始终是正的, $p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right) = -\sqrt{\frac{2\gamma_{12}E^*}{\pi a}}$ 始终是负的。产生的压力分布见图 6.5。可以看出, 黏着接触中接触边界($x=a$)的应力为无穷大, 而赫

兹接触中接触边界($x=a_H$)的应力等于零。

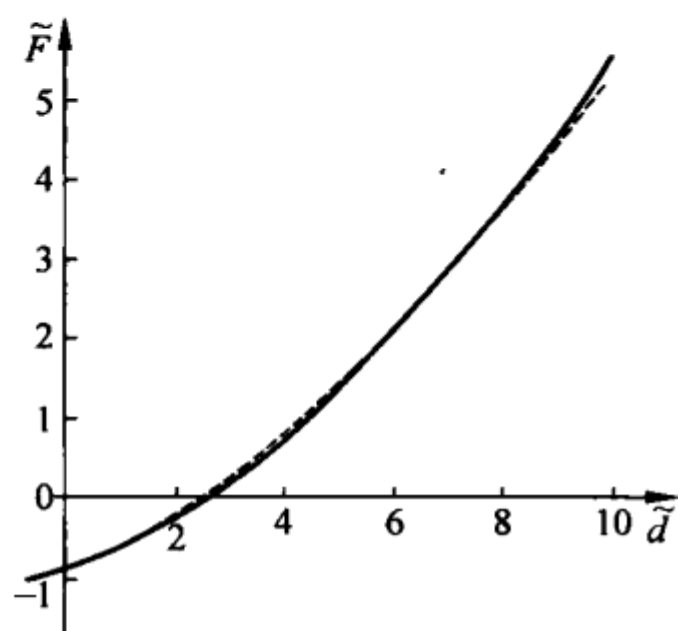


图 6.4 无量纲法向力与无量纲压入深度的关系

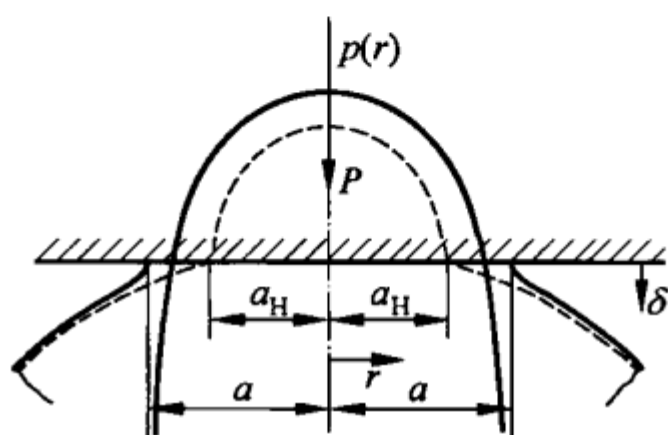


图 6.5 接触物体的形态和黏着接触的压力分布

允许黏着作用力在一个有限的范围,拿掉奇异点,但即使这样,黏着接触区域边界处的应力还是非常大(范德华接触的“理论强度”的数量级),这会增大磨损(这可以与第 8 章“切向接触”中的类似情况比较)。

习题

习题 1 如图 6.6 所示,细长梁为多长时,才能不发生黏着接触? 假设梁和底座的相对表面能为 γ^* , 梁宽(垂直于图示平面)为 a , 厚 t 。

解答: 这种情况下,梁的微分方程为: $d^4w/dx^4=0$ 。边界条件为 $w(0)=0$, $w(s)=h$, $w'(0)=0$, $w'(s)=0$ 。方程的解为:

$$w(x) = \frac{h}{s^3}(3x^2s - 2x^3)$$

弯曲梁的弹性能可用下式来计算:

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} EI w''(x)^2 dx = \frac{6EIh^2}{s^3}$$

其中几何惯性矩为:

$$I = \frac{at^3}{12}$$

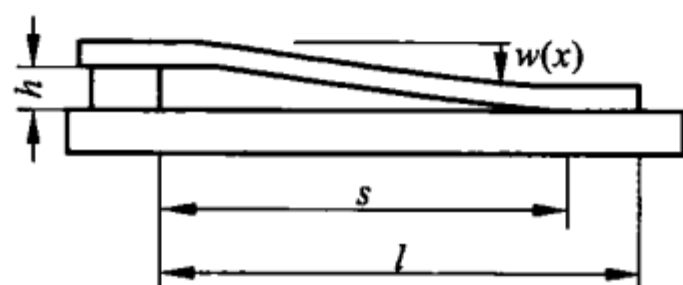


图 6.6 细长弹性梁和底座组成的微机械模型的黏着接触

总能量等于:

$$U = \frac{6Eh^2}{s^3} - \gamma^* (l - s)a$$

令能量达到最小(对 s 求导为零), 则梁长为:

$$s = \left(\frac{3Eh^2 t^3}{2\gamma^*} \right)^{1/4}$$

如果梁的长度小于 s , 它就不会继续“粘”在底座上。

习题 2 外力作用下, 要克服表面张力, 使厚度为 t 的薄板与一个物体分离(见图 6.7), 计算表面张力与薄板形式的关系^①。

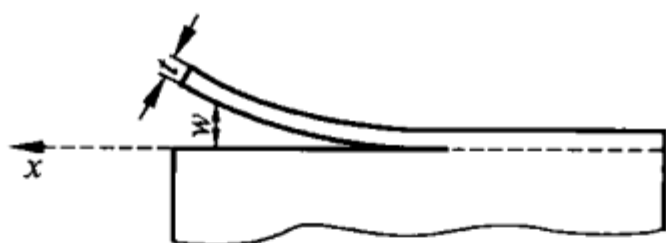


图 6.7 薄板与弹性物体分离

解答: 设分离薄板宽度(垂直于图示平面)为 a , 一条边(分离线)水平固定。微分方程为 $d^4 w/dx^4 = 0$, 边界条件为 $w(0) = h, w(s) = 0, w''(0) = 0, w'(s) = 0$ 。方程的解为:

$$w(x) = \frac{h(x^3 - 3xs^2 + 2s^3)}{2s^3}$$

弹性能等于:

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} D a w''(x)^2 dx = \frac{3Dah^2}{2s^3}$$

其中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 。总能量等于:

$$U = \frac{3Dah^2}{2s^3} + 2\gamma sa$$

令能量达到最小(对 s 求导为零), 则板厚为:

$$s = \frac{\sqrt{6}}{2} D^{1/4} h^{1/2} \gamma^{-1/4}$$

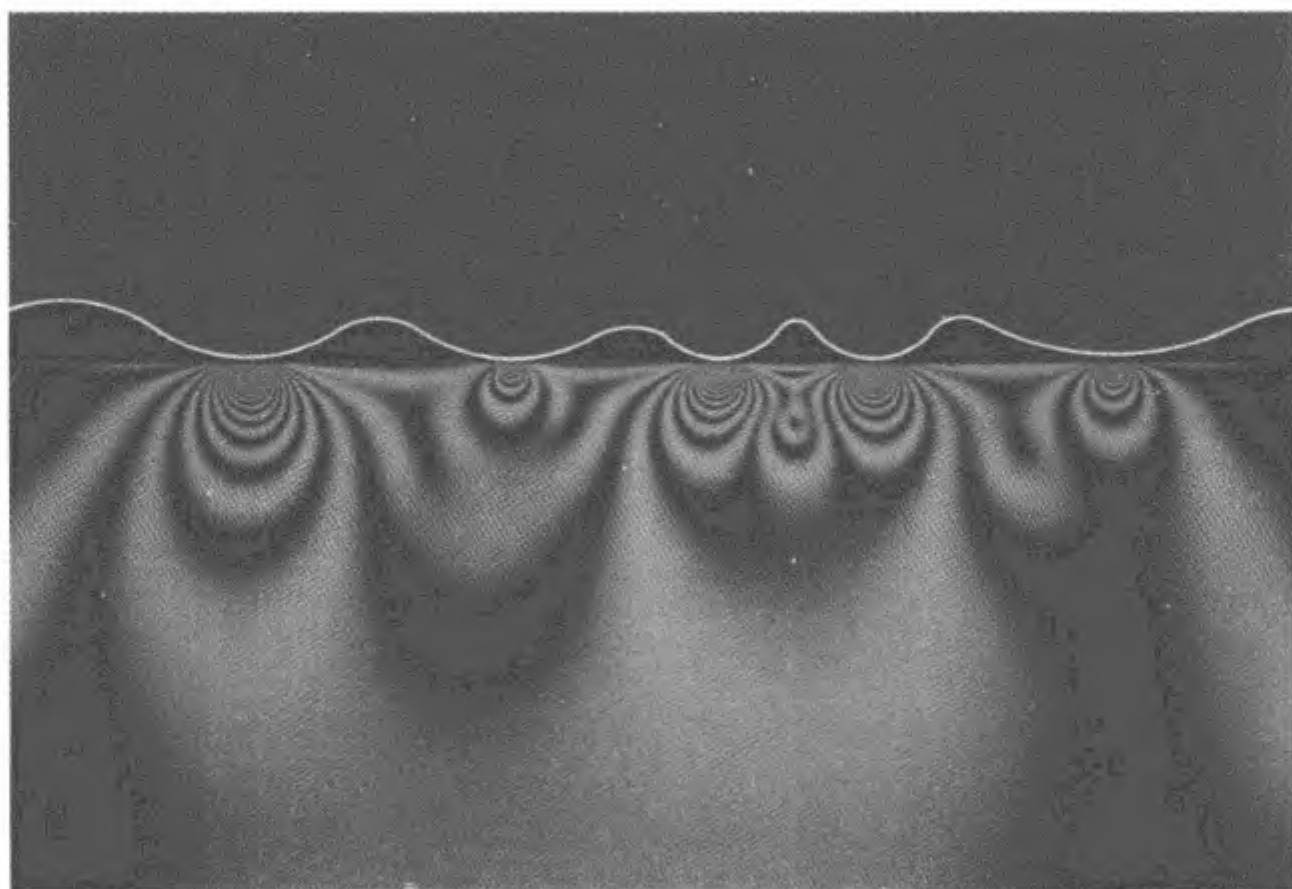
考虑方程 $w''(x) = \frac{3hx}{s^3}$, 得到:

$$\gamma = \frac{D}{4} w''(s)^2$$

^① J. W. Obreimov(1930)在研究测量云母表面张力的方法时检验了这个问题; 这是第一次直接测量固体表面张力。见: J. W. Obreimov. The splitting strength of mica. Proc. Ro. Soc. of London, 1930, 125: 290-297.

第 7 章

粗糙表面之间的接触



表面粗糙度对许多物理现象有很大影响,例如摩擦、磨损、密封、黏着、电接触和热接触等。如果将两个表面粗糙的物体压在一起,则“实际”接触面积远远小于表面名义接触面积。“实际”接触面积的大小决定了许多性质,如物体间的电阻和热阻等。接触面积的大小和最大应力最终决定了磨损粒子的大小,从而决定了磨损率的大小。实际接触面积的大小也是摩擦过程中的重要因素。摩擦力可以想象为接触物体间微观结合处的断裂。根据这个观点,断裂强度及其产生的摩擦力,应该近似正比于“实际”接触面积。本章将研究接触面积、接触长度和表面整体形貌与法向力的关系。

7.1 Greenwood 和 Williamson 模型

首先讨论弹性接触中的表面粗糙度。对于粗糙表面的简单模型,我们可以想象一系列规则的、相同形态的粗糙度,它们有相同的曲率半径和高度^①(见图 7.1)。



图 7.1 粗糙表面的简单模型

这种表面之间的接触问题的求解比较简单:总作用力等于相同“顶尖”力的总和,这些“顶尖”力可以通过赫兹接触理论来计算得到。这种情况下,每个微观接触面积有 $\Delta A \sim F^{2/3}$ 。这不仅与实验矛盾,也与 Amontons 摩擦定理矛盾,根据 Amontons 摩擦定理,摩擦力与法向力近似成正比。因此,我们期望接触面积能随着法向力线性增长。

如果将实际表面看做是随机粗糙的,情况就有所不同。1966 年, J. A. Greenwood 和 J. B. P. Williamson 提出了建立不规则表面模型的最简单方法,称为 GW 模型。Greenwood 和 Williamson 假设所有的粗糙顶尖(“微凸体”)有相同的曲率半径,且顶峰的高度在均值附近随机分布(见图 7.2)。

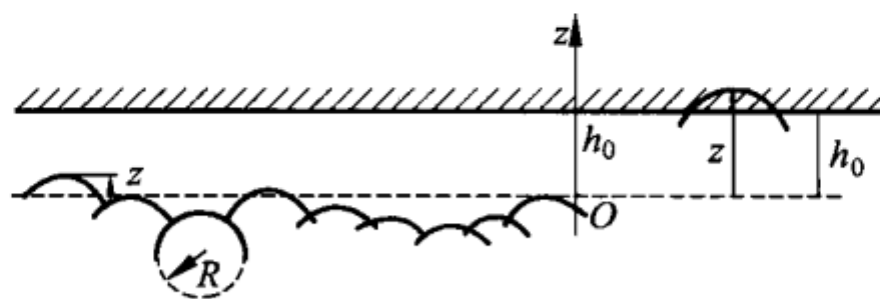


图 7.2 Greenwood 和 Williamson 的随机表面模型

如果接触顶峰之间相互距离足够远,那么它们的变形可以看做是相互独立的。因此,接触问题中,顶峰位置以及表面精确形状并不重要(在假设情况下),只有顶峰的高度分布是重要的。用最大高度 z 的函数 $\Phi(z)$ 来描述微凸体的概率密度。也就是说,一个微凸体在区间 $[z, z+dz]$ 有最大高度的概率,等于 $\Phi(z)dz$ 。如果微凸体总数为 N_0 ,那么在区间 $[z, z+dz]$ 内概率等于 $N_0\Phi(z)dz$ 。

对很多加工表面和自然表面,通常可以假设顶峰高度分布为:

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} \quad (7.1)$$

① 这样的规则表面实际上不能定义为“粗糙”,应该是“规则的”或“纹理的”。

式中 l 是高度分布的均方根, 即

$$l = \sqrt{\langle z^2 \rangle} \quad (7.2)$$

我们称之为粗糙度。

我们来看一个表面为上述描述的统计粗糙度的弹性体和一个刚性平面的接触问题, 假设以均值位置作为 z 轴原点, 二者相距 h_0 (见图 7.2)。假设忽略微凸体之间的弹性相互作用, 所有高度为 $z > h_0$ 的微凸体都与刚性平面接触。高度为 z 的微凸体的压入深度为 $d = z - h_0$ 。根据赫兹理论 (即方程 (5.21)), 对于单个接触, 有 $a^2 = dR$ 。因此, 单个微凸体的接触面积为:

$$\Delta A = \pi a^2 = \pi dR = \pi(z - h_0)R \quad (7.3)$$

单个微凸体的作用力为:

$$\Delta F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} = \frac{4}{3} E R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} \quad (7.4)$$

通过对所有接触微凸体积分, 可以得到总接触数目、总接触面积和总接触法向力 F_N 。积分从高度为 $z = h_0$ 到无穷大, 于是有:

$$N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) dz \quad (7.5)$$

$$A = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz \quad (7.6)$$

$$F_N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz \quad (7.7)$$

总接触面积、总力和总接触数目随着物体间距离的靠近呈指数增长 (h_0 减小), 但它们之间的关系相对不变。例如, 一个微凸体的平均接触面积为:

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{A}{N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz}{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) dz} \quad (7.8)$$

代入无量纲变量 $\xi = z/l$, 并定义 $\xi_0 = h_0/l$, 则有:

$$\langle \Delta A \rangle = \pi R l \left[\frac{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0) d\xi}{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) d\xi} \right] \quad (7.9)$$

从图 7.3 中可以看到, 两表面间相对距离从 $\xi_0 = 0$ 到 5, 接触面积 (对应式 (7.6)) 变化了 7 个数量级, 单个微凸体的平均接触面积 $\langle \Delta A \rangle$ 变化了 3 倍。 $\xi_0 = 0$ 对应一个很大的压力。在该压力下, 实际接触面积约为表面名义接触面积的一半。 $\xi_0 > 4$ 是不可能的, 因为这种情况下最多只有几个点

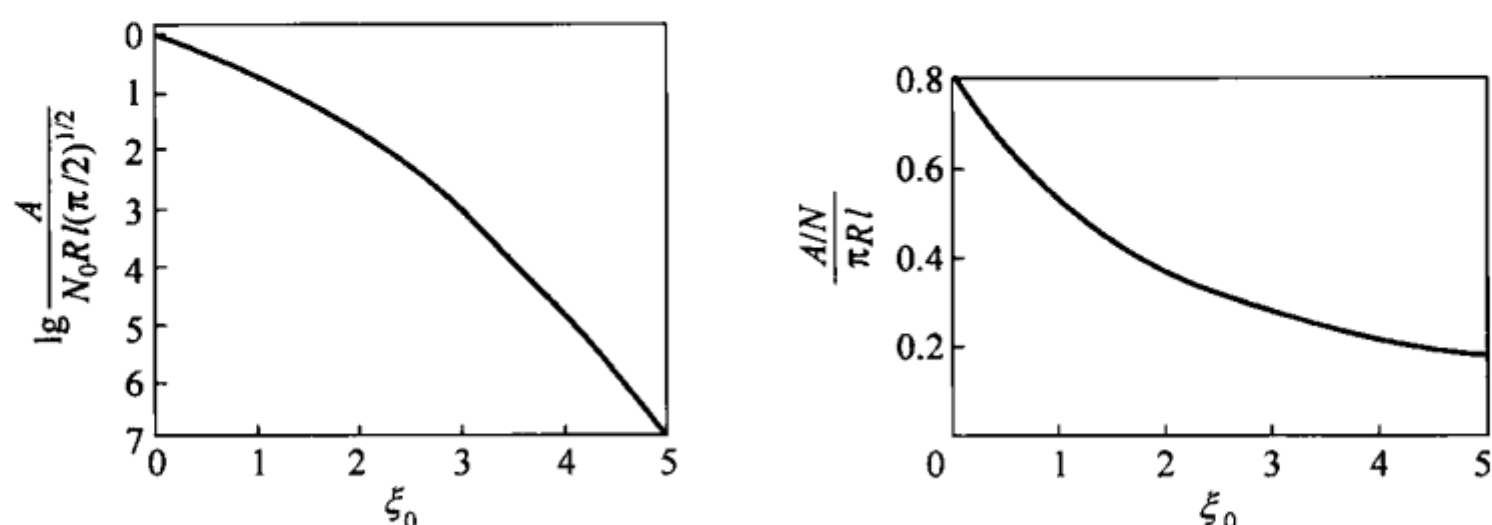


图 7.3 接触面积和单个微接触中平均接触面积与分离变量 ξ_0 的关系

接触。在“典型”范围的平均法向力作用下,实际接触面积约为名义表面接触面积的 10^{-2} 至 10^{-4} , 此时 $\xi_0 = 2.5 \sim 3.5$ 。这个范围内, $\langle \frac{\Delta A}{\pi R l} \rangle$ 的比值在 0.3 左右。一个微凸体的平均面积可以很好地近似计算为:

$$\langle \Delta A \rangle \approx Rl \quad (7.10)$$

实际上,当力在几个数量级内变化时,微观接触面积的平均值基本保持不变(或变化很慢)。

同样,总接触面积与力的比值变化也很慢:

$$\begin{aligned} \frac{A}{F_N} &= \frac{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz}{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz} \\ &= \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi}{4E^*} \frac{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0) d\xi}{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2} d\xi} \end{aligned} \quad (7.11)$$

从图 7.4 中可以看出,在与宏观摩擦问题相关的领域,即 $\xi_0 = 2.5 \sim 3.5$ 时, $\frac{A}{F_N} / \left[\left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi}{4E^*} \right]$ 的比值在 1.4 左右少量变化。

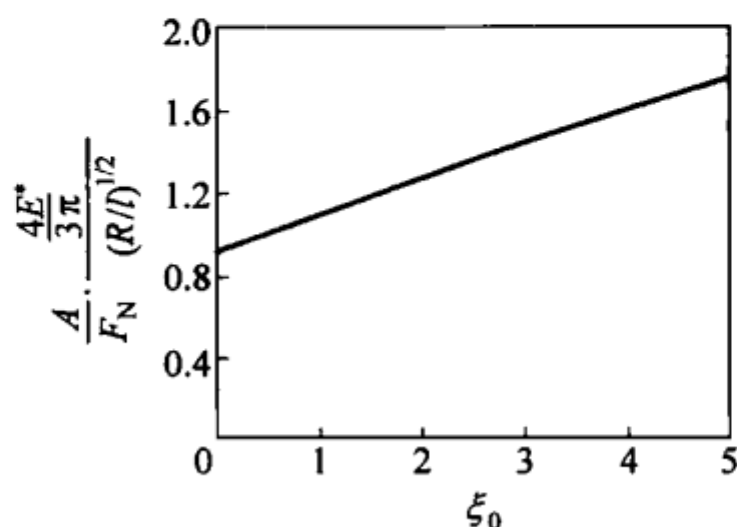
实际接触面积与压力的比值可以很好地近似计算为:

$$\frac{A}{F_N} \approx \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3.3}{E^*} \quad (7.12)$$

实际接触面积正比于法向力,比例系数与 F_N 几乎无关。

将该式倒过来,可以得到平均压力:

$$\langle \sigma \rangle \approx \frac{F_N}{A} \approx 0.3 E^* \left(\frac{l}{R} \right)^{1/2} \quad (7.13)$$

图 7.4 接触面积和压力的比值与分离变量 ξ_0 的关系

现代的接触力学文献中,经常可以发现关于粗糙表面 F_N/A 的其他形式。这里定性地“推导”如下形式。 F_N/A 可以估算为单个微凸体接触的平均值 $\langle \Delta F/\Delta A \rangle$ (乘以一个数量级为 1 的系数),或 $\sqrt{\langle (\Delta F/\Delta A)^2 \rangle}$ (同样乘以一个数量级为 1 的系数)。因为 F_N/A 与压力关系不大(例如表面的收敛),

则在估算 $h_0 = 0$ 时, $\frac{F_N}{A} \sim \sqrt{\langle (\Delta F/\Delta A)^2 \rangle} \sim \sqrt{\left\langle \left(\frac{4E^*}{3\pi} \right)^2 \frac{z}{R} \right\rangle}$ 。微凸体的曲率半径可计算为 $1/R = -z''$ 。因此可以得到:

$$\frac{F_N}{A} \sim \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle -zz'' \rangle} = \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle z'^2 \rangle} \quad (7.14)$$

式中,平均值 $\langle -zz'' \rangle$ 定义为沿足够长距离 L 的积分 $-\frac{1}{L} \int_0^L z(x) z''(x) dx$ 。

分部积分的结果为 $\frac{1}{L} \int_0^L z'(x) z'(x) dx$, 因此有 $\langle z'^2 \rangle$ 。

很明显这是粗略的估计,但是式(7.14)的结果已经由精确数值计算^①所验证。用表面轮廓梯度的平方根的符号 $\nabla z = \sqrt{\langle z'^2 \rangle}$ 来概括式(7.14):

$$\frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z \quad (7.15)$$

式中 κ 是常系数,对于不同的表面略有不同,数值上约等于 2。该式已经通过精确数值计算^②验证,适用于各种粗糙表面,甚至是分形特征表面。

① S. Hyun, L. Pei, J. F. Molinari, et al. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. Phys. Rev. E, 2004, 70: 026117.

② 有趣的一点是 $\kappa \approx 2$ 时,式(7.15)也适用于尖锐的磨材表面(见本章习题 7)。

根据这个结果,实际接触面上的压力近似等于等效模量 E^* 与表面轮廓平均梯度 ∇z 的乘积的一半:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{A} \approx \frac{1}{2} E^* \nabla z \quad (7.16)$$

相似的结论可以通过下面简单的定性估算得到:如果假设一个物体表面轮廓为 $z = \hat{h} \cos kx \cdot \cos ky$, 那么表面轮廓最大时,曲率半径为 $1/R = \hat{h} k^2$, z 的平方根为 $l = \hat{h}/2$, 高度梯度的平方根 $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$, 则有:

$$\left(\frac{l}{R} \right)^{1/2} = \nabla z \quad (7.17)$$

代入式(7.13)中,同样能得到式(7.16)的形式。

最后估算一下实际接触面积 A 为名义接触面积 A_0 的一半时 F_0 的大小:

$$F_0 \approx \frac{A_0}{4} E^* \nabla z \quad (7.18)$$

此时所需的平均压力 $\hat{\sigma}$ 为:

$$\hat{\sigma} \approx \frac{1}{4} E^* \nabla z \quad (7.19)$$

7.2 微凸体的塑性变形

如果式(7.16)中的压力大于材料硬度 σ_0 , 即

$$\Psi = \frac{E^* \nabla z}{\sigma_0} > 2 \quad (7.20)$$

则微粗糙峰度处于完全塑性变形状态。 Ψ 被 Greenwood 和 Williamson 称为塑性指数。当 $\Psi < 2/3$ 时,接触表面表现为纯弹性。因此,微凸体表现为弹性还是塑性与法向力无关。

例如估算两个探针接触时临界梯度的特征值,其中 $E^* \approx 10^{11}$ Pa, $\sigma_0 \approx 10^9$ Pa。可以发现,当 $\nabla z < 2 \times 10^{-2}$ 时,两个探针发生纯弹性变形。对于磨砂面来说,通常轮廓梯度较大,而且几乎实际接触面积的每一处都处于塑性变形状态。相反,对于非常光滑的表面, $\nabla z < 2 \times 10^{-2}$, 发生的是纯弹性变形。

一般而言,梯度 ∇z 与表面的检测分辨率有关,即尺度相关。如果在不同尺度,梯度不同,那么表面只在符合条件 $\nabla z > 2\sigma_0/E^*$ 的尺度发生塑性变形。

一旦接触面的应力大于临界值,这个理论就不再适用了。在塑性阶段,可以认为压应力达到材料硬度时,材料发生变形,通过这点来估算接触面积的大小。估算中假设材料为理想弹塑性,压痕硬度为 σ_0 ,每个微凸体上的压力都近似等于硬度。

根据这点,在塑性区,接触面积与法向力也成正比:

$$A \approx F_N / \sigma_0 \quad (7.21)$$

举一个例子:边长为 10 cm 的钢制立方体,放在一个钢平面上。由参数 $\sigma_0 \approx 10^9$ Pa 和 $F_N \approx 10^2$ N,可以得到 $A = 10^2 / 10^9 \text{ m}^2 = 0.1 \text{ mm}^2$, $A/A_0 = 10^{-5}$ 。对于典型的接触直径 10 μm ,接触点数目为 $N \approx 10^{-7} / (10^{-5})^2 \approx 1000$ 。

7.3 电接触

我们对两个粗糙表面间的实际接触面积很感兴趣,但在有些类型的接触问题中,接触总长度要比接触面积更重要,电接触和热接触就属于这种接触。

在电接触中,电流从一个导电体传到另一个导电体,这是一种近距离接触,通常,将其称为“原子量级”接触。乍一看,接触特性是取决于接触物体的形貌,而且表现出强烈的波动。本节将讨论为什么在很多情况下电接触很可靠,怎么计算产生期望接触所需要的接触力。

用电阻 R 来描述一个导电元件, $\Lambda = 1/R$ 为电导率。截面积为 A , 长度为 L 的杆件的电阻为 $R = \rho L / A$, 其中 ρ 为材料的电阻率。电子工程中,串联中电阻相加,并联中电导率相加。

如果两个电阻率为 ρ 的宽广物体在一个半径为 a 的颈缩点理想接触(见图 7.5),那么电阻主要由接触面积的大小来决定。我们称这个量为集中电阻 R_c ,用下式来计算^①:

$$\frac{1}{R_c} = \Lambda = \frac{2a}{\rho} \quad (7.22)$$

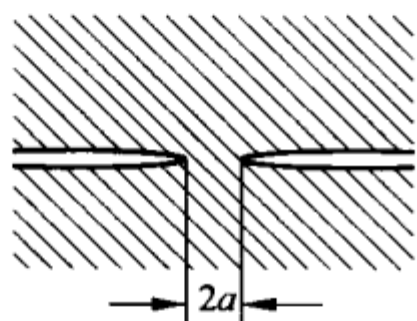


图 7.5 两个导电半空间的接触

① 这个结果已经由 J. C. Maxwell 推导出来。J. C. Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford Univ. Press, 1891.

如果存在很多微接触体,它们分开的距离远远大于自身的直径 $2a_i$,那么将所有接触面的电导率加起来。总电导率可以通过所有微接触体的接触直径的总和来计算:

$$\Lambda_{\text{tot}} = \frac{\sum 2a_i}{\rho} = \frac{L}{\rho} \quad (7.23)$$

这里,直径的总和定义为 L :

$$L = \sum 2a_i \quad (7.24)$$

为了简单起见,我们称之为接触长度。为计算该接触长度,采用本章开始时的说明,再次考虑图 7.2 的系统。微凸体接触的半径为:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta A}{\pi}} = \sqrt{R(z - h_0)} \quad (7.25)$$

与式(7.6)相似,接触长度计算为:

$$L = \sum 2a_i = \int_{h_0}^{\infty} 2N_0 \Phi(z) \sqrt{R(z - h_0)} dz \quad (7.26)$$

接触长度和法向力的比值等于:

$$\begin{aligned} \frac{L}{F_N} &= \frac{3}{2E^*} \frac{\int_{h_0}^{\infty} \Phi(z) (z - h_0)^{1/2} dz}{\int_{h_0}^{\infty} \Phi(z) (z - h_0)^{3/2} dz} \\ &= \frac{3}{2E^* l} \left[\frac{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0)^{1/2} d\xi}{\int_{\xi_0}^{\infty} \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2} d\xi} \right] \end{aligned} \quad (7.27)$$

$\frac{L}{F_N} \cdot \frac{2E^* l}{3}$ 与变量 ξ_0 的关系见图 7.6。

在“典型接触情况”的相关领域, $\xi_0 = 2.5 \sim 3.5$,这种关系在 2.5 左右轻微变化。

因此,接触长度近似为:

$$\frac{L}{F_N} \approx \frac{3.7}{E^* l} \quad (7.28)$$

接触长度与法向力成正比,比例系数为弱对数系数。

根据式(7.23),电导率为:

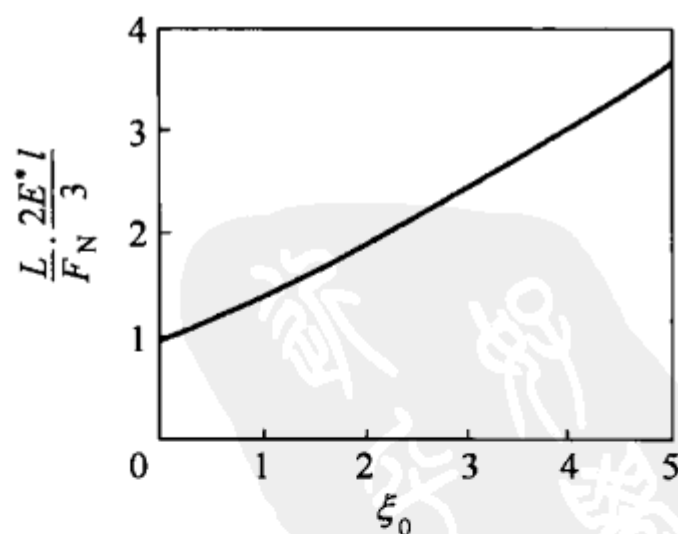


图 7.6 接触长度和法向力的比值系数与分离变量 ξ_0 的关系

$$\Lambda_{\text{tot}} \approx \frac{3.7}{E^* \rho l} F_N \quad (7.29)$$

与摩擦力一样,电导率与法向力成正比,与名义接触面积无关。这个方程中,既没有顶尖曲率半径,也没有表面轮廓梯度。因此,电导率仅仅取决于粗糙表面的高度分布,与表面的具体形状无关。

到现在为止,我们一直假设单个接触体很小,而且相互距离足够远,可以看做相互独立。一旦接触长度 L 达到接触物体的直径 D ,电导率就不再增加。当接触长度与物体的线性尺寸达到相同数量级时,电导率就达到了饱和,即

$$L \approx \frac{3.7}{E^* l} F_N \approx D \quad (7.30)$$

所需力为:

$$F_{N,c} \approx \frac{DE^* l}{3.7} \quad (7.31)$$

将这个力与式(7.18)的结果比较,式(7.18)中表面粗糙度被“压”到粗糙度高度的一半: $F_0 \approx \frac{D^2}{4} E^* \nabla z$,这两个力的比值为:

$$\frac{F_{N,c}}{F_0} \approx \frac{4E^* l}{3.7DE^* \nabla z} \approx \frac{l}{D \nabla z} \quad (7.32)$$

对于线性尺寸 $D > l/\nabla z$ 的导体,理想的电接触比理想的“材料接触”要快得多。多数尺寸大于 0.1 mm 的接触体都是这种情况。

7.4 热接触

圆形接触的热导率和机械刚度也正比于接触半径。上面阐述的电接触理论可以直接转移到这两个量。

热抗性是电路中衡量半导体或其他元件散热系统的最重要的特性,定义为 $R_T = \Delta T / \dot{Q}$,其中 ΔT 是元件两端的温度差, \dot{Q} 是每秒钟通过元件的热量。热导率定义为 $\Lambda_T = 1/R_T$ 。长度为 L ,横截面积为 A 的杆件的热阻等于 $R_T = \frac{L}{A\lambda}$,其中 λ 是热传导系数。与电接触很相似,只是用 $1/\lambda$ 代替了电阻系数 ρ 。同式(7.29)一样,可以很快得到:

$$\Lambda_T \approx \frac{3.7\lambda}{E^* l} F_N \quad (7.33)$$

即粗糙接触的热导率与压紧力成正比。

7.5 接触机械刚度

如果一个弹性体和一个刚性体接触,接触面为半径 a 的圆面,那么对于垂直于表面的运动,接触刚度为 $c_{\perp} = 2aE^*$; 平行于表面的运动为 $c_{\parallel} = \frac{8Ga}{2-\nu}$, 其中 G 为剪切模量(见第8章)。两种刚度都与接触直径成正比。对于很多相互独立的接触面,刚度可以相加:

$$c_{\perp, \text{tot}} = E^* \sum 2a_i = E^* L \quad (7.34)$$

$$c_{\parallel, \text{tot}} = \frac{4G}{2-\nu} \sum 2a_i = \frac{4GL}{2-\nu} \quad (7.35)$$

用式(7.28)可以得到粗糙接触的法向和横向刚度:

$$c_{\perp, \text{tot}} = 3.7 \frac{F_N}{l} \quad (7.36)$$

$$c_{\parallel, \text{tot}} = \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)} \frac{3.7}{l} F_N \approx 3 \frac{F_N}{l} \quad (7.37)$$

7.6 密封

工程中密封件的任务是使物体从一个空间向另一个空间传递过程中的损失最小化,或者阻止损失。密封件中,最大的群体就是接触密封,密封接触中密封元件被挤压在一起(见图7.7)。

因为接触表面无时无刻地存在粗糙度,接触表面必须用某一最小压力压在一起,使得接触“密封”,见图7.8。对于小的压紧力,表面实际接触面积很小,液体或气体会从这些地方周边泄露出来。

随着压紧力增加,接触面变大,直到某临界作用力下形成一个连续簇,从而隔断所有可能通过接触面的路径。

通常,当表面粗糙度被近似“挤压”一半时,达到压入极限,因此根据式(7.19)的数量级,所需应力为:

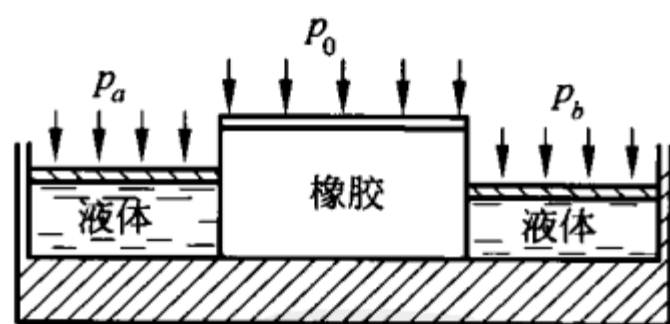


图 7.7 密封件工作原理图

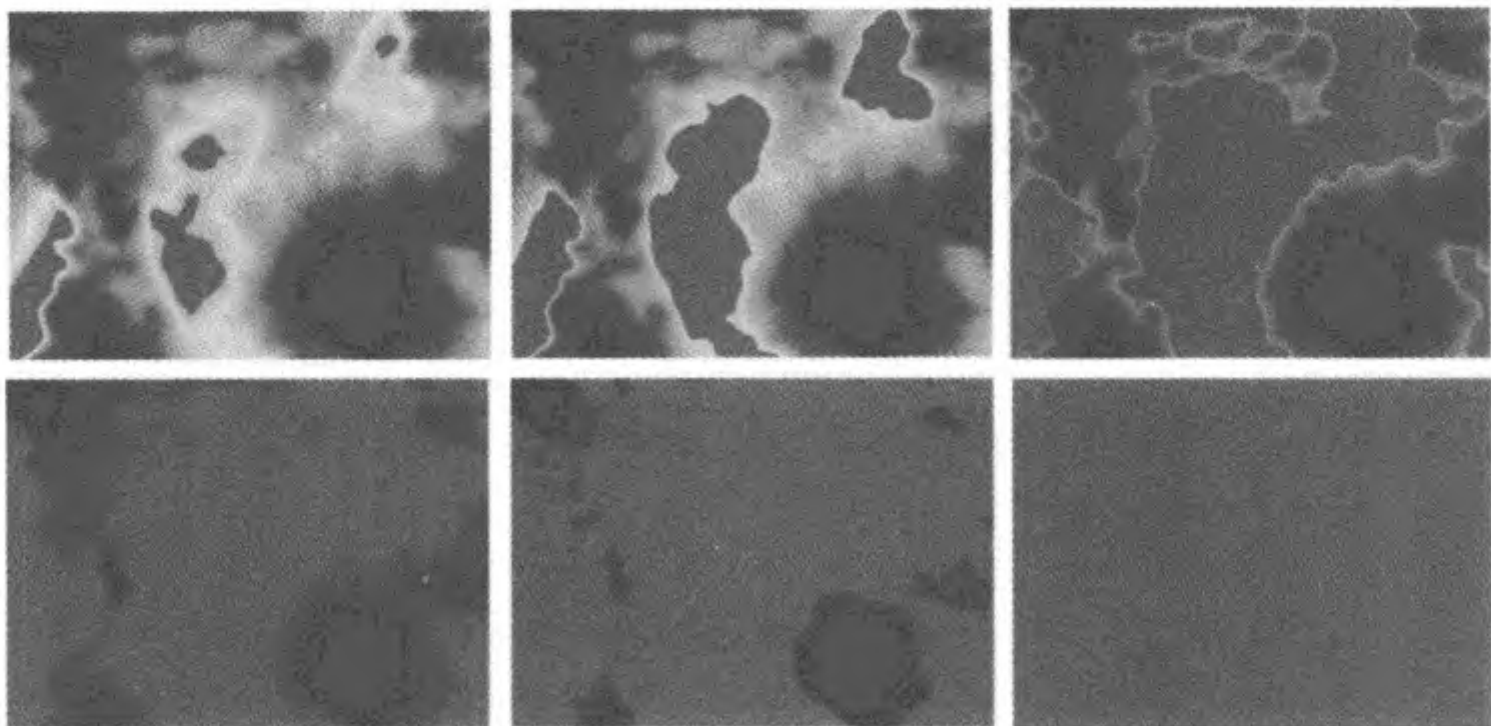


图 7.8 不同压紧力下的接触面积(若接触面形成连续簇,则接触密封)

$$\sigma_{\text{sealed}} \approx \frac{1}{4} E^* \nabla z \quad (7.38)$$

需要注意的是, ∇z 以及应力是与尺度相关的,就是说当用低分辨率测量表面粗糙度时,接触看起来是密封的,当更近检测时(高分辨率),仍然存在泄漏路径。更精确的研究表明,在达到式(7.38)“宏观”临界压紧力后,材料通过密封件泄漏的速度不会消失,而会随着压紧力的进一步增大呈指数减小(粗略为压紧力增大一个数量级,速度变化几个数量级)。

7.7 粗糙度和黏着

粗糙会严重降低黏着。第 6 章介绍了“负临界压入深度” $d_{\text{crit}} = -\left(\frac{3\pi^2 \gamma^2 R}{16E^{*2}}\right)^{1/3}$ 。直观上可以很清楚地看到,粗糙表面的黏着行为可以用 $|d_{\text{crit}}|/l$ 来描述。如果 $|d_{\text{crit}}| \gg l$, 则有:

$$\left(\frac{3\pi^2 \gamma^2 R}{16E^{*2}}\right)^{1/3} \gg l \quad (7.39)$$

粗糙度就不重要了。将近似值表达式(7.17)考虑进去,这个方程也可以写成:

$$\frac{3^{1/2} \pi \gamma}{4E^*} \gg l \nabla z \quad (7.40)$$

相反的情况下,黏着力几乎完全消失。数值仿真表明, $l \nabla z$ 存在一个临界值,在此临界值宏观黏着力为零,即

$$[l \nabla z]_{\text{crit}} = \gamma \frac{\gamma}{E^*} \quad (7.41)$$

其中 γ 为数量级为 1 的常数。

习题

习题 1 计算在两铜盘之间建立一个电阻为 $R=0.1 \text{ m}\Omega$ 的电接触所需的压紧力。铜盘粗糙度 $l=1 \text{ }\mu\text{m}$ 。

解答：铜的弹性模量约为 $E \approx 10^{11} \text{ Pa}$ ，泊松比为 $\nu \approx 0.33$ ，电阻系数为 $\rho \approx 1.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 。可计算得到等效弹性模量 E^* 为：

$$E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \approx \frac{10^{11}}{2(1-0.1)} \approx 0.56 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

将式(7.29)写成 $\frac{1}{R} = \frac{3.7}{E^* \rho l} F_N$ ，则有：

$$F_N = \frac{E^* \rho l}{3.7 R} \approx \frac{0.56 \times 10^{11} \times 1.8 \times 10^{-8} \times 10^{-6}}{3.7 \times 0.1 \times 10^{-3}} \approx 2.7 \text{ N}$$

习题 2 计算在一个弹性体和一个波形面之间建立一个理想接触所需的压力。波形面的形式为 $z = \hat{h} \cos(kx)$ 。

解答：如果没有外力作用，表面是黏在一起的，那么作用在表面的法向力应该为：

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$$

该结果可参见第3章习题1。由于线性关系，施加均匀法向应力 $-\sigma_0$ 会产生下面的法向应力：

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx - \sigma_0$$

如果处处 $\sigma_{xx} < 0$ ，也就是：

$$\sigma_0 > \frac{1}{2} E^* \hat{h} k$$

则同样也可以通过无黏着、纯压紧来实现。

这个例子中，要注意 $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$ ，所以方程也可以写成 $\sigma_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \nabla z$ (与式(7.38)的应力比较，那个需要建立密封接触)。

习题 3 计算在一个弹性波形面和一个刚性平面之间建立一个理想接触所需的压力。波形面的形式为 $z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky)$ (见图 7.9)。

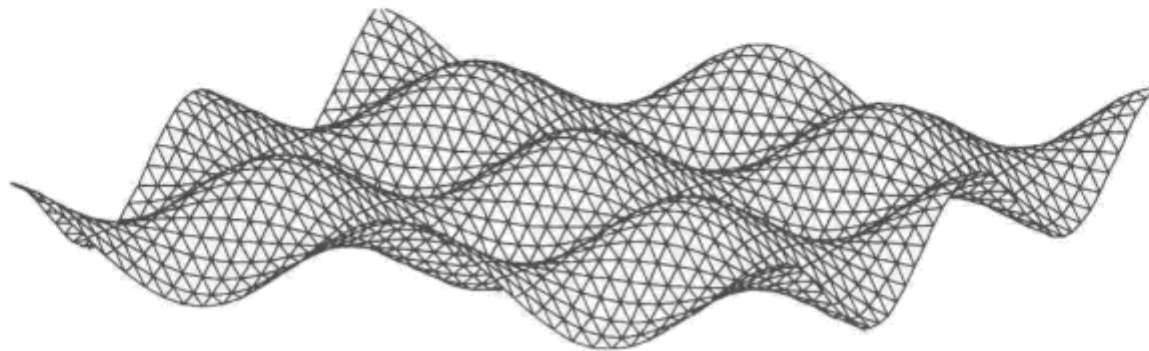


图 7.9 二维弹性体波形面

解答：从第 3 章习题 1 中可以发现，表面位移 $u_z = \hat{h} \cos kx$ 产生的法向应力分布为 $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$ 。这个结论也可以用独立坐标系的形式来表达：余弦形表面变形 $u_z(\mathbf{r})$ (其中 \mathbf{r} 是二维向量) 产生的应力分布为 $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* |\mathbf{k}| u_z(\mathbf{r})$ 。这个习题中的波形可以用两个余弦函数相加来表达：

$$z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky) = \frac{1}{2} \hat{h} [\cos k(x+y) + \cos k(x-y)]$$

变形产生的应力为：

$$\sigma_{zz} = \frac{\sqrt{2}}{2} E^* k u_z(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} E^* k \hat{h} \cos(kx) \cos(ky)$$

因此，要建立一个完全接触所需的应力为：

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \hat{h} k$$

梯度的平方根等于 $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$ ，则 $\hat{\sigma} = E^* \nabla z$ 。

习题 4 计算在一个弹性波形面和一个刚性平面之间建立一个理想接触所需的压力。波形面的形式为 $z = \hat{h} \cos(kx) + \hat{h}_1 \cos(k_1 x)$, $k_1 \gg k$, $\hat{h}_1 \ll \hat{h}$ (见图 7.10)。



图 7.10 一个表面在两种尺度下的波形

解答：如果在长波的最低位置压力 $\sigma_{0,1} > \frac{1}{2}E^* \hat{h}_1 k_1$ (见上一个习题)，则短波的波纹会被完全“挤压”。用习题2的压力表达式，通过叠加可以得到临界压力：

$$\sigma_c = \frac{1}{2}E^* (\hat{h}k + \hat{h}_1 k_1)$$

习题5 图7.11所示系统由 N_0 个刚度为 c 的弹簧组成，如果将它接触，会发生黏着。它们的黏着特性用长度 Δd_{crit} 来描述，也就是弹簧在离开表面前可伸长的距离。假设弹簧高度分布为 $\Phi(z) = \frac{1}{l}e^{-\frac{z}{l}}$ 。

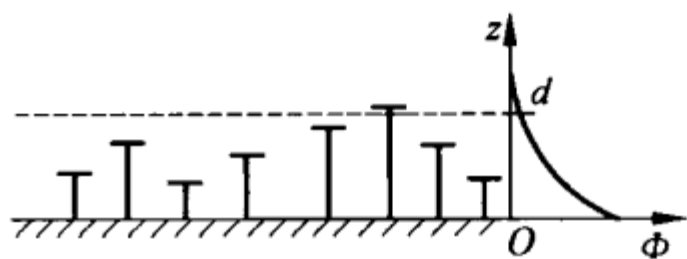


图7.11 随机弹性表面的弹簧模型

先用力 F_N 将一刚性平面压在这个系统上，然后拉开距离 d 。计算黏着力和初始压力的关系。

解答：在力 F_N 作用下，只有高度 $z > \tilde{d}$ 的弹簧才会与平面接触，其中 \tilde{d} 在下面方程中出现：

$$F_N = \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c(z - \tilde{d}) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} l$$

现在，如果刚性平面被带到的高度为 d ，那么在没变形状态下高度大于 $d - \Delta d_{\text{crit}}$ 和大于 \tilde{d} 的弹簧均会保持接触。作用在平面上的力为：

$$F = \begin{cases} \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c(z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (l + \tilde{d} - d), & \text{对于 } d - \Delta d_{\text{crit}} < \tilde{d} \\ \int_{d - \Delta d_{\text{crit}}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c(z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\Delta d_{\text{crit}} - d}{l}} (l - \Delta d_{\text{crit}}), & \text{对于 } d - \Delta d_{\text{crit}} > \tilde{d} \end{cases}$$

对于 $l > \Delta d_{\text{crit}}$ ，作用在平面上的力始终是正的，也就意味着没有宏观黏着。对于 $l < \Delta d_{\text{crit}}$ ，当 $d = \tilde{d} + \Delta d_{\text{crit}}$ 时，负作用力的绝对值达到最大。这个值就是黏着力：

$$|F_A| = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (\Delta d_{\text{crit}} - l)$$

这个模型中，黏着力和压紧力的比值为：

$$\frac{|F_A|}{F_N} = \frac{\Delta d_{\text{crit}} - l}{l}$$

该比值与压力无关，称为黏着系数。对于 $l = \Delta d_{\text{crit}}$ ，黏着力等于零。

习题 6 与习题 5 相似, 计算法向力, 但高度分布为:

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}}$$

解答: 力可以计算为:

$$F_N = \int_{d-\Delta d_{\text{crit}}}^{\infty} N_0 \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} c(z-d) dz$$

数值积分的结果见图 7.12 中 $F_N(d)$ 图。当 $\Delta d_{\text{crit}} < 0.3l$ 时, 没有距离, 使在此位置 F_N 为负值(即无宏观黏着)。

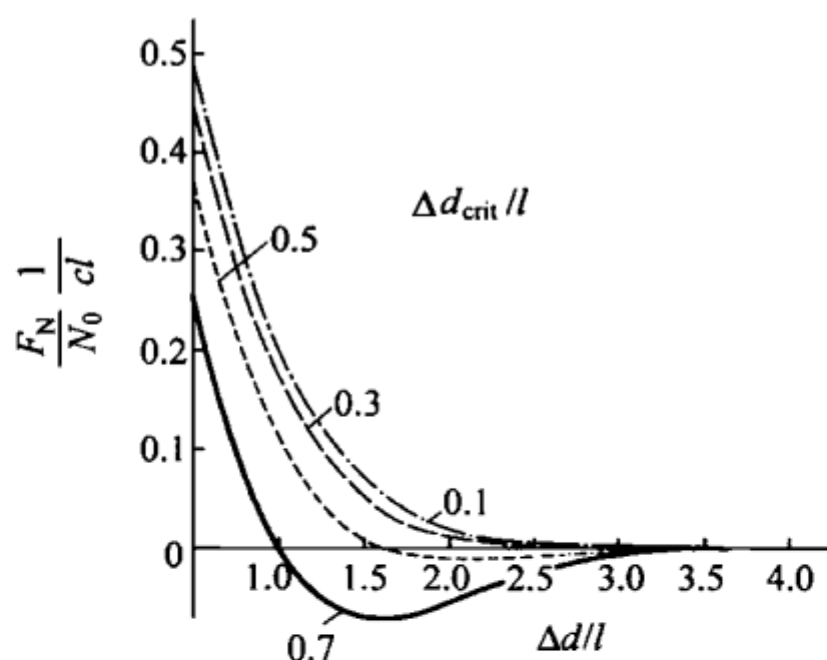


图 7.12 对不同的 $\frac{\Delta d_{\text{crit}}}{l}$ 值, 法向力与规范化距离 $\frac{\Delta d}{l}$ 的关系

习题 7 估算一个弹性半空间和一个粗糙表面在实际接触面上的平均压力, 粗糙表面由倾斜角为 θ 的锥形突体组成(见图 7.13)。

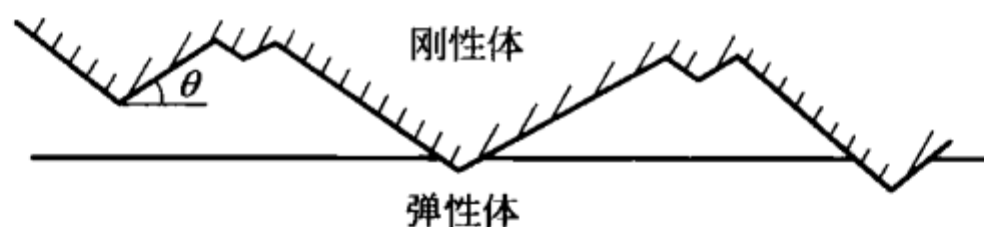


图 7.13 锥形凸起组成的粗糙表面和弹性体的接触

解答: 从方程(5.37)和(5.39)中可以看出, 对于一个刚性锥体压入弹性半空间体, 法向力 F_N 和接触半径 a 的关系为:

$$F_N = \frac{1}{2} E^* \pi a^2 \tan \theta$$

因此, 一个微接触上的平均压力为:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{\pi a^2} = \frac{1}{2} E^* \tan \theta = \frac{1}{2} E^* \nabla z$$

其中 $\nabla z = \tan\theta$ 是表面轮廓梯度(该题中为常数)。这个压力与压入深度无关,也适用于整体接触面的平均压力。因此,对于这两种接触,有尖锐微凸体的“研磨”表面的接触,和式(7.16)中两个随机粗糙表面之间的接触,我们得到相同的结果。

习题8 估算两个粗糙表面间的摩擦系数,假设表面间的摩擦仅由黏着力产生。对于钢对钢和橡胶对橡胶的接触,比较黏着对摩擦力的贡献。

解答: 采用这样的表面模型,即微凸体随机分布,每个微凸体的曲率半径都等于 R 。这个模型类似于图 7.2 的模型,只是这里两个表面都是粗糙的而已。假设两个表面高度都是标准差为 l 的高斯分布。两个表面在法向力 F_N 作用下被压在一起,然后沿水平方向相对移动。摩擦力是由于在黏着接触的形成和破坏过程中,这个过程的不对称引起的,即两个接近的微凸体的几何轮廓(无变形)相交时,它们本身会先发生接触(见图 7.14(a));相反地,在一段更大距离后,微凸体本身会分开(见图 7.14(b))。

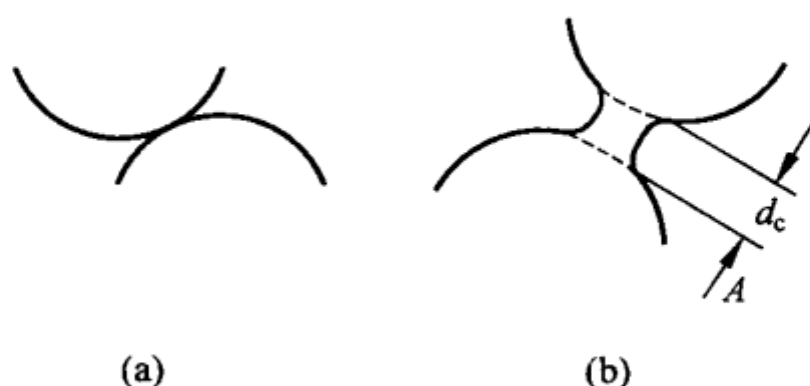


图 7.14 摩擦力由黏着接触的不对称引起

黏着强度可以用临界距离 d_c 来描述,在该距离表面发生分离(见图 7.14(b)和式(6.24)),于是有:

$$d_c = \left(\frac{3\pi^2 \gamma_{12}^2 R^*}{64 E^{*2}} \right)^{1/3}$$

式中 $R^* = R/2$, $1/E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$ 。

这个习题包含了 3 个长度参数:曲率半径 R ,高度分布 l 和临界距离 d_c 。在习题 6 和 7 中已经看到,对于足够大的 d_c (关于 l),表面间存在一有限的黏着力,从而使摩擦系数为无限大,因为没有法向力时,已经有一个有限的摩擦力了。这里讨论一下无黏着表面,也就是 $d_c < l$ 的情况^①。假设 $d_c/R \ll 1$, $l/R \ll 1$,这点证明了半空间理论的应用。

^① 后面会看到, $d_c \leq 0.18l$ 的情况也是满足的。

首先研究两个微凸体的接触,然后推导出统计分布的平均值。每个表面中微凸体的参数见图 7.15。

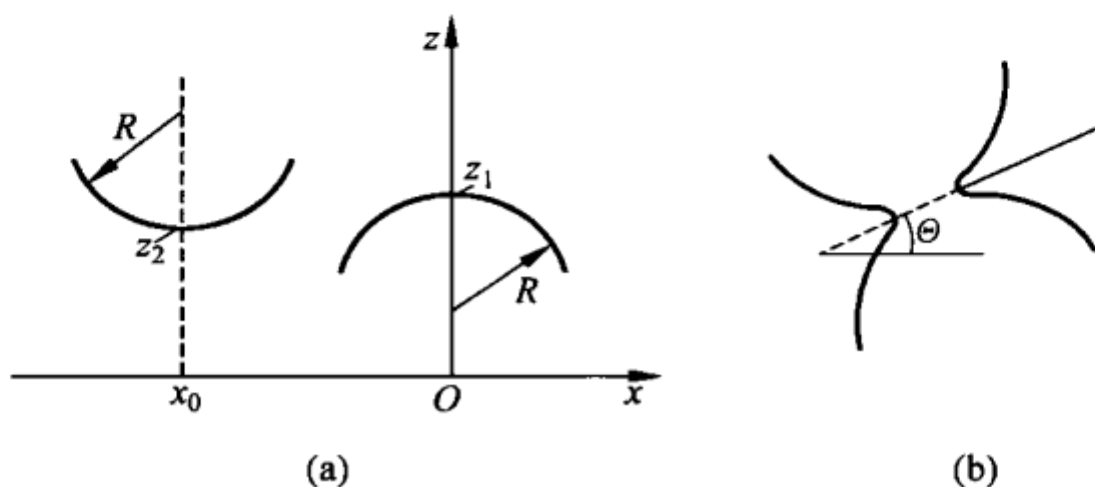


图 7.15

(a) 两个相同曲率半径的微凸体; (b) 微凸体接触

这两个微凸体可用下面方程描述:

$$z_1(x) = Z_1 - \frac{x^2}{2R}, \quad z_2(x) = Z_2 + \frac{(x - x_0)^2}{2R}$$

只要表面保持接触,压入深度就等于:

$$d = Z_1 - Z_2 - \frac{x_0^2}{4R}$$

并且接触角 θ 的正切值(见图 7.15(b))为:

$$\tan \theta \approx \theta \approx x_0 / (2R)$$

$d=0$ 和 $d=-d_c$ 分别对应开始接触和结束接触,因此我们可以得到:

$$x_{0,\min} = -2\sqrt{R(z_1 - z_2)}, \quad x_{0,\max} = 2\sqrt{R(z_1 - z_2) + Rd_c}$$

如果将微凸体之间的相互作用力定义为 F ,忽略 θ 的高阶项, F_N 的 z 轴分量和 F_R 的 x 轴分量为:

$$F_N \approx F, \quad F_R \approx -Fx_0 / (2R)$$

则摩擦系数为:

$$\mu = \langle F_R \rangle / \langle F_N \rangle$$

其中标记 $\langle \rangle$ 为 x 方向和 z 方向微凸体分布的平均值。假设 x 方向的分布是均匀的, z 方向分布定义为:

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-\frac{z_1^2}{2l^2}}, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-\frac{(z_2 - z_0)^2}{2l^2}}$$

这里, z_0 的意义为宏观的表面间分开的距离。用式(6.26)的近似来计算黏着力:

$$F \approx F_c \left[0.12 \left(\frac{d}{d_c} + 1 \right)^{5/3} - 1 \right], \quad -1 \leq d/d_c \leq 10$$

式中 $F_c = \frac{3}{2}\pi\gamma_{12}R$ 。

对 x 方向的 F_N 和 F_R , 沿宏观长度 L 取平均值, 得到:

$$\langle F_R \rangle_x = -\frac{1}{L} \int_{x_{0,\min}}^{x_{0,\max}} F \frac{x_0}{2R} dx_0 \approx \frac{F_c}{2} \frac{d_c}{L}$$

$$\langle F_N \rangle_x = \frac{1}{L} \int_{x_{0,\min}}^{x_{0,\max}} F dx_0 \approx F_c \frac{\sqrt{Rd_c}}{L} [0.12(1+\xi)^{13/6} - \sqrt{\xi} - \sqrt{\xi+1}]$$

式中 $\xi = (z_1 - z_2)/d_c$ 。这里不推导 z 方向的平均值, 仅做一个粗略估计。对任意粗糙表面, $z_1 - z_2$ 的数量级约为 l 。更加精确的计算表明, 对于 ξ 等于 $\frac{3}{4}l/d_c$, 这种近似方法给出了一个最好的结果。对于一个“典型微凸体”, 法向力可近似计算为:

$$\langle F_N \rangle_x \approx F_c \frac{\sqrt{Rd_c}}{L} \left[0.12 \left(1 + \frac{3}{4}l/d_c \right)^{13/6} - \sqrt{\frac{3}{4}l/d_c} - \sqrt{\frac{3}{4}l/d_c + 1} \right]$$

摩擦系数近似表达为:

$$\mu \approx \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d_c}{l} \right)^{1/2} \nabla z}{0.12 \left(1 + \frac{3}{4}l/d_c \right)^{13/6} - \sqrt{\frac{3}{4}l/d_c} - \sqrt{\frac{3}{4}l/d_c + 1}}$$

其中用到了方程(7.17)中的 $(l/R)^{1/2} \approx \nabla z$ 。这个方程仅适用于分子为正的情况, 例如 $l/d_c > 5.7$ 。可以看到, 摩擦系数为表面梯度的平方根与“黏着参数” d_c/l 的乘积。接近这个参数的临界值时, 摩擦系数可认为无限大。当 d_c/l 较小时, 根据下式, 摩擦系数接近于零:

$$\mu \approx 7.8 \left(\frac{d_c}{l} \right)^{8/3} \nabla z$$

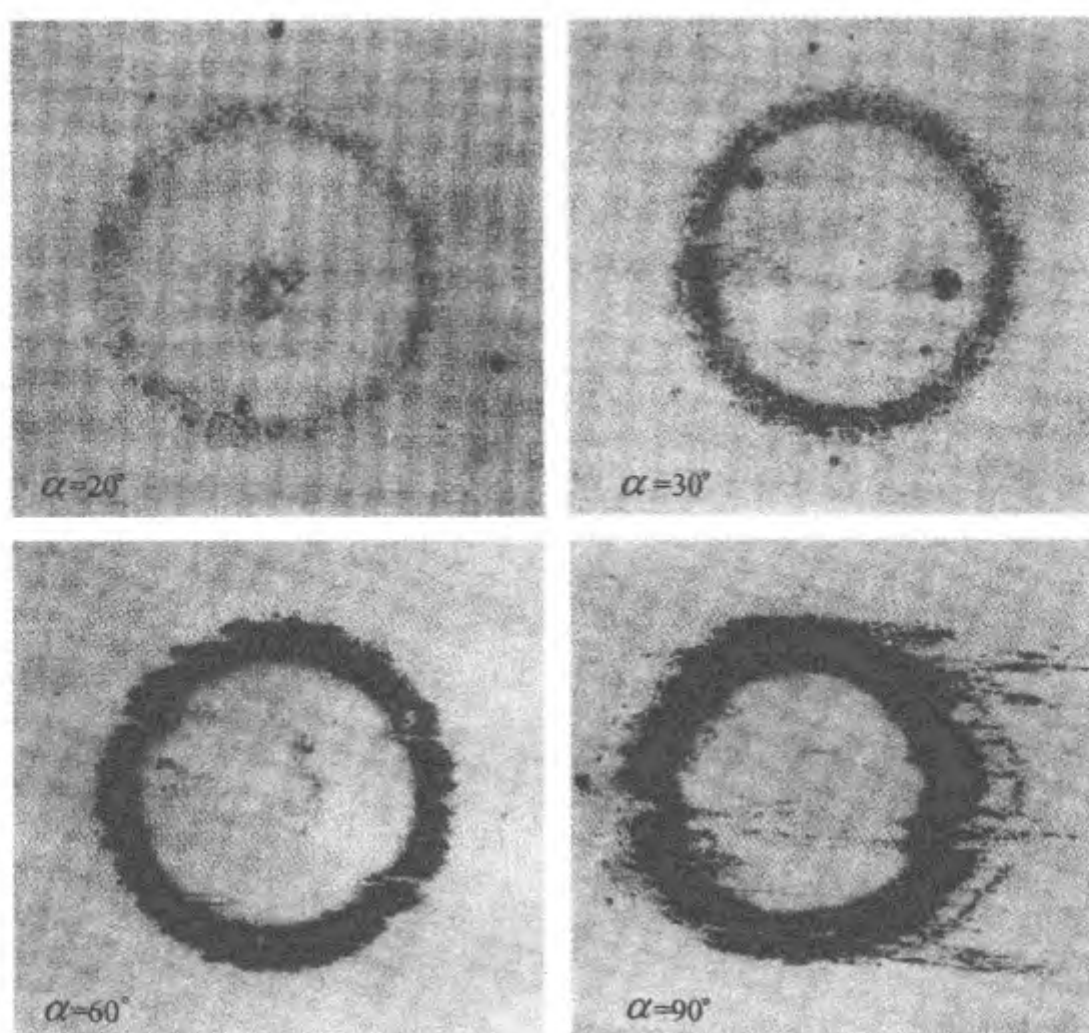
或更详细地表达为:

$$\mu \approx 7.8 \left(\frac{3\pi^2 \gamma_{12}^2 R^*}{64 E^{*2} l^3} \right)^{8/9} \nabla z$$

对于钢, 有 $\gamma_{12} \approx 5 \text{ J/m}^2$, $E^* \approx 10^{11} \text{ Pa}$, $l = 1 \text{ } \mu\text{m}$, $R^* = 100 \text{ } \mu\text{m}$, 可以得到 $\mu \approx 0.5 \times 10^{-5} \nabla z$: 钢对钢接触, 黏着对摩擦力的贡献很小, 可以忽略。对于橡胶, 有 $\gamma_{12} \approx 5 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$, $E^* \approx 10^6 \text{ Pa}$, $l = 1 \text{ } \mu\text{m}$, $R^* = 100 \text{ } \mu\text{m}$, 可以得到 $\mu \approx 1.1 \nabla z$, 说明高弹体之间接触, 黏着力对摩擦力有很大的贡献。

第 8 章

切向接触问题



到现在为止的接触问题中,我们都假设接触体表面是绝对光滑、无摩擦的,这样,接触面上就不存在剪切力。如果接触点在切向也受载,那就有静摩擦力和动摩擦力了。本章将研究切向受载接触的剪切应力。

需要注意的是,如果考虑摩擦的话,即使在法向接触中也会产生剪切应力。如果两个弹性特性不同的物体接触,那么由于两个物体的横向膨胀,会存在切向相对位移,这就产生了摩擦应力。如果两个接触物体有相同的弹性特性,由于两个物体在横向变形相同,剪切应力在法向接触中不起作用。这种情况下,即使将静摩擦考虑进去,也不会出现剪切应力。

本章先讨论接触面发生完全黏着的切向接触问题,然后扩展到接触面发生部分滑动或完全滑动的问题。

8.1 切向力作用下弹性半空间体的变形

接触见图 8.1,将两个弹性固体压在一起,然后沿切向移动。第一步,假设在切向加载时,接触面没有滑动,也就是说要么两个物体“粘在一起”,要么摩擦系数无穷大。

与法向接触问题一样,采用半空间近似法:在接触面附近,两个接触物体的表面梯度较小。

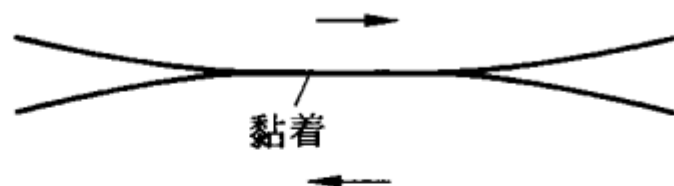


图 8.1 两个弹性固体的切向接触

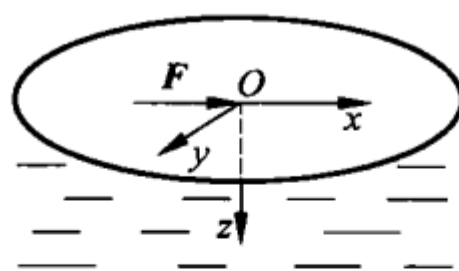


图 8.2 半空间表面的单位切向力

作为预备步骤,我们考虑当一个集中力作用在弹性半空间体表面上一点(见图 8.2)时它的变形,然后将其作为原点。选择力作用的方向为 x 轴, $z=0$ 的表面的位移方程为^①:

$$\begin{cases} u_x = F_x \frac{1}{4\pi G} \left[2(1-\nu) + \frac{2\nu x^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \\ u_y = F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{2\nu}{r^3} xy \\ u_z = F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{1-2\nu}{r^2} x \end{cases} \quad (8.1)$$

式中 G 是剪切模量。

8.2 分布切向力作用下弹性半空间体的变形

(1) 现在讨论在如下分布的切向力作用下(x 方向),表面的位移:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \tau(x, y) = \tau_0 (1 - r^2/a^2)^{-1/2} \quad (8.2)$$

^① L. D. Landau, E. M. Lifschitz. Theory of Elasticity (Theoretical Physics, Vol. 7), 3rd edition, 1999, Butterworth-Heinemann, Oxford, 8-9.

式中 $r^2 = x^2 + y^2 \leq a^2$ 。 x 方向的切向位移为：

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \cdot 2 \iint_A \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(x-x')^2}{s^3} \right\} \tau(x', y') dx' dy' \quad (8.3)$$

式中

$$s^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \quad (8.4)$$

通过积分,可以得到受载面内的位移^①($r \leq a$):

$$u_x = \frac{\pi(2-\nu)}{4G} \tau_0 a = \text{常数} \quad (8.5)$$

由于对称性,可得:

$$u_y = 0 \quad (8.6)$$

相比之下, u_z 是 x 的非零奇函数。对于集中力, u_z 可以用式(8.1)直接计算,这个性质也适用于对称分布应力。作用在接触面的总力为:

$$F_x = \int_0^a \tau(r) 2\pi r dr = 2\pi \tau_0 a^2 \quad (8.7)$$

(2) 同样,分布应力为:

$$\tau(x, y) = \tau_0 (1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (8.8)$$

在受载面($r \leq a$)内,产生的表面位移为:

$$u_x = \frac{\tau_0 \pi}{32Ga} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \quad (8.9)$$

则总力为:

$$F_x = \frac{2}{3} \pi \tau_0 a^2 \quad (8.10)$$

(3) 如果一个弹性体在剪切应力

$$\tau(x, y) = \tau_0 (1 - x^2/a^2)^{1/2} \quad (8.11)$$

作用下(沿 x 方向),作用宽度为 $2a$ (见图 8.3),则表面点的位移为:

$$u_x = \text{常数} - \tau_0 \frac{x^2}{aE^*} \quad (8.12)$$

(4) 切向载荷的一个特殊的例子就是扭转。如果在半径为 a 的圆形接触面内,切向力的方向垂直于极半径 r ,而且相应的应力为:

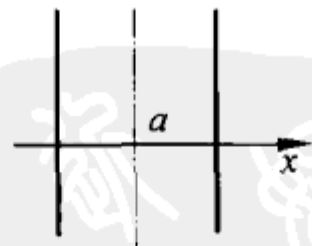


图 8.3 在宽度为 $2a$ 的条形区受到方程(8.11)剪切分布应力的作用

① 详见 K. L. Johnson, Contact Mechanics (Ninth printing). Cambridge University Press, 2003.

$$\sigma_{xz} = -\tau(r)\sin\varphi, \quad \sigma_{zy} = \tau(r)\cos\varphi \quad (8.13)$$

式中

$$\tau(r) = \tau_0 \frac{r}{a} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (8.14)$$

那么表面位移的极坐标分量等于^①:

$$u_\varphi = \frac{\pi\tau_0 r}{4G}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad (8.15)$$

可以看出,总接触面严格地转动了角度 $\pi\tau_0/(4G)$ 。因此,这个分布应力是由粘到表面的刚性圆柱压头的扭转产生的。总扭矩为:

$$M_x = \frac{4}{3}\pi a^3 \tau_0 \quad (8.16)$$

8.3 无滑动切向接触问题

接下来讨论切向接触问题。我们想象两个对称的物体,使其中一个物体产生恒定位移 u_x ,另一个为 $-u_x$ 。那么必定在一个物体上存在相应的应力分布[见式(8.2)],而在另外一个物体上为负的相等的应力分布。如果将二者的应力面粘在一起,那么根据牛顿第三定律(作用力与反作用力),它们仍然保持平衡。两个“黏着”表面在 z 轴方向恰好匹配很重要,因为 z 轴位移关于 x 反对称。这些考虑表明,两个弹性特性相同的物体发生相对位移 $2u_x$,产生的应力分布正是式(8.2),即

$$\tau(x, y) = \tau_0 (1 - r^2/a^2)^{-1/2} \quad (8.17)$$

可以看出,黏着面边界的剪切应力接近无穷大,而赫兹接触的边界处法向应力为零,这意味着,多数情况下,边界附近不满足无滑动条件,所以发生了相对滑动。8.4节将讨论这个局部运动——滑动。

切向力和两个弹性物体的相对切向位移的比值定义为剪切刚度 $c_{//}$ 。由式(8.5)和(8.7),可以得到剪切刚度为:

$$c_{//} = \frac{F_x}{2u_x} = \frac{4Ga}{2-\nu} = 2G^* a \quad (8.18)$$

式中引入了剪切模量 $G^* = \frac{2G}{2-\nu}$ 。与法向刚度一样,式(8.18)中剪切刚度正比于接触直径。

① K. L. Johnson, Contact Mechanics(Ninth printing). Cambridge University Press, 2003.

这里要注意,在弹性半空间体和刚性体的接触中,式(8.18)并不精确,因为这种接触情况下,垂直方向的位移成为零,而这在式(8.2)的应力分布情况中并不是这样。但它提出了一个很好的近似方法。对于弹性常数分别为 G_1, G_2 和 ν_1, ν_2 的两个弹性物体接触,下面的方程是计算剪切刚度很好的近似方法:

$$c_{//} = \frac{F_x}{u_{rel}} \approx 2G^* a \quad (8.19)$$

其中

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2 - \nu_1}{4G_1} + \frac{2 - \nu_2}{4G_2} \quad (8.20)$$

在式(8.19)中, u_{rel} 是两个物体的相对位移。当两个物体弹性特性不同时,方程(8.5)为:

$$u_{rel} \approx \frac{\pi \tau_0 a}{G^*} \quad (8.21)$$

8.4 考虑滑动的切向接触问题

现在讨论切向力和法向力同时作用时的组合接触问题。例如,我们想象两个球体在法向力 F_N 作用下被挤压在一起,然后沿切向施加作用力 F_x 。假设两个物体之间存在干摩擦,根据库仑摩擦定律中最简单的形式:最大静摩擦应力 τ_{max} 等于动摩擦应力 τ_k , 动摩擦应力 τ_k 等于法向应力 p 乘以摩擦系数 μ :

$$\tau_{max} = \mu p, \quad \tau_k = \mu p \quad (8.22)$$

黏着发生的条件为:

$$\tau \leq \mu p \quad (8.23)$$

如果假设物体在接触面完全粘在一起,则得到下列法向应力和切向应力分布的方程:

$$p = p_0 [1 - (r/a)^2]^{1/2}, \quad F_N = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (8.24)$$

$$\tau = \tau_0 [1 - (r/a)^2]^{-1/2}, \quad F_x = 2\pi \tau_0 a^2 \quad (8.25)$$

这些应力分布见图 8.4。因为边界法向应力接近于零,切向应力趋近于无穷大,所以在接触边界永远不能满足式(8.23)的条件:接触边界总有滑动,即使在很小切向载荷下。但是,在接触面里面,对于足够小的切向力,式(8.23)的条件是满足的。通常,总接触面被分成一个内无滑动区(黏着)

和一个外滑动区(见图 8.5)。两个区域的边界半径 c 可用条件 $\tau = \mu p$ 得到。

毋庸置疑,式(8.25)剪切应力分布仅适用于接触面没有滑动的假设下。可以用这个应力分布来证明这个假设是相矛盾的,因为在边界位置总是存在滑动,但我们计算不出新的应力分布或无滑动区半径。

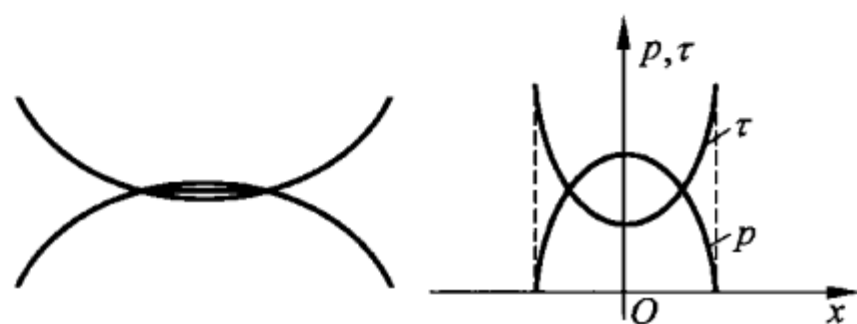


图 8.4 接触时的法向应力和切向应力

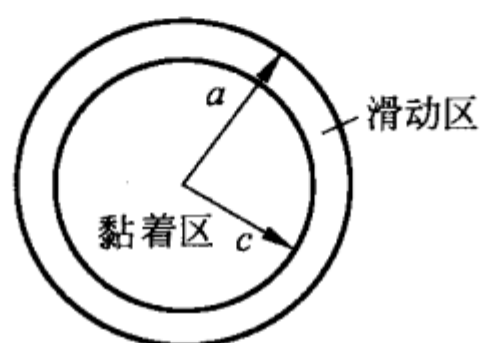


图 8.5 圆形切向接触中的黏着区和滑动区

但是,与很多其他“经典接触问题”一样,可以用已知应力分布的组合来构造一个正确的应力分布。通过两个“赫兹”应力分布式(8.8)的叠加,就可能满足接触边界条件。赫兹应力分布和式(8.25)形式的应力分布犹如接触力学的积木,所有经典的接触问题都可以采用这样的应力分布来求解。找一个接触中切向应力分布的形式:

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \quad (8.26)$$

其中

$$\tau^{(1)} = \tau_1 (1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (8.27)$$

$$\tau^{(2)} = -\tau_2 (1 - r^2/c^2)^{1/2} \quad (8.28)$$

应力分布见图 8.6。根据式(8.9),这些应力产生的表面位移为:

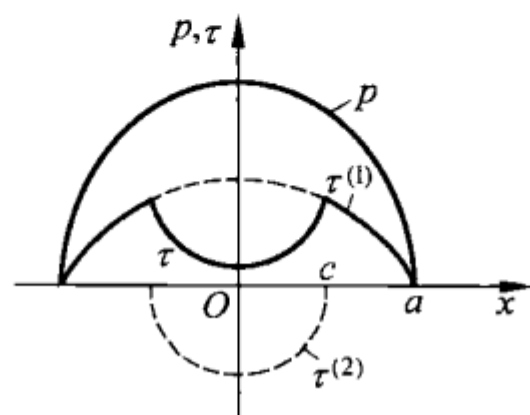


图 8.6 切向接触中的法向和切向应力

$$u_x = \frac{\tau_1 \pi}{32Ga} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] - \frac{\tau_2 \pi}{32Gc} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \quad (8.29)$$

相应的压力分布由赫兹方程(8.24)给出。

由于半径为 c 的圆形区域是黏着区,位移是恒定的,即

$$u_x(r) = \text{常数}, \quad r < c \quad (8.30)$$

剩余的滑动区域满足库仑摩擦定律:

$$\tau(r) = \mu p(r), \quad c < r < a \quad (8.31)$$

由第二个条件,可以得到:

$$\tau_1 = \mu p_0 \quad (8.32)$$

由式(8.30)的条件,可以得到:

$$\tau_2 = \mu p_0 \frac{c}{a} \quad (8.33)$$

因此,黏着区的位移等于:

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu p_0}{8Ga}(a^2 - c^2) \quad (8.34)$$

完全滑动开始前($c=0$),沿切向物体移动最大。

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu p_0 a}{8G} = \frac{3(2-\nu)\mu F_N}{16Ga} \quad (8.35)$$

由式(8.26),(8.27)和(8.28),可计算出接触面的总切向力:

$$F_x = \frac{2}{3}\pi(\tau_1 a^2 - \tau_2 c^2) = \frac{2\pi}{3a}\mu p_0(a^3 - c^3) \quad (8.36)$$

将 $F_N = \frac{2}{3}p_0\pi a^2$ 考虑进去,这个力可写成:

$$F_x = \mu F_N \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right] \quad (8.37)$$

因此可以得到静态区的半径:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \quad (8.38)$$

正如我们预期的,在切向力 $F_x = \mu F_N$ 作用下,发生完全滑动。需要强调的是,在达到这个力之前,滑动已经占了接触面积的大部分。当力达到 $F_x = \mu F_N$ 时,就不再有从黏着到滑动的转变了,而是由局部滑动转变为完全滑动。

前面已经表明,通过在法向力产生的赫兹接触面上施加任意一个很小的切向力,可以产生一个环形滑动区。周期性载荷会使材料在该滑动区域发生疲劳,这个现象称为微动磨损。

8.5 无滑动刚性圆柱压头

如果一个平的刚性圆柱压头压进一个弹性半空间体,那么法向应力分布为 $p = p_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$ 。接着施加一个切向力,产生的剪切应力分布为 $\tau = \tau_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$ 。因此,无滑动条件 $\tau < \mu p$,要么在整个接触面不满足

该条件,要么在整个接触面全满足。这种情况下,没有局部滑动区。

习题

习题 1 两个弹性物体分别充满半空间 $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两侧(见图 8.7)。上面的物体沿水平方向以恒定的速度 $du_{\text{rel}}/dt = v_c$ 移动。两个物体形成一个半径为 $a(t) = a_0 + v_1 t$ 的无滑动区域,半径随时间不断增大;剩余的区域中,切向应力等于零^①。计算接触面的切向应力分布。

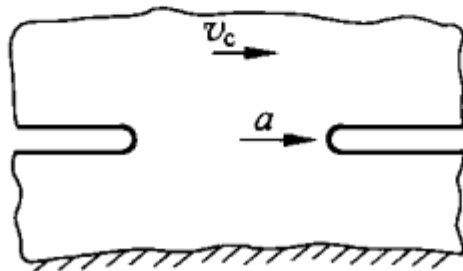


图 8.7 两个弹性体接触,上面的物体以恒定的相对速度 v_c 移动

解答: 根据方程 $du_{\text{rel}}/dt = v_c$ 和 $da/dt = v_1$,可以得到:

$$du_{\text{rel}} = \frac{v_c}{v_1} da$$

根据式(8.17)和(8.5),在接触面 $r < a(t)$ 内,由位移 du_{rel} 产生的剪切应力的变化为:

$$d\tau(r) = \frac{G^*}{\pi a} du_{\text{rel}} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{G^*}{\pi a} \frac{v_c}{v_1} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} da, \quad r < a$$

其中 G^* 由式(8.20)定义。接触前点从起始半径 a_0 扩大到 a_1 ,应力计算为:

$$\tau = \frac{G^*}{\pi} \frac{v_c}{v_1} \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} da, \quad r < a_0$$

$$\tau = \frac{G^*}{\pi} \frac{v_c}{v_1} \int_r^{a_1} \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} da, \quad a_0 < r < a_1$$

积分结果为:

$$\tau = \frac{G^*}{\pi} \frac{v_c}{v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{a_0 + \sqrt{a_0^2 - r^2}}, \quad r < a_0$$

$$\tau = \frac{G^*}{\pi} \frac{v_c}{v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{r}, \quad a_0 < r < a_1$$

$a_0/a_1 = 0.1$ 时的关系见图 8.8。

^① 这种情况是存在的,如果两个物体被凝固中的液体薄片所分离。这是典型的凝固过程,固相和液相之间的边界以恒定的速度扩散。

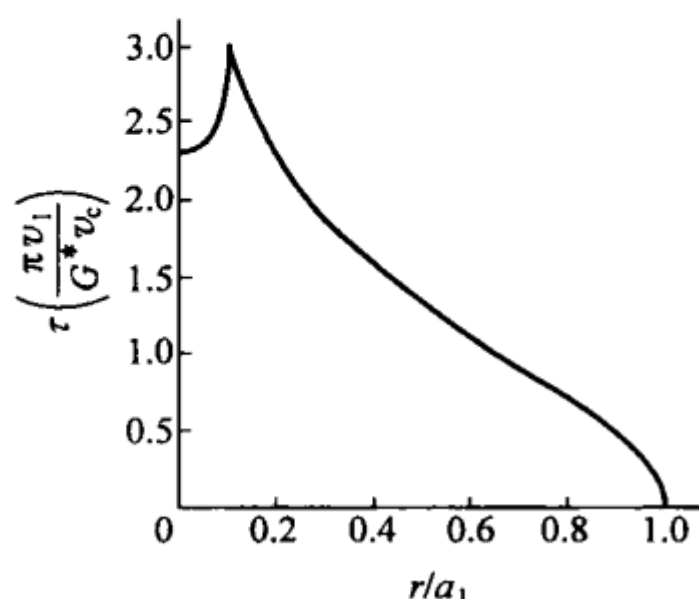


图 8.8 接触面的切向应力分布

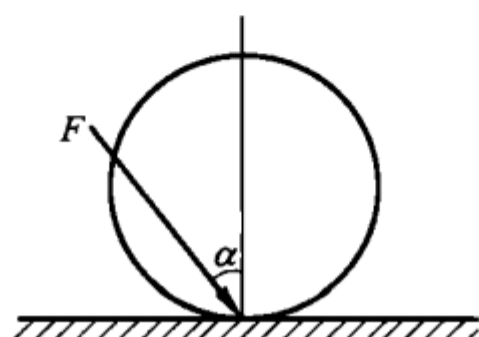


图 8.9 以恒定的倾斜角将弹性球体压到一个刚性平面

习题 2 将一个弹性球体压入一个刚性平面, 压紧力的方向保持不变 (见图 8.9)。计算整个接触面都没有滑动存在的条件。

解答: 先假设接触面没有发生滑动, 然后再证明这个假设的正确性。将力的连续增长分为无限小步, 每一步法向力增加 dF_N , 切向力增加 dF_x 。 dF_N 和 dF_x 的增长存在一个几何关系, 即 $dF_x/dF_N = \tan\alpha$ 。考虑无滑动条件, 切向力 dF_x 的增长产生的剪切应力的增长为:

$$d\tau(r) = \frac{dF_x}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{dF_N \tan\alpha}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad r < a$$

由法向力和接触半径的关系 $F_N = \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R}$, 得到 $dF_N = 4 \frac{E^* a^2 da}{R}$ 。因此, 剪切应力的增长可以写成:

$$d\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan\alpha \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a$$

如果由于力的作用, 接触面半径从 a_0 增加到 a_1 , 则切向应力的总增长为:

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan\alpha \int_{a_0}^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a_0$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan\alpha \int_r^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad a_0 < r < a_1$$

积分计算结果为:

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan\alpha \cdot [(a_1^2 - r^2)^{1/2} - (a_0^2 - r^2)^{1/2}], \quad r < a_0$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan\alpha \cdot (a_1^2 - r^2)^{1/2}, \quad a_0 < r < a_1$$

赫兹压力分布为:

$$p(r) = \frac{p_0}{a_1} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{3F_N}{2\pi a_1^3} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{2E^*}{\pi R} (a_1^2 - r^2)^{1/2}$$

如果在整个接触面 $\tau(r) \leq \mu p(r)$, 就不会发生滑动, 此时有:

$$\tan\alpha \leq \mu$$

如果力的作用角度小于临界角, 接触面上就不会有滑动。需要注意的是, 临界角等于摩擦角(见第 10 章), 因此这些结果与宏观结果“施力角小于摩擦角时, 不发生滑动”一致(见 10.3 节)。



第 9 章 滚动接触



滚动接触在很多工程技术中都能够看到。如轮轨或轮胎与地面的接触、滚子轴承、齿轮和各种传送或运输机械(例如打印机)等都是我们熟知的例子。

Reynolds 很早就研究了滚动接触力学^①。通过实验研究,他认为,在滚动接触中,接触面上同时存在滑动区域和黏着区域。增大传动力矩或制动力矩,滑动区会扩大直至整个接触面都滑动。这种滑动会导致滚轮的移动速度不再等于圆周速度。这两者之间的差值称为打滑速度,这在接触力学中很重要。

^① O. Reynolds. On rolling friction. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1876, 166 (I): 155-174.

但是在接触面,滑动并不是导致移动速度和圆周速度不同的唯一因素。对于较小的传动力矩或制动力矩,接触面是几乎没有滑动的。这种情况下,移动速度和转动速度有差值存在,而且差值与力矩是成正比的。这个关系是 Carter 于 1916 年通过计算首次发现的^①。这个小的打滑是由轮子的弹性变形引起的。

在实际应用中,人们特别感兴趣的是在接触面发生的局部滑动,因为它会引起磨损,甚至在整体滑动还没发生的时候就产生磨损。

9.1 滚动接触过程的定性讨论

从滚动接触和切向接触的相似处可以得出,在从动轮或制动轮中,黏着区和滑动区必定同时存在。如果将一个轮和一个刚性平面接触并施加一个力矩,那么接触面在切向肯定受载。但是从上一章中可以看到,当赫兹接触沿切向受载时,总是会产生一个滑动区,这也适用于从动滚轮的接触。和切向接触一样,滚动接触先形成一个小滑动区,然后随着力矩增大不断增大,直至覆盖整个接触面。

现在定量讨论滚轮的滚动过程。为了更好地理解这一过程,采用一个简单模型:一个弹性轮由一个刚性内圈和一系列单元构成,这些单元之间以及它们和内圈之间采用弹性连接,见图 9.1。这些单元和基体之间有摩擦,摩擦系数为 μ 。先将轮子压在刚性面上(见图 9.1(b)),然后施加一个力矩(见图 9.1(c)),那么接触面右边的弹簧处于压缩状态,左边的处于拉伸状态。因此,刚性内圈就转动一定的角度,这个角度与弹簧的数量和刚度有关。现在让轮子向右滚动(见图 9.1(d))。在压力作用下还没有和刚性面接触的单元,开始以与接触前相同的平衡状态进入接触面,然后以相同的平衡状态被“带动”通过接触面,当到达后缘的时候,法向力减小,这些单元卸载并松弛。因此当一个单元从接触面滑出来向后移动时,轮子就往远处转动了一点。

对于制动轮,前缘的弹簧伸长,后缘的弹簧压缩。但前缘的弹簧在到达接触面前已经处于平衡,而且一直保持这个状态直到它们到达后缘。根据这点,可以得到下面结论:

^① F. W. Carter. The electric locomotive. Proc. Inst. Civil Engn., 201, 221-252, 1916, Discussion pages 253-289.

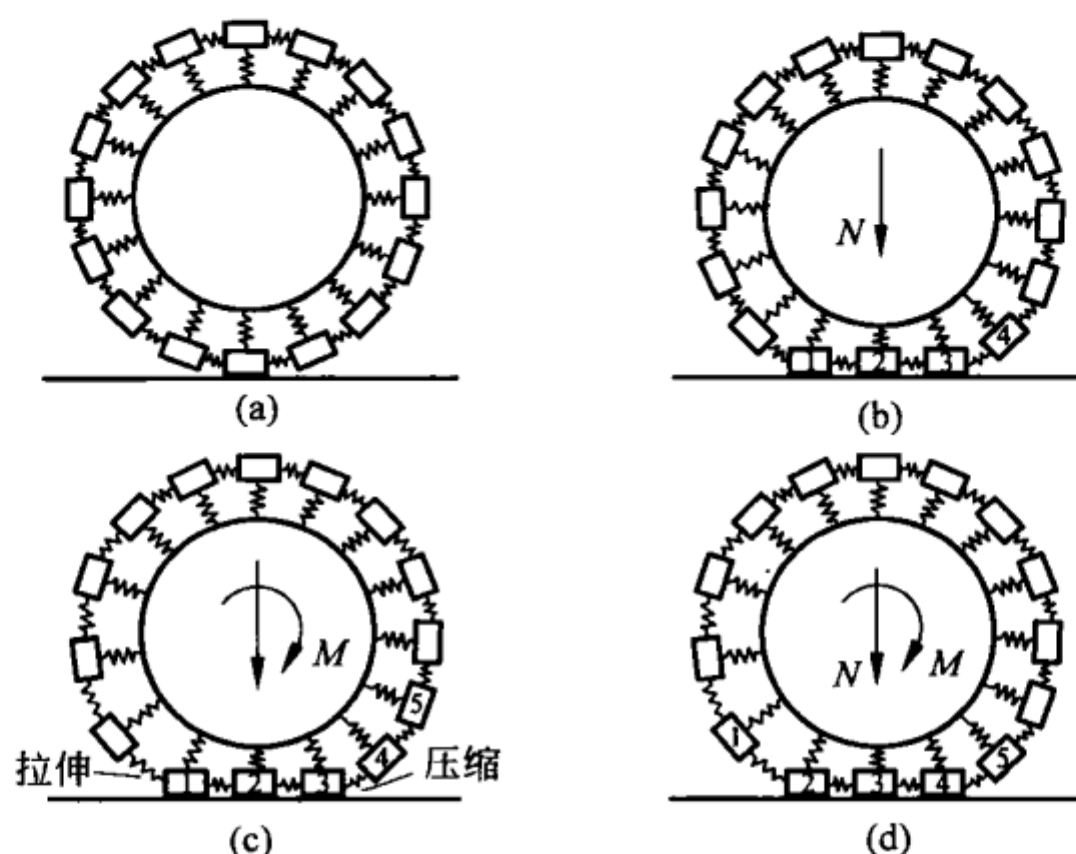


图 9.1 牵引力作用下轮子的简化模型

在从动轮或制动轮中,总是在前缘存在黏着区,后缘存在滑动区。

对于单个单元的每个转角,轮子都要经历“弹性转动”和“刚性转动”,因此轮子圆周速度大于移动速度。但对于制动轮(牵引力矩方向和转动方向相反),圆周速度小于移动速度。从一个单元转换到另一个单元,弹性转动的增加总是相等的,因此速度差 $v_{\text{creep}} = v - \Omega R$ 正比于移动速度 v 。为了描述爬行的特性,经常采用无量纲来表达,即

$$s = \frac{v - \Omega R}{v} = 1 - \frac{\Omega R}{v} \quad (9.1)$$

式中 s 称为打滑比。对于从动轮来说,这个值是正的,而制动轮是负的。观察经过接触面的质量传递,可以很容易看出,打滑比等于接触黏着区的应变 ϵ_{xx} 。黏着区的材料密度为 $\rho_0/(1+\epsilon_{xx})$,接触面移动速度为 v ,则接触面的质量流密度为 $v\rho_0/(1+\epsilon_{xx})$ 。另一方面,根据定义,材料密度等于 $\rho_0\Omega R$,因此,可以得到:

$$\Omega R = \frac{v}{1 + \epsilon_{xx}} \quad (9.2)$$

打滑比为:

$$s = \frac{\epsilon_{xx}}{1 + \epsilon_{xx}} \approx \epsilon_{xx} \quad (9.3)$$

9.2 平稳滚动接触的应力分布

(1) 准备步骤

下面采用已有的弹性力学的理论(见 8.2 节)。切向应力为:

$$\tau(r) = \sigma_{xz}(r) = \tau_0 \sqrt{1 - r^2/a^2} \quad (9.4)$$

作用在圆面上(见图 9.2(a)), 产生的切向位移为:

$$u_x = \frac{\pi\tau_0}{32Ga} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \quad (9.5)$$

应力分布为:

$$\tau = \sigma_{xz}(x) = \tau_0 \sqrt{1 - x^2/a^2} \quad (9.6)$$

该应力作用在宽度为 $2a$ 的带状区(见图 9.2(b)), 产生的位移为:

$$u_x = \text{常数} - \tau_0 \frac{x^2}{aE^*} \quad (9.7)$$

根据这些应力分布, 来构造滚轮上的应力分布。

(2) Carter 理论

二维滚动接触问题, 也就是圆

柱体在平面上的滚动问题, 由 Carter 于 1926 年解出。与其他很多法向和切向问题的求解类似, 他的求解是基于如下假设: 通过两个已知“赫兹”应力分布的叠加来“构造”滚动接触的应力分布。对于这些“赫兹”应力, 已经有连续体表面位移的解析解。假设从动轮应力分布的形式为:

$$\tau = \tau^{(1)}(x) + \tau^{(2)}(x) \quad (9.8)$$

其中:

$$\tau^{(1)}(x) = \tau_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.9)$$

$$\tau^{(2)}(x) = -\tau_2 \left(1 - \frac{(x-d)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.10)$$

这里, a 是总接触面半宽, c 是前缘黏着区的半宽。由图 9.3, d 定义为: $d = a - c$ 。由赫兹表达式可以得到总接触的压力分布为:

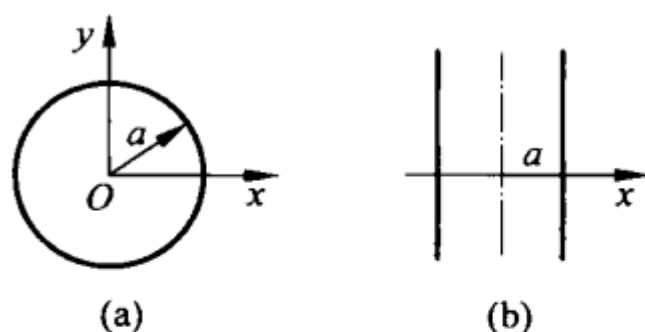


图 9.2 切向应力下各种受载接触面
(a) 圆; (b) 带

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.11)$$

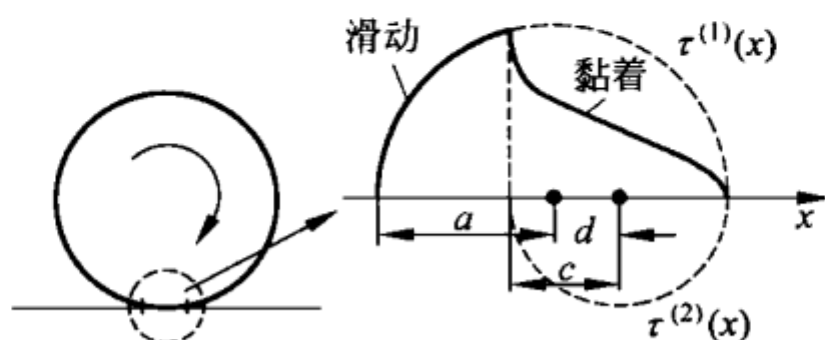


图 9.3 弹性圆柱体在滚动接触中接触面的切向应力分布

为了使给定的应力分布与滚动接触完全一致,必须满足某种运动学或动力学关系。首先可以看到,轮的前缘在进入接触面之前就已经发生变形,一旦这些单元开始和基体接触,单元之间以及它们和基体之间就不会再有相对移动,直到离开黏着区。因此,可以得到:

- ① 在黏着区,变形是恒定的;
- ② 在完全滑动区,假设库仑摩擦定律是有效的,条件必须满足:

$$\tau(x) = \mu p(x) \quad (9.12)$$

这两个条件就保证了平稳滚动接触。现在讨论一下在式(9.8)应力分布下需要满足的这两个条件。

应力 $\tau^{(1)}(x)$ 和 $\tau^{(2)}(x)$ 引起的位移分别等于 $u_x^{(1)} = C^{(1)} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*}$ 和 $u_x^{(2)} = C^{(2)} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*}$, 则总位移等于:

$$u_x = \text{常数} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*} \quad (9.13)$$

应变为:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\tau_1 \frac{2x}{aE^*} + \tau_2 \frac{2(x-d)}{cE^*} \quad (9.14)$$

要满足上述第一个条件,必须有:

$$\tau_2 = \frac{c}{a} \tau_1 \quad (9.15)$$

根据式(9.12),可以得到:

$$\tau_1 = \mu p_0 \quad (9.16)$$

黏着区的应变恒定时,即有:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0 d}{aE^*} \quad (9.17)$$

接触面的总横向力等于：

$$F_x = \int_{-a}^a L\tau(x)dx = \left(\frac{\pi}{2}a\mu p_0 - \frac{c}{a} \frac{\pi}{2}c\mu p_0 \right)L = \mu F_N \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (9.18)$$

黏着区的半径为：

$$\frac{c}{a} = 1 - \frac{d}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2} \quad (9.19)$$

根据式(9.3)和(9.17),可以得到打滑比为：

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0}{E^*} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2} \right] \quad (9.20)$$

考虑这两个关系式 $F_N = \frac{\pi a p_0}{2} L$ 和 $F_N = \frac{\pi E^* L a^2}{4R}$ (见方程(5.34)), 则

打滑比可以写成下面的形式：

$$s = -\frac{\mu a}{R} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{F_x}{\mu F_N}} \right] \quad (9.21)$$

这个关系式见图 9.4, 我们称之为牵引力-打滑曲线。

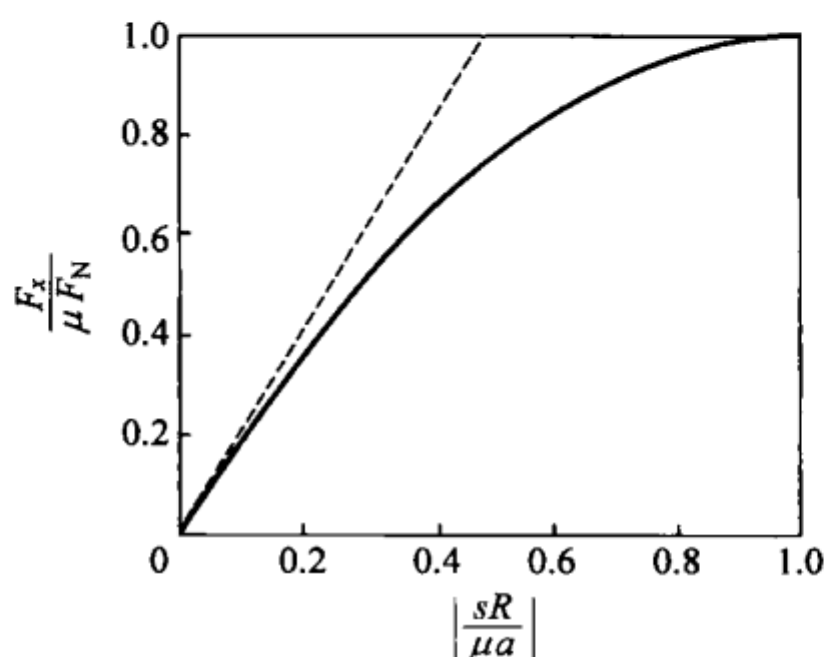


图 9.4 牵引力-打滑曲线

对于小切向力, 打滑比可以展成 $F_x / (\mu F_N)$ 的泰勒级数。一阶级数为：

$$s \approx -\frac{aF_x}{2RF_N}, \quad F_x \ll \mu F_N \quad (9.22)$$

可以看出, 当切向力较小时, 打滑比与摩擦系数 μ 无关。 $|s| = \frac{aF_x}{2RF_N}$ 的线性关系见图 9.4 中虚线。实际滑动曲线和虚线的偏差就是接触面的“真实滑动”量。当 $F_x = \mu F_N$ 时, 整个接触面滑动, 由式(9.21)可知, 此时打滑

比为 $s = -\frac{\mu a}{R}$ 。由此,最大打滑比等于相同作用力下的“弹性打滑”式(9.22)的2倍。这两者的差值为:

$$s_{\text{sliding}} = -\frac{\mu a}{2R} \quad (9.23)$$

这就是由滑动引起的部分打滑。在“临界牵引力”(完全滑动开始前的瞬间)下,滚动接触中的滑动速度等于:

$$v_{\text{sliding}} \approx \frac{\mu a}{2R} v \quad (9.24)$$

其中 v 是轮子的移动速度。对于小的牵引力,可以根据完全打滑的表达式(9.21)和弹性部分打滑表达式(9.22)的差值来估算:

$$s_{\text{sliding}} = -\frac{\mu a}{8R} \left(\frac{F_x}{\mu F_N} \right)^2 \quad (9.25)$$

(3) 三维滚动接触问题

同样也可以按照和 Carter 相似的步骤来计算三维滚动接触面上的应力分布,这里叠加的两种应力分布为:

$$\tau^{(1)}(x, y) = \tau_1 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad (9.26)$$

$$\tau^{(2)}(x, y) = -\tau_2 \sqrt{1 - \frac{(x-d)^2 + y^2}{c^2}} \quad (9.27)$$

方程(9.27)的应力分布仅定义在黏着区。根据式(9.5),叠加应力产生的表面位移为:

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \frac{\tau_1}{a} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] - \frac{\tau_2}{c} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)(x-d)^2 - (4-\nu)y^2] \right\} \quad (9.28)$$

应变分量 $\epsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$ 为:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \left\{ -\frac{\tau_1}{a}x + \frac{\tau_2}{c}x - \frac{\tau_2}{c}d \right\} \quad (9.29)$$

根据滚动接触的两个要求,和圆柱接触一样,相同的条件须满足式(9.15)和(9.16),则应变和打滑比为:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \mu p_0 \frac{d}{a} \quad (9.30)$$

切向力为:

$$F_x = \frac{2}{3}\pi a^2 \tau_1 - \frac{2}{3}\pi c^2 \tau_2 = \mu F_N \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right] \quad (9.31)$$

和纯切向接触中的形式相同,黏着区半径为:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \quad (9.32)$$

打滑比^①为:

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = - \frac{3(4-3\nu)\mu F_N}{32Ga^2} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] \quad (9.33)$$

考虑关系式 $F_N = \frac{4}{3}E^* \frac{a^3}{R}$, 打滑比也可以写成如下形式:

$$s = - \frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] \quad (9.34)$$

对于小驱动力,可以得到下面的一阶近似:

$$s \approx - \frac{(4-3\nu)F_x}{32Ga^2} \quad (9.35)$$

习题

习题 1 估算:(a) 机车轮的滑动速度;(b) 汽车轮胎的滑动速度。

解答: (a) 对于机车轮,根据式(9.34)来计算打滑比:

$$s = - \frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right]$$

将 $F_x = \mu F_N$ 代入,可以得到临界牵引力下的打滑比为:

$$|s| = \frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R}$$

将打滑比乘以移动速度 v 可以算出滑动速度。如 $\mu \approx 0.3$, $a \approx 7$ mm, $R = 0.5$ m, $\nu = 1/3$, 则滑动速度为 $v_{\text{sliding}} \approx 5 \times 10^{-3} v$ 。移动速度为 30 m/s (108 km/h) 时, 滑动速度 $v_{\text{sliding}} \approx 0.14$ m/s。

(b) 对于汽车轮胎,在“临界牵引力”下, $\mu \approx 1$, $a \approx 5$ cm, $R = 0.3$ m, $\nu = 1/2$, 可以算出滑动速度 $v_{\text{sliding}} \approx 0.2v$ 。移动速度为 15 m/s (54 km/h) 时, 滑动速度约 3 m/s。“正常工作条件”(恒速 15 m/s) 下, 橡胶轮胎和路面间滚动接触的滑动速度非常小, 通常约为 1 cm/s。

^① 这个方程适用于刚性平面上的弹性轮。对于相同材料之间的接触, 滑动是方程(9.33)的 2 倍。

习题 2 估计从动轮或制动轮的能量损失。

解答：将作用在接触面的切向力乘以平均滑动速度，可以估算得到下面的接触摩擦功率：

$$\dot{W} \approx |s| F_x v = |s| \dot{W}_0$$

其中 $\dot{W}_0 = F_x v$ 是摩擦力功率。

习题 3 若力垂直于滚动方向，作用于一个弹性滚轮上，那么由于弹性变形和局部滑动，沿力的作用方向，轮子有一个速度分量（横向打滑）。计算弹性滚动球体的横向爬行比。

解答：令球体的转轴平行于 x 轴；没有横向力，球体会沿 y 方向滚动。黏着区总是在前缘，与载荷类型无关（见图 9.5）。

采用下面的应力：

$$\tau(x, y) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} - \mu p_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2 + (y-d)^2}{c^2}}$$

根据式(9.5)，相应的位移为：

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \frac{\mu p_0}{a} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] - \frac{\mu p_0}{a} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)(y-d)^2] \right\}$$

所需要的应变张量的分量为：

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\pi \mu p_0 (4-\nu)}{16G} \frac{d}{a}$$

这个值说明了一个角度，球体实际滚动的方向与理想滚动方向的夹角。同式(9.31)~(9.34)推导过程一样，得到横向打滑为：

$$\begin{aligned} s_{\perp} = \epsilon_{xy} &= -\frac{3\mu(4-\nu)}{32Ga^2} \mu F_N \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] \\ &= -\frac{(4-\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] \end{aligned}$$

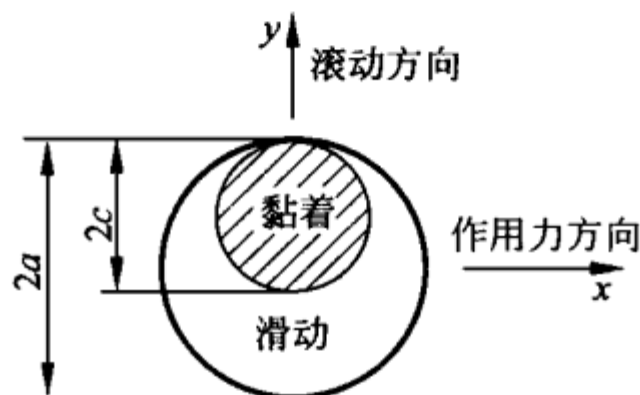


图 9.5 力垂直于滚动方向作用时，弹性滚轮的黏着区和滑动区

习题 4 讨论图 9.6 中的带传动。右边的主动轮在力矩驱动下,以恒定角速度 ω_1 转动,但从动轮(左边)转动的角速度 $\omega_2 < \omega_1$ 。黏着区,带上的力 F_1 为常数;滑动区,力减小到 F_2 ,见主动轮。相应地,从动轮上从黏着到滑动的变化也是这样。计算打滑比 s 和机械能的损失。

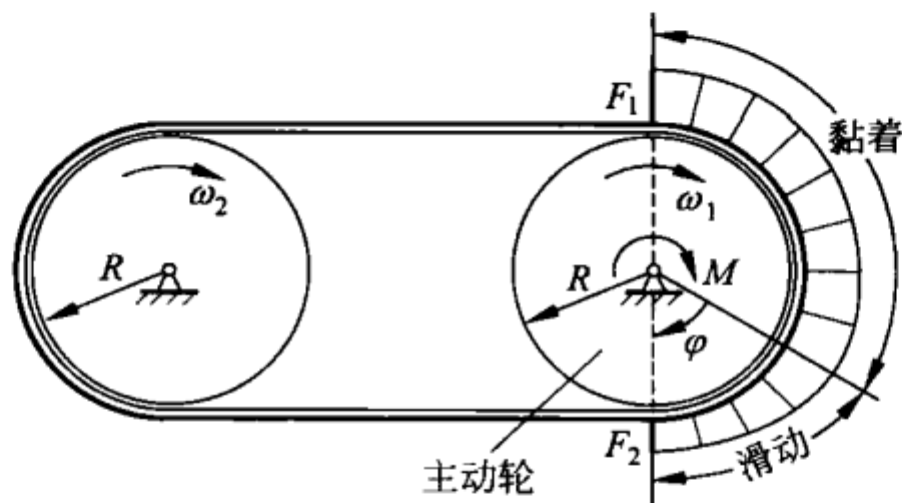


图 9.6 力矩 M 通过弹性带在两个轮之间的传递

解答: 带传动的力矩为:

$$M = (F_1 - F_2)R$$

在黏着区,带的伸长为常数,则在整个黏着区内张力是常数,并等于 F_1 。在滑动区,力减小到 F_2 ,这两个力满足下面方程(见第 10 章习题 4):

$$F_1/F_2 = e^{\mu\varphi}$$

带的弹性应变等于 $\epsilon = F/(EA)$,其中 E 是弹性模量, A 是横截面积。对于两个转轮之间的部分(上面和下面),应变为:

$$\epsilon_1 = \frac{F_1}{EA}, \quad \epsilon_2 = \frac{F_2}{EA}$$

每一点的质量流必须保持常数,则可以得到:

$$\frac{v_1}{1 + \epsilon_1} = \frac{v_2}{1 + \epsilon_2}$$

打滑比为:

$$s = 2 \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \approx \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{F_1 - F_2}{EA} = \frac{M}{REA}$$

损耗功率为:

$$\dot{W} = M(\omega_1 - \omega_2)$$

其中

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R}$$

当两个转轮的角速度差值较小时,可以得到:

$$\dot{W} \approx \frac{M^2 \bar{\omega}}{REA}$$

这里, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ 为平均角速度。

习题 5 一个轮以角速度 ω 滚动的同时,以角速度 Ω 绕纵轴转动^①(例如,汽车行驶时,转动方向盘)。假设摩擦力无穷大,计算扭转打滑(其定义为 $s = \Omega/\omega$)与扭矩的关系。

解答: 应力分布为:

$$\tau_x = \frac{8G(3-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \frac{s}{R} \frac{(a+x)y}{(a^2-r^2)^{1/2}}$$

$$\tau_y = \frac{8G(1-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \frac{s}{R} \frac{(a^2-2x^2-ax-y^2)}{(a^2-r^2)^{1/2}}$$

产生的表面位移必须满足黏着条件(整个接触面应变为常数)^②。该位移使得切向力等于零($F_x = F_y = 0$),扭矩为:

$$M_z = \frac{32(2-\nu)}{9(3-2\nu)} \frac{a^4}{R} Gs$$

产生的打滑比为:

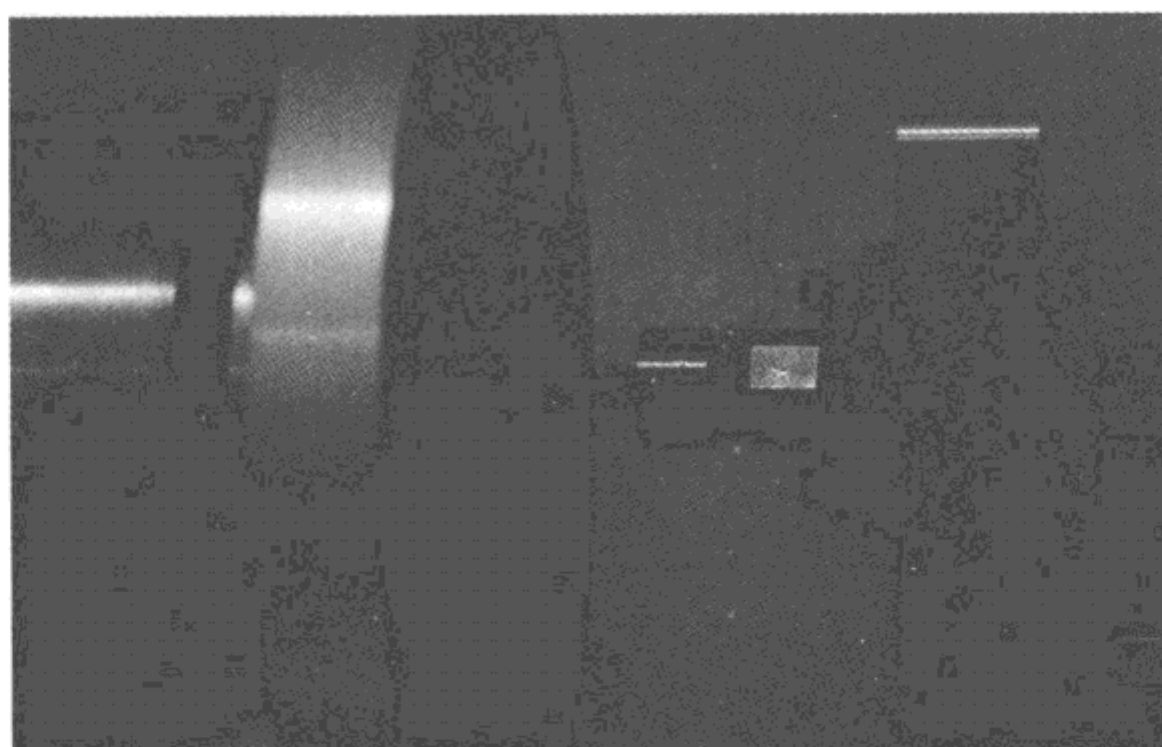
$$s = \frac{9(3-2\nu)}{32(2-\nu)} \frac{R}{a^4} \frac{M_z}{G}$$

① 转轴垂直于底座的旋转称为自旋。

② K. L. Johnson. The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics, 1958, 25: 332.

第 10 章

库仑摩擦定律



10.1 概述

本章只研究两个固体间的干摩擦或者库仑摩擦。两个固体之间的摩擦是极其复杂的物理现象,它包含了接触体表层的弹性变形和塑性变形、磨损粒子间的相互作用、连续材料的微细裂缝和修复、电子和声子的激发、化学反应和粒子从一个物体到另一个物体的转移等。令人惊讶的是,它可以用很简单的干摩擦定律来表达。在很多工程应用中,这个一阶近似就足够了:摩擦力与法向力成正比,并且与速度无关。干摩擦这个性能的令人惊讶之处在于,一阶近似中,它既跟接触面积无关,也跟粗糙度无关。这个性能使得我们能使用摩擦系数这个概念,但是摩擦系数只给出了摩擦力和法向力比值的一阶近似粗略值。

达·芬奇(Leonardo da Vinci)是用实验研究摩擦定律的第一人,并得

到了一些最重要的原理(例如摩擦阻力与重量成正比,与接触面积无关)。在图 10.1 所示的实验中,他得出了后一个结论。



图 10.1 来源于 Leonardo da Vinci 笔记的草图,描述了摩擦力与接触面积的无关性

10.2 静摩擦与动摩擦

通过详细的实验研究,库仑(1736—1806)计算出了当两个固体在法向力 F_N 作用下被挤压在一起时(见图 10.2),它们之间的摩擦力 F_R ,这个摩擦力表现出下面的简单近似性质:

(1) 静摩擦。为了使停留在平面上的物体动起来,必须要克服一个临界力,也就是静摩擦力 F_s ,这个力与法向力 F_N 粗略地成正比^①:

$$F_s = \mu_s F_N \quad (10.1)$$

系数 μ_s 称为静摩擦系数,与接触材料有关,但与接触面积和粗糙度几乎无关。

(2) 动摩擦。动摩擦力 F_R 是克服静摩擦力后,作用在物体上的阻力。库仑通过实验,归纳出动摩擦力的以下性质:

① 动摩擦力与法向力 F_N 成正比:

$$F_R = \mu_k F_N \quad (10.2)$$

② 动摩擦力与接触面积或表面粗糙度关系不重要,可以忽略。

③ 动摩擦系数近似等于静摩擦系数:

$$\mu_k \approx \mu_s \quad (10.3)$$

④ 动摩擦力与滑动速度无关,或者关系很微弱。

这个定律只给出了干摩擦的粗略概要。更加详尽的分析表明,静摩擦

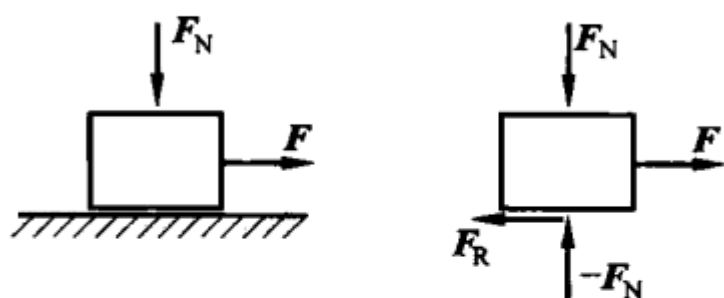


图 10.2 平面上的物体同时受到法向力和切向力作用(同时给出反作用力和摩擦力)

^① 这个比例关系称为 Amontons 定律。

力和动摩擦力的起源相同,而且在很多机械问题中不能被分开考虑。我们已经看到,当接触切向受载时,通常发生局部滑动,甚至在“宏观滑动”还没有发生时。因此,静摩擦系数和动摩擦系数的差别被证明是相对的:通常,从静止接触到滑动接触的转变是连续的(例如从动轮中),或者说“静摩擦”以非常低的速度下的滑动摩擦出现(例如橡胶摩擦,路面上的橡胶轮胎)^①。

10.3 摩擦角

计算摩擦系数最简单的实验方法就是测量放在一个斜面上的物体开始滑动时斜面的倾斜角,这个方法在实际中总是可行的。这个角度称为摩擦角。作用在这个物体上的力见图 10.3(b)。

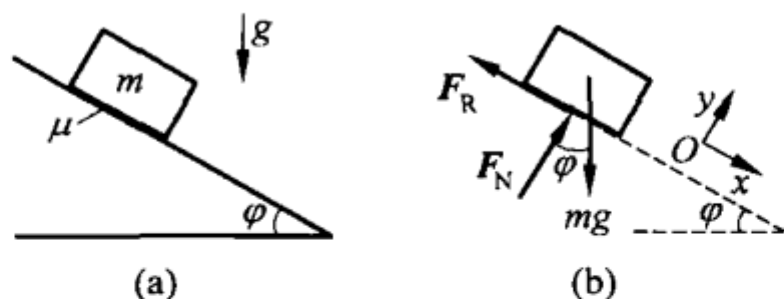


图 10.3 斜面上的物体

当达到摩擦角时,静摩擦力达到最大值 $F_s = \mu_s F_N$ 。这个临界状态下,力的平衡为(坐标系见图 10.3(b)):

$$\begin{cases} x: mg \sin \varphi - \mu_s F_N = 0 \\ y: F_N - mg \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

因此,可以得出:

$$\tan \varphi = \mu_s \quad (10.5)$$

根据这个结果,摩擦角的正切值等于静摩擦系数。

10.4 摩擦系数与接触时间的关系^②

同样,也是库仑对摩擦定律进行了一些修正。他发现,在其他物体中间,静摩擦力随着物体停留时间的增加而增大。库仑的实验数据见

① “速度相关和状态相关摩擦”的统一概念在 20.3 节中具体讨论,但这个概念不能区别“静摩擦”和“动摩擦”。

② 见 20.3 节。

表 10.1。图 10.4 中用一条直线描绘出摩擦力作为时间的对数的函数：静摩擦力随着时间的增加呈对数增长。

表 10.1 对于橡木与涂抹动物油脂的橡木，静摩擦力与停留时间的关系

| t/min | $F_s/\text{arb. units}$ |
|----------------|-------------------------|
| 0 | 5.02 |
| 2 | 7.90 |
| 4 | 8.66 |
| 9 | 9.25 |
| 26 | 10.36 |
| 60 | 11.86 |
| 960 | 15.35 |

注：arb. units 表示任意单位。

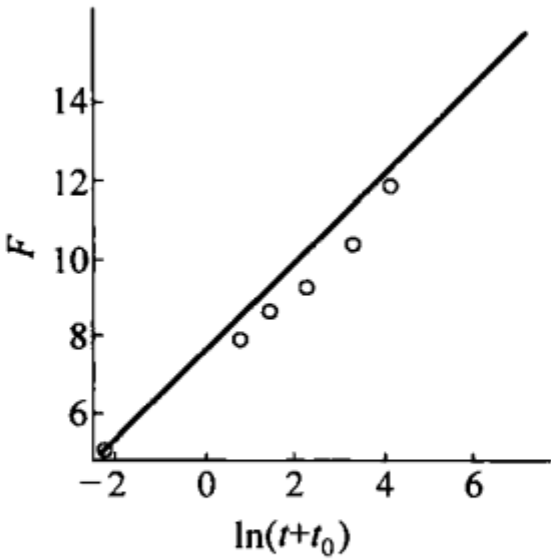


图 10.4 根据表 10.1 得到的库仑数据
静摩擦力与时间对数的关系 $F=a+b\ln(t+t_0)$ ，
其中 $a=7.28, b=1.10, t_0=0.101\text{ min}$

这个时间关系的物理原因是多种多样的。对金属材料，由于蠕变总是存在，微观接触中的真实接触面积随着时间的增加而增长。高温下这种增长会更快。当接触面增大，这个过程就会变慢，接触面积与时间呈对数关系，由于接触面积与静摩擦力的关系，静摩擦力与时间也呈对数关系。这种增长开始于原子尺度上——亚毫微秒域——面积增长从第一个原子接触的瞬间开始，然后随时间持续增长，甚至很长的时间。对于高弹性材料，由于材料的黏弹性，这个效应与接触面积的增加密不可分。毛细力也是由于摩擦力产生的，它也导致了静摩擦力和时间的近似对数关系。

需要提到的是，“静”摩擦系数的时间关系表现出了摩擦力的动态过

程。如果摩擦系数取决于接触时间,那么这种关系也会适用于滚动接触,因为“滚动”可以看做接触面上很多新接触的一个连续不断的重建过程。滚动速度较大时,接触时间很小,就可以得到一个很小的“静”摩擦力。

同样,在动摩擦过程中,微凸体互相接触,接触时间与滑动速度有关,动摩擦力也与滑动速度有关。这些例子表明,“静”摩擦与“动”摩擦之间的差别是相对的,这些例子提供了一个很粗略的概念。现实中,动摩擦与静摩擦息息相关,具有接触动力学特性。

10.5 摩擦系数与法向力的关系

同样,摩擦力与法向力的线性关系式(10.1)或(10.2),仅适用于特定的力范围——法向力不能太大或者太小。对于金属材料,这个范围涵盖了几个数量级,如图 10.5 所示^①。

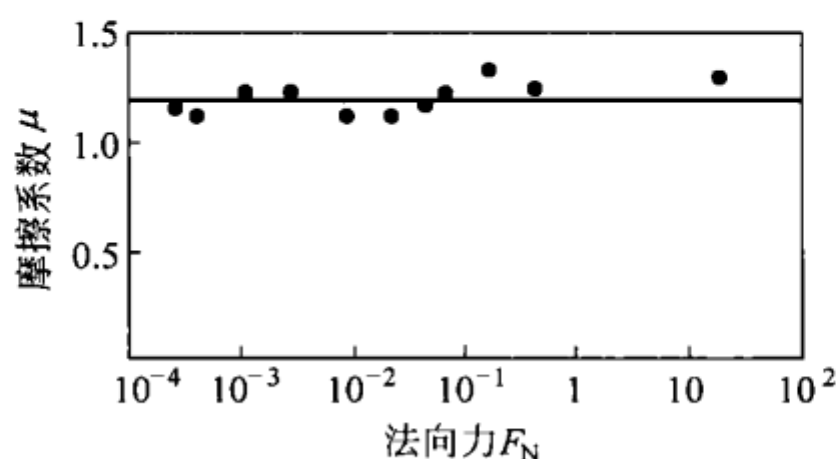


图 10.5 钢和抛光铝之间的摩擦系数(载荷从 10 mg

到 10 kg,也就是载荷变化数量级相差 10^6 ,摩擦系数保持不变)

当实际接触面积和表面接触面积近似相等时,这个关系就不再适用。对于较软的金属(如铟或铅),特别是聚合物或者高弹体,很容易达到此状态,因此这种摩擦行为明显偏离 Amontons 定理。图 10.6 描述了钢和聚四氟乙烯(Teflon)之间的摩擦力和法向力的关系,可见摩擦力近似正比于 $F_N^{0.85}$,即摩擦系数随着法向力的增加而减小。

^① F. P. Bowden, D. Tabor, The Friction and Lubrication of Solids. Oxford: Clarendon Press, 2001.

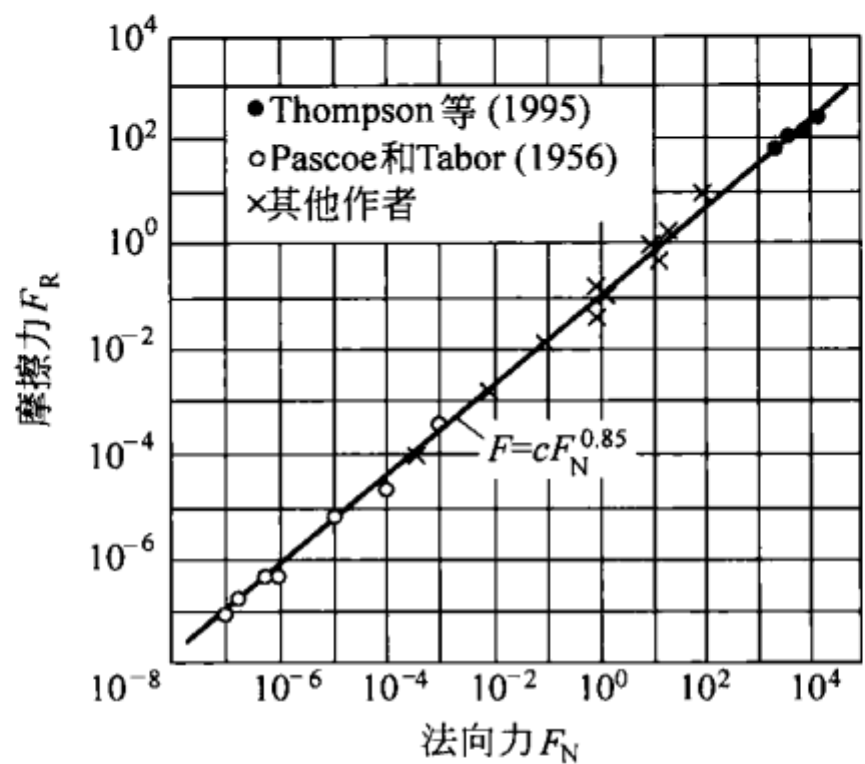


图 10.6 钢和聚四氟乙烯(Teflon)之间摩擦力和法向力的关系
(资料来源: E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1995)

10.6 摩擦系数与滑动速度的关系^①

为了简便起见,经常假设动摩擦系数与滑动速度无关。在速度不是很高或者很低的情况下,这是一个很好的近似。在很多应用中,摩擦力与滑动速度的精确关系很重要。如果摩擦力随着滑动速度的增大而减小,滑动就不稳定,通常会导致摩擦失稳^②。

10.7 摩擦系数与表面粗糙度的关系

摩擦的起源经常用表面粗糙度来解释。在力学中,人们描述有摩擦存在的表面为“粗糙”,而通常将“光滑”表面视为无摩擦。每个摩擦学工作者都知道这些定义并不适用。对于多数粗糙表面而言,摩擦力与粗糙度无关,或者关系甚微。但是,对于特别光滑的金属表面,摩擦系数甚至要大于粗糙表面。粗糙度对摩擦的影响取决于很多因素,如在摩擦接触中存在杂质或液体油膜。

放射性元素在两个接触体之间转移的实验证明摩擦(和磨损)与表面粗

① 见 20.3 节。
② 摩擦失稳将在第 12 章中详细讨论。

糙度的关系很微弱。图 10.7 给出了实验结果, 实验中一个放射性铜块放置在一个铜盘上被拖动, 其中铜盘的一部分粗糙度为 25 nm, 另一部分粗糙度是它的 20 倍(500 nm)。如此大区别的粗糙度几乎对摩擦力和接触体间的材料传输没有影响(可以通过后来的放射性测量看到)。此外, 粗糙度甚至对实际接触面积的大小也影响不大。

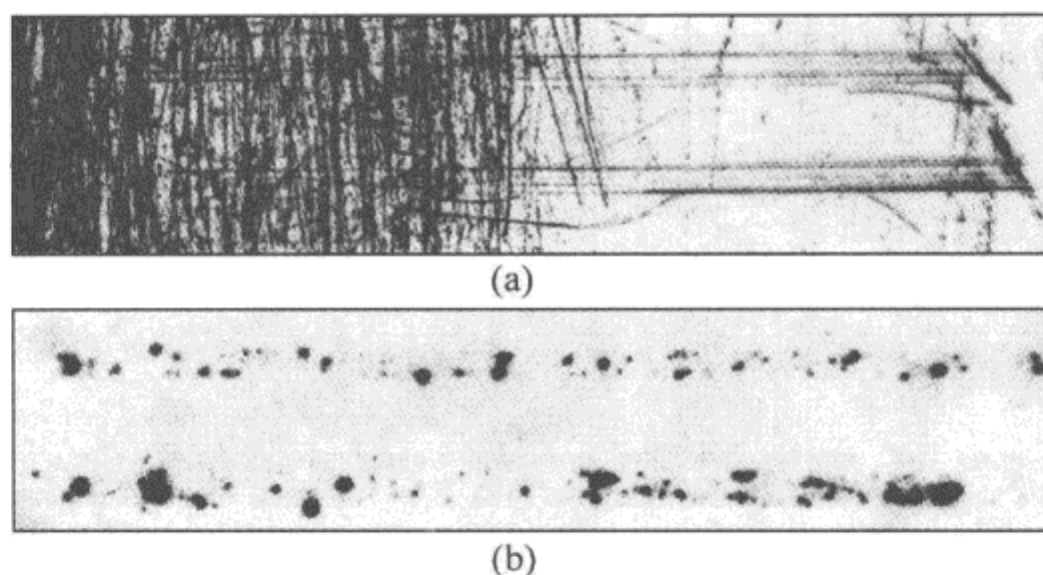


图 10.7 载荷为 40 N, 滑动速度为 0.01 cm/s 时, 铜表面的形貌图片和对应的射线照片, 其中一部分粗糙度为 25 nm, 另一部分是其 20 倍, 即 500 nm。摩擦力和磨损几乎与粗糙度无关^①

10.8 库仑对摩擦定理起源的观点

库仑首先提出了关于摩擦定理起源的模型, 该模型用简单的方法解释了干摩擦的一些重要性质。根据他的观点, 两个接触表面的微观粗糙体之间的相互作用是摩擦力产生的原因, 见图 10.8。与上述相比, 现实中表面粗糙度对摩擦的影响是非常复杂的。然而, 即使是现代非常详细的分析得出的也是这个最简单的看法, 而这一点库仑早已提出, 所以这里快速讨论一下这个观点。

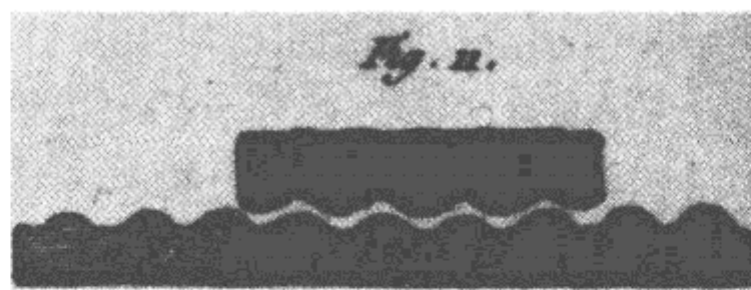


图 10.8 微凸体之间的相互作用是摩擦力的起源(库仑的草图)

^① E. Rabinowicz. Friction and Wear of Materials. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

按照库仑的观点,考虑这样的干摩擦模型:将一个物体压在一个波纹状的表面。为了简化问题,将物体看做一个质点。模型见图 10.9。

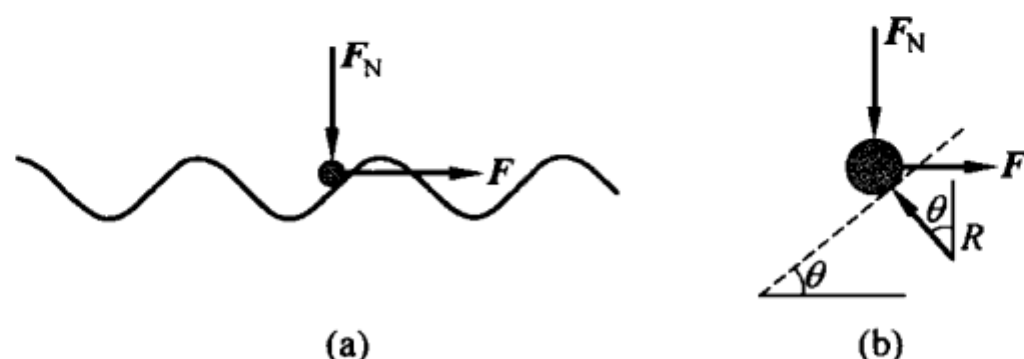


图 10.9 库仑对于干摩擦的简化模型

在波形表面和质点之间,不再有更小尺度的静摩擦(波形表面光滑)。平衡条件由图 10.9(b)中的受力图得到:

$$R \cos \theta = F_N, \quad R \sin \theta = F \quad (10.6)$$

因此有:

$$F = F_N \tan \theta \quad (10.7)$$

根据定义,静摩擦力 F_s 等于最大力 F ,此时仍然能保持平衡:

$$F_s = F_{\max} = F_N \tan \theta_{\max} \quad (10.8)$$

静摩擦系数等于表面最大斜率:

$$\mu_s = \tan \theta_{\max} \quad (10.9)$$

这个模型采用一个简单的方法给出了干摩擦的一个重要性质——摩擦力与法向力成正比,而且对摩擦系数做出了简单的几何解释。如果这个模型用于具有周期“波形”的足够大的物体,和库仑草图中的一样,那么这个模型也可以解释摩擦系数和接触面积的无关性。但是,这个模型不能解释摩擦力和粗糙度之间可观察到的无关性(或微弱相关)。

10.9 Bowden 和 Tabor 理论

为了说明库仑摩擦定律的普遍性和简单性,很多人做了大量的研究。看起来库仑摩擦定律的鲁棒性有几个因素发挥作用。摩擦力与法向力成正比的一个重要原因在于粗糙表面的接触性质。从第 7 章中可以看到,一些接触性质随着法向力的增大而近似地呈线性增长,与表面接触面积无关,比如实际接触面积和接触长度。相比而言,在微观接触中,表面斜率与法向力无关(或有微弱相关)。如果按照库仑的观点,采用接触表面的斜率来解释

摩擦力,那么摩擦系数就与法向力无关。但是对于磨光表面和抛光表面,摩擦系数会有很大不同,而通常情况并不是这样。

1949 年, Bowden 和 Tabor 提出了一个简单的理论,通过冷焊节点的形成解释了纯金属表面之间动摩擦的起源。如果两个物体被积压在一起,那么在几个位置,它们会靠得非常近,以至于一个物体的原子与另外一个物体的原子开始接触,而大部分区域内物体之间存在很大间隙以至于原子的相互作用可以忽略。这些接触面被称为桥,所有这些桥的面积总和就是实际接触面积 A 。剩余的面积通常远大于实际接触面积,但是却几乎对摩擦力没有贡献。

对于金属,在多数实际情况中,通过假设所有微观接触都发生塑性变形,应力等于材料的压痕硬度 σ_0 ,可以近似得到实际接触面积为:

$$A \approx F_N / \sigma_0 \quad (10.10)$$

如果需要一个切应力来剪切一个冷焊点,那么最大静摩擦力等于:

$$F_s = F_N \frac{\tau_c}{\sigma_0} \quad (10.11)$$

因为各向同性的塑性物体的剪切强度约为抗拉强度的 $1/\sqrt{3}$,而抗拉强度约为压痕硬度的 $1/3$,因此可以得到这样的普遍关系 $F_s \approx \left(\frac{1}{6} \sim \frac{1}{5}\right) F_N$,从而有摩擦系数 $\mu \approx \frac{1}{6} \sim \frac{1}{5}$ 。对于很多无润滑金属对(例如钢对青铜,或钢对铸铁),有效摩擦系数约为 $\mu \approx 0.16 \sim 0.2$ 。对于更大的压紧力,纯金属之间的摩擦系数能达到较高值,这可能跟更大的塑性变形而产生的表面形貌显著变化有关。

不同材料之间的摩擦系数取决于很多参数。但是,基于 Bowden 和 Tabor 的观点,可以做出粗略的分类。首先,在摩擦学接触中,对于较强的黏着,接触中压缩和拉伸同时存在。在压缩区域,应力粗略等于硬度, $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$; 拉伸区域, $\sigma_0 \approx \zeta\sigma_c$, 其中 ζ 一般小于 3。法向力为:

$$F_N = \sigma_c (3A_{\text{comp}} - \zeta A_{\text{ten}}) \quad (10.12)$$

如果所有的冷焊点被剪切,那么静摩擦力为:

$$F_s \approx \tau_c (A_{\text{comp}} + A_{\text{ten}}) \quad (10.13)$$

下面是摩擦系数的近似结果:

$$\mu \approx \frac{\tau_c (A_{\text{comp}} + A_{\text{ten}})}{\sigma_c (3A_{\text{comp}} - \zeta A_{\text{ten}})} \quad (10.14)$$

假设 $\tau_c \approx \sigma_c / \sqrt{3}$ (这适用于各向同性塑性物体),可以得到近似值:

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{A_{\text{comp}} + A_{\text{ten}}}{3A_{\text{comp}} - \zeta A_{\text{ten}}} \quad (10.15)$$

考虑下列情形：

(1) 纯金属,带有最少量润滑剂,润滑剂没有润滑作用,但可以防止金属黏着。则这个例子中, $A_{\text{ten}}=0$,摩擦系数跟前面提到普遍值的数量级相同,即

$$\mu \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.19 \quad (10.16)$$

这是“正常状态”下典型的金属之间的干摩擦系数。在这种状态下,物体表面被氧化物和其他少量杂质覆盖。

(2) 纯金属,表面没有润滑剂,但有氧化物。这个例子中,假设黏着较强,则压缩应力和拉伸应力的面积大致相等。微观接触承受载荷,这点依然成立,因为拉伸和压缩的塑性性能不同。摩擦系数近似为:

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3-\zeta} \quad (10.17)$$

对于 $\zeta=1\sim 2$,这个方程得出的摩擦系数范围为 $\mu \approx 0.6\sim 1.2$ 。对于各向同性材料,我们已经得到了这个估算结果。立方晶格金属(如铁,铝,铜,镍,铅,锡)的摩擦系数就在此值左右。对于六方晶格金属(镁,钛,锌,镉)来说,摩擦系数约为 0.6。

(3) 纯金属,表面覆盖一层薄的软金属(如铅或锡在钢、铜或银等表面)。只要薄片足够薄(约 100 nm),式(10.11)就有效,其中 σ_0 是较硬金属的硬度, τ_c 是较软材料的剪切强度。这个例子中,摩擦系数小于纯金属的摩擦系数,约为 0.1 或者更小。

(4) 多相材料。应用于摩擦学的多数材料都不是纯金属,而是多相合金,通常由较硬的基体和较软的包含体组成。例如,锡青铜和铅青铜都是这种结构,用于轴承材料中。根据上面情况(3)描述的机理,可以假设这些合金的功能是基于较软材料被挤压出来在滑动表面形成一个薄层来减小摩擦。

(5) 仅发生弹性变形的表面。对于钻石或非晶碳涂层等材料,式(10.11)不再适用,因为表面发生纯弹性变形。

10.10 摩擦系数与温度的关系

因为剪切强度和硬度的关系与温度无关,所以纯金属之间的摩擦系数也与温度无关。只要条件没有变化以至于在以上五种情形之间发生转变,

该规律就有效。一个较硬的表面有一个较软薄层,如果温度达到薄层的熔点,摩擦系数就会迅速增长。对于金属薄层,当达到其熔点时,摩擦系数会突然迅速增大。对于油脂或者滑动表面形成的金属皂,当达到油脂或金属皂的软化温度时,就会发生这样的变化。

在上一节“情形(1)”描述的“正常状态”下,对于很多金属对,摩擦系数与温度几乎无关。当温度在 200℃ 和 300℃ 之间时,摩擦系数会急剧增大(成倍或成 3 倍的增长)。当温度更高时,摩擦系数几乎保持不变或以很慢的速率增长,典型的温度曲线见图 10.10。显然,这是因为杂质层或少量油脂的软化或分解造成的。

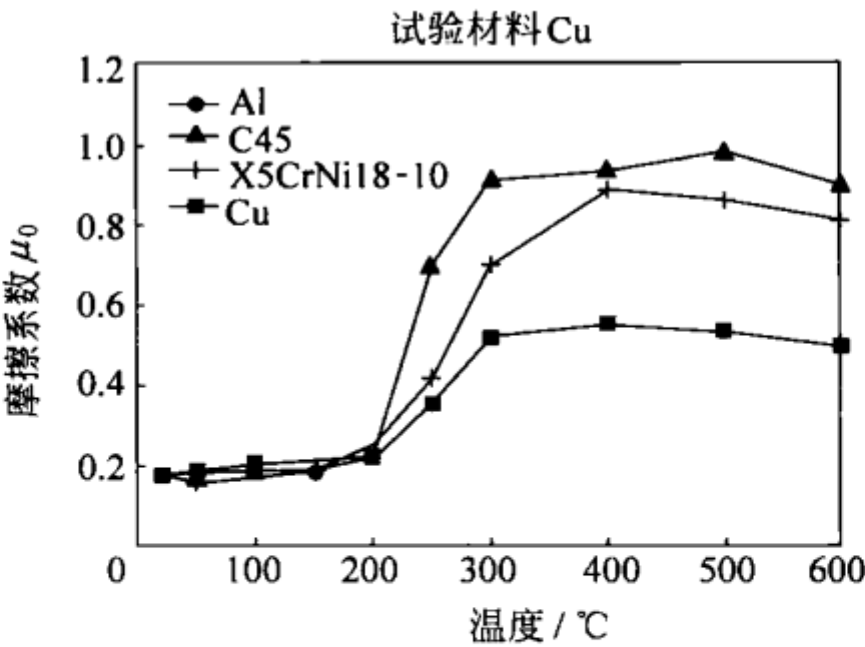


图 10.10 与铝、钢和铜配对的铜试样,摩擦系数与温度的函数关系
(数据来源: Martin Köhler. Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten Zwischen zwei Metallischen Festkörpern. Cuvillier Verlag Göttingen, 2005)

当温度较低时,摩擦系数是相对较小的常数(典型的值约为 0.16~0.22),且与接触对的材料关系不大。在这个温度区间,摩擦过程中氧化层或其他杂质层保持在表面。而在较高的温度区间,金属会出现接触。

习题^①

习题 1 自锁。一根梁接在一个衬套上,衬套可以在一根杆上垂直移动。一个可移动的砝码沿着梁滑动(见图 10.11(a))。只要砝码离竖直杆

① 本章的习题中,库仑摩擦定律采用最简单的表达式(10.1)和(10.2)。

的距离足够远,它就可以在施加于衬套边角点的摩擦力作用下保持不动(自锁)。计算自锁所需的距离。

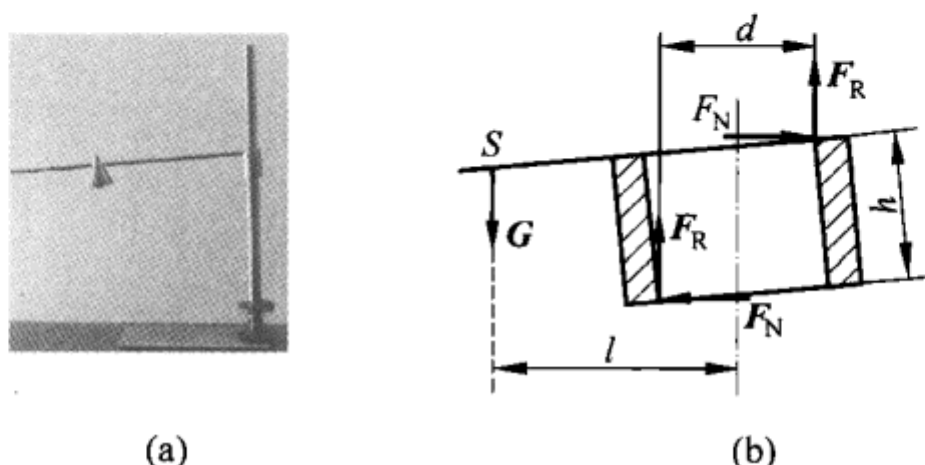


图 10.11 简单的自锁系统以及对应的受力图

解答: 根据水平方向的平衡条件,两个边角点的反作用力应该相等(见图 10.11(b))。在滑动和自锁的极限点,摩擦力达到最大值 $F_s = \mu_s F_N$ 。根据垂直方向的力平衡,可以得到:

$$2\mu_s F_N - G = 0$$

衬套中心的力矩平衡为:

$$Gl - 2F_N \frac{h}{2} = 0$$

因此,需要的距离为:

$$l_c = \frac{h}{2\mu_s}$$

习题 2 横向力。由于轮胎和路面之间存在摩擦力,汽车能够进行加速或刹车。这个摩擦力 F_R 应该小于最大静摩擦力 $F_R^{\text{①}}$: $F_R < F_s = \mu_k F_N$ 。计算横向力 F_{\perp} 多大时,汽车开始打滑(见图 10.12)?

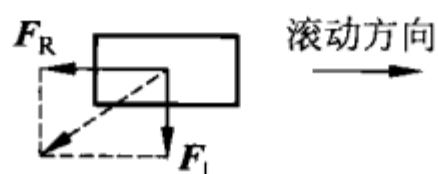


图 10.12 滚动接触中产生的力

解答: 在滚动接触中,制动力和横向力都是摩擦力的分力。当 $F_R^2 + F_{\perp}^2 > F_s^2$ 时,发生完全滑动。因此可得到:

$$F_{\perp} > \sqrt{(\mu_k F_N)^2 - F_R^2}$$

① 对于滚动接触,采用动摩擦系数来计算最大摩擦力 $F_s = \mu_k F_N$,因为它经历了从部分滑到全滑动的转变。

习题 3 在汽车完全制动中, 轮子被锁住并沿路面以速度 v_0 滑动(见图 10.13)。当一个较小的力 F_{\perp} 沿横线作用时, 产生的横向速度是多少?

解答: 动摩擦力的大小与速度无关, 但是方向与速度方向完全相反。由此可以得到

$\frac{v_{\perp}}{v_0} \approx \frac{F_{\perp}}{\mu_k F_N}$, 则有:

$$v_{\perp} \approx F_{\perp} \left(\frac{v_0}{\mu_k F_N} \right)$$

则横向速度与横向力成正比。

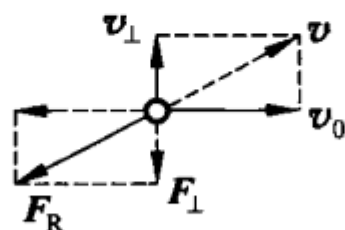


图 10.13 在小横向力 F_{\perp} 的作用下, 滑动轮的力分量和速度分量

习题 4 带摩擦/绳摩擦。一根绳索悬挂在一根杆上(见图 10.14(a))。第一个和最后一个接触点之间的角度为 $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ 。绳索一端受到拉力 F_2 作用。计算使绳索保持不动所需要的力 F_1 。

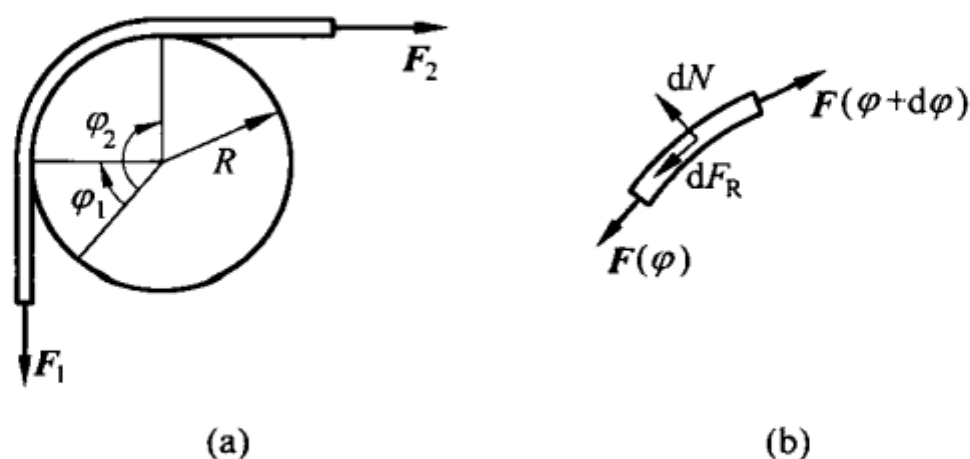


图 10.14 一根绳索缠绕在杆上以及对应微单元的受力图

解答: 考虑一个无限小的绳索单元(见图 10.14(b))。根据该单元上的力平衡, 可以得到:

$$F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) - dF_R = 0$$

或者

$$\frac{dF}{d\varphi} d\varphi - dF_R = 0$$

在垂直方向上有:

$$dN - F d\varphi = 0$$

这里, dN 是作用在单元上的反作用力, dF_R 是作用在单元上的摩擦力。当摩擦力达到最大值时 $dF_R = \mu dN$, 绳索就不会滑动。由这三个方程, 我们可以得到:

$$\frac{dF}{d\varphi} = \mu F$$

分离变量 $dF/F = \mu d\varphi$ 并积分, 得到 $\ln F \Big|_{F_1}^{F_2} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu\alpha$, 因此可以得到:

$$F_2 = F_1 e^{\mu\alpha} \quad \text{或} \quad F_1 = F_2 e^{-\mu\alpha}$$

数值举例: 对 $\mu=0.4$, $\alpha=2\pi$ (完整的一圈), $F_2 \approx 12F_1$ 。对于两圈, 我们得到 $F_2 \approx 152F_1$ 。

习题 5 一个半径为 R 的圆柱容器填了沙子。假设沙子与容器壁的摩擦系数为 μ 。计算沙子中压力和高度的函数关系。

解答: 如果摩擦系数不是很大, 那么沙子中的压力是“几乎各向同性”(同液体中的一样)的。由这个近似, 分析沙子圆柱体的无限小薄片的力平衡 (见图 10.15):

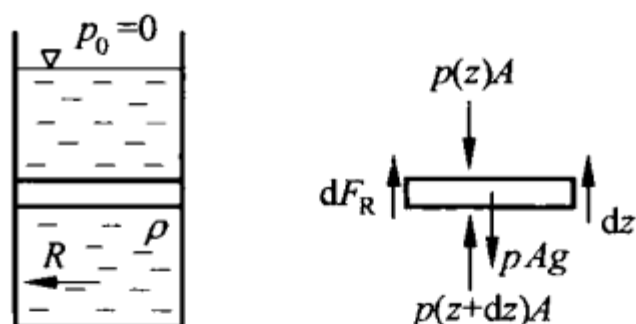


图 10.15 圆柱中沙子层的无限小薄片

$$\rho g \pi R^2 dz + [p(z) - p(z + dz)] \pi R^2 - dF_R = 0$$

或者

$$\rho g \pi R^2 dz - \frac{dp}{dz} dz \cdot \pi R^2 - dF_R = 0$$

根据库仑定律, 摩擦力为 $dF_R = \mu p 2\pi R dz$ 。由这两个方程, 可得到:

$$\rho g - \frac{dp}{dz} - 2 \frac{\mu p}{R} = 0$$

分离变量 $dz = \frac{dp}{\rho g - 2\mu p/R}$, 积分, 可以得到:

$$p = \frac{\rho g R}{2\mu} (1 - e^{-\frac{2\mu z}{R}})$$

当 z 较大时, 压力达到饱和值 $p_\infty = \rho g R / (2\mu)$ 。

习题 6 叉形杆用于控制汽车的前轮, 它是用下面的方法制造的。首先, 将钣金压制成叉形杆 (见图 10.16 (a))。第二步, 将橡胶-金属的轴承 (见图 10.16 (b)) 压进叉形杆 (见图 10.16 (c))。为了控制质量, 要将轴承再次取出来, 需要至少 5.5 kN 的力。计算将轴承再次取出需要的力。哪些因素影响这个力? 数据如下: 圆柱孔的高度 $L=2$ cm, 圆柱孔半径 $R=1.6$ cm, 金属板厚度 $t=1.6$ mm, 金属的屈服强度 $\sigma_c=300$ MPa, 摩擦系数 $\mu=0.16$ 。

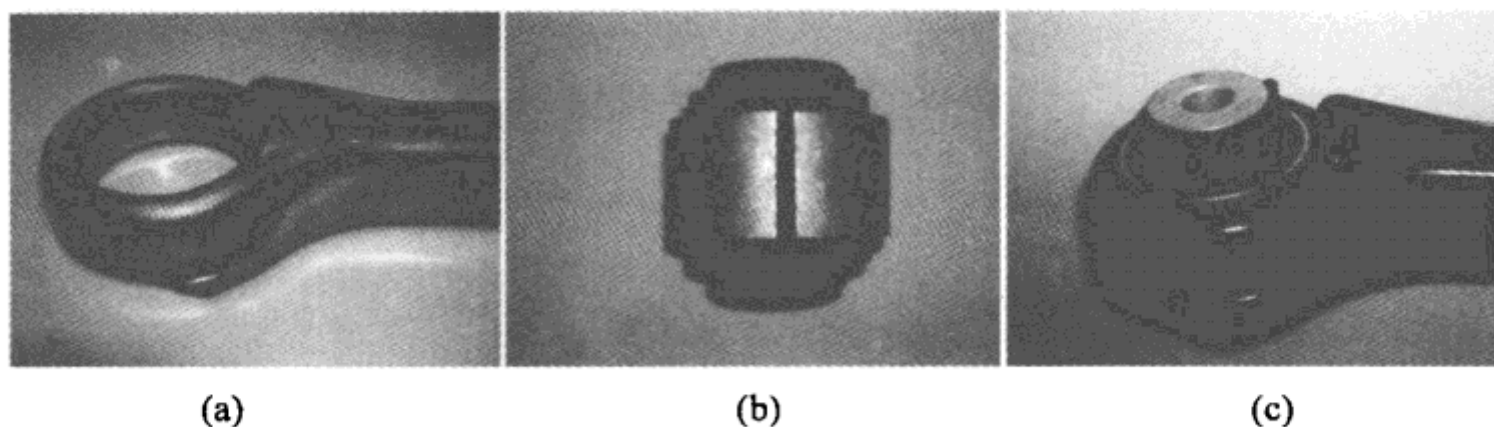


图 10.16

(a) 有钣金孔的叉形杆；(b) 开缝的橡胶-金属轴承；(c) 将轴承压入后安装完成的叉形杆

解答：作用在圆孔上的径向应力 σ_r 导致了金属板中出现拉伸应力 σ_φ (见图 10.17)。这些应力的相互依赖关系见薄壁压力容器应力公式, $\sigma_\varphi = \sigma_r R/t$ 。将轴承挤压进去, 薄板金属发生塑性变形: $\sigma_\varphi = \sigma_c$ 。

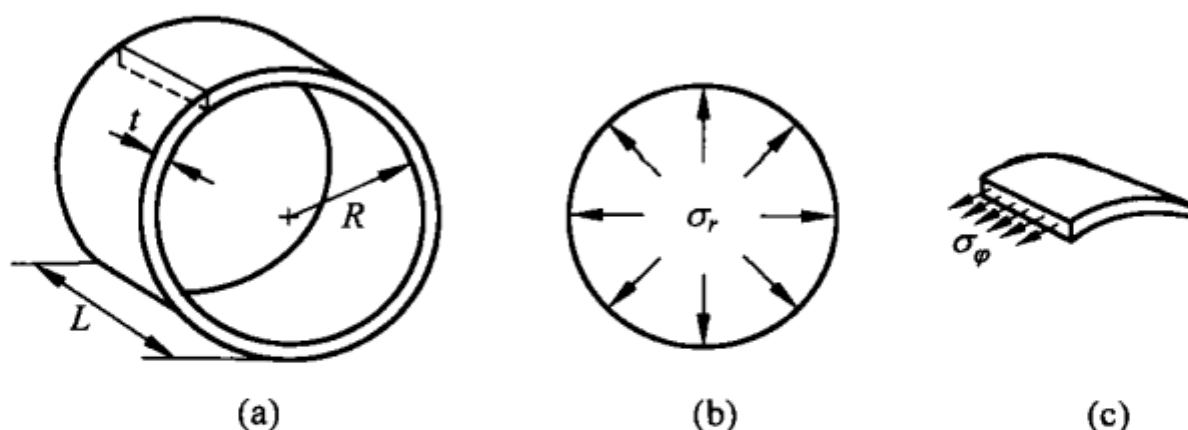


图 10.17

(a) 薄壁圆柱；(b) 表面压缩引起的恒定径向应力；(c) 截面上的圆周应力 σ_φ

由此可得径向应力为：

$$\sigma_r = \sigma_c \frac{t}{R}$$

最大静摩擦力为这个应力与圆孔表面积 $2\pi RL$ 、摩擦系数的乘积：

$$F_{\text{removal}} = 2\pi L \mu \sigma_c t$$

按照题目中给的参数, 移动轴承需要的力 $F_{\text{removal}} \approx 9.6 \text{ kN}$ 。

习题 7 热循环蠕动。一块长为 L 的盘放置在一个表面上, 摩擦系数为 μ 。小于动摩擦力的力 F 沿水平方向作用在盘上。如果盘被加热, 那么由于力 F 的作用, 它会相对于地面非对称地扩展。如果温度下降到原来的值, 那么它会再次收缩。计算一个完整的热循环后盘的位移(见图 10.18)。

解答：假设盘足够硬。如果盘被加热, 那它会对称地扩展 $\Delta L = \alpha \Delta T L$,

则其中心保持不变。如果在加热中施加力 F , 那么它会不对称扩展。此时不是盘的形心而是在左边距离形心 Δl 的点将保持平稳, 因为为了与力 F 平衡, 作用在右边的那部分摩擦力一定小于作用在左边的摩擦力(见图 10.19)。

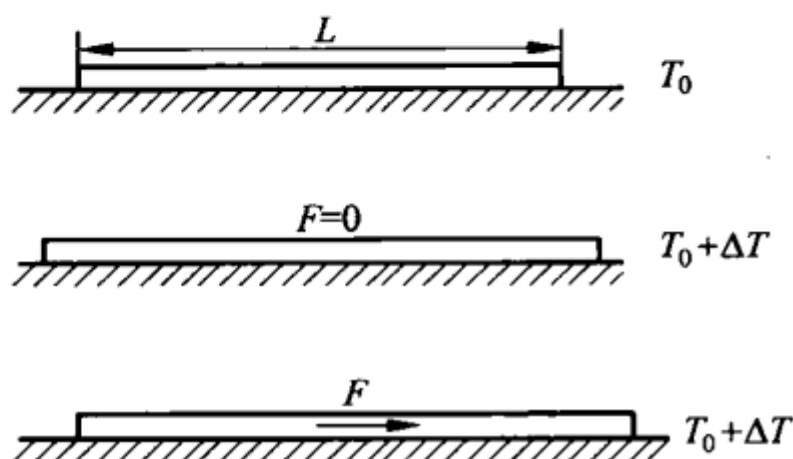


图 10.18 盘在表面的热蠕动过程,
摩擦系数为 μ

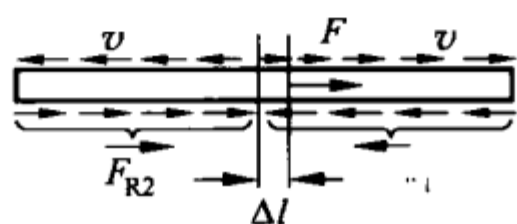


图 10.19 蠕动过程的力学

因为摩擦力与运动方向相反, 较大的那部分摩擦力作用方向是向左的。所以, 加热过程的平衡条件为:

$$F - \mu mg \left(\frac{L/2 + \Delta l}{L} \right) + \mu mg \left(\frac{L/2 - \Delta l}{L} \right) = 0$$

由此可得:

$$\Delta l = \frac{F}{\mu mg} \frac{L}{2}$$

因此, 加热过程中形心的位移为:

$$u_s = \epsilon_{th} \Delta l = \frac{FL}{2\mu mg} \alpha \Delta T$$

在冷却过程中, 形心沿相同的方向移动相同的距离: 现在平稳点必须位于形心的右边, 因为扩展或收缩方向和摩擦力的方向完全相反。因此, 这个循环中总位移为:

$$u_{tot} = \frac{FL}{\mu mg} \alpha \Delta T$$

位移与力成正比, 甚至在很小的力时也是如此。在不同热膨胀系数的相交界, 类似的过程是造成多相材料或混合物热循环蠕动的的原因。

习题 8 计算最大斜率为 $\mu_1 = \tan \theta_1$ 的波形表面的静摩擦系数(见图 10.20), 存在摩擦系数为 μ_0 的“微观”摩擦。

解答: 根据图 10.21, 能得到下列平衡方程(x' 和 z' 方向):

图 10.20 摩擦系数为 μ_0 的波形表面

$$F_N \cos \theta_1 + F \sin \theta_1 = R$$

$$F_N \sin \theta_1 + \mu_0 R = F \cos \theta_1$$

由此可得：

$$\mu = \frac{F}{F_N} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1}$$

注意,对于不同尺度的摩擦系数,这个“叠加原理”有一个简单几何解释,也就是说这些不同尺度的摩擦角可以相加。实际上,当有 $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\mu_1 = \tan \theta_1$, $\mu_0 = \tan \theta_0$, $\mu = \tan \theta$ 时,可以得到同样的结论:

$$\begin{aligned} \mu = \tan \theta &= \frac{\sin(\theta_0 + \theta_1)}{\cos(\theta_0 + \theta_1)} = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_1 + \cos \theta_0 \sin \theta_1}{\cos \theta_0 \cos \theta_1 - \sin \theta_0 \sin \theta_1} \\ &= \frac{\tan \theta_0 + \tan \theta_1}{1 - \tan \theta_0 \tan \theta_1} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1} \end{aligned}$$

因此可以用这个普遍法则来叠加不同尺度的摩擦系数:

$$\mu_{\text{tot}} = \tan \left(\sum_i \arctan \mu_i \right)$$

其中 μ_i 是不同空间尺度的摩擦系数。

习题 9 两个质量分别为 m_1 和 m_2 , 动摩擦系数分别为 μ_1 和 μ_2 的圆盘用一根长为 l 的无质量刚性杆连接(见图 10.22)。计算系统在沿杆的方向稳定滑动的条件。

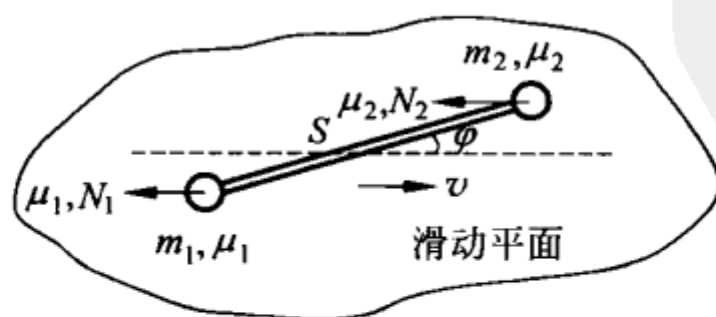


图 10.22 两个圆盘用一根无质量刚性杆连起来

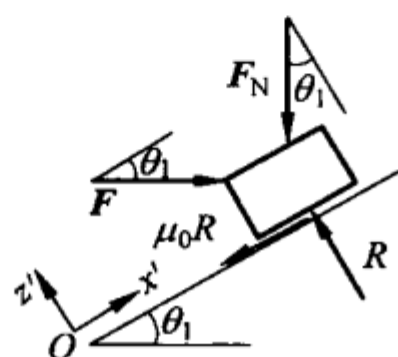


图 10.21 有摩擦存在的波形表面上物体的受力图

解答：假设杆和滑动方向有小夹角 φ ，计算企图转动滑动平面内杆的力矩分量。当力矩为负值而导致角度 φ 减小时，运动是稳定的，而正力矩会导致角度增加。这里圆盘至形心的距离为 a_1 和 a_2 ：

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}l, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}l$$

法向力 N_1 和 N_2 定义为：

$$N_1 = m_1g, \quad N_2 = m_2g$$

两个摩擦力对形心 S 的总力矩等于：

$$M_S = (-\mu_1 N_1 a_1 + \mu_2 N_2 a_2) \sin \varphi = (-\mu_1 + \mu_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} gl \sin \varphi$$

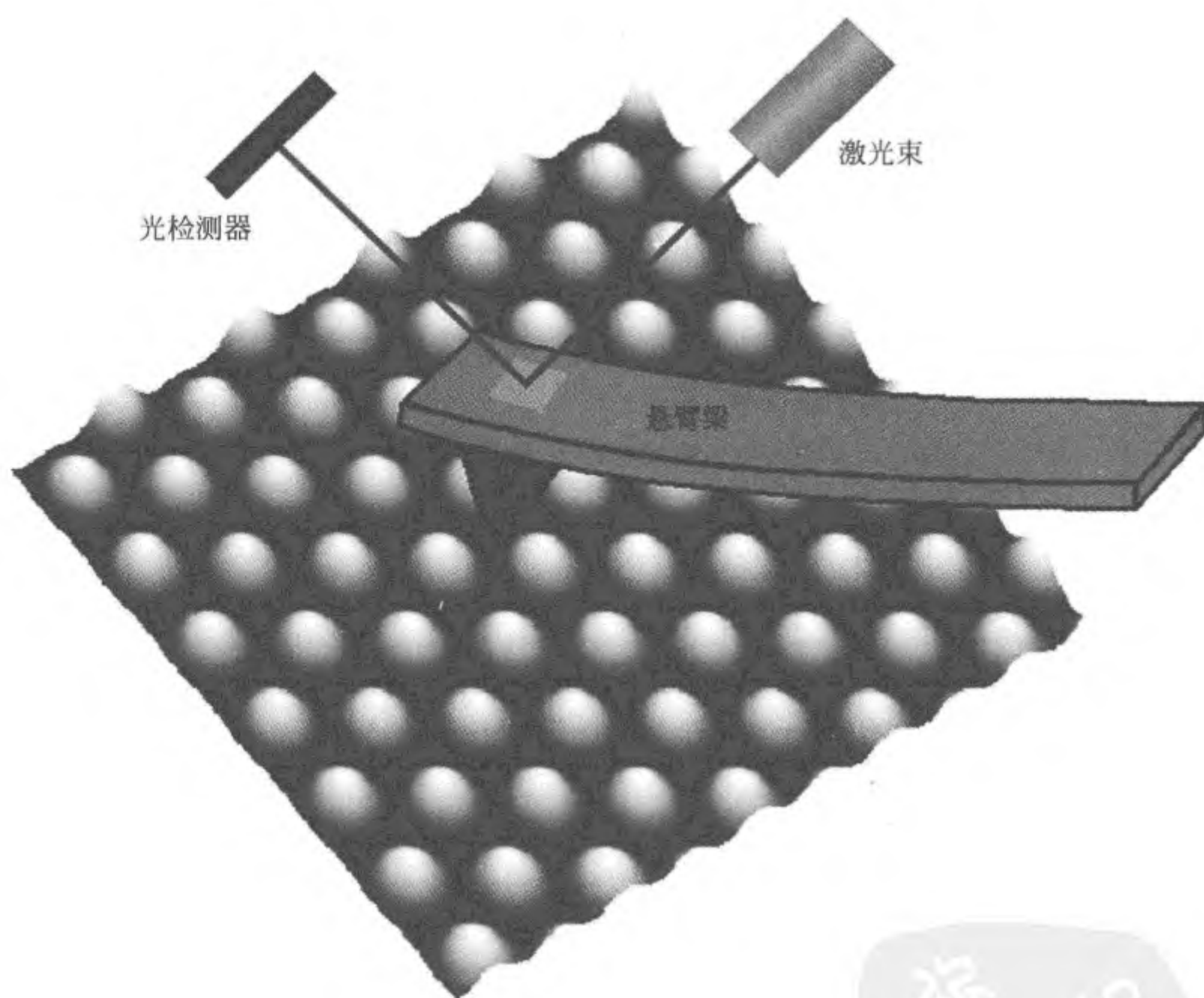
当满足下面条件时，力矩是负的，运动是稳定的：

$$\mu_1 > \mu_2$$

因此，当前面的圆盘摩擦系数较小时，系统是稳定的；否则，系统是不稳定的，杆会转动，摩擦系数较小的圆盘最终会在前面和杆一起滑动。

第 11 章

Prandtl-Tomlinson 干摩擦模型



11.1 概述

由于原子级摩擦过程的实验方法和数值仿真方法的发展,导致固体摩擦在原子级尺度的研究迅速增加。一个简单的模型,也就是“Tomlinson 模型”,可以作为很多原子级摩擦机理研究的基础。这是 Prandtl 于 1928 年

在描述晶体塑性变形时提出的^①。Tomlinson 的论文(在相关文章中被多次引用)^②并没有包括今天所称的“Tomlinson 模型”,但他的论文提出了黏着对摩擦的影响。接下来,我们将该模型称为“Prandtl-Tomlinson 模型”。Prandtl 考虑在外力作用下一个质点在一个波数为 k 的周期势的一维运动,其中阻尼与速度成正比^③(见图 11.1):

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N\sin kx \quad (11.1)$$

式中, x 是物体坐标, m 是质量, F 是作用在物体上的外力, η 是阻尼系数, N 是周期势幅值。



图 11.1 Prandtl-Tomlinson 模型:
周期势上的一个质点

Prandtl-Tomlinson 模型描述了干摩擦的很多基本性质。实际上,我们必须给物体施加一个最小作用力才能使物体开始宏观运动。这个最小作用力正是宏观静摩擦力。如果物体处于运动状态,并且减小这个力(甚至小于静摩擦力),会发现该物体仍然保持运动。这主要是由于惯性的存在,因为它已经拥有一部分运动所需的能量。从宏观上讲,这意味着动摩擦力小于静摩擦力,在干摩擦中这种特征经常出现。对图 11.1 中的模型,静摩擦力等于 N 。

这个模型的多变性和一般化在很多出版物里都有研究,而且被用来解释摩擦学过程。它的成功在于一个十分简单的模型却解释了任意摩擦系统中两个最重要的基本性质。这个模型描述的物体受到一个平均值为零的周期保守力和一个与速度成正比的耗散力作用。没有保守力,静摩擦力就不存在;没有阻尼,宏观滑动摩擦力也不存在。这两个必要性质在 Prandtl-Tomlinson 模型中都有。从这个意义上讲,Prandtl-Tomlinson 模型是摩擦学系统中最简单可用的模型。Prandtl-Tomlinson 模型本质上是对库仑关于表面“互锁”观点(即为摩擦起源)的重述和进一步的简化。

很明显,这个模型不能代表一个真实摩擦学系统的所有细节。例如,在这个模型中,磨损没有引起表面势的变化。但是应该注意,从本质上可以将塑性变形加以考虑,然后对该模型进行扩展。需要再次指出的是,1928 年 Prandtl 提出的模型精确地描述了晶体中的塑性变形。

① L. Prandtl. Ein gedankenmodell zur kinetischen theorie der festen körper. ZAMM, 1928, 8: 85-106.

② G. A. Tomlinson. A molecular theory of friction. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1929, 7 (46 Supplement), 905.

③ 例如这个方程可以描述原子力显微镜的尖端在结晶表面的移动。

本章将研究 Prandtl-Tomlinson 模型以及它的一些应用和普遍化。

11.2 Prandtl-Tomlinson 模型的基本性质

如果一个物体处于停留状态,然后施加力 F , 它的平衡位置会移动到点 x , 则满足方程:

$$F = N \sin kx \quad (11.2)$$

仅当 $F \leq N$ 时, 方程有一个解。因此, 在这个模型中静摩擦力

$$F_s = N \quad (11.3)$$

当作用力更大时, 物体不会处于平衡, 而是进入宏观运动^①。从微观角度来讲, 在这个模型中, 物体每一个宏观的移动都是一个恒定速度和一个周期振动的叠加, 见图 11.2(a)。图中给出了方程(11.1)的数值积分。切向力从零开始缓慢增加到某一最大值(这个最大值比静摩擦力大), 然后开始下降。图中曲线描述了瞬时速度和瞬时力的关系。当该作用力达到临界点后, 物体开始以一定的速度运动。如果减小作用力(甚至小于静摩擦力), 物体仍可以继续运动。当达到某一特定的临界速度后, 宏观运动停止, 物体以势的最小值(波谷)为中心振荡并随后停止。

在宏观尺度上, 我们无法测量到微观振荡, 而上述运动被描述为准稳态摩擦过程。平均速度与作用力的关系通常被看做宏观摩擦定律(见图 11.2(b))。

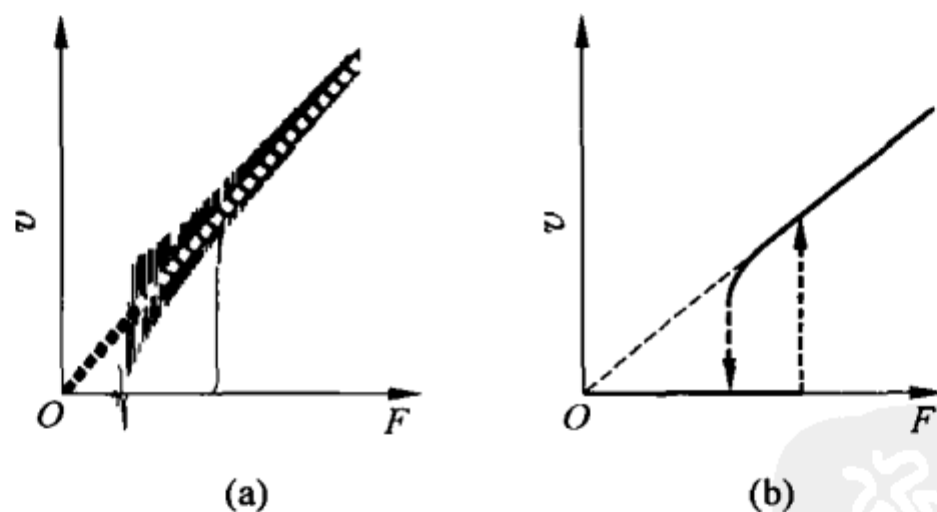


图 11.2

(a) Prandtl-Tomlinson 模型中, 瞬时速度与作用力的关系(随时间线性增加);

(b) 宏观摩擦定律: 平均速度与作用力的关系

^① 这里, 将物体在远大于势周期的空间区域的运动称为“宏观”。相反, 将长度尺度小于势波长或者相当于势波长的运动称为“微观”。

1. 小阻尼情况

如果阻尼系数 $\eta=0$, 物体处于运动中, 那么它会一直运动下去, 甚至不需要外力作用 ($F=0$)。因此, 满足能量守恒:

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{N}{k} \cos kx = \text{常数}, \quad \text{对于 } \eta = 0, F = 0 \quad (11.4)$$

在这种情况下, 产生的速度与 x 坐标的函数为:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)}, \quad \text{对于 } \eta = 0, F = 0 \quad (11.5)$$

当有小阻尼存在时, 为了保持周期性运动, 必须施加一个小作用力。如果外力 F 在一个 $a = 2\pi/k$ 的周期做的功等于能量损耗 $\int_0^T \eta v^2(t) dt$, 那么运动是周期性的:

$$\frac{2\pi F}{k} = \int_0^T \eta v^2(t) dt = \int_0^a \eta v(x) dx = \eta \int_0^a \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)} dx \quad (11.6)$$

式(11.6)给出了存在宏观运动所需要的最小作用力 F_1 , 其中 $E_0 = N/k$, 于是有:

$$\frac{F_1}{N} = \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \quad (11.7)$$

当动摩擦力和静摩擦力相等时, 阻尼的数量级为:

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \approx 1 \quad (11.8)$$

该阻尼表明小阻尼(欠阻尼系统)情况(已讨论过)和大阻尼(过阻尼系统)情况之间的界线。

2. 大阻尼情况

对于大阻尼而言, 可以忽略式(11.1)中的惯量:

$$0 = F - \eta \dot{x} - N \sin kx \quad (11.9)$$

这就是所谓的过阻尼运动。此情况下的运动方程为一阶微分方程, 可以写成:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx \quad (11.10)$$

经过一个空间周期的时间为:

$$T = \int_0^{2\pi/k} \frac{dx}{\frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx} = \frac{\eta}{kN} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{\frac{F}{N} - \sin z} = \frac{\eta}{kN} \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{F}{N}\right)^2 - 1}} \quad (11.11)$$

因此,平均速度为:

$$\bar{v} = \frac{a}{T} = \frac{\sqrt{F^2 - N^2}}{\eta} \quad (11.12)$$

力与平均速度的函数关系为:

$$F = \sqrt{N^2 + (\eta \bar{v})^2} \quad (11.13)$$

这个关系见图 11.3。

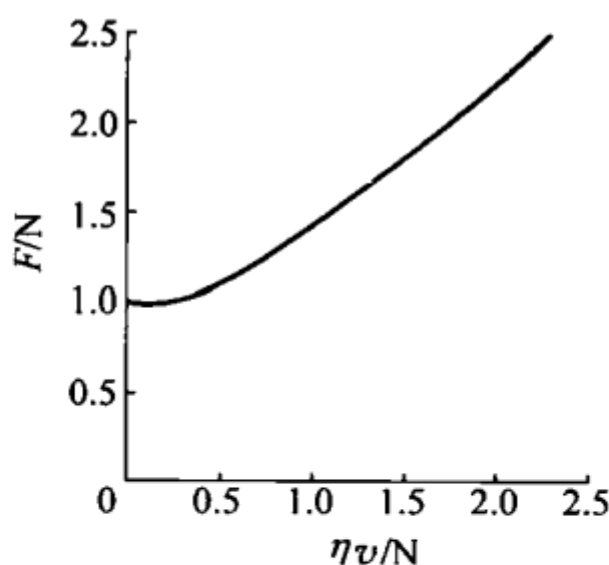


图 11.3 在过阻尼系统中 Prandtl-Tomlinson 模型的摩擦定律

3. Prandtl-Tomlinson 模型中的相图

为了研究对任意参数, Prandtl-Tomlinson 模型的性质, 将无量纲变量引入到式(11.1)中:

$$x = \xi \tilde{x}, \quad t = \tau \tilde{t} \quad (11.14)$$

据此,运动方程变为:

$$\frac{m\xi}{N} \frac{\tilde{x}''}{\tau^2} = \frac{F}{N} - \frac{\eta\xi}{N} \frac{\tilde{x}'}{\tau} - \sin(k\xi \tilde{x}) \quad (11.15)$$

其中撇号代表倒数 $\partial/\partial \tilde{t}$ 。选择:

$$k\xi = 1, \quad \tau^2 \frac{N}{m\xi} = 1 \quad (11.16)$$

则方程(11.15)可写成:

$$\tilde{x}'' + \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \tilde{x}' + \sin \tilde{x} = \frac{F}{N} \quad (11.17)$$

现在方程仅包含两个无量纲参数:

$$\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}}, \quad \kappa_2 = \frac{F}{N} \quad (11.18)$$

图 11.4 是系统的“相图”。在无量纲坐标系中,运动特征仅取决于系统在图中参数平面 (κ_1, κ_2) 中所处的区域。

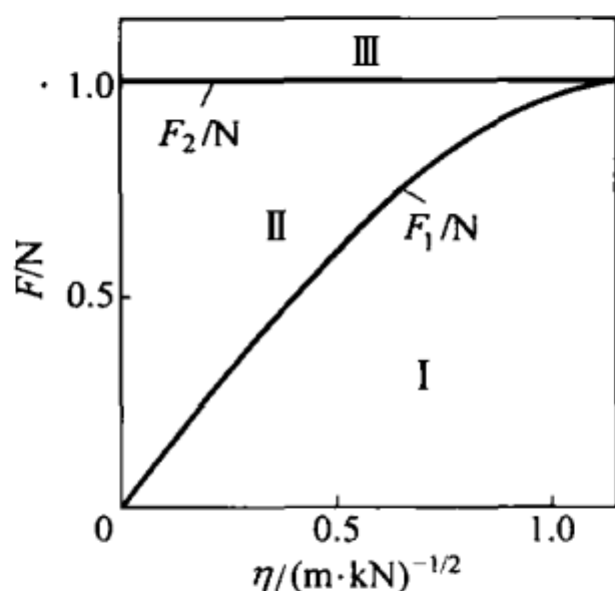


图 11.4 两个临界力 F_1 和 F_2 与阻尼系数的函数关系

对于 $\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} < 1.193$, 力有三个范围(见图 11.4 中区域 I, II, III),

分别被临界力 F_1 和 F_2 分开。对于 $F > F_2$, 没有平衡解, 物体可以自由运动。如果这个力减小到 $F < F_1$, 物体将停止。在仅有静止状态存在和仅有运动状态存在之间有一个双稳状态区, 在这个区内, 物体可以处于静止状态或运动状态, 这取决于它的初始状态。如果阻尼大于临界值, 双稳区就不存在, 即

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} > 1.193 \quad (11.19)$$

对于小阻尼系数, 式(11.7)给出了临界力 F_1 。

11.3 弹性失稳

Prandtl-Tomlinson 模型最简单的一般模型见图 11.5。替换掉恒定的作用力, 而是将物体连接到弹簧(刚度为 c), 弹簧固定在一个沿水平方向运动的滑块上。这个模型比 Prandtl-Tomlinson 的原始模型更适合描述原子力显微镜尖端的运动, 因为它用最简单的方式考虑了显微镜的手臂刚度。

在这种情况下, 运动方程为:

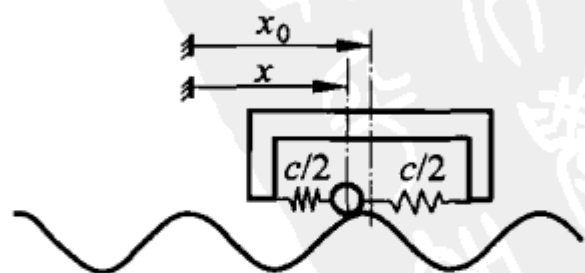


图 11.5 物体在一个周期势上受到弹簧的拉力

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = c(x_0 - x) \quad (11.20)$$

如果以恒定的速度缓慢拖动滑块,那么在每个时刻的平衡位置 $x(x_0)$, 都可以看到物体,其中 $x_0 = x_0(t)$ 是滑块的坐标。弹簧力的平均值等于(宏观)摩擦力。如果对于每个 x_0 ,仅对应一个平衡位置 $x(x_0)$,那么作用在物体的力平均值等于零。为了表明这点,我们研究物体的总势能:

$$U_{\text{tot}}(x, x_0) = U(x) + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2 \quad (11.21)$$

平衡位置点由下面的条件决定:

$$U'_{\text{tot}}(x, x_0) = U'(x) + c(x - x_0) = 0 \quad (11.22)$$

其中,右上角的撇号表示微分 $\partial/\partial x$ 。力的平均值(对时间取平均值,在这个例子中,也等于对 x_0 取平均值)为:

$$\bar{F}_{\text{base}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' dx_0 \quad (11.23)$$

式中 L 为势的空间周期。如果对方程(11.22)求导,则得到:

$$[U''(x) + c]dx = cdx_0 \quad (11.24)$$

有了这个方程,我们可以用对 dx 的积分代替方程(11.23)中对 dx_0 的积分:

$$\bar{F}_{\text{base}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' \left(1 + \frac{U''}{c}\right) dx = -\frac{1}{L} \left[U(x) + \frac{U'^2(x)}{2c} \right]_0^L = 0 \quad (11.25)$$

产生的平均力等于零,这是因为 $U(x)$ 和 $U'^2(x)$ 都是 x 的周期函数。由此可得,在这些情况下摩擦力确实等于零。这适用于任意的周期势。

如果平衡坐标 x 是 x_0 的非连续函数,以至于在一些点,不再满足方程(11.24),那么情况会有很大的改变。例如研究图 11.5 所示的系统,其势的形式为:

$$U(x) = -\frac{N}{k} \cos kx \quad (11.26)$$

平衡条件式(11.22)采用的形式为:

$$-\sin kx = \frac{c}{N}(x - x_0) \quad (11.27)$$

对不同的 x_0 ,函数 $-\sin kx$ 和 $\frac{c}{N}(x - x_0)$ 的关系见图 11.6。它们的交集表明了物体的平衡坐标。如果 $c/(Nk) > 1$,那么 x 是滑块坐标 x_0 的连续函数,举例计算见图 11.6(b),其中 $c/(Nk) = 1.5$ 。另一方面,如果弹簧刚度小于临界值,即

$$c/(Nk) < 1 \quad (11.28)$$

那么,平衡坐标与 x_0 的关系中就有跳跃间断点(见图 11.6(d))。在这种情

况下,按时间取平均的力不等于零。对于较软的弹簧($c/(Nk)=0.1$),弹簧力与坐标 x_0 的关系见图 11.7。

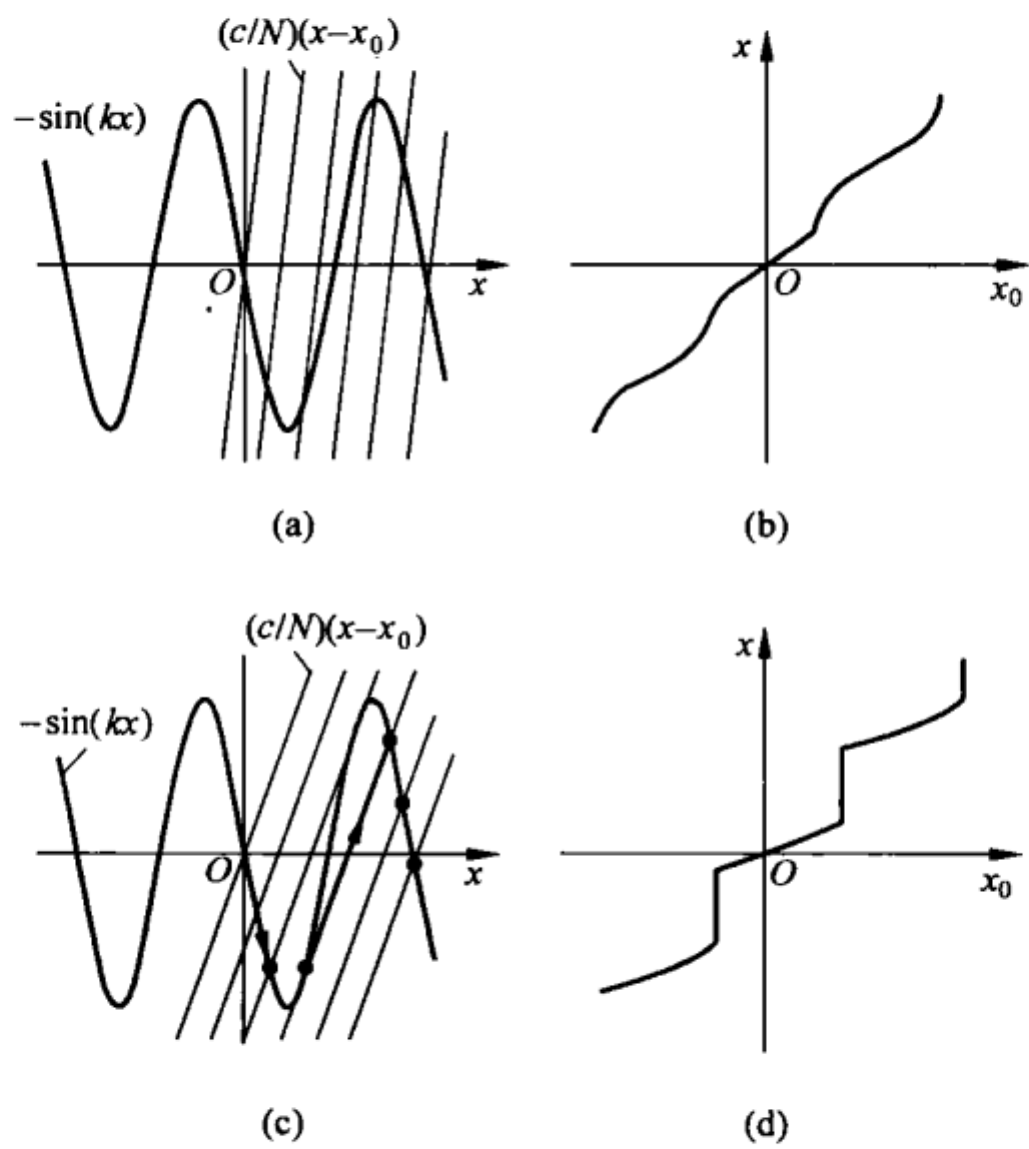


图 11.6 函数 $-\sin kx$ 和线性函数 $\frac{c}{N}(x-x_0)$ 的图像

(a) $c/(Nk)=1.5$; (c) $c/(Nk)=0.5$; 如果 x_0 增大,线性函数向右平移; (b) 当 $c/(Nk)>1$ 时,平衡坐标是 x_0 的连续函数; (d) 当 $c/(Nk)<1$ 时,平衡坐标有跳跃间断点

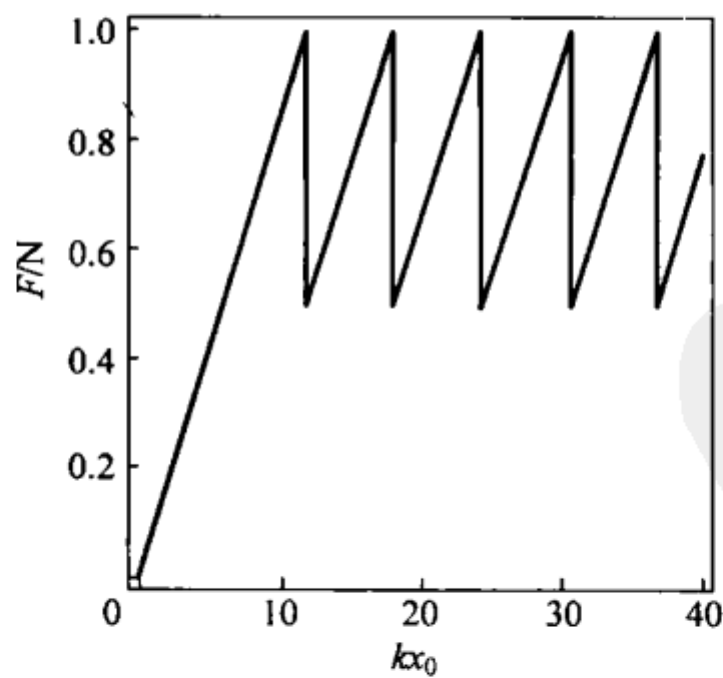


图 11.7 $c/(Nk)=0.1$ 时,作用在式(11.20)表示模型中物体上的力与滑块坐标 x_0 的函数关系(由于出现弹性失稳,力的平均值不等于零)

11.4 超滑

近几年,实验和理论研究表明:在两个结晶固体之间“原子级靠近”接触中,如果它们晶格的周期是不共度(如图 11.8 所示),摩擦可能不存在。此外,也要求两个物体在接触中不出现弹性失稳。没有静摩擦的原因是,其中一个晶格的原子,相对于另外一个物体的晶格,它们所处的能态占据了所有的可能性。因此,物体的运动仅仅导致那些处于低能态或高能态原子出现另外一种分布,但是这个运动不会引起物体平均(宏观)能量的改变。由此,甚至一个无限小的力都可以使物体运动。

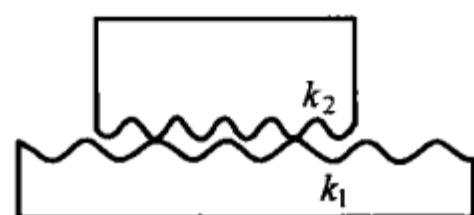


图 11.8 不同晶格周期的周期表面(例如两个晶体)之间的接触

当然,这些考虑与尺度无关。它们适用于两个宏观结构化表面的接触,例如波纹状的橡胶座和一个波纹状的钢板。只要两个表面的纹理的周期不同,而且没有弹性失稳发生,那么这些纹理对静摩擦力就没有贡献。

11.5 纳米机械:微电机与纳米电机的概念

由于机械器件微型化的趋势,我们必须考虑微型化的理论限制是什么。一个重要的问题是,是否有可能将热势能或化学势能转换成定向运动的能量,甚至在原子的尺度。很多研究学者把动力蛋白沿周期性生成微纤维的运动作为纳米机械例子来做研究。所有的动力蛋白都有相似的结构:由两个“脑袋”和一个连接单元组成。连接体的长度可以通过“能量分子”的燃烧来改变。蛋白分子加热后,会从球状转变为一个无规线圈,使连接体的长度增加。当冷却后,连接体再次回到原长。

对于很多文献中讨论的微观物体或分子物体,使其产生定向运动的多数方法都基于一个运动对象和一个非均相(而且多数情况下是周期性的)基体的相互作用。驱动对象由一个或多个物体组成,如果多个物体的话,它们之间分开的距离是可控的。基体可以是对称的,也可以是非对称的。对于非对称基体,可以用“棘-爪”原理^①。但是在对称势中,也可能有定向运动。

^① 这些机械经常被称为“棘轮”。

本节采用“三体机械”来举例阐述纳米机械背后的观点。按照数学的观点来处理一个(空间)周期势(Prandtl-Tomlinson 的简单通用模型)中多体系统的运动。

下面将描述怎样控制一个周期势中两个物体之间连接体的长度,从而产生系统的定向运动(运动方向和运动速度都是可控的)。

1. 一个三体机械的奇点和分岔集

考虑一个周期势上由两根长为 l_1 和 l_2 的无质量杆所连接的三个质点(见图 11.9)。这个系统的势能等于:

$$U = U_0 \{ \cos[k(x - l_1)] + \cos(kx) + \cos[k(x + l_2)] \} \quad (11.29)$$

其中 $k = 2\pi/a$ 是波数, a 是势的空间周期。势能可以重新写成这个形式:



图 11.9 三体机械

$$U = U_0 \sqrt{(\sin kl_1 - \sin kl_2)^2 + (1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2} \cos(kx - \varphi) \quad (11.30)$$

其中:

$$\tan \varphi = \frac{\sin kl_1 - \sin kl_2}{1 + \cos kl_1 + \cos kl_2} \quad (11.31)$$

相位 φ 是在参数平面 (l_1, l_2) 上,沿任意一条路径(只要这条路径不经过任何奇点,该奇点对应方程(11.30)的势能幅值接近于零,式(11.31)中相位未定义)上关于参数 l_1 和 l_2 的连续函数。奇点的位置由下面条件计算:

$$\sin kl_1 - \sin kl_2 = 0 \quad (11.32)$$

$$1 + \cos kl_1 + \cos kl_2 = 0 \quad (11.33)$$

由此可得:

$$kl_1 = \pi \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad kl_2 = \pi \pm \pi/3 + 2\pi m \quad (11.34)$$

其中 m 和 n 是整数。奇点在 (l_1, l_2) 平面上的位置见图 11.10。所有的奇点可以通过 $(kl_1, kl_2) = (2\pi/3, 2\pi/3)$ 和 $(kl_1, kl_2) = (4\pi/3, 4\pi/3)$ 这两个点周期性地重复得到。

2. 可控定向运动的条件

现在假设长度 l_1 和 l_2 是任意可控的。当它们变到使得一个奇点(见图 11.10)被包围在一个闭合的路径(路径 1)内,则相位减少 2π 。对于第二个点的闭环(路径 3),相位增加 2π 。给第一个点分配拓扑指数 -1 ,第二个

点为+1。一般地,在 (l_1, l_2) 平面闭合路径的相位变化为 $2\pi i$,其中 i 是被路径包围的所有点的指数之和。例如,图 11.10 中路径 2 没有包含奇点。因此沿着这条路径,相位不会发生变化。路径 4 包含了两个指数为-1 的点,则沿着整个路径相位变化为 -4π 。一个相位变化 2π ,对应三体机械在一个空间周期的运动。

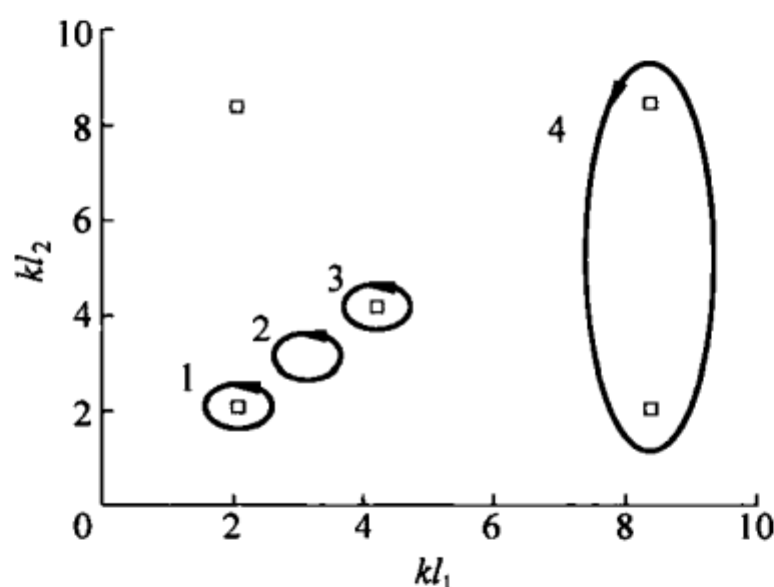


图 11.10 “三体机械”中奇点的位置

在包含奇点且拓扑指数之和不为零的路径上,杆长 l_1 和 l_2 的一个周期变化会产生系统的定向运动。如果在 (l_1, l_2) 平面里,沿着路径以角频率 ω 运动,那么系统将以宏观(平均)速度 $v = \frac{\omega i}{k}$ 运动。

这里提出一个有趣的问题:如果给这个“机械”施加一个反向的作用力时,它是否还能运动,也就是它能否负载?为了回答这个问题,给系统施加外力 $-F$,则在势能中就增加了一项 Fx ,这样,总势能的形式变为:

$$U_{\text{tot}} = U_0 \{ \cos[k(x - l_1)] + \cos(kx) + \cos[k(x + l_2)] \} + Fx \quad (11.35)$$

计算这个势的分岔集(也称为“突变集”)。分岔集可以理解为参数集。为此,势的平衡点数目发生变化,从而使得平衡位置不再是参数 l_1 和 l_2 的连续函数。平衡位置由两个条件决定:

$$\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial x} = 0 \quad (11.36)$$

和

$$\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x^2} = 0 \quad (11.37)$$

第一个条件是求解一个平衡位置。第二个条件表明在此时平衡失稳。在这种情况下,式(11.36)变为:

$$\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial x} = U_0 k \{-\sin[k(x-l_1)] - \sin(kx) - \sin[k(x+l_2)]\} + F = 0 \quad (11.38)$$

式(11.37)则变为:

$$\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x^2} = U_0 k^2 \{-\cos[k(x-l_1)] - \cos(kx) - \cos[k(x+l_2)]\} = 0 \quad (11.39)$$

增加三角函数定理,然后将这两个方程进行平方后相加,这个方程可以写成如下形式:

$$(1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2 + (\sin kl_1 - \sin kl_2)^2 = \left(\frac{F}{U_0 k}\right)^2 \quad (11.40)$$

由这个方程计算得出的分岔集见图 11.11,参数 $f=F/(U_0 k)$ 有 4 个不同值。当长度 l_1 和 l_2 沿一个闭合路径变化,并且该路径包围了一个闭合的分岔集,使每个点的相位都保持为 l_1 和 l_2 的连续函数时,就会引起平移运动。很明显,仅对于 $f < 1$ 才有可能。因此,最大驱动力 $F_{\text{max}} = U_0 k$ 。

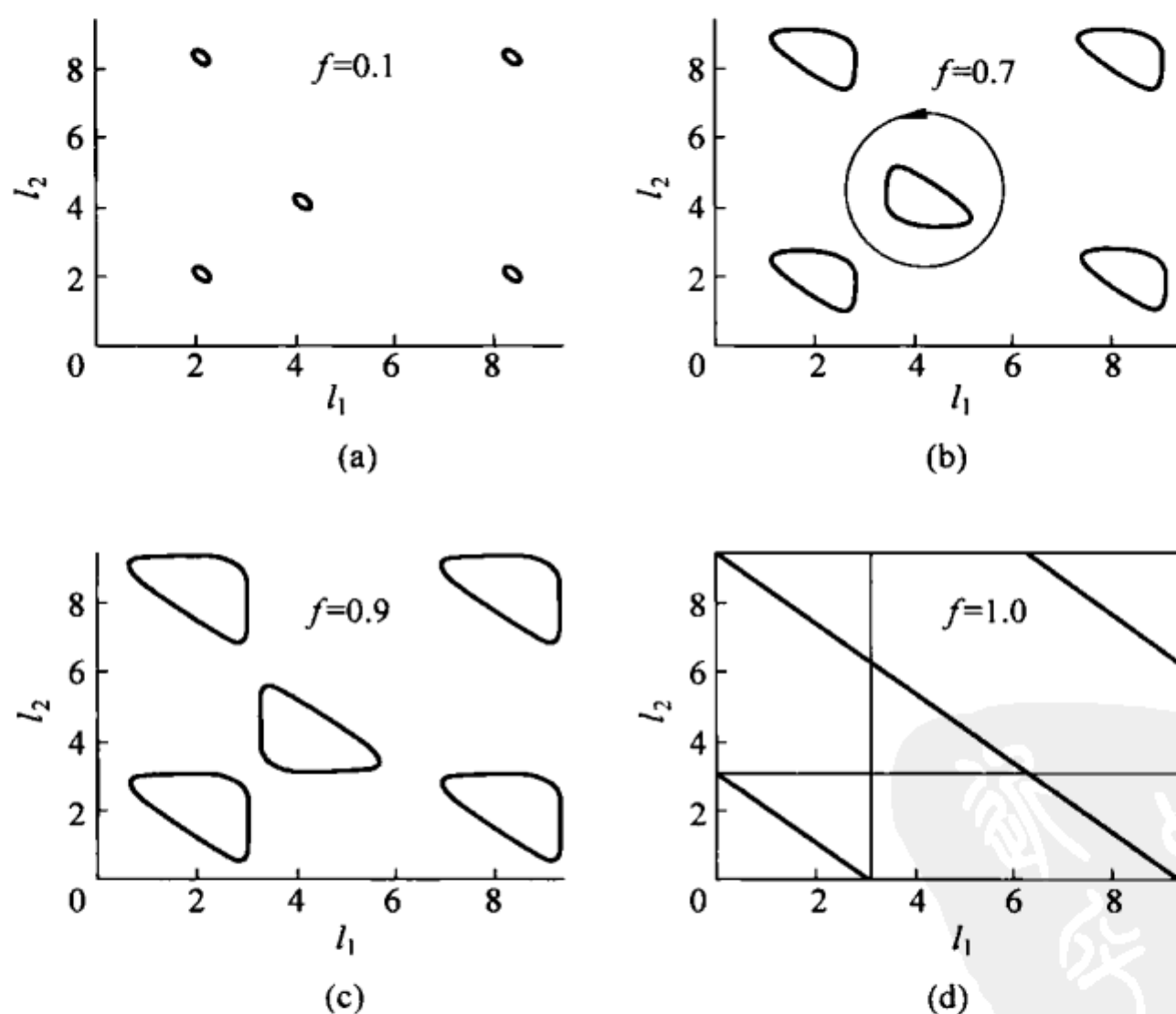


图 11.11 对于不同的外力 $f=F/(U_0 k)$, 势能表达式(11.35)的分岔集。只要分岔集形成闭合形式,而且存在一条未交叉的路径包围这些形式且不与它们相交,那就有可能存在定向运动

对于某些长度 l_1 和 l_2 的特别变化,可以明显发现系统的定向运动。
选择

$$l_1 = (4/3)\pi/k + l_0 \cos(\omega t), \quad l_2 = (4/3)\pi/k + l_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.41)$$

其中

$$\varphi = (2/3)\pi \quad (11.42)$$

且 $l_0 \ll 1/k$, 势能式(11.29)变成如下的形式:

$$\begin{aligned} & U_0 k l_0 [\sin(kx + \pi/3) \cos(\omega t + 2\pi/3) - \sin(kx - \pi/3) \cos \omega t] \\ & = U_0 k l_0 (\sqrt{3}/2) \cos(kx + \omega t + \pi/3) \end{aligned} \quad (11.43)$$

这是一个周期性的轮廓,它以恒定的速度 ω/k 沿 x 负方向传播。系统处于势的最小值位置(波谷),和势波一起运动。

本节讨论的这些观点可用于纳米摩擦学,来描述细胞中的分子马达、肌肉收缩和纳米马达设计。

习题

习题 1 研究一个略有修正的 Prandtl-Tomlinson 模型:一个质点在外力 F 作用下,在一个周期势上运动,周期势由下面抛物线的区域重复形成(见图 11.12):

$$U(x) = \frac{1}{2}cx^2, \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

其中

$$U(x+a) = U(x)$$

此外,还有与速度成正比的阻尼,阻尼系数为 η 。计算:(1)静摩擦力;(2)宏观运动终止时的最小速度;(3)动摩擦力与平均滑动速度和阻尼的函数关系;(4)类似于经典 Prandtl-Tomlinson 模型的系统“相图”。

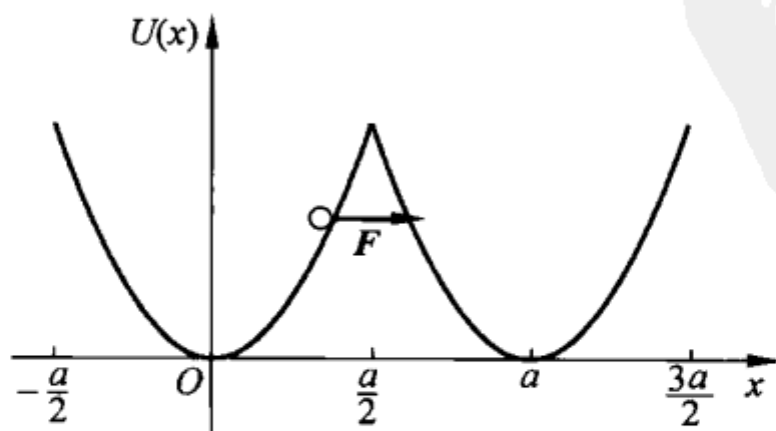


图 11.12 具有抛物线势的修正的 Prandtl-Tomlinson 模型

解答：静摩擦力等于该势的最大斜率，而它出现在周期末端（例如，在 $x=a/2$ ）：

$$F_s = \frac{ca}{2}$$

在势的周期内，运动方程为：

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = F$$

很明显，宏观运动能够存在的最小作用力所对应的是，物体开始运动（在 $x=-a/2$ 处，速度为 $\dot{x}=0$ ）和停止运动的情形（在 $x=a/2$ 处，速度再次为 $\dot{x}=0$ ）。这恰好是在一个抛物线势的一个阻尼振荡周期的一半。阻尼振荡的振动频率为：

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

其中 $\omega_0^2 = c/m$, $\delta = \eta/(2m)$ 。由此，该势的一个空间时间周期为：

$$T = \frac{\pi}{\omega^*}$$

对于稳态的无边界运动，最小平均速度等于：

$$v_{\min} = \frac{a}{T} = \frac{a\omega^*}{\pi} = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}$$

仍有宏观运动存在的最小作用力，可以最简单地通过下面的方法来建立。将外力 F 考虑进去，物体的总势能等于：

$$U = \frac{cx^2}{2} - Fx = \frac{c}{2} \left[\left(x - \frac{F}{c}\right)^2 - \left(\frac{F}{c}\right)^2 \right]$$

点 $x=-a/2$ 处的势能与最小势能之间的差值为 $\Delta U_0 = \frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{F}{c}\right)^2$ ，最小势能与点 $x=a/2$ 处势能之间的差值为 $\Delta U_1 = -\frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{F}{c}\right)^2$ 。在最小力作用下，物体刚好经过半个阻尼振荡周期：从 $-a/2$ 到 $a/2$ 。在振动理论中，由 $e^{-2\delta t}$ 可知，阻尼振荡的能量成指数减小，因此，前面提到的能量比值为 $e^{-2\delta T}$ ：

$$\left(\frac{a - 2F/c}{a + 2F/c}\right)^2 = e^{-2\delta T}$$

由此可得：

$$F = \frac{ac}{2} \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}} = F_s \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}}$$

其中

$$\delta T = \frac{\pi\eta}{\sqrt{4mc - \eta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4mc}{\eta^2} - 1}}$$

归一化力 F/F_s 与无量纲参数 $\eta/\sqrt{4mc}$ 的关系见图 11.13。

习题 2 一个质点和一个刚性滑块,通过弹簧连接起来,弹簧的“竖直刚度”为 c_{\perp} ,切向刚度为 c_{\parallel} ^①。质点位于正弦型曲线表面($y=h_0 \cos kx$),如图 11.14 所示。然后,滑块向右移动。计算系统发生弹性失稳需要的条件。

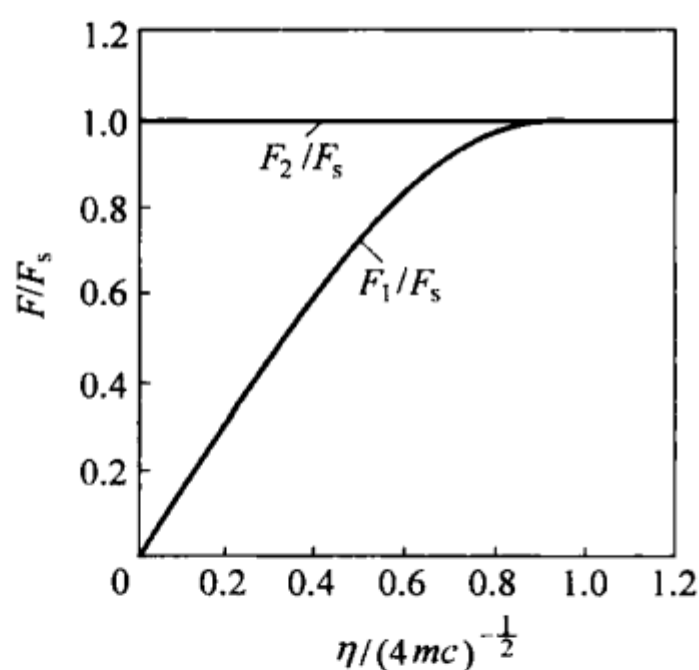


图 11.13 临界力为 F_1 和 F_2 ,修正的 Prandtl-Tomlinson 模型抛物线部分的相图

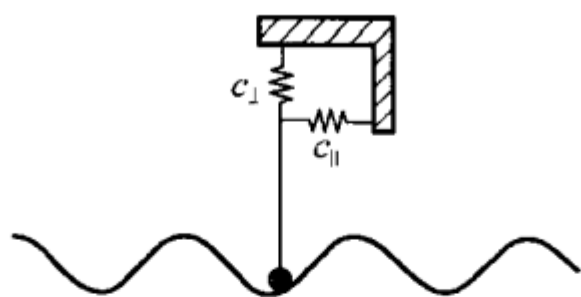


图 11.14 一个物体在竖直方向和水平方向被弹性连接,在波形表面滑动

解答: 系统势能等于:

$$U(x, y, x_0, y_0) = \frac{c_{\perp}}{2}(y - y_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2}(x - x_0)^2$$

对于问题中描述的系统,这个关系 $y=h_0 \cos kx$ 和 $y_0=-h_0$ 是成立的。势能的形式为:

$$U(x, x_0) = \frac{c_{\perp}}{2}(h_0 \cos kx + h_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2}(x - x_0)^2$$

发生弹性失稳的条件为:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -c_{\perp} h_0^2 k^2 [\cos kx + \cos 2kx] + c_{\parallel} = 0$$

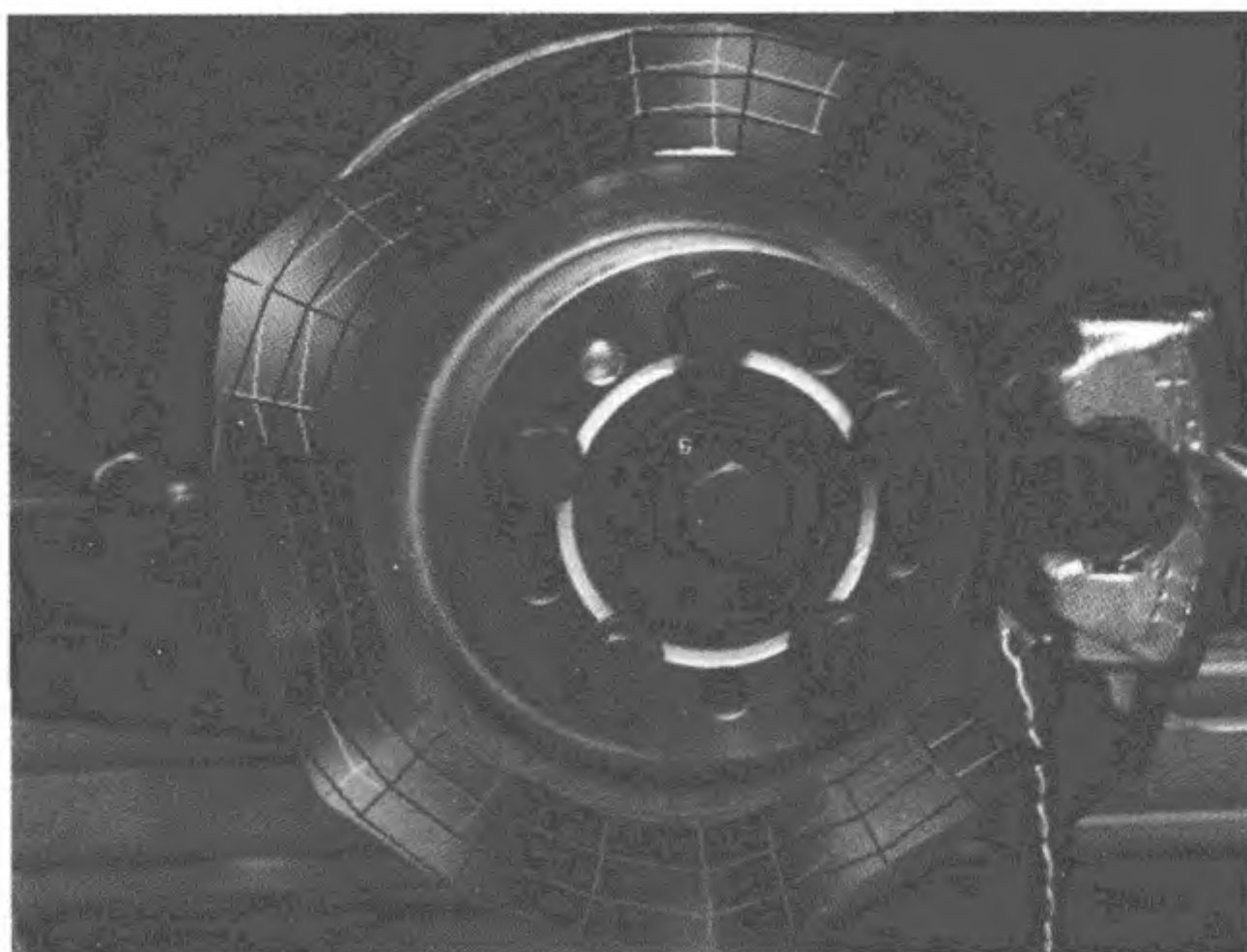
这个方程有解,而且当满足下面条件时,系统将失稳:

$$c_{\parallel} < 2c_{\perp} h_0^2 k^2$$

^① 例如,这个模型可以描述橡胶鞋底弹性轮廓的一个单元。

第 12 章

摩擦引起的振动



从系统动力学的角度看,有摩擦存在的技术系统是非线性耗散开放系统。即使系统可能处于稳态运动,也只有相对小扰动而言是稳定的,系统才能是最终稳定的。否则微扰加强,会产生周期性振动或混沌振动。如果振动幅值足够大,使得在摩擦中表面间的相对速度偶尔为零,那么该运动由静止(黏着)到滑动的交替所组成,将其称为黏滑运动。

在均衡稳定运动中,失稳并不是解释摩擦引发的振动的唯一机理。在某些特定条件下,对于一个摩擦学系统的稳定运动而言,这可能完全不存在。这种情况下,只有振荡运动是有可能的。一个例子就是所谓的自锁-滑动运动。

很多技术摩擦系统中都有摩擦振动发生(例如刹车片,衬套轴承和轮轨接触等),一方面,它会造成摩擦表面的更高磨损和形成我们不希望的结构(比如轨道上的波形面,裂纹的形成,火车轮的多边化和搓板纹),另一方面,会导致令人不舒服的声音或从原声基础上发生变化的振动(颤振,咆哮,啸声或尖叫)。今天,在很多领域,对于制动或车轮绕曲面发出的尖叫声,仍然没有可靠的、技术和经济上可行的解决方法。即使在一些应用中尖叫声的存在没有影响到系统的功能,但仅仅由于尖叫声和与其相关的干扰,就造成了一些工艺过程不能实现。因此,在很多衬套轴承技术的领域,例如由锰钢制成的轴承,尽管它们有很好的耐磨性,但由于会引起尖叫而不被采用。

本章将通过研究几个摩擦诱导的振动的模型,进一步了解产生一个稳定或不稳定运动需要的条件,以及给出减小振动的实用建议。

12.1 摩擦力与速度为减函数关系时的摩擦失稳

首先,考虑一个摩擦副的最简单模型,该摩擦对为一个刚性平面和一个质量为 m 的刚性块。系统的总弹性用一个刚度为 c 的弹簧来代表。用弹簧-阻尼组合来拖动滑块,以速度 v_0 在刚性平面运动。假设接触面的摩擦力被定义为所有滑动速度的函数 $F(\dot{x})$ 。滑块的运动方程为:

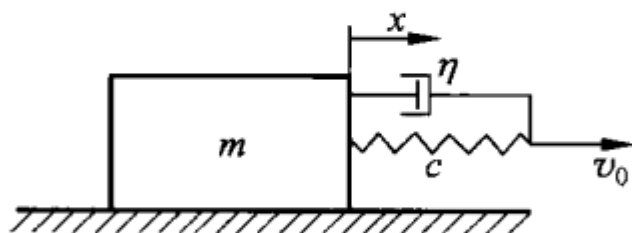


图 12.1 用弹簧-阻尼组合来拉动平面上的滑块

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0t + \eta v_0 \quad (12.1)$$

其中 $F(\dot{x})$ 是与速度相关的滑动摩擦力。

方程(12.1)有一个稳态解:

$$x = x_0 + v_0t \quad (12.2)$$

其中

$$x_0 = -\frac{F(v_0)}{c} \quad (12.3)$$

在实际过程中,稳态解是否存在取决于这个解关于已有扰动的稳定性。为了研究这个稳定性,假设稳态解的方程(12.2)有微扰:

$$x = x_0 + v_0t + \delta x \quad (12.4)$$

其中 $\delta x \ll v_0$ 。将式(12.4)代入运动方程(12.1),将 δx 线性化,得到下面的扰动方程:

$$m\delta \ddot{x} + \left(\eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \bigg|_{\dot{x}=v_0} \right) \delta \dot{x} + c\delta x = 0 \quad (12.5)$$

这个方程描述了质量为 m 的物体和刚度为 c 的弹簧的振动,其中阻尼与速度成正比。则阻尼系数为:

$$\alpha = \eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \bigg|_{\dot{x}=v_0} \quad (12.6)$$

即使没有进行正式的稳定性分析,也很清楚:在方程(12.5)中,如阻尼为正值,即

$$\alpha = \eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \bigg|_{\dot{x}=v_0} > 0, \quad \text{稳定运动} \quad (12.7)$$

这描述了一个阻尼振荡,并且该稳态运动是稳定的。相反的情况下,如果

$$\alpha = \eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \bigg|_{\dot{x}=v_0} < 0, \quad \text{不稳定运动} \quad (12.8)$$

对于负阻尼和增幅振荡,稳态解是不稳定的。

弱阻尼振动的频率等于:

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha/2)^2} \quad (12.9)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ 是物体的无阻尼固有频率。对于弱阻尼情况, $\omega^* \approx \omega_0$ 。

由此,可得到下面的结论:

① 在无阻尼($\eta=0$)系统中,稳定性标准仅取决于摩擦力与速度的关系:

如果摩擦力随着滑动速度的增大而增大,则滑动运动是稳定的。

如果摩擦力随着滑动速度的增大而减小,则发生失稳。

如果在较低的速度,摩擦力随速度的增加而减小,在高速时又随速度的增大而增大^①,如图 12.2 所示,那么速度较低在 $v < v_{\min}$ 时,运动是不稳定的,在高速时是稳定的。

② 根据激振机理,特征频率仅由“共振器”(或整个摩擦学系统)的固有频率

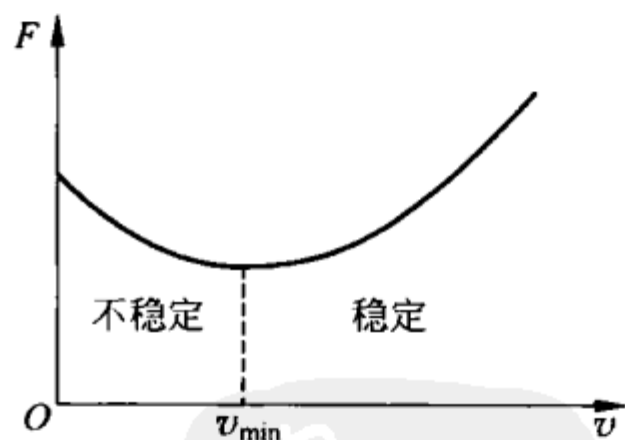


图 12.2 很多摩擦学系统中,摩擦力最初随着速度的增大而减小,到高速时随着速度的增大而增大

^① 这是一种典型的趋势,例如润滑系统中,混合摩擦到流体动力摩擦的转换过程(Stribeck 曲线)。

决定。这点在很多摩擦学系统和加工过程中都被实验验证。因此,很多情况下,一个摩擦学系统的所有参数,例如系统的组成、物体的相对速度和表面的粗糙度等,都在摩擦中影响着声发射的强度,而不影响其频谱。

③当给系统引入足够大的阻尼时,这种失稳可以被消除:当阻尼足够大时,就满足了式(12.7)的稳定标准,即使微分 $dF/d\dot{x}$ 为负值。

12.2 有弹性力分布的系统中的失稳

滑动物体作为一个刚性体由一根弹簧拉动,这个模型在上节中已经研究过,这是一个对实际情况很简化的模型。该模型存在一个问题:分布弹性对稳定性的条件有什么影响。因此,需要验证在系统中引进阻尼是否能够预防失稳的发展,即使阻尼施加在“远离”摩擦表面的地方。

作为最初的普遍性研究,考虑由一个刚性体和一个弹性体组成的系统^①(见图 12.3)。刚性体沿水平方向以恒定的速度移动。一个弹性板固定在一个刚性基座上。为了简便起见,只研究弹性板中的剪切振荡,也就是说假设发生位移的区域仅有 x 分量,而且这个分量仅取决于 z 轴。运动方程为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (12.10)$$

边界条件为:

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{z=0} = \sigma_{\text{fric}}(v_0 - \dot{u} \big|_{z=0}) \quad (12.11)$$

$$u(z = -l) = 0 \quad (12.12)$$

式中 $\sigma_{\text{fric}}(v)$ 是摩擦应力(单位面积的摩擦力),与速度有关。当其相关性比较弱时,可以在 \dot{u} 对其进行一阶近似展开:

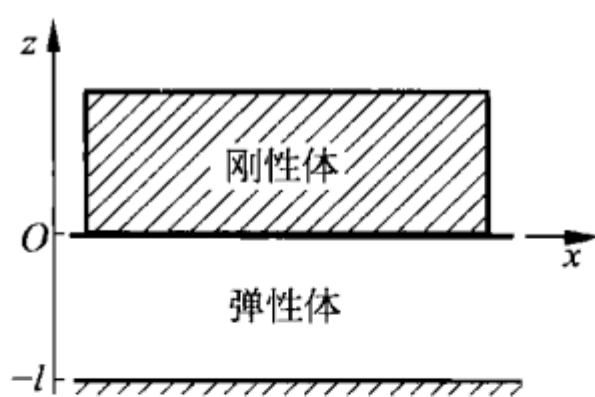


图 12.3 由一个刚性体和一个弹性体组成的摩擦学系统(弹性体的下表面被牢牢地固定住,刚性体以恒定的速度 v_0 沿水平方向被拖动)

① 两个弹性体之间接触的情况是很普遍的,但是这会使我们的研究复杂化。

$$\sigma_{\text{fric}}\left(v_0 - \dot{u}\right)\Big|_{z=0} = \sigma_{\text{fric}}(v_0) - \frac{d\sigma_{\text{fric}}}{dv}\Big|_{v=v_0} \dot{u}(z=0) \quad (12.13)$$

则边界条件式(12.11)的形式变成:

$$G \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \sigma_{\text{fric}}(v_0) - \frac{d\sigma_{\text{fric}}}{dv}\Big|_{v=v_0} \dot{u}(z=0) \quad (12.14)$$

波动方程(12.10)的解满足边界条件式(12.12)和(12.14),可以写成和的形式:

$$u(z, t) = u^{(0)}(z, t) + u^{(1)}(z, t) \quad (12.15)$$

其中

$$u^{(0)}(z, t) = \frac{\sigma_{\text{fric}}(v_0)}{G}(z + l) \quad (12.16)$$

是运动方程的静态解,它满足边界条件 $u^{(0)}(-l) = 0$, $G \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}\Big|_{z=0} =$

$\sigma_{\text{fric}}(v_0)$, $u^{(1)}(z, t)$ 是波动方程

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} \quad (12.17)$$

的解,它满足边界条件:

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = - \frac{d\sigma_{\text{fric}}}{dv}\Big|_{v=v_0} \dot{u}^{(1)}(0) \quad \text{且} \quad u^{(1)}(-l) = 0 \quad (12.18)$$

$u^{(0)}(z, t) + u^{(1)}(z, t)$ 的和满足波动方程也满足边界条件式(12.12)和(12.14),因此,这是这个问题的解。

如果摩擦应力与速度无关($d\sigma_{\text{fric}}/dv=0$),那么对于一块板,其一端固定,另一端为自由运动的自由振动, $u^{(1)}$ 是波动方程的解。当摩擦应力与速度弱相关时,即 $d\sigma_{\text{fric}}/dv>0$,我们将板的运动看做自由振动,该振动在表面受到与速度成正比的弱阻尼。即使不看运动方程的解,直观上也很清楚,这种情况下,我们可以将其看做薄层的阻尼振动来处理。相反地,如果力随着速度的增大而减小,那意味着表面上引入了一个弱的负阻尼。这种情况下,我们可以将其看做增幅振动。从这些考虑可以得出,扰动系统的稳定性标准与一个物体和一根弹簧组成的简单系统是一样的。而且,很清楚看到,在系统中任意一个位置引入阻尼,都会减缓失稳。对于一种给定的振动形式,有一点很重要,那就是由负阻尼(由摩擦力和速度的相关性减小造成的)而产生的能量增加必须由正阻尼来补偿。

对于在一阶近似中的弱速度相关性,我们将其看做频率为系统固有频率的振动,振幅仅随时间缓慢变化(振幅增大或减少取决于系统中阻尼的情

况,即阻尼是正还是负)。我们可以将固有振动的“d'Alembert 图”中的这些振动看做是一个弹性波的传播,该弹性波从介质的边界反射多次,每一次反射都会损失(正阻尼)或获得(负阻尼)一部分能量。很清楚,阻尼取决于弹性波每次在介质边界反射时能量损失的多少。

12.3 临界阻尼和尖叫声的最优化抑制

基于固有振动的 d'Alembert 观点,我们可以提出一个“理想阻尼”的例子:一个波撞到边界时它的能量全被吸收。我们将研究发生这种情况的条件。

考虑一块弹性板,其下底面和刚性底座由一个阻尼层连接(见图 12.4)。该阻尼层中的应力应该与弹性体和刚性底座之间的相对速度成正比。由此得到弹性板在下底面的边界条件:

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \beta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=-l} \quad (12.19)$$

其中 β 是阻尼系数。

在下底面,波被完全吸收的条件就是,边界条件为式(12.19)的运动方程(12.10)沿 z 负方向有一个形式为波的传播的解:

$$u(z, t) = f(z + ct) \quad (12.20)$$

其中 $c = \sqrt{G/\rho}$ 是弹性波的横向速度。将这个波动方程的特殊解代入边界条件式(12.19),得到:

$$\beta = \sqrt{G\rho} \quad (12.21)$$

对于这个阻尼而言,从上面来的波没有反射,因此得到了理想阻尼。注意,对于更小或更大的阻尼系数,都是有反射的^①。 $\beta \rightarrow 0$ 和 $\beta \rightarrow \infty$ 的情况中,我们将其看做是一个自由损耗系统。

完全吸收的效应在物理学和技术中有很多应用,重要的有:

① 尖叫声的抑制。

② 声反射的预防:所谓的“无回声室”的墙上应该有非常好的临界

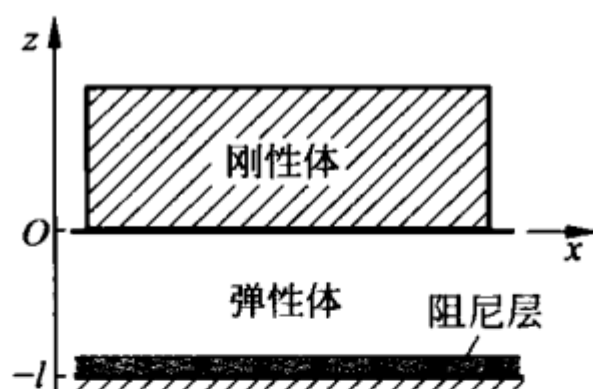


图 12.4 弹性板和刚性底座由一个阻尼层连接

^① 见本章习题 2。

阻尼。

③ 对于分子动力学,以及其他数值仿真,为了抑制非物理反射(它取决于被仿真区的大小),在边界条件中一定要引入临界阻尼。

④ 在高频技术中,同样的理念用于导波管中抑制反射。

我们估算一下在钢轴承中抑制尖叫声所需要的阻尼参数。根据式(12.21),对于钢($G \approx 78 \text{ GPa}$, $\rho \approx 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$),当 $\beta \approx 2.5 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}$ 时,达到完全阻尼。例如,一个厚 1 cm,黏度接近于稠蜂蜜的聚合物板阻尼系数就是这样。实验研究表明,安装一个正确尺寸的聚合物板会产生声音的完全抑制效果(尖叫被动抑制,见图 12.5)。



图 12.5 锰钢制成的衬套轴承的零件,安装一个正确尺寸的聚合物衬套来抑制尖叫声

12.4 主动抑制尖叫声

除了通过给摩擦学系统引入阻尼来被动地抑制尖叫声外,还可以通过设计一个合适的控制回路来主动抑制尖叫。通过研究图 12.6 所示的简单模型,来解释主动抑制尖叫的基本原理。

假设法向力是时间的周期函数,频率与系统的固有频率 ω_0 相等,于是有:

$$N = N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (12.22)$$

其中 $N_1 \ll N_0$ 。对于一阶近似的弱阻尼,物体为自由、无阻尼振动,其速

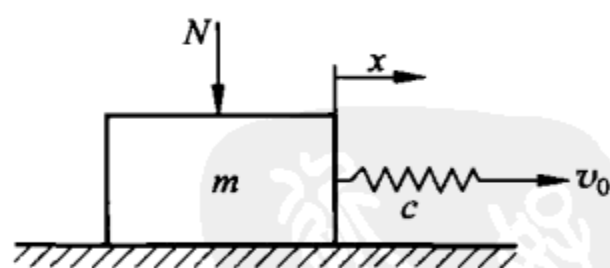


图 12.6 主动抑制尖叫声的简单模型

度为:

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega_0 t \quad (12.23)$$

通过计算运动物体在一个振荡周期内能量的变化来定性地研究稳定性。假设摩擦力为法向力和取决于速度的摩擦系数的乘积,即

$$F_{\text{fric}} = N\mu(v) \quad (12.24)$$

振动能量的变化由参考系中摩擦力的平均功率决定,其中参考系以平均速度 v_0 运动:

$$\bar{P} = -\overline{F_{\text{fric}}(v - v_0)} = -\overline{N\left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv}v\right)(v - v_0)} \quad (12.25)$$

将式(12.22)和(12.23)代入(12.25),得到:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= -\overline{[N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi)]\left[\mu_0 v_1 \cos \omega_0 t + \frac{d\mu}{dv}(v_0 + v_1 \cos \omega_0 t)v_1 \cos \omega_0 t\right]} \\ &= -\frac{1}{2}v_1 \left[N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv}v_0 \right) \cos \varphi \right] \end{aligned} \quad (12.26)$$

对于弱阻尼,有:

$$\bar{P} \approx -\frac{1}{2}v_1 \left(N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi \right) \quad (12.27)$$

如果法向力没有振荡,平均功率等于 $-\frac{1}{2}N_0 v_1^2 \frac{d\mu}{dv}$, 则得到如下已知结论: 如果摩擦力随着速度的增大而减小 ($d\mu/dv < 0$), 则能量增加, 这个过程是不稳定的。但是, 通过改变法向力, 功率可以变成负值, 也就是振荡受阻。这点要发生, 必须满足下面条件:

$$N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi > 0 \quad (12.28)$$

仅当 $\cos \varphi > 0$ 时, 才能满足这个条件。理想情况下, $\cos \varphi = 1$, 即 $\varphi = 0$ 。换句话说, 式(12.22)的法向力应该是振荡的, 它的相位与式(12.23)中的速度同步。这点可以用一个控制回路来实现, 在回路中测定速度的大小并使法向力随着测得的速度成比例变化, $\Delta N = \xi(\dot{x} - v_0)$ 。这种情况下, 运动方程为:

$$m\ddot{x} + [N_0 + \xi(\dot{x} - v_0)]\mu(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0 t + \eta v_0 \quad (12.29)$$

对于稳态解表达式(12.2)的小干扰, 线性化方程为:

$$m\delta\ddot{x} + \left(N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta \right) \delta\dot{x} + c\delta x = 0 \quad (12.30)$$

为了使稳态滑动保持稳定, 式(12.30)中的总阻尼必须为正:

$$N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta > 0 \quad (12.31)$$

对于摩擦力随着速度的增大而减小的情况,要么通过足够大的阻尼 η ,要么通过速度和法向力之间求得的 $\mu_0 \xi$ 来实现稳定。从式(12.31)可以看出,控制回路和阻尼器有相同的效果。被动抑制中,参数仅可以通过材料的选择和改变尺寸来调整,与此相比,主动抑制的优点在于控制回路的简单可控性。

12.5 尖叫时的强度

为了计算什么条件下材料的强度会受损,我们想估算一下系统发出尖叫声时引入系统中的应力。研究系统见图 12.3。对于弱阻尼,可以找到微扰方程(12.17)的一个一阶近似解,方程的边界条件为:

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \bigg|_{z=0} = 0 \quad \text{且} \quad u^{(1)}(-l) = 0 \quad (12.32)$$

在最小特征频率,这个特征方程的解为:

$$u(z, t) = A \sin \left[\frac{\pi}{2l} (z + l) \right] \sin \frac{\pi c}{2l} t \quad (12.33)$$

其中 $c = \sqrt{G/\rho}$ 是横向弹性波的速度。速度 \dot{u} 的振幅为 $\bar{v} = A \frac{\pi c}{2l}$, 应力 $G \frac{\partial u}{\partial z}$

的振幅等于 $\bar{\sigma} = AG \frac{\pi}{2l}$ 。据此,应力振幅和速度振幅之间存在下面的关系:

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}}{c} = \bar{v} \sqrt{G\rho} \quad (12.34)$$

通常在稳定循环中,速度的振幅与滑动速度 v_0 有相同的数量级。一个尖叫系统中,这些应力的数量级估算为:

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}_0}{c} = \bar{v}_0 \sqrt{G\rho} \quad (12.35)$$

这是一个非常普遍的结果,也适用于更高特征频率的振荡:在一个极限循环中,这些应力基本上仅取决于速度! 当临界速度为下面值时,应力达到材料的临界剪切应力 σ_F :

$$v_c = \frac{\sigma_F}{\sqrt{\rho G}} \quad (12.36)$$

对于钢, $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$ (对应一个约 500 MPa 的拉伸强度), 算出临界速度为 $v_0 = 12 \text{ m/s}$ 。对于更大的滑动速度,尖叫声会导致由该钢制成的零

件的失效。

12.6 稳定性标准与系统刚度的关系

在 12.5 节中,我们仅仅考虑了由于摩擦力随着速度的增大而减小所引起的失稳的发展机理。这种情况下,稳定性标准与系统刚度无关。在图 12.2 所示的例子中,平均速度低于 v_{\min} 的运动始终是不稳定的。系统刚度影响着摩擦引起的振动的频率,但是不影响稳定标准。但实际中可以看到,一个系统可以通过改变系统刚度来达到稳定。这个现象在大量的实验研究中得以证实,它表明由摩擦力随速度增大而减小所引起的失稳的简单解释可能不是始终正确的。

从数学的角度来说,其原因在于一个不合适的假设:摩擦力仅由摩擦接触的瞬时状态决定——本质上由法向力和滑动速度决定。对于静摩擦力,这个假设将意味着静摩擦力始终保持不变。但是根据库仑的摩擦力与时间的关系,我们知道这点不完全正确。即使法向力不变,“滑动速度”保持常数(等于零),静摩擦力还是会随着时间变化。这个变化有不同的物理原因。对于金属而言,蠕变过程导致真实接触面积的变化,从而导致了摩擦力的变化。对于弹性体而言,是黏度导致了延迟反应。润滑系统中,即使法向力不变,油膜厚度随着时间变化。此外,接触双方的温度变化,伴随它们之间润滑油的温度的变化,对摩擦力也有影响。毛细桥梁对摩擦力的贡献,明确地说也是取决于时间的。

对于单个情况来说,这些过程都可以通过增加合适的变量来描述,这些变量被称为“内部变量”,它们足以表示摩擦层状态和中间体材料(也称为第三方材料)的特征。内部变量的想法最初是由 A. Ruina 用于地震动力学的^①。在一些情况下,这些变量有明确的物理意义(如温度);其他情况下,内部变量可用实践经验来概括。

在这里研究最简单的现象学模型,来描述典型的“接触状态”^②的动力学。再次考虑图 12.1 所示的模型,用下面的运动方程来描述:

$$m \ddot{x} + F(\dot{x}, \theta) + \eta \dot{x} + cx = cv_0 t + \eta v_0 \quad (12.37)$$

① A. Ruina. Slip instability and state variable friction laws. Journal of Geophysical Research, 1983, 88, N. B12, 10359-10370.

② 一个更加复杂化、现实化、与速度和状态相关的摩擦定律将在第 20 章讨论。

其中摩擦力 $F(\dot{x}, \theta)$ 现在不仅与速度有关, 也与内部状态变量 θ 有关。假设它们的关系为:

$$F(\dot{x}, \theta) = F_k + (F_s - F_k)\theta \quad (12.38)$$

这里 θ 是内部变量, 用于描述接触区的状态, 它从刚开始接触时的 $\theta=0$, 到静止很长一段时间后变为 $\theta=1$ 。 F_s 是静摩擦力, F_k 是动摩擦力。对于状态变量 θ , 采用下面简单的运动方程:

$$\dot{\theta} = \left[\frac{1}{\tau}(1 - \theta) - \frac{1}{D}\dot{x} \right], \quad 0 < \theta < 1 \quad (12.39)$$

对于速度为零, $\dot{x}=0$, θ 随着时间而增大, 直到达到饱和值 $\theta=1$ 。如果物体处于运动, 那么速度越大, 状态变量下降得越快。式(12.39)中 τ 的物理意义是系统静止时参数 θ 的特征松弛时间, D 是开始运动时参数 θ 的特征“松弛长度”。从物理的角度来看, 在两个粗糙表面间的接触, τ 可以理解为蠕动过程的特征时间, D 可以理解为两个微接触间的平均接触直径, 但是对于不同的系统而言, τ 和 D 可能有不同的物理意义。

由式(12.37), (12.38)和(12.39)形成的方程组有一个稳态解, 其中:

$$\dot{x} = v_0 \quad (12.40)$$

$$\theta = \theta_0 = \begin{cases} 1 - v_0/v_c, & \text{对于 } v_0 < v_c \\ 0, & \text{对于 } v_0 > v_c \end{cases} \quad (12.41)$$

$$F = \begin{cases} F_k + (F_s - F_k)(1 - v_0/v_c), & \text{对于 } v_0 < v_c \\ F_k, & \text{对于 } v_0 > v_c \end{cases} \quad (12.42)$$

其中

$$v_c = D/\tau \quad (12.43)$$

稳态摩擦力表达式(12.42)与速度的关系见图 12.7。

由式(12.37)~(12.39)的方程组正确、定性地再次得出了摩擦学性质。其中最重要的是, 在某个速度区间, 摩擦力从静态值减小到动态值, 物体静止后静摩擦力随着时间而增加。

如果我们用稳态滑动过程中摩擦力与滑动速度的关系式(12.42)来做稳定性分析, 那么得到的结论是: 速度 $v_0 < v_c$ 时滑动是不稳定的。实际上, 仅当振动时间远大于特征松弛时间 τ

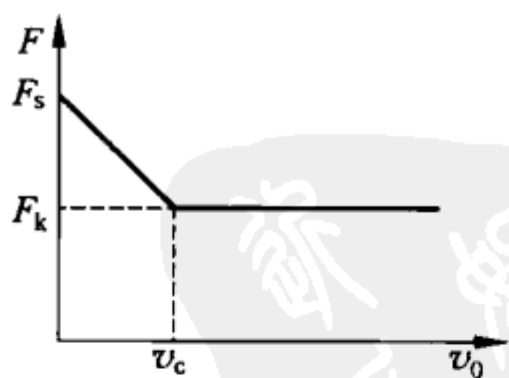


图 12.7 根据方程(12.42), 稳态摩擦力是滑动速度的函数

时这个结论才成立,因为只有在这个前提下,式(12.42)的关系才能用于动力学过程。由此可得,系统的刚度足够小,也就是对应足够大的振动周期时,滑动实际上不稳定。相反地,对于足够大的系统刚度,其对应足够小的振动周期,参数 θ 没有时间去改变。根据式(12.38),摩擦力与速度完全无关,不会发生失稳。为了研究一般情况下稳态解表达式(12.40)~(12.42)的稳定性和得到稳态极限(取决于滑动速度和系统刚度),现在考虑稳态解的一个微扰:

$$x = x_0 + v_0 t + \delta x, \quad \theta = \theta_0 + \delta\theta \quad (12.44)$$

线性化方程为:

$$m\delta\ddot{x} + \eta\delta\dot{x} + c\delta x + (F_s - F_k)\delta\theta = 0 \quad (12.45)$$

$$\delta\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\delta\theta - \frac{1}{D}\delta\dot{x} \quad (12.46)$$

这个方程组的解的指数形式为:

$$\delta x = Ae^{\lambda t}, \quad \delta\theta = Be^{\lambda t} \quad (12.47)$$

代入式(12.45)和(12.46),得到:

$$(\lambda^2 m + \eta\lambda + c)A + (F_s - F_k)B = 0 \quad (12.48)$$

$$\frac{1}{D}\lambda A + \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)B = 0 \quad (12.49)$$

当下面这个行列式为零时,这个线性方程组有一个非平凡解:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{\eta}{m}\lambda + \frac{c}{m} & \frac{F_s - F_k}{m} \\ \frac{1}{D}\lambda & \lambda + \frac{1}{\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (12.50)$$

或

$$\lambda^3 + \lambda^2 P + \lambda Q + R = 0 \quad (12.51)$$

其中

$$P = \frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m}, \quad Q = \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{F_s - F_k}{Dm}\right), \quad R = \frac{c}{\tau m} \quad (12.52)$$

在稳定的极限情况,系统为无阻尼振动,也就是说 λ 的三阶代数方程的三个解中的两个是纯虚数和其共轭复数,第三个解是负实数:

$$\lambda_1 = -\Lambda, \quad \lambda_2 = +i\omega_c, \quad \lambda_3 = -i\omega_c \quad (12.53)$$

这种情况下的一般解为:

$$\delta x = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2^* e^{i\omega_c t} + x_3^* e^{-i\omega_c t} = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2 \cos\omega_c t + x_3 \sin\omega_c t \quad (12.54)$$

这个解描述了对于给定足够长的时间周期,一个恒定振幅的周期振荡。

给定根是三阶代数方程有下列形式:

$$(\lambda + \Lambda)(\lambda - i\omega_c)(\lambda + i\omega_c) = \lambda^3 + \lambda^2\Lambda + \lambda\omega_c^2 + \Lambda\omega_c^2 = 0 \quad (12.55)$$

比较式(12.51)和(12.55),得到结果:

$$P = \Lambda, \quad Q = \omega_c^2, \quad R = \Lambda\omega_c^2 \quad (12.56)$$

由此可得,在稳定的极限情况,必须满足条件 $R = PQ$,如将式(12.52)考虑进去,则为:

$$\frac{c}{\tau m} = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{F_s - F_k}{Dm} \right) \quad (12.57)$$

因此,临界刚度定义为:

$$c_c = \frac{m}{\eta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{F_s - F_k}{D} - \frac{\eta}{\tau} \right) \quad (12.58)$$

对于非常小的阻尼系数,这个表达式简化为:

$$c_c = \frac{(F_s - F_k)m}{\eta D \tau} \quad (12.59)$$

当刚度小于 c_c 时,滑动是不稳定的;刚度大于 c_c 时,滑动是稳定的。当速度 $v_0 > v_c$ 时,运动也是稳定的。这可以在图 12.8 的稳定性图中看到。这种情况下,可以通过增加速度以及刚度来使运动稳定。实际上,稳定图永远不是这么规则的四四方方,但是在一个较小的速度区域和刚度区域内存在失稳的定性结论是很正确的,这曾在不同摩擦机理的系统被观察到。

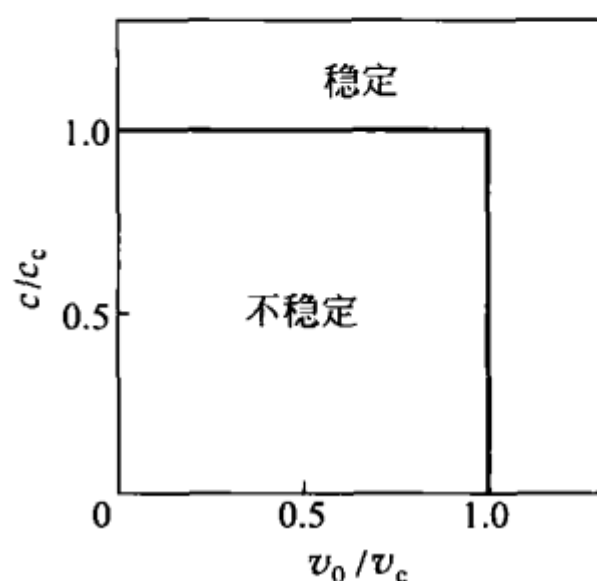


图 12.8 “速度-刚度”平面上一个摩擦学系统的稳定性图

12.7 自锁-滑动

在之前所讨论的所有模型中,只研究了沿滑动方向系统的运动。实际上,垂直于表面的运动也很重要,会影响摩擦学系统的行为。我们研究图 12.9 所示的模型来解释这点。

如果沿水平方向的作用力 F 大于 $\mu_s N$, 其中 N 是由弹簧产生的作用在基体的法向力,那么系统会滑动。但是,如果使物体沿垂直方向振动,那么

法向压力就呈周期性变化。每次达到 F/μ_s 时,“脚”就粘住;在压缩力小于 F/μ_s 的时间区间,系统滑动,运动由粘住和滑动不断交替组成。

在图 12.9(a)所示的系统中,沿水平方向和垂直方向的运动是独立的。振动在垂直方向渐渐衰减完后,系统仍保持静止或滑动状态。图 12.9(b)的系统有所不同。由于振动,每当法向压力超过 F/μ_s 这个值时,系统的脚就粘住,系统的运动在那里突然刹住。因此,由于倾斜,制动将引发物体的振动。

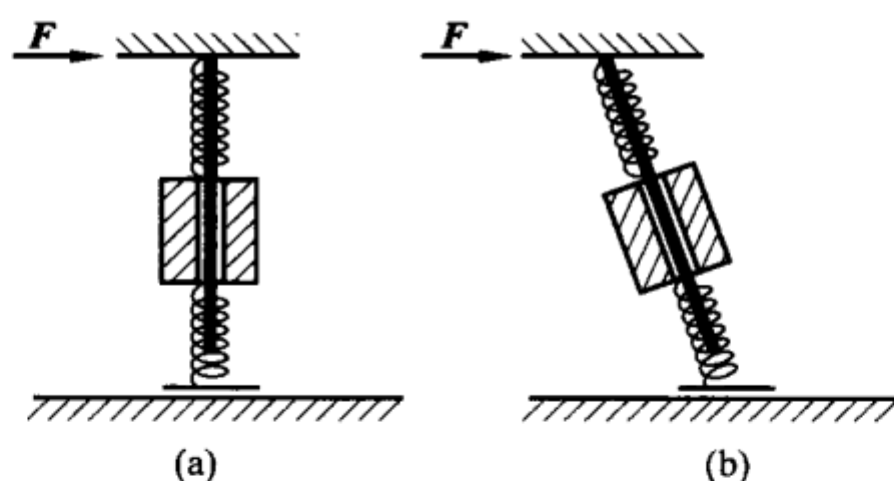


图 12.9 解释自锁-滑动机理的简单模型

根据这个机理的振动和相关的粘住-滑动运动被称为自锁-滑动。这个定义经常用于由于压缩力的变化导致系统粘住的情况。例如雨刷和图 12.10 所示的玩具,它们的振动都是这样的例子。

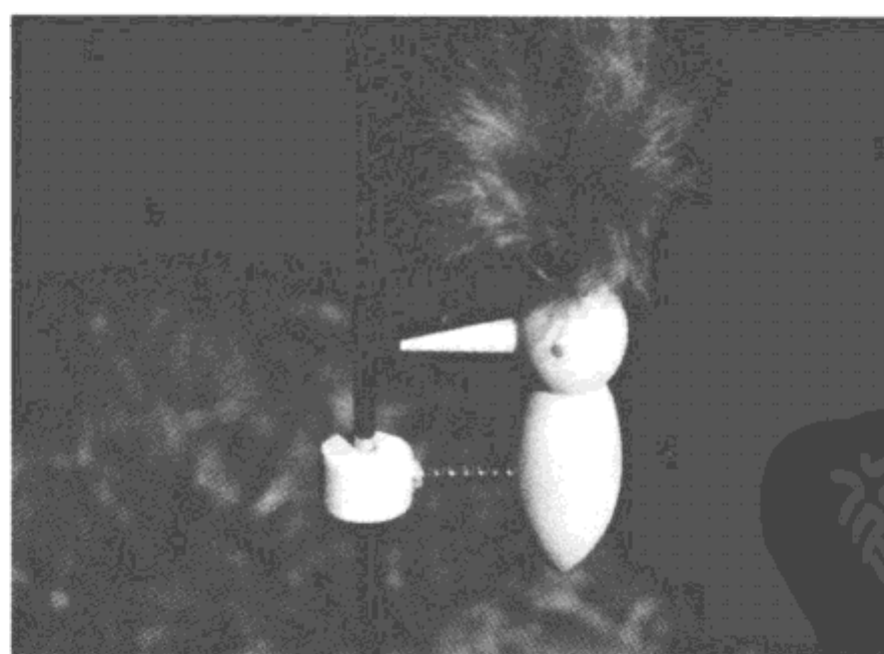


图 12.10 静止时,系统“自锁”。如果摇摆这只鸟,自锁就间歇地消失,套扣沿着杆向下滑。这种在粘住和滑动之间的交替就是自锁-滑动的例子

习题

习题 1 粘滑。库仑已经知道静摩擦和动摩擦的区别,事实上,这个区别只是摩擦力与速度相关的一种极限情况:对于很小的速度($v \approx 0$),摩擦力等于 F_s ,然后几乎瞬间跌至动摩擦力的水平 F_k (见图 12.11)。计算这种情况下的不稳定运动。再次使用这个模型,用一根弹簧拖动刚性平面上的一个刚性体。

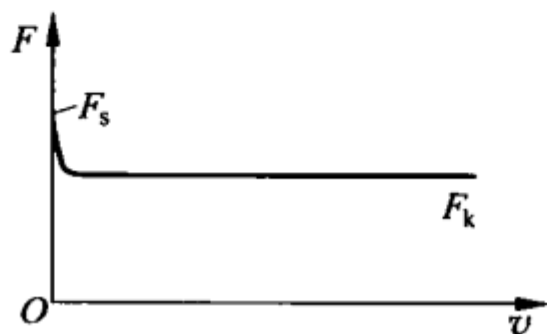


图 12.11 摩擦力从静态值 F_s 快速减小到动态值 F_k

解答: 如果一个物体最初在 $x=0$ 处于静止,以恒定的速度 v_0 拉动弹簧,那么根据下面的定律:

$$F_{\text{spring}} = cv_0 t$$

弹簧力会增加,一直到时刻

$$t_0 = F_s / cv_0$$

时达到静摩擦力 F_s 。此时物体开始运动,同时摩擦力减小至 F_k 。在滑动阶段,运动方程为:

$$m \ddot{x} + cx = cv_0 t - F_k$$

初始条件为:

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0$$

该运动方程的一般解为:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t + v_0 t - \frac{F_k}{c}$$

$$\dot{x} = a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t + v_0$$

代入初始条件,得到解为:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t + v_0 t - F_k / c = A \sin(\omega t + \varphi) + v_0 t - F_k / c$$

$$\dot{x} = a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t + v_0 = A \omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0$$

$$\ddot{x} = -a \omega^2 \sin \omega t - b \omega^2 \cos \omega t = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

其中

$$a = \frac{1}{\omega} \left(-v_0 \cos \frac{\omega F_s}{cv_0} - \omega \frac{F_s - F_k}{c} \sin \frac{\omega F_s}{cv_0} \right)$$

$$b = \frac{1}{\omega} \left(v_0 \sin \frac{\omega F_s}{c v_0} - \omega \frac{F_s - F_k}{c} \cos \frac{\omega F_s}{c v_0} \right)$$

且

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_0^2 + \left(\omega \frac{F_s - F_k}{c} \right)^2}$$

当 $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0 = 0$ 时, 物体再次处于静止。由此可得 $\cos(\omega t + \varphi) = -v_0/A\omega$ 。相关的加速度为:

$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)} = -(F_s - F_k)/m$
作用在物体上的力等于 $-(F_s - F_k)$, 弹簧的力等于:

$$F_{\text{spring}} = -F_s + 2F_k < F_s$$

由于这个力小于静摩擦力, 物体保持不动, 直到弹簧力再次达到 F_s 。

然后, 开始重复滑动阶段。这个运动由静止(粘住)和滑动不断交替组成, 称为粘-滑运动。图 12.12 为粘-滑运动的一个例子, 描述了速度和弹簧力与瞬时时间的关系。滑动阶段持续的时间为:

$$t_{\text{slip}} = \frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{\omega}{v_0} \frac{F_s - F_k}{c} \right)$$

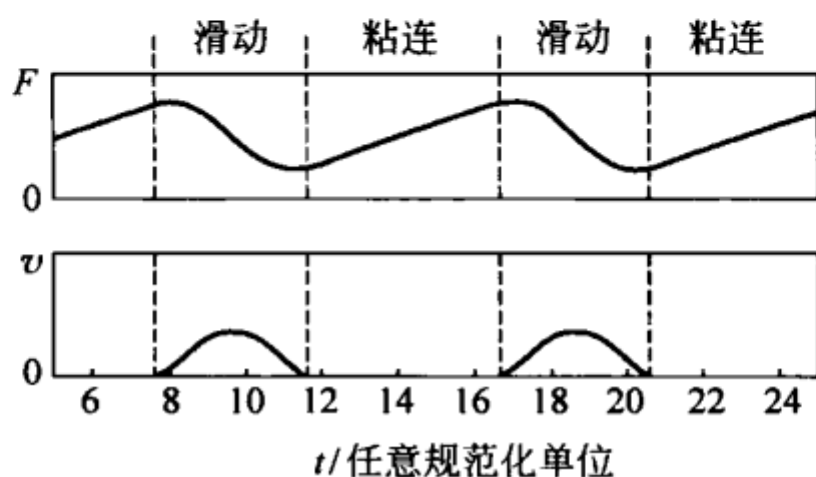


图 12.12 在图 12.11 所示的摩擦力情况下, 粘-滑运动的弹簧力(上图)和滑动速度(下图)作为时间的函数。物体静止, 弹簧力随时间线性增加(粘连阶段), 直到达到静摩擦力。然后, 物体开始运动和振荡, 一直到速度再次为零。然后, 下一个粘连阶段开始

在极限情况下 $v_0 \rightarrow 0$, 时间接近于 π/ω (半个振动周期)。对于非常小的速度值 v_0 , 滑动长度为:

$$\Delta x_{\text{slip}} = 2 \frac{F_s - F_k}{c}$$

习题 2 对于图 12.4 所示的系统中的阻尼板, 对应一个任意的阻尼系数, 计算反射系数。

解答: 找一个边界条件为式(12.19)的波动方程(12.10)的解, 作为一个人射波和一个反射波的复数形式叠加:

$$u = u_0 e^{ikct} (e^{ikz} + B e^{-ikz})$$

假设入射波的振幅为 1, 反射波的振幅为 B 。代入边界条件式(12.19), 可得:

$$B = e^{-2ikl} \frac{G - \beta c}{G + \beta c}$$

将反射波和入射波强度的比值定义为反射系数 $|B|^2$:

$$|B|^2 = \left(\frac{G - \beta c}{G + \beta c} \right)^2$$

对于 $\beta = G/c = \sqrt{G\rho}$, 反射系数变为零。对于 $\beta \rightarrow 0$ 和 $\beta \rightarrow \infty$, 反射系数趋近于 1。

习题 3 计算一个弹性板和一个动力黏度^①为 $\bar{\eta}$ 的液体薄膜之间的反射系数。

解答: 这里的运动方程是在弹性连续体中的波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

还包括液体介质的 Navier-Stokes 方程。对于纯横向运动, 其形式为:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

令弹性介质和液体介质间的边界为 $z=0$ 平面。假设 z 方向正向为弹性层的方向。内表面的边界条件为:

$$\dot{u}(0, t) = v(0, t) \quad (\text{无滑动条件})$$

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{z=0} = \bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial z} \bigg|_{z=0} \quad (\text{平衡条件})$$

与习题 2 的做法一样, 找一个波动方程的解, 一个人射波和一个反射波的叠加形式为:

$$u = e^{i\omega t} (e^{i\frac{\omega}{c}z} + B e^{-i\frac{\omega}{c}z})$$

^① 动力黏度 $\bar{\eta}$ 不应该与阻尼系数 η 混淆, 阻尼系数在本章或其他章中较早使用过, 单位不同。

频率为 ω 的 Navier-Stokes 方程的解(当 z 趋近于负无穷时, 这个解趋近于零)为:

$$v = Ce^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta}}z} e^{i\omega t}$$

在内表面应用边界条件, 得到下面的方程组:

$$i\omega(1+B) = C$$

$$iG \frac{\omega}{c}(1-B) = \bar{\eta} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta}} C$$

反射系数为:

$$|B|^2 = \frac{(1-\zeta)^2 + \zeta^2}{(1+\zeta)^2 + \zeta^2}$$

其中

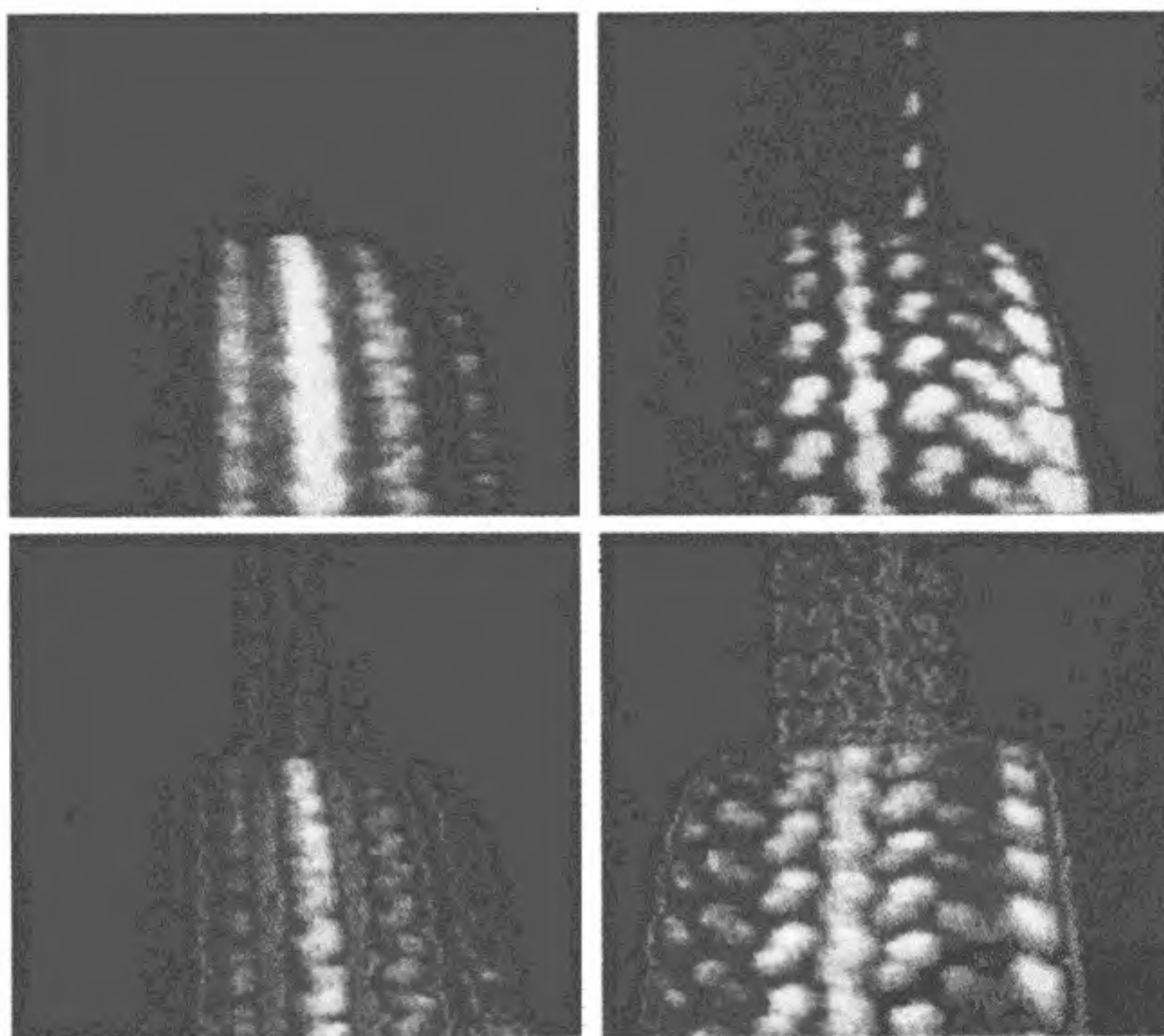
$$\zeta = \frac{c}{G} \sqrt{\frac{\rho\omega\eta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\eta}{2G}}$$

对于 $\zeta=1/\sqrt{2}$, 反射系数达到最小值 $|B|^2 \approx 0.17$ 。可以看到, 通过液体层(或有相应的流变性质的聚合物), 在特定频率区的振动得到了有效衰减。在两种极限情况下, 即黏度分别为零和无穷大, 反射系数如我们所期待的, 都等于 1。



第 13 章

接触中的热效应



在摩擦接触中,两个物体之间的接触界面上有热能释放。通常实际接触面积只是表面接触面积的很小一部分,所以在摩擦学接触中,释放的热能很不均匀。局部温度会增加很高以至于影响到材料的性能,甚至会导致材料熔化。此外,局部温度的变化会导致物体的热膨胀,从而引起接触条件的相应变化。这个反馈反应在某些情况下会导致接触中热机械失稳的发生。本章将研究摩擦学接触中由摩擦引起的热释放问题。

13.1 概述

1935年, F. P. Bowden 和 K. Riedler 首次对摩擦接触中的温度分布进行了系统的研究^①。研究中他们将摩擦学接触作为一个自然热电偶。这种方法在当今仍然是用实验的方法确定摩擦接触中温度分布的最简单和最可靠的方法之一。在和 Tabor 的进一步研究中, Bowden 测得, 在部分接触区域温度能达到很高(和熔点同一数量级)。

研究接触热效应时, 可以区分以下三种尺度: ①摩擦学系统作为一个整体; ②“宏观接触区”; ③粗糙表面间的微观接触。整个系统的温度在这个过程中是缓慢变化的, 而在滑动接触中(例如两个齿轮接触)温度会快速增长到很高值。这称为“瞬现温度”。在“宏观接触区”, 瞬现温度的理论研究首先要与 H. Blok^② 这个名字联系起来。大的佩克莱特数(Péclet number)是这些情况下的特性。J. K. Jaeger 研究了对于小的佩克莱特数的温度动力学^③。这个理论通常应用于微接触中。但是, Jaeger 的小佩克莱特数理论在 Blok 理论成立的范围内也是相对精确的。因此本章仅研究小佩克莱特数的情况。

13.2 微接触中的瞬现温度

讨论 Greenwood-Williamson 模型(见第7章)中两个粗糙表面间的接触。同时假设两个微凸体之间有摩擦, 摩擦系数为 μ 。计算一个微接触中的温度增长, 假设在接触时间 $t \approx a/v$ 中, 热量的特征传播长度 $D \approx \sqrt{2\alpha t}$ 远大于接触半径: $\sqrt{2\alpha t} \gg a$, 或

$$\frac{va}{2\alpha} \ll 1 \quad (13.1)$$

式中, α 是热扩散率; a 是接触半径; v 是滑动速度。比值 $va/(2\alpha)$ 就是佩克莱特数。如果满足条件式(13.1), 对于表面上一个给定的热产量, 都可以将每一点

① F. P. Bowden, K. E. W. Riedler. A note on the surface temperature of sliding metals. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, 31(3): 431.

② H. Blok. The dissipation of frictional heat. Applied Scientific Research, Section A, 1955, (2-3): 151-181.

③ J. K. Jaeger. Moving sources of heat and the temperature of sliding contacts. Journal and Proc. Royal Society, New South Walls, 1942, 76(3): 203-224.

的瞬时热传播看做是一个稳态过程。对于金属($\alpha \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $a \approx 10^{-5} \sim 10^{-4} \text{ m}$), 这意味着滑动速度不可以大于 $2\alpha/a \approx 2 \sim 20 \text{ m/s}$, 这在多数应用中也确实如此。对于陶瓷和聚合物($\alpha \approx 10^{-7} \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $a \approx 10^{-5} \text{ m}$), 它近似在滑动速度为 $0.02 \sim 0.2 \text{ m/s}$ 时有效。

在热导率为 λ 的半空间表面上, 温度在半径为 a 圆形区域内的均匀增长 ΔT 会产生热通量 \dot{W} , 它等于 ΔT 与热阻 R_w 的比值:

$$\dot{W} = \frac{\Delta T}{R_w} \quad (13.2)$$

对于圆形区域, 热阻为:

$$R_w = \frac{1}{2a\lambda} \quad (13.3)$$

也可以用这个热阻和式(13.2)来估算给定热通量下表面的温度增长:

$$\Delta T = \frac{\dot{W}}{2a\lambda} \quad (13.4)$$

假设总热量仅流到了一个物体中, 则对于单个弹性微接触, 得到:

$$\Delta T = \frac{\mu \Delta F_N v}{2a\lambda} \quad (13.5)$$

将赫兹公式 $\Delta F_N = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$ 代入上式, 并考虑 $a = \sqrt{Rd}$, 得到:

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{\mu E^* dv}{\lambda} \quad (13.6)$$

在第7章看到, 平均压入深度 \bar{d} 实际上与压力无关, 而且近似等于 l/π 。因此, 可得到微接触中平均温度的增长:

$$\overline{\Delta T} \approx 0.2 \frac{\mu E^* lv}{\lambda} \quad (13.7)$$

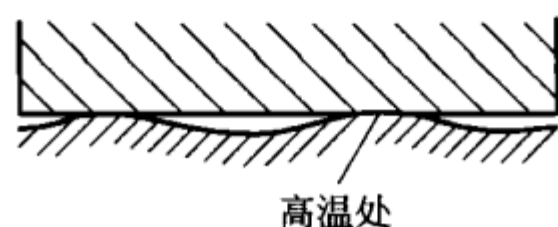
对于钢和青玉(蓝宝石)的接触($E^* \approx 140 \text{ GPa}$, $\mu \approx 0.15$, $l \approx 1 \text{ } \mu\text{m}$, $\lambda \approx 40 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$), 滑动速度为 1 m/s 时, 微观接触中平均温度的增长达到 $\overline{\Delta T} \approx 110 \text{ K}$ 。对于铜, $E^* \approx 100 \text{ GPa}$, $\lambda \approx 400 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, 同样的假设下平均温度的增长为 $\overline{\Delta T} \approx 8 \text{ K}$ 。在一些应用中, 瞬现温度要尽可能保持很低^①, 则应该选择聚合物和陶瓷这个接触对。这种方式下, 聚合物的(小)弹性模

① 在人工髋关节中, 温度可能不会超过蛋白质的分解温度, 因此允许的温度增长为 $2 \sim 4 \text{ K}$ 。

量 E^* 和陶瓷较大的热导率 λ 都会抑制温度的增加。

13.3 热机械的失稳

如果两个平面物体被压在一起并有相对运动,那么通过交界处摩擦能的释放和热膨胀,会发生失稳:更高温度会产生更大的膨胀,则这些区域的应力更大,受热更多(见图 13.1)。现在研究这样一个失稳发展的条件。



首先做一个粗略的估算。如果一个波数为 k 的失稳在表面发生,那么有相同波数的应力分布和温度分布将会在表面的相同区域形成。这些应力和温度波动的“特征衰减深度”以及它们产生的表面变形区的数量级为 $1/k$ 。如果表面被加热(在压缩区) ΔT ,那么产生的热应力为:

$$\Delta\sigma \approx \gamma\Delta TE^* \quad (13.8)$$

式中 γ 是体积热膨胀系数, E^* 是弹性模量。稳态时,单位面积的摩擦功率 $\mu\Delta\sigma v$ 一定等于稳态时穿过材料的热通量,即

$$\mu\Delta\sigma v \approx \lambda \frac{\Delta T}{1/k} \quad (13.9)$$

考虑式(13.8),计算一个波向量,此时热产量和热通量处于平衡,即

$$k_c \approx \frac{E^*\mu\gamma v}{\lambda} \quad (13.10)$$

因此波数小于临界波数的温度干扰是不稳定的。在受载很高的发动机中,压缩环与圆柱体的接触面上,热机械的失稳是搓板型磨损的原因(见图 13.2)。

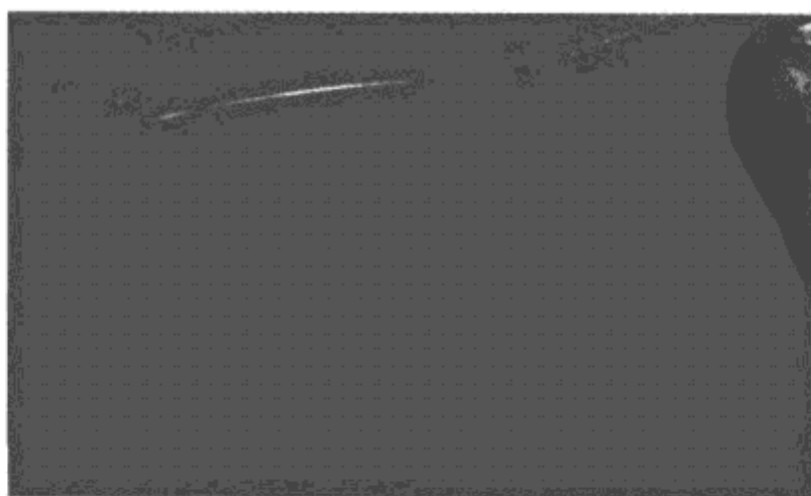


图 13.2 内燃机中有“搓板纹”的圆柱体的照片

习题

习题 1 计算在一个弹性体和一个刚性体接触中热机械失稳的稳定性标准。

解答：这个问题和在上面例子中已经估算的一样，考虑图 13.3 所示的系统。上面的物体绝对刚性并且没有热传导。

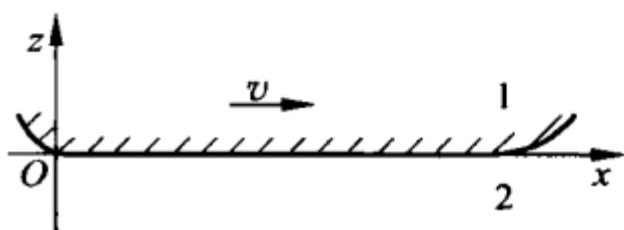


图 13.3 一个刚性无热传导的物体 1 和一个弹性连续体 2 的接触，物体 1 以切向速度 v 相对移动

在稳定和不稳定状态的边界，干扰是平稳的。为了计算失稳标准，用弹性体的平衡方程，将热膨胀考虑进去，于是有：

$$\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\Delta\mathbf{u} + \frac{3}{2(1+\nu)}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = \gamma\nabla T$$

对于热传导，稳态方程为：

$$\Delta T = 0$$

式中， \mathbf{u} 是位移矢量； ν 是泊松比； T 是远离表面处温度从静态值开始的变化； $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算子。应力张量为：

$$\sigma_{ik} = -\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\gamma T\delta_{ik} + \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\delta_{ik} + G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)$$

式中 G 是剪切模量。

因为上面物体是刚性的，则弹性体的表面在竖直方向没有任何位移，即

$$u_z(z=0) = 0$$

为了简单起见，假设摩擦系数非常小，法向应力分量 σ_{zz} 占主要地位，而切向应力在力平衡条件中可被忽略：

$$\sigma_{zz}(z=0) = 0$$

由方程 $\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\Delta\mathbf{u} + \frac{3}{2(1+\nu)}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = \gamma\nabla T$ 和 $\Delta T = 0$ ，以及边界条件 $u_z(z=0) = 0$ 和 $\sigma_{zz}(z=0) = 0$ ，得到方程的解为^①：

^① 这个解中选择 $\cos kx$ 与坐标 x 的关系，是因为这里研究的是一个谐波干扰的发展。由于这个问题的线性化，一个任意的干扰可以表达为有不同波数的谐波分量的叠加。

$$T = T_0 \cos kx \cdot e^{kz}$$

$$u = -\frac{\gamma T_0 (1 + \nu)}{6(1 - \nu)k} [(-1 + kz) \sin kx, 0, -kz \cos kx] e^{kz}$$

稳态时,表面上释放的热量必须等于流出表面的热通量(根据假设,只穿过下面的物体):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\mu v \sigma_z, \quad z = 0$$

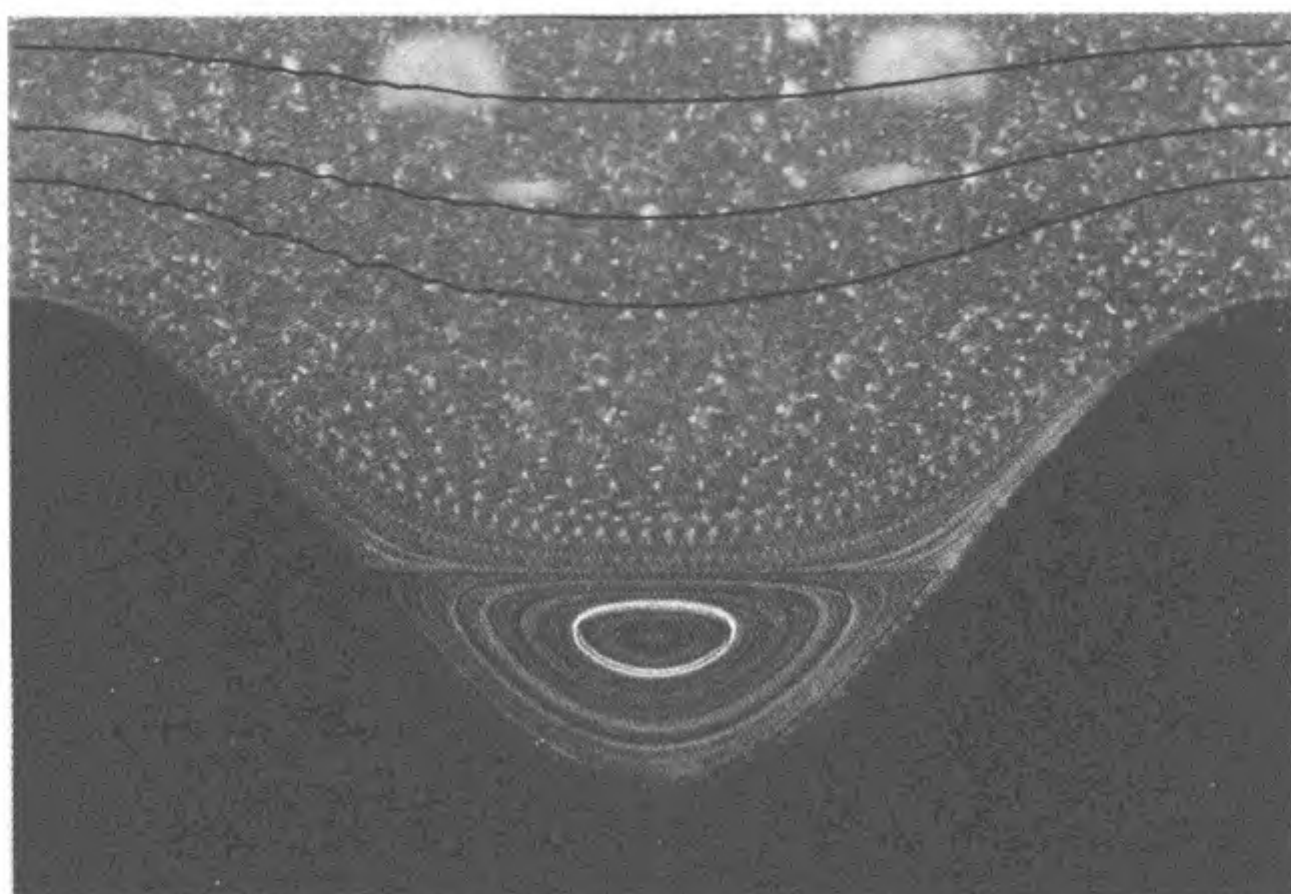
λ 是热导系数。由此可得波数的临界值为:

$$k_c = \frac{v \mu G \gamma (1 + \nu)}{3 \lambda (1 - \nu)}$$

对于 $\nu = 1/3$, 算出波数为 $k_c = \frac{2v\mu G\gamma}{3\lambda}$ 。波数小于此临界波数的温度干扰是不稳定的。



第 14 章 润滑系统



为了减小摩擦力和磨损,润滑剂已经被使用了几千年。它避免了两个物体间的直接接触,使得流体润滑代替了干摩擦。两个物体之间流体的存在不仅影响切向力,也影响法向力:两块干燥的玻璃可以轻松地被分开,而为了分开两块湿润的玻璃,则需要施加较大的力。这个现象,一方面归因于毛细管力的作用,另一方面归因于纯流体动力的本性:一定黏度的流体要流入两块板之间较小的空间,需要一定的时间。在动载情况下,这个现象可导致两个润滑物体表面间的“黏着”,我们称之为“黏性黏着”。

在润滑摩擦学系统中,多数情况下处理的是非湍流流体。此外,润滑剂可近似看做不可压缩。最初对两个平行板之间稳态流动的流体动力润滑和黏性黏着的讨论,形成了润滑理论的基础。

14.1 两个平行面之间的流动

线黏性(牛顿)流体的动力学由 Navier-Stokes 方程给出,对不可压缩流体,该方程为下列形式:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (14.1)$$

式中, ρ 为密度; η 为流体的动力黏度; p 为流体中的压力。此外,不可压缩流体满足下列方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (14.2)$$

对于准静态流体(所谓的蠕动流体),在多数润滑问题中都会碰到,惯量这一项可被忽略,方程为:

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p \quad (14.3)$$

考虑被一层油膜隔开的可相对运动的两块平板(见图 14.1)。一般假设上面的板速度为零,下面的板速度为 $-v_0$ 。

考虑 x 方向的一个稳态流体。则其速度仅有 x 分量,而且取决于 z 坐标 $\mathbf{v} = (v(z), 0)$ 。方程(14.3)采用下面形式:

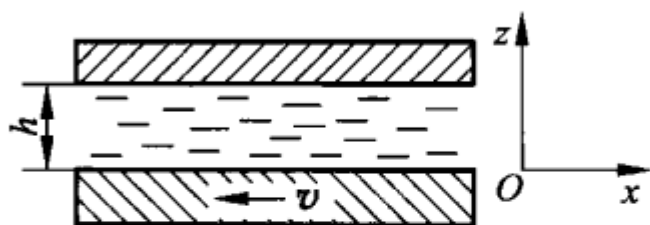


图 14.1 两块平行板之间的流动

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (14.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z = 0 \quad (14.5)$$

由式(14.5)可得,压力与垂直坐标 z 无关: $p = p(x)$ 。对式(14.4)积分两次,得到:

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (14.6)$$

代入边界条件 $v(0) = -v_0$ 和 $v(h) = 0$, 可得 $C_2 = -\eta v_0$ 和 $C_1 = \frac{\eta v_0}{h} -$

$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2}$ 。因此速度分布为:

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z(z-h)}{2} + \frac{\eta v_0}{h} (z-h) \quad (14.7)$$

14.2 流体动力润滑

现在讨论图 14.2 中的两个物体。让一个物体的表面相对于另一个稍微倾斜。假设两个物体的表面都光滑,此外处于下方的物体以速度 $-v_0$ 向左移动。对于小的倾斜角,我们可以将每个点的流体看做是两个平行面之间的流体,则用速度分布方程(14.7)为:

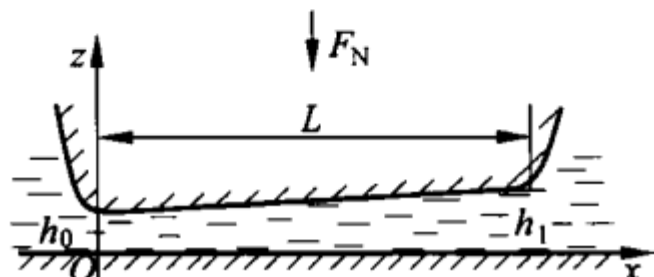


图 14.2 两个物体相对滑动,被润滑油膜隔开

$$v = p' \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h) \quad (14.8)$$

式中 p' 表示压力梯度。

由质量守恒可知,单位时间通过每个截面的质量流一定是常数,即

$$\begin{aligned} \frac{Q}{D} &= \int_0^h v(z) dz = \int_0^h \left[p' \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h) \right] dz \\ &= -p' \frac{h^3}{12\eta} - \frac{v_0 h}{2} = C \end{aligned} \quad (14.9)$$

式中, D 是滑动物体的宽度; C 为常数。由此,我们得到压力梯度为:

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) \quad (14.10)$$

高度的线性增加表示为 $h = h_0 + ax$, 对式(14.10)积分,则得到压力为:

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{ext}} - 6\eta v_0 \int_0^x \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dx = p_{\text{ext}} - \frac{6\eta v_0}{a} \int_{h_0}^h \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dh \\ &= p_{\text{ext}} + \frac{3\eta v_0}{a} \left[2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - C \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (14.11)$$

计算这个定积分时,考虑到边界处 $p(0) = p_{\text{ext}}$ 。在另一端($x=L$),压力也等于外部压力 p_{ext} ,则得到 $C = 2h_0 h_1 / (h_0 + h_1)$ 。因此压力分布为:

$$p = p_{\text{ext}} + \frac{6\eta v_0}{a} \left[\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right] \quad (14.12)$$

速度分布为:

$$v = v_0 (z-h) \left[\frac{1}{h} + 3z \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^3} \cdot \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \right) \right] \quad (14.13)$$

若式(14.12)中 $p_{\text{ext}} = 0$, 速度分布和压力分布见图 14.3。

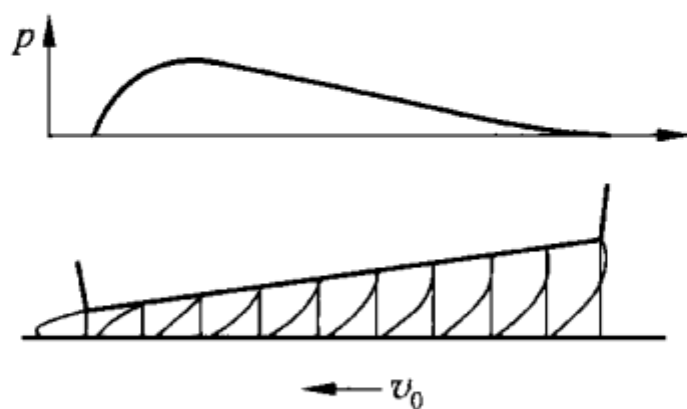


图 14.3 两个流体润滑的光滑滑动平面之间的速度分布和压力分布

只要速度和压力分布已知,就可以很容易算出作用在上方物体的力的 x 分量和 z 分量。力的垂直分量计算为:

$$F_N = \int dx dy (p - p_{\text{ext}}) = \frac{\eta A L v_0}{h_0^2} \alpha \quad (14.14)$$

式中 $\alpha = \frac{6}{(\xi-1)^2} \left[\ln \xi - \frac{2(\xi-1)}{\xi+1} \right]$, $\xi = h_1/h_0$; $A = LD$ 为“表面接触面积”。

力的水平分量由黏应力 $\sigma_{xz} = \eta \partial v / \partial z$ 引起,计算为:

$$F_R = \eta \int_A dx dy \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\eta A v_0}{h_0} \beta \quad (14.15)$$

式中 $\beta = \frac{1}{\xi-1} \left[4 \ln \xi - \frac{6(\xi-1)}{\xi+1} \right]$ 。则摩擦系数为:

$$\mu = \frac{F_R}{F_N} = \left(\frac{h_0}{L} \right) \frac{\beta}{\alpha} \quad (14.16)$$

摩擦系数取决于作用在接触面的平均压力。如果由式(14.14)计算出间隙 h_0 ,并将其代入式(14.16),则得到:

$$\mu = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{A \eta v_0}{L F_N}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\eta v_0}{L P}} \quad (14.17)$$

式中, $P = F_N/A$ 为接触面内的平均压力。参数 β/α 以及 $\beta/\sqrt{\alpha}$ 与 ξ 的关系见图 14.4。在通常的 ξ 值范围,比值 β/α 处于 5~10,因此,摩擦系数粗略估算为:

$$\mu \approx 10 \left(\frac{h_0}{L} \right) \quad (14.18)$$

摩擦系数约为最小间隙(也就是膜厚)和接触面长度的比值的 10 倍。在大部分的入口与出口区膜厚比 ξ 的范围,比值 $\beta/\sqrt{\alpha}$ 仅

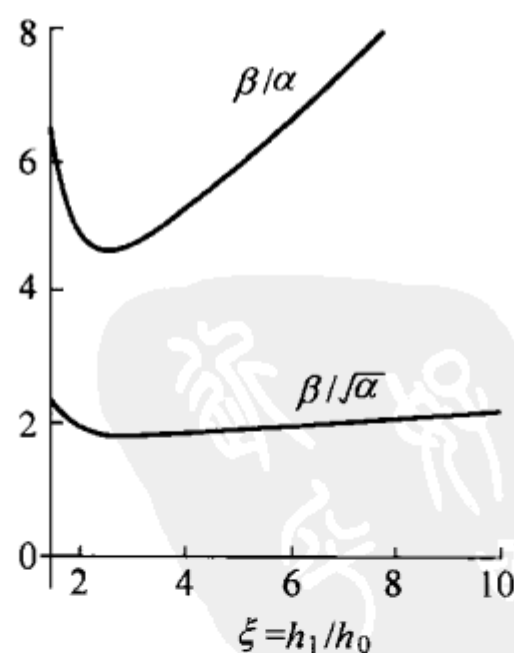


图 14.4 影响摩擦系数的参数 β/α 和 $\beta/\sqrt{\alpha}$ 与膜厚比 ξ 的函数关系

有轻微变化而且约等于 2(见图 14.4)。因此,式(14.17)可近似计算为:

$$\mu \approx 2 \sqrt{\frac{\eta v_0}{LP}} \quad (14.19)$$

对于同样的接触面长度,摩擦系数是参数组合 $\eta v_0/P$ 的函数。

根据公式(14.19),压力越大,摩擦系数越小。需要注意的是,随着压力

的增长,最小膜厚会变小, $h_0 = \sqrt{\alpha L \frac{\eta v_0}{P}}$ 。当膜厚足够小时,“表面是光滑的”这一假设就不再成立;而粗糙度的影响将变得重要,润滑系统则过渡为混合摩擦状态。因此,在更大的压力下,摩擦系数会再次增大。摩擦系数与参数 $\eta v_0/P$ 的关系称为“Stribeck 曲线”(见图 14.5)。该曲线描述了摩擦系数与上述参数的关系,特别是描述了润滑系统中摩擦力与速度的关系。对于较大的 $\eta v_0/P$,这个关系具有普遍性。另一方面,在混合摩擦状态,这个曲线取决于固体表面和润滑剂的性质。随着滑动速度的减小,就可以进入混合摩擦状态。速度越大,润滑剂的油膜厚度就越大,表面微凸体直接接触的机会就越少。

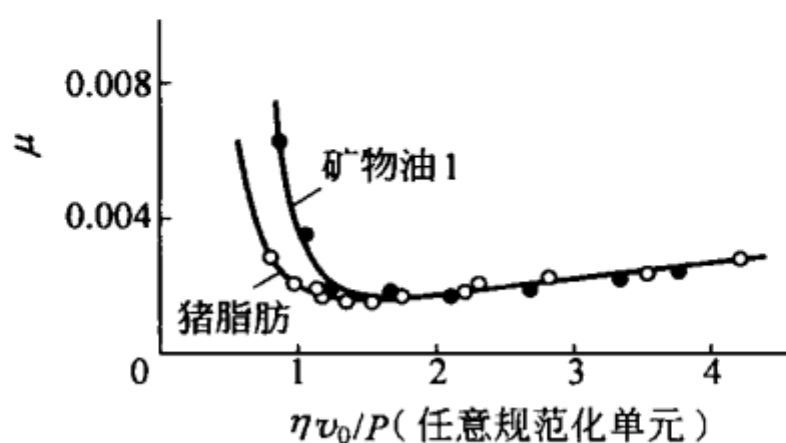


图 14.5 两种不同润滑剂的 Stribeck 曲线。高速下,两条曲线重合。但 $\eta v_0/P$ 值较小时,对于不同的润滑剂,两个系统表现出不同的行为^①

14.3 黏性黏着

如果两个物体之间存在一个液体膜,那么它们既不会被很快挤压在一起,也不会被很快分开。后面这个效应被视为一种“黏着”。在一些动力过程中,经常很难区分“真正”的黏着(由两个物体之间的表面力或毛细桥梁产

^① A. E. Norton. Lubrication. New York: McGraw-Hill, 1942.

生)和“黏性黏着”。两个物体被液体膜隔开,只有当该液体被“排出”时,它们才有可能直接接触。要使这两个物体分开,液体必须再一次流到接触区,除非有空泡现象发生(气泡的形成和增长)。但是这两个过程都需要一定的时间。

考虑半径为 R 的两块圆盘的靠近,圆盘之间有油膜存在(见图 14.6)。由于垂直靠近,被排挤的液体形成了一个径向流。由于对称性,流动速度也是呈放射状的对称。如果油膜厚度远小于圆盘半径,那么速度的径向分量远大于圆盘的靠近速度,本质上这是一个受到压力梯度作用的流体,而在第一节中就已经研究了这点。则速度等于:

$$v = p' \frac{z(z-h)}{2\eta} \quad (14.20)$$

式中 $p' = \partial p / \partial r$ 。穿过半径为 r 的圆柱形表面的体积流量为:

$$Q = \int_0^h 2\pi r v(z) dz = p' \frac{\pi r}{\eta} \int_0^h z(z-h) dz = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta} \quad (14.21)$$

因为上方圆盘的垂直运动,这个流量一定等于体积流量 $Q = -\pi r^2 \dot{h}$:

$$-\pi r^2 \dot{h} = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta} \quad (14.22)$$

则压力梯度为:

$$p' = \frac{6\eta r \dot{h}}{h^3} \quad (14.23)$$

积分后为:

$$p = \frac{6\eta \dot{h}}{h^3} \int r dr = \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} r^2 + C \quad (14.24)$$

代入边界条件 $p(r=R) = p_{\text{ext}}$ (外部压力), 可得积分常数为:

$$C = p_{\text{ext}} - \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} R^2 \quad (14.25)$$

因此,压力分布的最终表达式为:

$$p = \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} (r^2 - R^2) + p_{\text{ext}} \quad (14.26)$$

垂直作用在圆盘上的力可用下式计算:

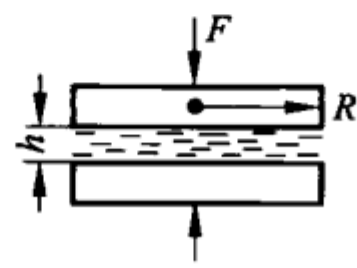


图 14.6 液体油膜从两块圆盘之间排出

$$F = \int_0^R 2\pi r(p(r) - p_{\text{ext}})dr = \frac{6\eta\pi\dot{h}}{h^3} \int_0^R (r^2 - R^2)rdr = -\frac{3\eta\pi\dot{h}}{2h^3}R^4 \quad (14.27)$$

对于一个给定的力,可以算出两个盘间的距离由 h_0 减小至 h 所需的时间:

$$\int_0^t \frac{2F}{3\eta\pi R^4} dt = - \int_{h_0}^h \frac{dh}{h^3} \quad (14.28)$$

$$\frac{2F}{3\eta\pi R^4} t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \quad (14.29)$$

在两盘初始距离 h_0 较大时,时间仅取决于最小距离,在这个例子中为最终距离:

$$t = \frac{3\eta\pi R^4}{4Fh^2} \quad (14.30)$$

如果上式中这个力与时间有关,那么下式成立:

$$\int_0^t F(t) dt = \frac{3\eta\pi R^4}{4h^2} \quad (14.31)$$

这意味着,可获得的最小油膜厚度仅取决于冲量。

现举例说明这个观点。考虑一个被黏性流体覆盖的物体,该物体以速度 v 被抛到天花板上(见图 14.7),那么它能保持挂在天花板上多长时间? 撞击之前的瞬间,物体的动量等于 Mv 。撞击中,由于天花板反作用力的冲量,物体的动量变为零。因此,这个冲量也等于 Mv 。因为将盘压到距离 h 所需要的冲量等于从距离 h 分开所需要的冲量,则为了将盘从天花板上“扯”开,重力的冲量 Mgt 一定要达到 Mv ,由此可得 $t=v/g$ 。这仅对牛顿流体有效。

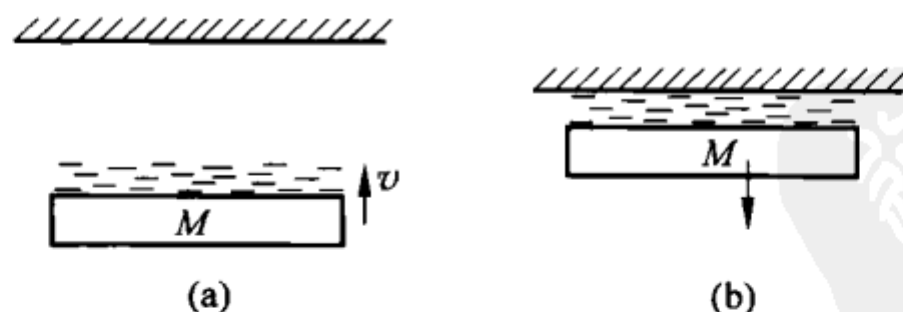


图 14.7 一个表面上覆盖有液体油膜的盘被抛到“天花板”上,会悬挂一定的时间

从式(14.31)看到,牛顿流体的黏性黏着不能使人在天花板上行走。如果液体的黏度取决于速度梯度,情况就发生了变化。从方程(14.31)可以看到,将盘靠近到膜厚为 h (或将盘分开到距离 h)所需要的冲量与黏度成正

比。对于非线性黏性液体,黏度取决于速度梯度(多数液体速度梯度越大,黏度越小)。如果将两个盘迅速压在一起,然后再缓慢分开,那么撞击中的正冲量就小于分开时的负冲量。这个差值可以用来将运动物体保持在天花板上,处于平衡状态。

14.4 润滑剂流变学

到现在为止,我们都假设润滑剂是线黏性(牛顿)流体,即黏度是一个常数,跟速度梯度无关,也跟压力无关。实际应用中人们期望润滑剂表现出与线黏性行为不同的性质,该性质通常是通过加入特殊的添加剂来实现的。这一节将定性地讨论线黏性行为的修正。

在几个原子直径大的空间尺度和 $10^{-13} \sim 10^{-10}$ s 的时间尺度,液体处于非晶体状态,其中每个分子都处于由周围其他分子所建立起来的势能表面的最小势,由于系统热波动,一些能量高于最小势能的分子偶尔会发生能级跃迁。尽管从微观的角度来说,这些跃迁非常稀少但却是剪切应力作用下液体呈现出流动性的物理原因。如果介质中的剪切应力不等于零,那么每个分子都会以相同的概率 P 向各个方向跳跃,这个概率由玻尔兹曼因子给出:

$$P \propto e^{-\frac{U_0}{kT}} \quad (14.32)$$

式中, U_0 是活化能; T 为绝对温度; k 为玻尔兹曼常数。没有宏观应力时,液体中不发生宏观运动。如果应力施加在介质上,那么势垒的高度变化到分子会“向右跳跃”($U_r = U_0 - \tau V_0$)和“向左跳跃”($U_l = U_0 + \tau V_0$)。这里, V_0 是所谓的活化体积。此外,活化能 U_0 取决于作用在流体上的压力 p 。通常,它随着压力的增大而增大: $U_0 = E_0 + pV_1$, 其中 V_1 是与体积相同尺寸的另一个常数。因此,分子向相反方向运动的活化能可写成:

$$\begin{cases} U_r = E_0 + pV_1 - \tau V_0 \\ U_l = E_0 + pV_1 + \tau V_0 \end{cases} \quad (14.33)$$

活化体积 V_0 和 V_1 都与一个原子体积 a^3 有相同的数量级,其中 a 是原子半径。宏观剪切应变的速度正比于分子流沿相反方向的差值:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = \text{常数} \times \left(e^{-\frac{E_0 + pV_1 - \tau V_0}{kT}} - e^{-\frac{E_0 + pV_1 + \tau V_0}{kT}} \right) = Ce^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right) \quad (14.34)$$

这个方程给出了线黏性行为最重要的典型修正之一,相对于牛顿流体,

这是对真实流体流变学的修正。下面是方程(14.34)在极限情况下的性质:

(1) 应力非常小: $\frac{\tau V_0}{kT} \ll 1$, 则可以用 $\frac{\tau V_0}{kT}$ 代替 $\sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right)$ 。忽略更高阶项, 对于剪切应变的速度, 得到:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = C e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \frac{\tau V_0}{kT} \quad (14.35)$$

这个方程表明, 剪切应变率与剪切应力成正比。 τ 与 $\dot{\gamma}$ 的比例系数正是介质的动力黏度:

$$\eta = \frac{kT}{CV_0} e^{\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \quad (14.36)$$

当 $kT \ll E_0$ (仅在室温下成立) 时, 黏度随着温度的增长呈指数减小。典型的情况是, 温度增长 30 K, 黏度下降 50%。此外, 黏度与压力成指数变化。在与压力的关系 $\eta \propto e^{\alpha p}$ 中, 系数 $\alpha = V_1/(kT)$ 称为压黏系数。室温下, 压黏系数的数量级在 10^{-8} Pa^{-1} 。

(2) 通常式(14.34)中的关系是非线性的。变形速率随剪切应力的增长比线性关系时要快, 这意味着在大应力或大速度梯度时, 黏度更小(见图 14.8)。

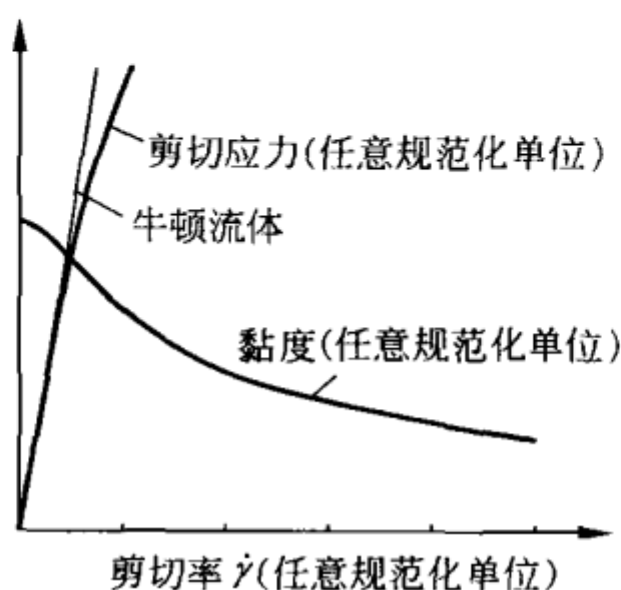


图 14.8 根据式(14.34)和黏度 $\tau/\dot{\gamma}$, 剪切应力与剪切应变率(速度梯度)的关系(黏度随着剪应变率的增大而减小)

14.5 边界润滑

如果液体膜厚度约等于表面粗糙度, 那么系统进入混合摩擦状态, 一部分表面被一层液体隔开, 而另一部分表面中微凸体开始接触。这些点, 表面会发生塑性变形, 进入原子级近距离接触。Hardy(1919—1922)发现, 这些

情况下,油脂润滑比液体油润滑能更好地保护表面。他认为甚至单分子层厚度的油脂层也能大大减少摩擦和磨损。Hardy 也意识到,边界层黏在了金属表面。当表面有非常薄但黏附很强的润滑剂层时,摩擦称为边界层摩擦。根据 Hardy 的观点,摩擦以及磨损系数随着油脂相对分子质量的增大而减少。对于边界层效果来说,这点很重要:脂肪酸在金属表面形成金属皂。边界润滑的保护机理与 Bowden 和 Tabor 的观点“薄金属层的保护机理(见第 10 章)”很类似。特别是,这层薄膜仅在低于金属皂(已经在表面形成)的熔化温度下或软化温度下起作用。

润滑脂和润滑油的最重要的区别在于:油是液体,而脂和金属皂是固体,它们有较小但确定的屈服点。因此,油会被完全从接触点挤出去,但是塑性的膜不会。如果两个半径为 R 的圆盘被一个屈服点为 τ_0 的润滑材料挤压和分开,则它们之间的薄膜厚度保持为^①:

$$h = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{F} \quad (14.37)$$

14.6 弹性流体动力学

在高应力润滑接触中,如滚动接触轴承、齿轮或凸轮轴等,接触双方的表面发生了弹性变形。将弹性变形考虑到润滑剂动力学中,这样的问题称为弹性流体动力学。本节将用一个简化的模型来讨论弹性流体动力润滑中最重要的方面。

这里仅研究非常高载荷的情况,此时必须将压力与速度的关系式(14.36)考虑进去,于是有:

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (14.38)$$

考虑被线黏性流体(满足式(14.38)中的压力与黏度的关系)所隔开,相互趋近的两块板(见图 14.6),其半径为 a 。因为压力与 z 坐标无关,又是线黏性流体,所以方程(14.23)是成立的。将式(14.38)代入,得到:

$$e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{6\eta_0 r \dot{h}}{h^3} \quad (14.39)$$

积分并代入边界条件 $p(a) = p_{\text{ext}}$, 得到:

① 见本章习题 5。

$$\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha p_{\text{ext}}} - e^{-\alpha p}) = \frac{3\eta_0(-\dot{h})}{h^3}(a^2 - r^2) \quad (14.40)$$

这种情况下,受挤压液体的特点为:圆盘的趋近速度不会超过一个极限值,即使圆盘中间的压力为无穷大。将 $r=0$ 和 $p=\infty$ 代入式(14.40)中,可以算出这个极限值:

$$-\dot{h}_0 = \frac{h_0^3}{3\eta_0\alpha a^2} e^{-\alpha p_{\text{ext}}} \quad (14.41)$$

这里, $h_0=h(0)$ 是接触面中心的液体膜厚度。因此,在很高的载荷下靠近速度与法向力无关。在非常低的外部压力下($e^{-\alpha p_{\text{ext}}} \approx 1$)有:

$$-\dot{h}_0 = \frac{h_0^3}{3\eta_0\alpha a^2} \quad (14.42)$$

现在考虑一个弹性球体(半径为 R)以垂直于平面的速度 v 被压在一个刚性平面上(见图 14.9)。估算液体膜厚度与时间的函数关系。

在重载接触中,残余油膜厚度很小,可以忽略,间隙中的表面变形以及压力分布实际上与干接触中一样^①。对于一个恒定的趋近速度 v ,压入深度为 $d=vt$,接触半径为 $a=\sqrt{Rd}=\sqrt{Rvt}$,其中这个时间是从“几何接触”的瞬间开始算起。将其代入式(14.42)中,得到:

$$-\dot{h}_0 = \frac{h_0^3}{3\eta_0\alpha a^2} = \frac{h_0^3}{3\eta_0\alpha Rvt} \quad (14.43)$$

积分,得到 $1/h^2 - 1/h_0^2 = \left(\frac{2}{3\alpha\eta_0 Rv}\right) \ln(t/t_0)$ 。当 $h_0 \gg h$ 时,有:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{2}{3\alpha\eta_0 Rv} \ln(t/t_0) \quad (14.44)$$

方程(14.42)在 $\alpha p_0 \approx 1$ 时成立。因此式(14.44)中的积分下限 t_0 计算为满足条件 $\alpha p_0 \approx 1$ 时的时间,其中 p_0 是接触面中心的赫兹压力:

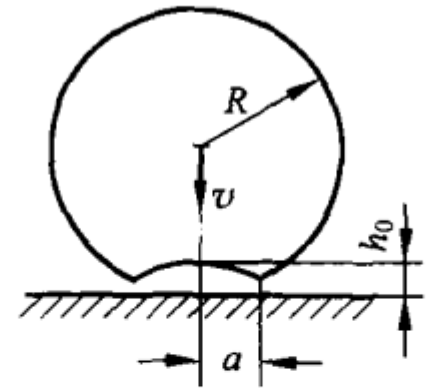


图 14.9 一个弹性球体(半径为 R)以垂直于平面的速度 v 被压在一个刚性平面上

① Ertel(1944)首次提出这个观点。见: A. Mohrenstein-Ertel. Die Berechnung der hydrodynamischen Schmierung gekrümmter Oberflächen unter hoher Belastung und Relativbewegung. VDI-Fortschrittsberichte, Row 1, Nr. 115, Düsseldorf, 1984. (Ertel 的俄语论文于 1944 年被译成德语)。

$$\alpha \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} = \alpha \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{v t_0}{R} \right)^{1/2} \approx 1 \quad (14.45)$$

由此得到:

$$t_0 \approx \frac{\pi^2 R}{4 v \alpha^2 E^{*2}} \quad (14.46)$$

液体膜厚度为:

$$h = \frac{3^{1/2} \alpha^{1/2} \eta_0^{1/2} v^{1/2} R^{1/2}}{2^{1/2} \left[\ln \left(\frac{4 v \alpha^2 E^{*2}}{R \pi^2} t \right) \right]^{1/2}} \quad (14.47)$$

一个弹性球体(半径为 R)和一个弹性平面之间在润滑重载滚动接触中,可以使用上面这个结果来估算液体膜厚度。滚动可被定性地看做球体的重复“放置”,“重置时间”由 $t \approx 2a/v$ 给出; v 是滚动速度, a 是接触半径[用式(5.24)计算]。将此估算时间代入式(14.47),得到:

$$h = \frac{3^{1/2} \alpha^{1/2} \eta_0^{1/2} v^{1/2} R^{1/2}}{2^{1/2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \frac{8 \alpha^2 E^{*5/3} F^{1/3}}{R^{2/3} \pi^2} \right] \right\}^{1/2}} \quad (14.48)$$

液体膜厚度与弹性模量和法向力略有关系(对数关系)。对于典型的数值 $\alpha = 2 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$, $\eta_0 = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $F = 1 \text{ kN}$, $R = 0.025 \text{ m}$, $E^* = 100 \text{ GPa}$ 和 $v = 1 \text{ m/s}$, 可估算出 $h \approx 0.8 \mu\text{m}$ 。

由 Dowson 和 Hamrock 求出的精确数值解^①表明,液体膜厚度可用下面的经验公式来描述,对于一个线性接触(l 是轴承接触的长度),有:

$$h_0 = 3.06 \alpha^{0.56} \eta_0^{0.69} v^{0.69} E^{*-0.03} R^{0.41} (F/l)^{-0.1} \quad (14.49)$$

对于一个椭圆点接触,有:

$$h_0 = 2.69 \alpha^{0.53} \eta_0^{0.67} v^{0.67} E^{*-0.03} R^{0.47} F^{-0.067} (1 - 0.61 e^{-0.73 \chi}) \quad (14.50)$$

式中 $\chi = a/b$, a 和 b 分别是垂直或平行于运动方向的接触椭圆的半轴, R 是运动平面的曲率半径。

14.7 固体润滑剂

在某些条件下,液体润滑剂不能用于减小摩擦和磨损。例如,太空飞行摩擦学系统,必须能在真空或者在极高或极低的温度下稳定工作。这些情

① B. J. Hamrock, D. Dowson. Ball Bearing Lubrication. New York: John Wiley and Sons Inc., 386 S, 1981.

况下,就可以使用固体润滑剂。

人们几十年前就对铅(lead),石墨(graphite)和二硫化钼(molybdenite, MoS_2)(现在使用的固体润滑剂的前身)等开展了细致研究。这三种物质颜色相似(从浅灰色、蓝色到黑色),而且能很容易扩散到物体表面。18 世纪之前,人们一直无法辨别这三种物质。有时将石墨或者二硫化钼误认为铅。“molybdenite”这个名字本身来自于希腊语 Mόλυβδος ,它的意思就是铅(lead)。在英国, graphite 曾被称为是“plumbago”(石墨),这个词 plumbago 可以追溯到 lead 这个词。

在高纯度物质的生产技术发展之后,石墨和二硫化钼作为固体润滑剂而广泛应用才成为可能。这两种物质以悬浮液的形式,分别应用于 19 世纪末和 20 世纪 30 年代中。

固体润滑剂最重要的性质是,它在摩擦中对表面的强黏着性和它的易变形性。除了层状结构外,石墨和二硫化钼中还有其他的因素也很重要。例如石墨仅在少量水或氧存在时才有较好的润滑性能,在真空下就失去了润滑性。相反,二硫化钼在无水情况下,润滑性能会提高。

通常,用于现代工业中固体润滑剂的材料都有与石墨和二硫化钼类似的层状结构。显然,固体润滑剂的润滑机理类似于边界层润滑机理。

习题

习题 1 计算被一层液体油膜所分开的波形表面和光滑平面间的摩擦力。波形表面轮廓为 $a \cos kx$ 。

解答: 将两个表面之间的分开距离定义为 $h = h(x)$, 梯度 h' 非常小。假设两个表面之间的间隙中充满了黏度为 η 的润滑剂。平行间隙中蠕流的速度分布符合方程(14.7), 即

$$v = p' \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h)$$

其中压力梯度符合方程(14.10), 即

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right)$$

在一个空间周期 Λ 积分, 得到:

$$p(\Lambda) - p(0) = -6\eta v_0 \int_0^\Lambda \left(\frac{1}{h(x)^2} - \frac{C}{h(x)^3} \right) dx = 0$$

这里, 令积分为零, 因为压力分布作为周期函数, 与波形表面轮廓的周期相

等,都是 Λ 。由此得到:

$$C = \frac{\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^2}}{\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^3}}$$

作用在平面(底下的面)上的液体的剪切应力等于:

$$\tau = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{p'h}{2} + \frac{\eta v_0}{h} = \eta v_0 \left(\frac{4}{h} - \frac{3C}{h^2} \right)$$

这个周期内的平均切向应力,理解为宏观摩擦力 τ_R ,则有:

$$\tau_R = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \tau dx = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \int_0^\Lambda \left(\frac{4}{h(x)} - \frac{3C}{h(x)^2} \right) dx$$

将 C 替换后有:

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \left(4 \int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)} - 3 \left(\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^3} \right)^{-1} \left(\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^2} \right)^2 \right)$$

对于恒定的间隙,这个方程变成了基本公式 $\tau_R = \eta v_0 / h$ 。现在假设波形表面由下面方程给出:

$$h(x) = h_0 + a[1 - \cos(kx)]$$

即最小间隙为 h_0 ,波形幅值为 a ,波数为 $k = 2\pi/\Lambda$ 。则得到:

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{h_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2a/h_0}} \frac{h_0^2 + 2h_0a + 3a^2}{h_0^2 + 2h_0a + \frac{3}{2}a^2}$$

极限情况下 $h_0 \ll a$,该值为:

$$\tau_R \approx \sqrt{2} \frac{\eta v_0}{\sqrt{ah_0}}$$

习题 2 计算作用在一个平面和一个球体(半径为 R)之间的力,其中球体向这个平面靠近。球体和平面间的距离远小于 R 。

解答: 这个例子中是纯粹由压力梯度引起的液体挤压。根据式(14.23),压力梯度计算为:

$$p' = \frac{6\eta r \dot{h}}{h^3}$$

这里,间隙的高度给定为:

$$h \approx h_0 + \frac{r^2}{2R}$$

对压力梯度积分,得到

$$p = p_{\text{ext}} - \int_r^\infty 6\eta \dot{h} \frac{rdr}{\left(h_0 + \frac{r^2}{2R}\right)^3} = p_{\text{ext}} - \frac{3\eta R \dot{h}}{\left(h_0 + \frac{r^2}{2R}\right)^2}$$

因为这个积分在上边界收敛,则用 ∞ 来代替。因此,作用在球体上的力为:

$$F_N = \int_0^\infty 2\pi r [p(r) - p_{\text{ext}}] dr = -\frac{6\pi\eta R^2 \dot{h}}{h_0}$$

习题 3 估算作用在水平移动的球体上的力,球体和平面被分开距离 h_0 。

解答: 间隙中应力的数量级为 $\tau \approx \eta v_0 / h(r)$, 则力的数量级为:

$$F_R \approx 2\pi\eta v_0 \int_0^R \frac{rdr}{h(r)} = 2\pi\eta v_0 \int_0^R \frac{rdr}{h_0 + \frac{r^2}{2R}} = 2\pi\eta R v_0 \ln\left(1 + \frac{R}{2h_0}\right)$$

习题 4 一根半径为 r 的轴在一个圆柱型腔中以恒定的角速度 ω 转动 (见图 14.10), 而外圈圆柱不动, 并且半径为 $R = r + a$ 。令圆柱的长度为 L 。这两个圆柱之间充满了黏度为 η 的液体。由于受载, 转轴处于圆柱体型腔中的偏心位置。假设 $a \ll r$, 计算作用在转轴上的摩擦力矩和摩擦系数。

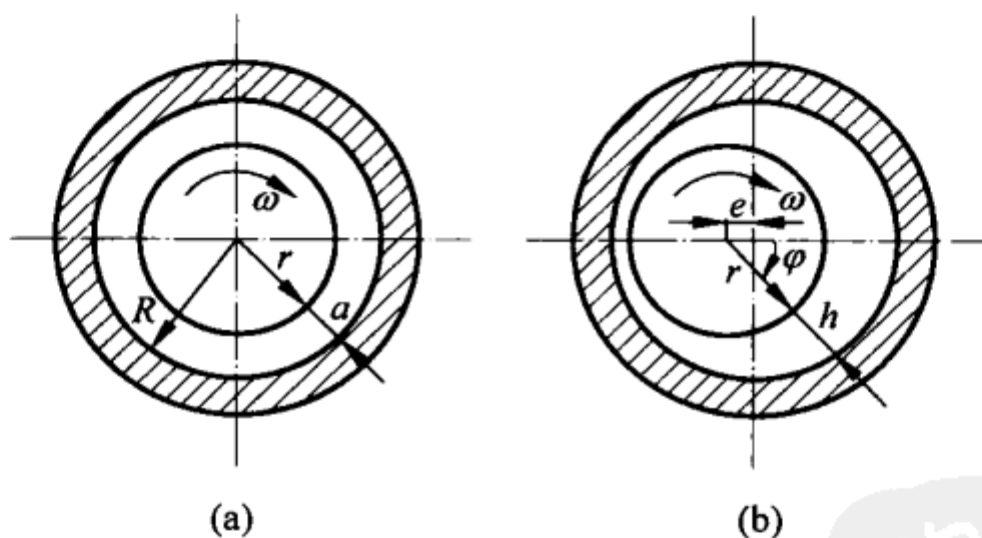


图 14.10 流体动力轴承
(a) 无载情况下; (b) 承载情况下

解答: 假设 $a \ll r$, 转轴和圆柱之间的流体可看做是平行流, 因此, 速度仅有圆周分量 v_φ , 压力 p 仅取决于角度。方程(14.8)对这种流体成立, 采用这样的形式:

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{dp}{d\varphi} \frac{\tilde{z}[\tilde{z} - h(\varphi)]}{2\eta} + \frac{\omega r}{h(\varphi)} [h(\varphi) - \tilde{z}]$$

其中

$$h(\varphi) \approx a + e \cos \varphi$$

压力分布为:

$$p(\varphi) - p(0) = + 6\eta\omega r^2 \int_0^\varphi \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi$$

其中

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^3}}$$

(见习题 1 中类似的方程)。这是关于角度 φ 的奇函数。因为 $p(\varphi)$ 是一个奇函数, 则力的水平分量 $F_x = Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi$ 没有了。力的垂直分量计算为^①:

$$\begin{aligned} F_z &= Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= -Lr^3 6\eta\omega \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi \\ &= \frac{12\pi e L r^3 \eta \omega}{(2a^2 + e^2) \sqrt{a^2 - e^2}} \end{aligned}$$

采用与习题 1 中相同的方法, 切应力计算为:

$$\tau = -\eta\omega r \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right)$$

力矩为:

$$\begin{aligned} M &= Lr^2 \int_0^{2\pi} \tau(\varphi) d\varphi = -L\eta\omega r^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right) d\varphi \\ &= -\frac{4\pi\eta\omega r^3 L(a^2 + 2e^2)}{\sqrt{a^2 - e^2}(2a^2 + e^2)} \end{aligned}$$

这种情况下, 比值 $\mu = \frac{|M|}{rF_z}$ 就是摩擦系数, 即

$$\mu = \frac{a^2 + 2e^2}{3er}$$

^① 实际上, 黏应力对垂直力也有贡献。但是可以看到, 在假设的条件下, 这个贡献很小, 可以忽略。

对于更大的载荷,当 $e \rightarrow a$ 时,摩擦系数达到极限值:

$$\mu = \frac{a}{r}$$

习题 5 (1) 计算两个圆盘间非线性黏性流体在受挤压时的速度分布和压力分布。假设流变规律为:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n$$

式中 γ 为剪切应变, $\dot{\gamma}_0$ 为特征剪切速度, n 为奇数, τ_0 为特征应力(极限情况 $n \rightarrow \infty$ 时,为屈服应力)。

(2) 计算液体膜厚度,材料为理想塑性,临界剪切应力为 τ_0 ($n \rightarrow \infty$)。

解答: (1) 建立坐标系,使原点位于油膜中间, z 轴垂直于油膜(见图 14.11)。压力与 z 坐标无关。

由于轴对称,只需要考虑平衡方程的 r 分量,即

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

对 z 积分一次,得到:

$$\tau = C_1 + p'z$$

将其代入流变规律中,得到下面的速度分布:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{C_1 + p'z}{\tau_0} \right)^n$$

这里,常数 C_1 一定等于零,因为由对称性可知,必须满足条件 $\dot{\gamma}(z=0)=0$ 。方程现在可以写成:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{p'z}{\tau_0} \right)^n$$

积分,得到:

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0}{n+1} \left(\frac{p'}{\tau_0} \right)^n z^{n+1} + C_2$$

代入固体表面上无滑动条件 $v(h/2) = v(-h/2) = 0$, 最终得到间隙中的速度分布:

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0}{n+1} \left[\frac{-p'}{\tau_0} \right]^n \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{n+1} - z^{n+1} \right]$$

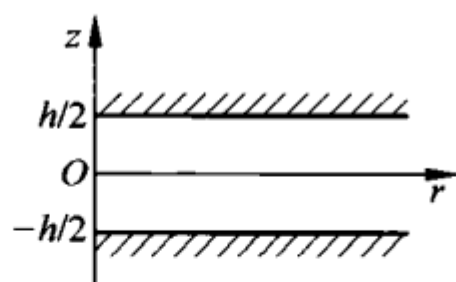


图 14.11 两个圆盘之间形成的液体膜

穿过一个半径为 r 的圆柱筒的体积流量为:

$$Q = 2\pi r \int_{-h/2}^{h/2} v(z) dz = 2\pi r \frac{\dot{\gamma}_0}{n+2} \left(\frac{-p'}{\tau_0} \right)^n \frac{h^{n+2}}{2^{n+1}}$$

由连续性,得到:

$$-\pi r^2 \dot{h} = 2\pi r \frac{\dot{\gamma}_0}{n+2} \left(\frac{-p'}{\tau_0} \right)^n \frac{h^{n+2}}{2^{n+1}}$$

压力梯度为:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = 2\tau_0 \left(-\dot{h} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0 h^{n+2}} r \right)^{1/n}$$

对这个方程积分,并代入边界条件 $p(R) = p_0$, 得到液体膜中的压力分布为:

$$p - p_0 = 2\tau_0 \left(-\dot{h} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0 h^{n+2}} \right)^{1/n} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} (R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1})$$

作用在盘上的法向力为:

$$F = \int_0^R 2\pi r (p - p_0) dr = \frac{2\tau_0 n}{3n+1} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{h^{1+\frac{2}{n}}} \left(-\dot{h} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0} \right)^{1/n}$$

对于 $n=1$ (线黏性流体), 再次得到了方程(14.27)。

(2) 在 $n \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 压力分布方程和力的方程简化为:

$$p - p_0 = 2\tau_0 \frac{R-r}{h}$$

$$F = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{h}$$

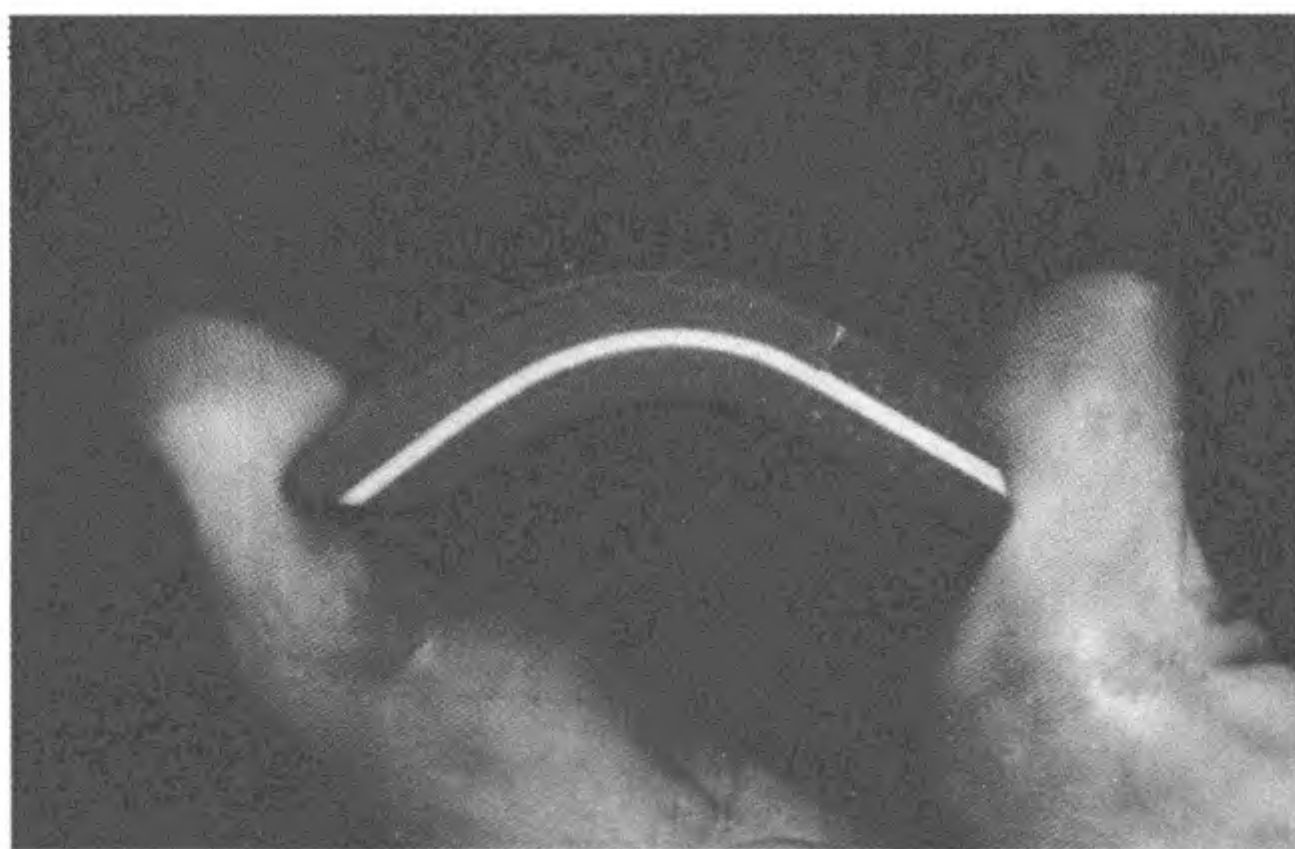
这个例子中, 处理的是屈服点为 τ_0 的理想塑性行为。由这个方程, 油膜厚度(油膜仍保持在间隙中, 未被压出)可计算为:

$$h = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{F}$$



第 15 章

高弹体的黏弹性能



15.1 概述

橡胶和其他高弹体在很多摩擦学应用中扮演着重要的角色。它们被用于需要大摩擦力的环境,特别是作为一种材料应用于轮胎、输送轮(例如打印机)、运动鞋、密封、橡胶绑带,以及电子设备(例如键盘触点)和黏着固定装置中。

高弹体具有两个最重要的性质:①弹性模量极其小(约 $1\sim 10$ MPa),比通常“固体”小 4 至 5 个数量级;②具有很高的可变形性:高弹体经常可被拉长至原长的好几倍。

高弹体这两个基本性质是由其自身化学结构决定的。高弹体由相互间作用力微弱的聚合物分子组成。在热动力平衡中,聚合物分子链通常处于统计学上相互缠绕的状态。如果给高弹体施加一个应力,这些聚合物分子

就开始舒展(见图 15.1)。如果再撤掉应力,这些分子又回到相互缠绕的状态。对于“正常的固体”来说,主要是势能最小时,达到平衡状态;而对于高弹体,主要是在熵达到最大时,达到平衡状态。这称为熵弹性^①。

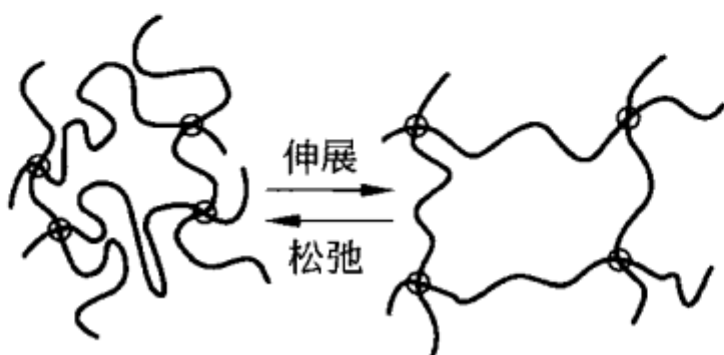


图 15.1 高弹体在拉伸过程中结构的变化

为了防止在拉伸载荷下这些分子链的完全解开缠绕,橡胶分子链通过硫桥相互连在一起,这种方法称为硫化^②。硫化过程中,通过加入大量的硫磺,可以形成硬橡胶;加很少的硫磺,得到的是较软的橡胶。在汽车轮胎制造中,为了在弹性、抗磨性和黏着能力之间达到最优化,通常在橡胶中加入炭黑,生成的复合材料称为“炭黑橡胶”。

通常认为,高弹体的接触性能和摩擦性能主要是由其流变性质产生的。换句话说,就是高弹体的摩擦学大部分性能不是由其表面性能决定的,而是由体积性能所决定的。这就是本章一开始我们就将重点放在了橡胶的流变性能的详细分析以及描述它们的方法的原因。本章引入的一些用词和方法在下一章会用到,为的是讨论高弹体的摩擦。将高弹体看做是线黏弹性材料。非线性的处理不在本书讨论范围。

15.2 应力弛豫

考虑一个受到剪切作用的橡胶块(见图 15.2)。如果橡胶块迅速地发生变形,那么应力在瞬间达到较高的水平 $\sigma(0)$,随后慢慢松弛到一个很低的水平 $\sigma(\infty)$ (见图 15.3),对于此时的高弹体, $\sigma(\infty)$ 会比 $\sigma(0)$ 小 3 到 4 个数量级。这种行为的物理原因很清楚:

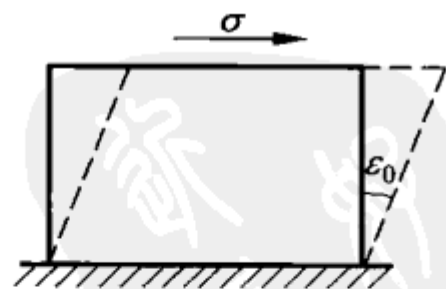


图 15.2 橡胶块的剪切应变

^① 从这种意义上看,橡胶的弹性与理想气体的“弹性”类似,理想气体中,分子间作用力不起作用,同样,弹性性质也是纯熵的。

^② 硫化由 Charles Goodyear 于 1839 年提出。

聚合物分子链无法在如此短的瞬时解开彼此缠绕,此时的橡胶就像是“正常的固体材料”。对应的剪切模量 $G(0) = \sigma(0)/\epsilon_0$, 与玻璃的剪切模量有相同的数量级,称为玻璃态刚度。比值 $G(\infty) = \sigma(\infty)/\epsilon_0$ 描述的是在一段足够长的时间后的材料行为,称为静态剪切模量。这段时间里,这些分子的缠绕解开,内部应力松弛。比值

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (15.1)$$

称为时间相关剪切模量。很明显,如果材料表现出线性行为,这个函数完整地描述了一种材料的力学性能。

假设橡胶块根据任意的应变 $\epsilon(t)$ 发生了变形,任意一个时间相关的函数 $\epsilon(t)$ 都可以用很多按照时间顺序的阶梯函数的总和来表示,如图 15.4 所示。图中在时间 t' ,“单元阶梯函数”的幅值为 $d\epsilon(t') = \dot{\epsilon}(t')dt'$, 其应力贡献等于 $d\sigma = G(t-t')\dot{\epsilon}(t')dt'$, 因此此时每一点的总应力计算为:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{\epsilon}(t')dt' \quad (15.2)$$

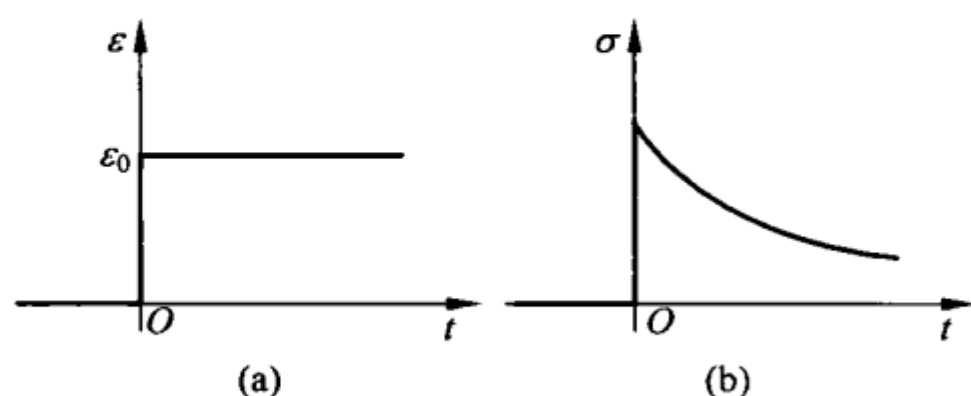


图 15.3 如果橡胶块在时间 $t=0$ 快速发生形变 ϵ_0 , 那么应力先增长到很高的水平, 然后随着时间减小到很低的水平

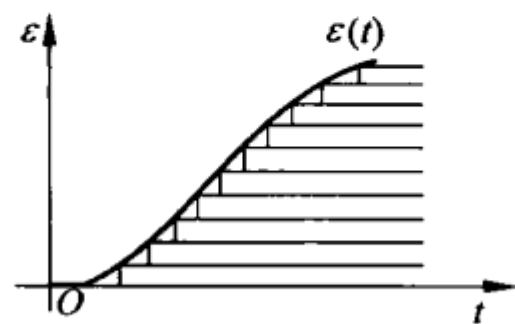


图 15.4 一个时间相关的函数由多个按时间顺序的阶梯函数叠加获得

方程(15.2)表明,这个时间相关的剪切模量,从数学上可以理解为一个加权函数,该函数描述了前面的应变变化是怎样影响到当前时刻的应力的。因此, $G(t)$ 有时也称为记忆函数。

15.3 频率相关的复数剪切模量

如果 $\epsilon(t)$ 按照下面的调和函数变化,即

$$\epsilon(t) = \tilde{\epsilon} \cos(\omega t) \quad (15.3)$$

那么瞬态时间后,应力也将以相同的频率 ω 发生周期性的变化。当实函数 $\cos(\omega t)$ 表示为下面的两个复指数之和时,应变变化和应力变化之间关系就可简易地描述为:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (15.4)$$

由叠加原理,可以先分别计算由下面的复振荡引起的应力,再将应力相加,即

$$\epsilon(t) = \tilde{\epsilon} e^{i\omega t}, \quad \epsilon(t) = \tilde{\epsilon} e^{-i\omega t} \quad (15.5)$$

将 $\epsilon(t) = \tilde{\epsilon} e^{i\omega t}$ 代入式(15.2),则得到一个应力为:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\epsilon} e^{i\omega t'} dt' \quad (15.6)$$

令 $\xi = t - t'$, 将积分写成下面的形式:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\epsilon} e^{i\omega t'} dt' = i\omega \tilde{\epsilon} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (15.7)$$

也就是:

$$\sigma(t) = \hat{G}(\omega) \tilde{\epsilon} e^{i\omega t} = \hat{G}(\omega) \epsilon(t) \quad (15.8)$$

对于一个复指数形式 $e^{i\omega t}$ 的谐波激励,应力与应变成正比。比例系数为:

$$\hat{G}(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (15.9)$$

这通常是一个复数,称为复数剪切模量。它的实数部分 $G'(\omega) = \text{Re } \hat{G}(\omega)$ 称为储能模量,虚数部分 $G''(\omega) = \text{Im } \hat{G}(\omega)$ 称为损耗模量。

这些振动的振幅分别由复应力或复应变的大小算出:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega) \tilde{\epsilon} e^{i\omega t}| = |\hat{G}(\omega)| |\tilde{\epsilon}| |e^{i\omega t}| \quad (15.10)$$

因为 $|e^{i\omega t}| = 1$, 则得到:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega)| |\tilde{\epsilon}| \quad (15.11)$$

由此可以看出,应力和应变的振幅通过复数剪切模量的大小联系起来。为了清楚地说明复模量这个词,考虑两个简单的例子:

(1) 对一个线弹性物体来说,由胡克定律知道剪切应变有: $\sigma = G\epsilon$ 。这种情况下,复模量只有实数部分,等于 G 。

(2) 对于纯剪切中的线黏性流体(见图 15.5)来说,下式是成立的:

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dz} \quad (15.12)$$

因此, 对于一个周期性运动 $\hat{u}(l, t) = u_0 e^{i\omega t}$, 有:

$$\hat{\sigma}(t) = \eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=l} = \eta \frac{\hat{v}(t)}{l} = \eta i\omega \frac{u_0}{l} e^{i\omega t} = i\omega\eta \hat{\epsilon}(t) \quad (15.13)$$

这种情况下, 复模量

$$\hat{G}(\omega) = i\omega\eta \quad (15.14)$$

只有虚数部分: $\text{Re } \hat{G} = 0, \text{Im } \hat{G} = \omega\eta$ 。

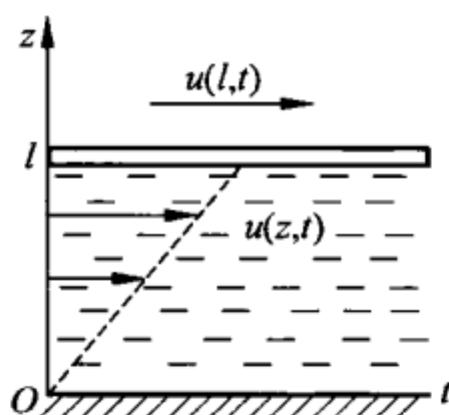


图 15.5 线黏性流体的均匀剪切流

15.4 复模量的性质

根据式(15.9)的定义, 有:

$$\hat{G}(-\omega) = \hat{G}^*(\omega) \quad (15.15)$$

这里“*”表示该值是一个复共轭, 因此该模量的实部和虚部有下面性质:

$$\begin{cases} G'(-\omega) = G'(\omega) \\ G''(-\omega) = -G''(\omega) \end{cases} \quad (15.16)$$

复模量的实部和虚部不是相互独立的, 而必须满足所谓的克拉茂-克朗尼希(Kramers-Kronig)关系, 即

$$\begin{cases} G'(\omega) = G_0 + \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{z} \frac{G''(z)}{\omega^2 - z^2} dz \\ G''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(z)}{\omega^2 - z^2} dz \end{cases} \quad (15.17)$$

这两个方程中的积分理解为柯西主值(也就是, 对称地趋近极轴, 使得奇点能被抵消)。

如果复模量在整个频率范围都是已知的, 那么就可以算出时间相关的

模量。将式(15.9)与 $\frac{1}{i\omega 2\pi} e^{i\omega t}$ 相乘,然后沿整个频率 ω 积分(从 $-\infty$ 到 ∞),可得:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega} \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega d\xi \quad (15.18)$$

阶梯函数见图 15.3(a),对应于 $\dot{\epsilon}(t) = \epsilon_0 \delta(t)$,其中 $\delta(t)$ 为狄拉克函数。使用下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad (15.19)$$

来简化方程(15.18)的右边,则只剩下时间相关的剪切模量。因此,将式(15.1)考虑进去,得到下式

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{G}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} [G'(\omega) \sin \omega t + G''(\omega) \cos \omega t] d\omega \end{aligned} \quad (15.20)$$

15.5 黏弹性材料中的能量耗散

根据复数剪切模量的定义,材料的应变 $\epsilon_1 = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ 产生的应力为 $\sigma_1 = \epsilon_0 \hat{G}(\omega) e^{i\omega t}$ 。对于应变 $\epsilon_2 = \epsilon_0 e^{-i\omega t}$ 产生的应力,只需改变一下频率的正负号: $\sigma_2 = \epsilon_0 \hat{G}(-\omega) e^{-i\omega t} = \epsilon_0 \hat{G}^*(\omega) e^{-i\omega t}$ 。如果总应变可以表示为 ϵ_1 与 ϵ_2 之和,即

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t = \frac{\epsilon_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (15.21)$$

那么,由于系统是线性的,应力可以计算成 σ_1 与 σ_2 之和,即

$$\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 [G(\omega) e^{i\omega t} + G(\omega)^* e^{-i\omega t}] = \epsilon_0 [G'(\omega) \cos \omega t - G''(\omega) \sin \omega t] \quad (15.22)$$

单位体积中这个应力的功率 \bar{P} 为:

$$\bar{P} = \langle \sigma(t) \dot{\epsilon}(t) \rangle = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0^2 G''(\omega) \quad (15.23)$$

能量耗散直接由复模量的虚部决定,这就是弹性模量的虚部“损耗模量”这个词的由来。

对于一个给定的应力,考虑式(15.11)的性质并将其写成 $\sigma_0^2 = |\hat{G}(\omega)|^2 \epsilon_0^2$,

则式(15.23)可以写成:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \frac{\text{Im } \hat{G}(\omega)}{|\hat{G}(\omega)|^2} = -\frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \text{Im} \left(\frac{1}{\hat{G}(\omega)} \right) \quad (15.24)$$

15.6 复模量的测量

如果一个线黏弹性材料以频率 ω 按照式(15.21)的关系发生周期性形变,处于稳定振动状态中,将应力方程(15.22)记录下来,那么通过计算下面平均值就能算出这两个复模量:

$$\bar{E} = \langle \sigma(t) \epsilon(t) \rangle, \quad \bar{P} = \langle \sigma(t) \dot{\epsilon}(t) \rangle \quad (15.25)$$

上面已经计算了平均功率,其与损耗模量有关。现在,可将这个平均值 \bar{E} 与储能模量联系起来,因为

$$\bar{E} = \frac{1}{2} G' \epsilon_0^2 \quad (15.26)$$

所以,模量 G 的实部可计算为:

$$\text{Re } \hat{G} = G' = \frac{2\bar{E}}{\epsilon_0^2} \quad (15.27)$$

而虚部由式(15.23)可计算为:

$$\text{Im } \hat{G} = G'' = \frac{2\bar{P}}{\omega \epsilon_0^2} \quad (15.28)$$

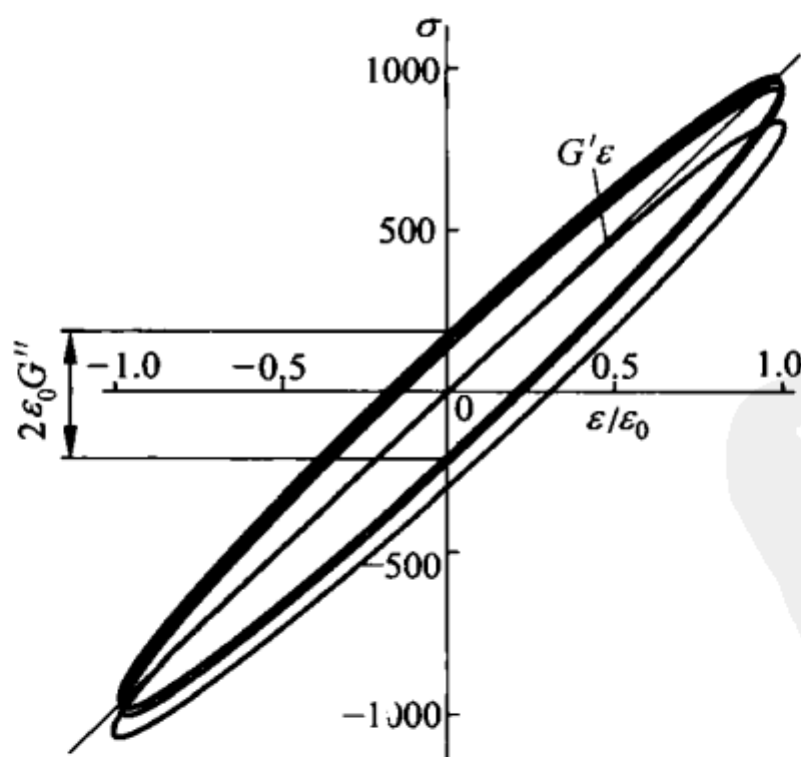


图 15.6 一个黏弹性材料的应力-应变关系

方程(15.21)和(15.22)以椭圆的形式描述了动态的应力-应变关系(见图 15.6)。对应的图形的平均斜率等于 G' 。对于 $\epsilon=0$, 有 $\sigma=\pm\epsilon_0 G''$, 因此, 虚部可由这个迟滞回线的宽度算出来。

15.7 流变学模型

对于空间的齐次形变, 经常用刚度代替模量来处理。对此, 两个基本的要素是线性弹簧和阻尼。这些要素的复杂组合可以代表任意的黏弹行为。

首先, 考虑在周期激励下的基本要素。对于一根线弹性弹簧(见图 15.7(a)), 胡克定律是成立的, 即

$$F = cx \quad (15.29)$$

比例系数 c 为弹簧常数或弹簧刚度。现在考虑一个线性阻尼(见图 15.7(b)):

$$F = d\dot{x} \quad (15.30)$$

对于一个复数形式的谐波激励 $\hat{F}=F_0 e^{i\omega t}$, 找形式为 $\hat{x}=x_0 e^{i\omega t}$ 的解, 结果是 $\hat{F}(t)=id\omega \hat{x}(t)$, 也就是说力与各点的瞬时位移成正比, 与弹簧中情况一样。但是系数为:

$$\hat{c}_d = id\omega \quad (15.31)$$

也就是力与位移的比值是复数, 而且取决于频率, 称为频率相关的复数弹簧常数或弹簧刚度。

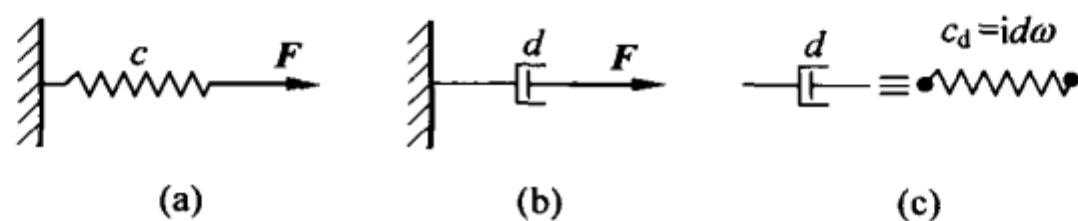


图 15.7

(a) 线弹性弹簧; (b) 与速度成比例的阻尼器; (c) 阻尼器的复刚度

对于一个通常的线性力学系统(也就是说, 任意一个复合系统都是由线性弹簧和线性阻尼组成的), 对于激振力 $F_0 e^{i\omega t}$, 有线性关系:

$$\hat{F}(t) = \hat{c}(\omega) \hat{x}(t) \quad (15.32)$$

式中 $\hat{c}(\omega)$ 是系统中复数弹簧常数。这个方程仅对频率为 ω 的激励成立。用显形式表示, 就是 $F_0 e^{i\omega t} = \hat{c}(\omega) x_0 e^{i\omega t}$ 。

两根弹簧常数为 c_1 和 c_2 的弹簧的并联相当于一根弹簧常数为 $c=c_1+c_2$

的弹簧。串联时,这个关系为 $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \Rightarrow c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$ 。类似的连接也可用于连续体,只是这里的刚度要换成模量。

很多流变学模型(这些模型对于下面的分析很重要)是基于 Maxwell 单元(见图 15.8)构建的,该单元由一根弹簧和一个阻尼串联组成。研究这个单元的性质,使用模型的连续体版本,即用模量而不是刚度。

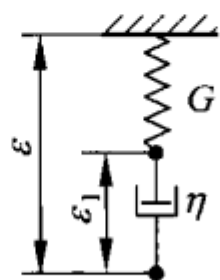


图 15.8 Maxwell 单元

弹簧和阻尼的复模量为 G 和 $i\eta\omega$ 。由于是串联,总模量为:

$$\hat{G}_{\text{Maxwell}} = \frac{Gi\eta\omega}{G + i\eta\omega} = \frac{Gi\eta\omega(G - i\eta\omega)}{(G + i\eta\omega)(G - i\eta\omega)} = \frac{G[i\eta\omega G + (\eta\omega)^2]}{G^2 + (\eta\omega)^2} \quad (15.33)$$

储能模量和损耗模量为:

$$G'_{\text{Maxwell}} = \frac{G(\eta\omega)^2}{G^2 + (\eta\omega)^2}, \quad G''_{\text{Maxwell}} = \frac{\eta\omega G^2}{G^2 + (\eta\omega)^2} \quad (15.34)$$

引入下面这个量:

$$\tau = \eta/G \quad (15.35)$$

则方程(15.34)可表达为:

$$G'_{\text{Maxwell}} = G \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad G''_{\text{Maxwell}} = G \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (15.36)$$

式中参数 τ 与时间的量纲相同。

现在研究介质中的应力弛豫,介质用 Maxwell 单元表示。使用图 15.8 中的符号。作用在弹簧和阻尼之间连接点上的应力等于 $-G(\epsilon - \epsilon_1) + \eta\dot{\epsilon}_1$ 。因为连接点没有质量,则应力一定为零: $-G(\epsilon - \epsilon_1) + \eta\dot{\epsilon}_1 = 0$ 。将该方程除以 G 并将式(15.35)代入,则有:

$$\tau\dot{\epsilon}_1 + \epsilon_1 = \epsilon \quad (15.37)$$

如果在 $t=0$ 时材料突然变形 ϵ_0 ,那么每一点在 $t>0$ 时有:

$$\tau\dot{\epsilon}_1 + \epsilon_1 = \epsilon_0 \quad (15.38)$$

其中初始条件为 $\epsilon_1(0)=0$,则方程的解为:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (15.39)$$

应力为:

$$\sigma = G(\epsilon_0 - \epsilon_1) = G\epsilon_0 e^{-t/\tau} \quad (15.40)$$

应力随着特征时间 τ 呈指数衰减,该时间称为弛豫时间。

15.8 橡胶的简单流变学模型(标准模型)

现在,我们构造一个弹簧-阻尼模型,该模型在周期性载荷中具有橡胶的最重要的一些动力学性能:

① $\omega \approx 0$, 即频率较低时,测得的模量较小(准静态形变),而且几乎没有耗散(也就是阻尼分量非常小)。

② $\omega \rightarrow \infty$, 即频率很高时,测得的模量很大(通常比准静态加载的情况大 3 个数量级),同样几乎也没有散耗。

③ 频率处于这二者之间时,测得的模量处于中间,同时耗散很多。

这些性质是由于分子链只能在一定的时间里缠绕和解缠绕而产生的。

用图 15.9 所示的流变学模型来定性描述橡胶的这些性质。因为弹簧和一个 Maxwell 单元并联,所以有:

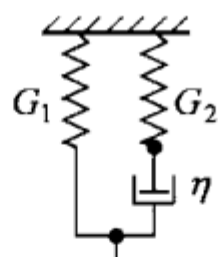


图 15.9 一个简单的橡胶流变学模型

$$G' = G_1 + G_2 \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad G'' = G_2 \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (15.41)$$

式中 $\tau = \eta/G_2$ 。对于 $G_2/G_1 = 1000$ 的情况,模量和频率的关系以对数的形式表示出来,见图 15.10。

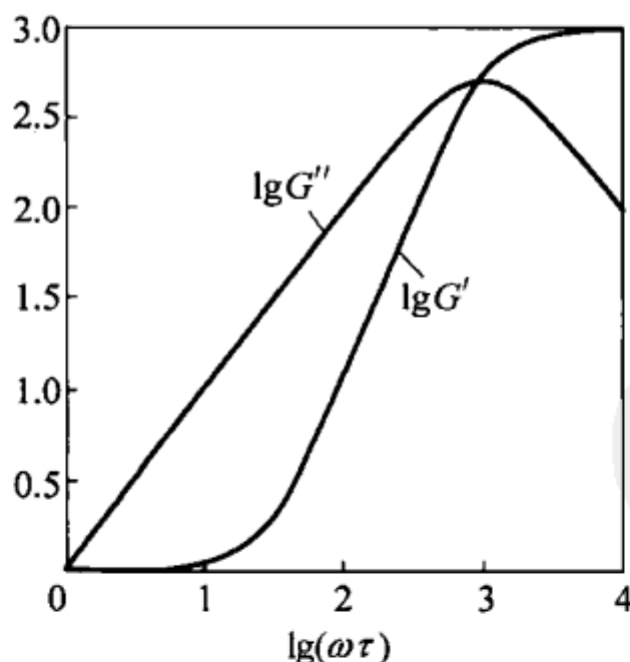


图 15.10 对应图 15.9 所示的流变学模型,给出 $G_2/G_1 = 1000$ 时频率相关模量的实部和虚部

当频率较低时 $\omega < G_1/\eta$ (准静态加载), 模量接近于 G_1 ; 频率很高时 $\omega > G_2/\eta$, 模量接近于 $G_2 \gg G_1$ 。也就是说, 对于很慢的加载, 橡胶是软的; 对于很快的加载, 橡胶是硬的。低频时, 典型的实心橡胶的剪切模量约为 10 MPa, 而在高频时要大 1000 倍。在这二者之间的区域, 模量的虚部占据了很大部分, $G''(\omega) \approx \eta\omega$, 也就是说, 橡胶在周期性加载中的行为像是一种黏性流体。

由于弹簧和一个 Maxwell 单元并联, 则有:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}) \quad (15.42)$$

将这个方程除以 ϵ_0 , 能得到规范化应力, 称为时间相关模量, 即

$$G(t) = \sigma/\epsilon_0 = (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}) \quad (15.43)$$

这个应力从 $t=0$ 时的值 $G_0 = G_1 + G_2 \approx G_2$ 开始松弛, 到 $t \rightarrow \infty$ 时的值 $G_\infty = G_1$ 。

15.9 温度对流变学性能的影响

应力弛豫需要一定时间, 其原因是聚合物分子“解缠绕”的动态过程是一个热活化过程, 因此与温度有很大的关系。因为松弛时间在复模量表达式(15.41)中只出现在 $\omega\tau(T)$ 组合中, 在时间相关模量表达式(15.43)中只出现在 $t/\tau(T)$ 组合中, 即

$$G(t) = F(t/\tau(T)), \quad \hat{G}(\omega) = Q(\omega\tau(T)) \quad (15.44)$$

因此, 对于不同的温度, 时间相关模量作为时间对数的函数, 是相同的曲线, 只是平移了 $\lg(\tau(T_2)/\tau(T_1))$ (见图 15.11)。对于频率相关模量作为频率对数的函数, 这点也是成立的, 因此, $\lg\tau(T)$ 也称为移位函数。

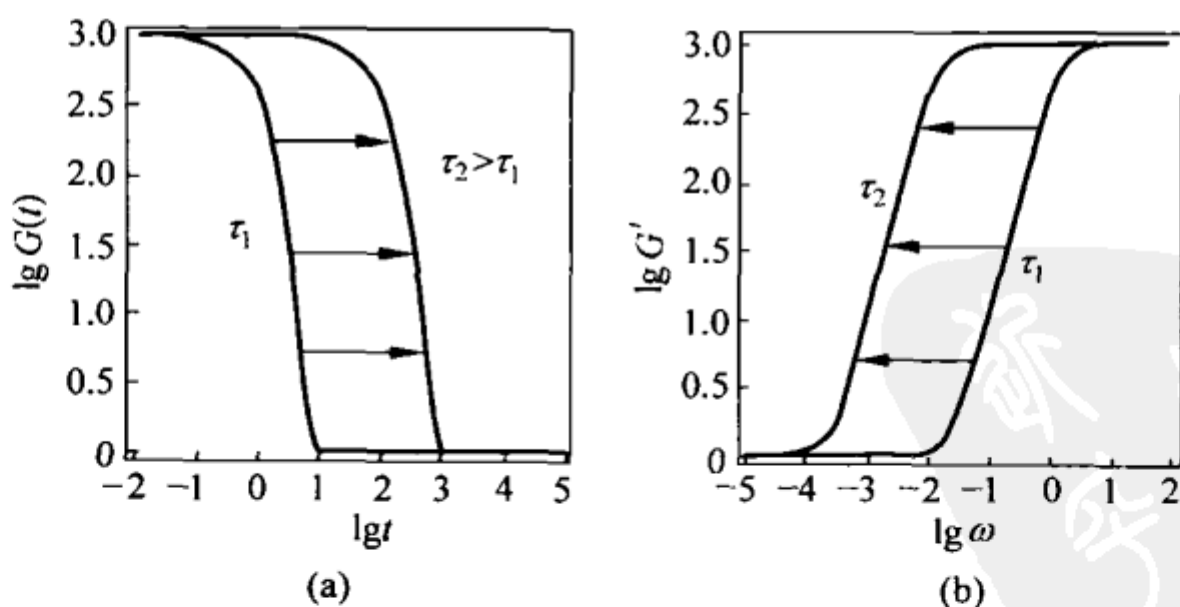


图 15.11 两个不同温度下的时间和频率相关模量曲线

(a) 弛豫方程; (b) 频率相关模量(较小的松弛时间 τ_1 对应的是较高的温度, 松弛时间 τ_2 (这个例子中大约大 100 倍)对应较低温度)

在描述高弹体的流变学性质时,即使流变学不能用上面的简单模型来描述,也常常认为式(15.44)的假设是成立的。Williams、Landel 和 Ferry 于 1955 年提出了这个移位函数的一个解析近似值,其中包含了两个常数 C_1 和 C_2 ,称之为 WLF 方程。对于不同的橡胶,这两个常数可通过实验得到。

$$\lg \tau(T) = \frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g} = C_1 \left[1 - \frac{1}{1 + C_2^{-1}(T - T_g)} \right] \quad (15.45)$$

式中 T_g 就是所谓的玻璃转化温度。

15.10 组合曲线

通过一定时间间隔的测量,公式(15.44)的假设常用来在试验上绘制整个松弛曲线。例如考虑拉伸试验中的应力弛豫,试样很快变形 $\epsilon = 1\%$,测出应力与时间的函数关系。试验的时间长度限定在一个可实现的时间范围。作为一个例子,我们研究突然变形后 3 s 到 600 s 时间范围的应力弛豫。时间太短的话,难以得到这个关系,而太长的时间在实际实验中难以接受。

不同温度下的实验结果见图 15.12,其中都取了对数。假设中,我们认为,不同的温度下测得的曲线只是同一条曲线的移动结果。现在,我们可以尝试移动这些曲线使得它们形成整个曲线(见图 15.13)。

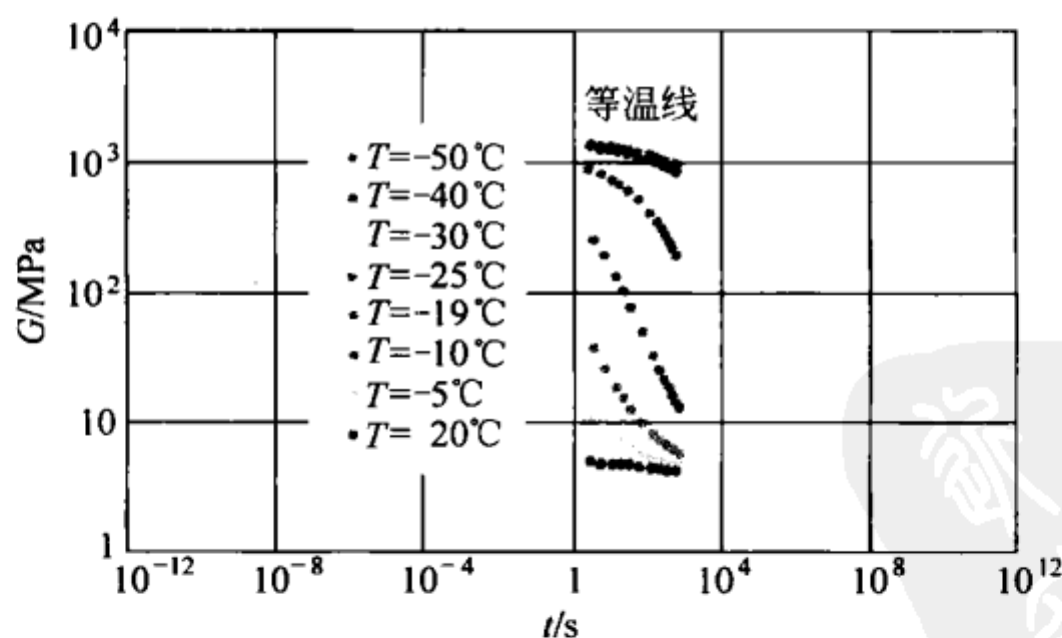


图 15.12 给定的时间间隔内,不同温度下应力弛豫的测量值

这个方法是成功的,它生成了一条时间区间的“实验”松弛曲线,而这个时间区间在实验设备中是无法直接实现的(例如从亚毫秒区到数年区)。这

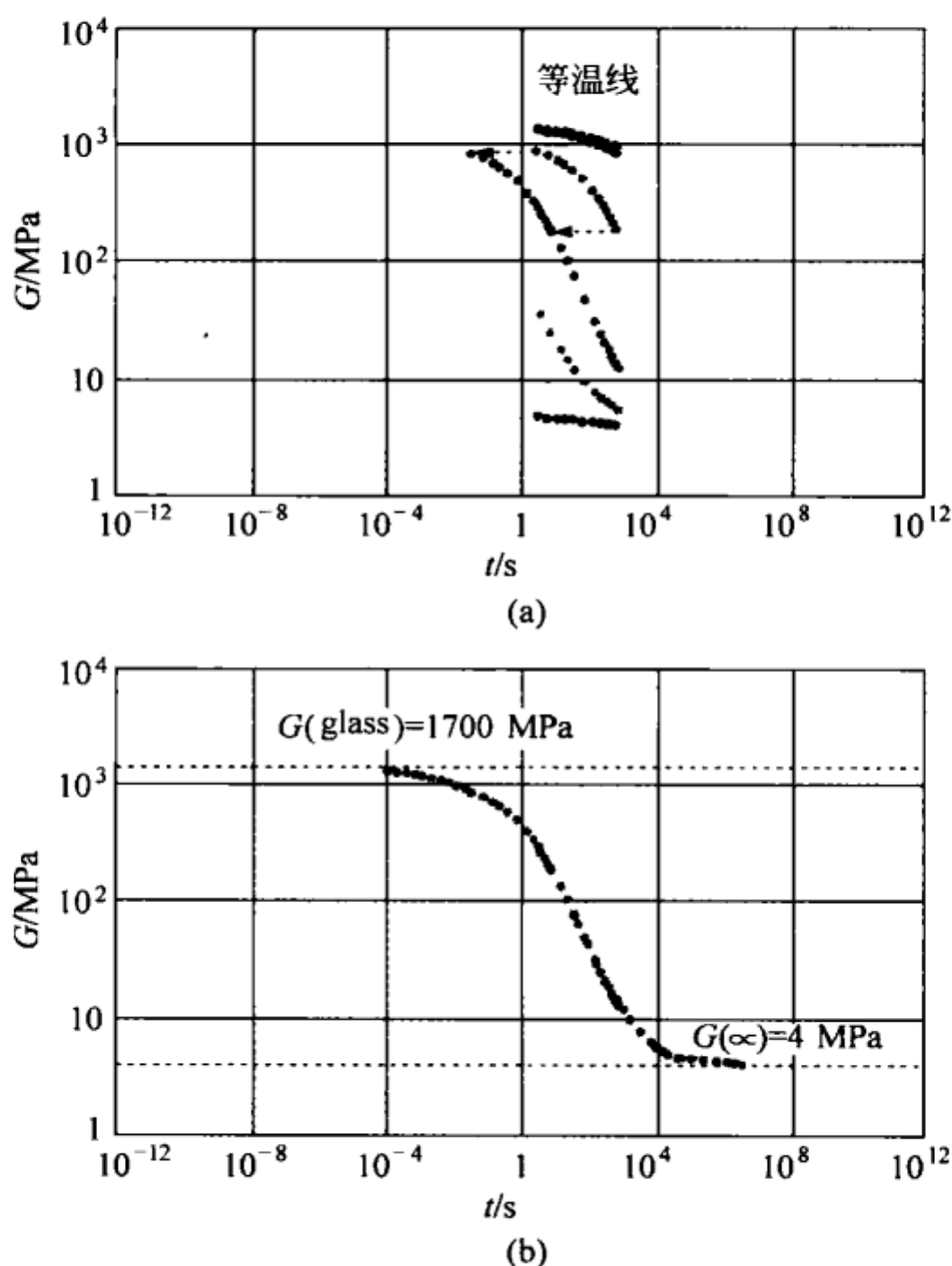


图 15.13 将不同温度下应力弛豫曲线(对数表示)的片段移动可形成一条单个的组合曲线

些曲线被称为“组合曲线”。不同温度或不同时间区,对应的曲线移动的量是不同的。这是因为在不同尺度下,活化能不同。

15.11 Prony 级数

这种方法获得的实验组合曲线与弹簧和 Maxwell 单元并联形成的“标准模型”得到的松弛曲线有明显的不同(见图 15.14)。在真实的高弹体中,从很短时间的大“玻璃模量”到很长时间的小“橡胶模量”的转变,不是发生在很短的时间周期 τ 内,而是在好几个时间数量级内进行了延伸。因此需要对这个模型修正。

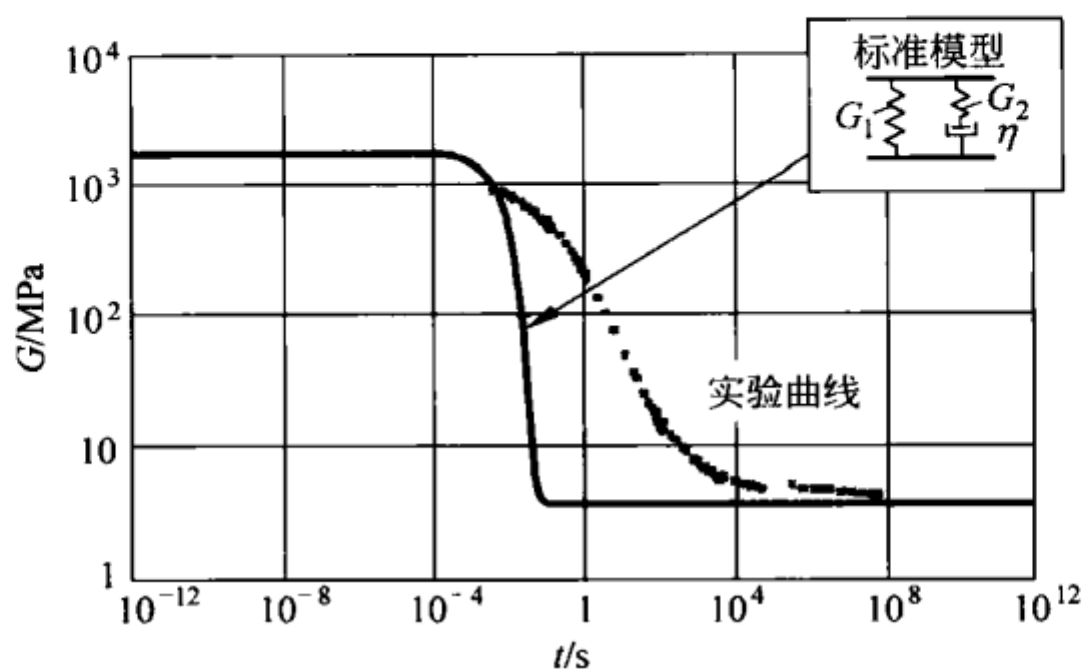
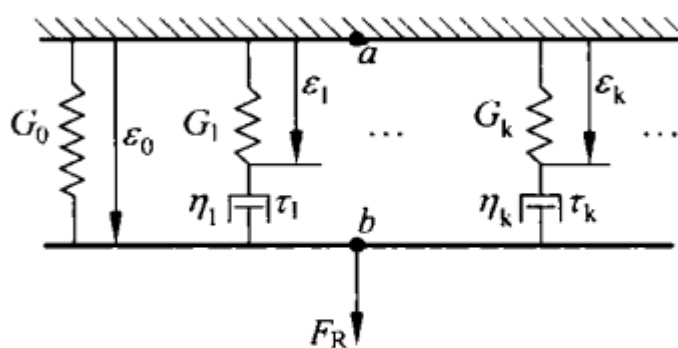


图 15.14 对于简单流变学模型(连续曲线)和真实高弹体, 时间相关剪切模量的对数描述

修正方法为: 用多个 Maxwell 单元代替“标准模型”中的一个 Maxwell 单元, 其中每个单元的松弛时间都不同 (见图 15.15)。通过用足够多数量的 Maxwell 单元, 使得每一个弛豫函数都能表达出来。这个模型称为 Prony 级数。



这个模型中, G 模量的松弛为:

图 15.15 Prony 级数

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^N G_i e^{-t/\tau_i} \quad (15.46)$$

也可以用积分的形式对这个公式推广:

$$G(t) = G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \quad (15.47)$$

复数剪切模量为:

$$\begin{cases} G'(\omega) = G_0 + \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega^2 \tau_k^2}{1 + \omega^2 \tau_k^2} \\ G''(\omega) = \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega \tau_k}{1 + \omega^2 \tau_k^2} \end{cases} \quad (15.48)$$

或积分形式为:

$$\begin{cases} G'(\omega) = G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau \\ G''(\omega) = G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau \end{cases} \quad (15.49)$$

对于一个 Maxwell 单元,应力随时间呈指数衰减;然而很多高弹体都以幂函数形式的应力衰减。为了描述这样一个弛豫函数,方程(15.47)和(15.49)中的权函数 $g(\tau)$ 也必须是幂函数: $g(\tau) \propto \tau^{-s}$ 。则弛豫函数就可以通过选用 $G_0, G_1, s, \tau_1, \tau_2$ 实现完全参数化。

为了说明这一点,采用下面的参数来计算剪切模量的弛豫: $G_0 = 1$, $G_1 = 1000$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^2$, $g(\tau) = \tau_1 \tau^{-2}$ 。将其代入式(15.47),得到:

$$G(t) = G_0 + \frac{G_1 \tau_1}{t} (e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \quad (15.50)$$

结果见图 15.16。可以看到,在时间的中间区域 $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$, $\lg G(t)$ 与 $\lg t$ 的关系是斜率为 -1 的线性函数,应力在这片区域按照幂函数 $G \propto t^{-1}$ 减小。

复模量与频率的关系为:

$$\begin{cases} G'(\omega) = G_0 + G_1 \tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = G_0 + G_1 \omega \tau_1 (\arctan \omega \tau_2 - \arctan \omega \tau_1) \\ G''(\omega) = \frac{1}{2} G_1 \tau_1 \omega \ln \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) \end{cases} \quad (15.51)$$

这一关系见图 15.17。

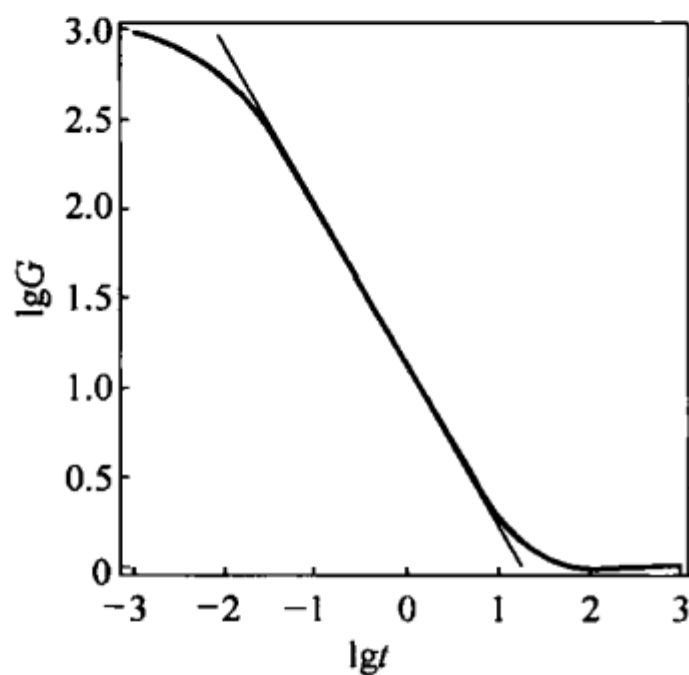


图 15.16 根据方程(15.50)得到的时间相关的剪切模量

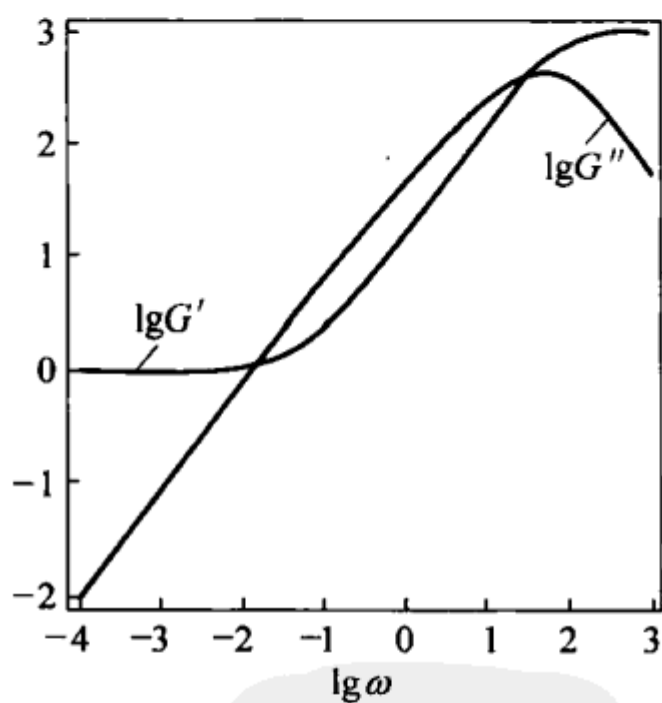


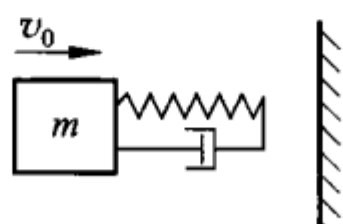
图 15.17 根据方程(15.51)得到的频率相关模量的实部和虚部

在频率的中间区域, $1/\tau_2 \ll \omega \ll 1/\tau_1$, 有下列方程:

$$\begin{cases} G'(\omega) = G_0 + \frac{\pi}{2} G_1 \tau_1 \omega \\ G''(\omega) = G_1 \omega \tau_1 \ln \left(\frac{1}{\omega \tau_1} \right) \end{cases} \quad (15.52)$$

习题

习题 1 一块黏弹性材料以速度 v_0 撞在一面刚性墙上,再以较小的速度 v_1 弹回来。计算恢复系数 $e = v_1/v_0$ 。该物体可以用一个刚性质量和一个弹簧-阻尼组合(刚度 c , 阻尼系数 η) 模型来描述,如图 15.18 所示。



解答: 从刚刚接触的时间点开始计算阻尼振动。运动方程为:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = 0$$

或

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中 $2\delta = \eta/m$, $\omega_0^2 = c/m$ 。初始条件为 $x(0) = 0$ 和 $\dot{x}(0) = v_0$, 则该运动方程的解为:

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \sin \tilde{\omega} t, \quad \dot{x}(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} (-\delta \sin \tilde{\omega} t + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t)$$

其中 $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 。只要压紧力 $F = \eta\dot{x} + cx$ 保持为正,物体就会与墙面保持接触。接触的最后时刻 t^* 由下面方程决定:

$$2\delta\dot{x}(t^*) + \omega_0^2 x(t^*) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} [(-2\delta^2 + \omega_0^2) \sin \tilde{\omega} t^* + 2\delta\tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^*] = 0$$

由此得到:

$$\tan \tilde{\omega} t^* = \frac{-2\delta\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

这个时间点的速度等于:

$$\dot{x}(t^*) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} (-\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^*)$$

则恢复系数为:

$$\begin{aligned} e &= \frac{|\dot{x}(t^*)|}{v_0} = \frac{1}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} |-\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^*| \\ &= e^{-\frac{\delta}{\tilde{\omega}} (\pi H(\omega_0^2 - 2\delta^2) - \arctan \frac{2\delta\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2})} \end{aligned}$$

其中

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

图 15.18 撞在墙上的黏弹性物体的模型

这个关系见图 15.19。

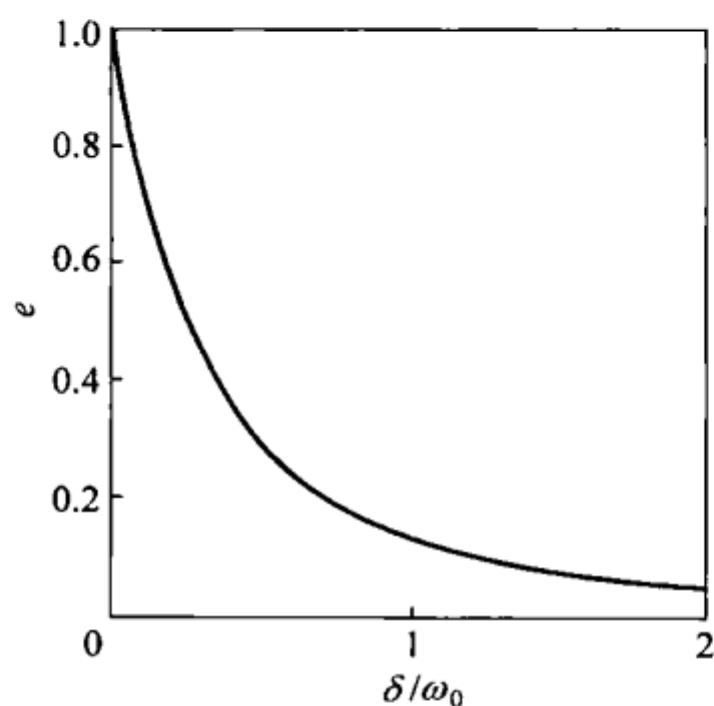


图 15.19 恢复系数与黏弹性材料的阻尼比的关系

习题 2 复数 G 模量的测量。计算高弹体储能模量和损耗模量的模型为扭摆机构(见图 15.20)。该扭摆包含一个半径为 R 、长度为 l 的圆柱体试样,其中一端不能移动,另一端连接到一个转动惯量为 Θ 的质量块上。将扭摆偏离平衡位置,然后放手,此时记为 $t=0$ 。通过测量振荡频率和阻尼,可以算出储能模量和损耗模量。

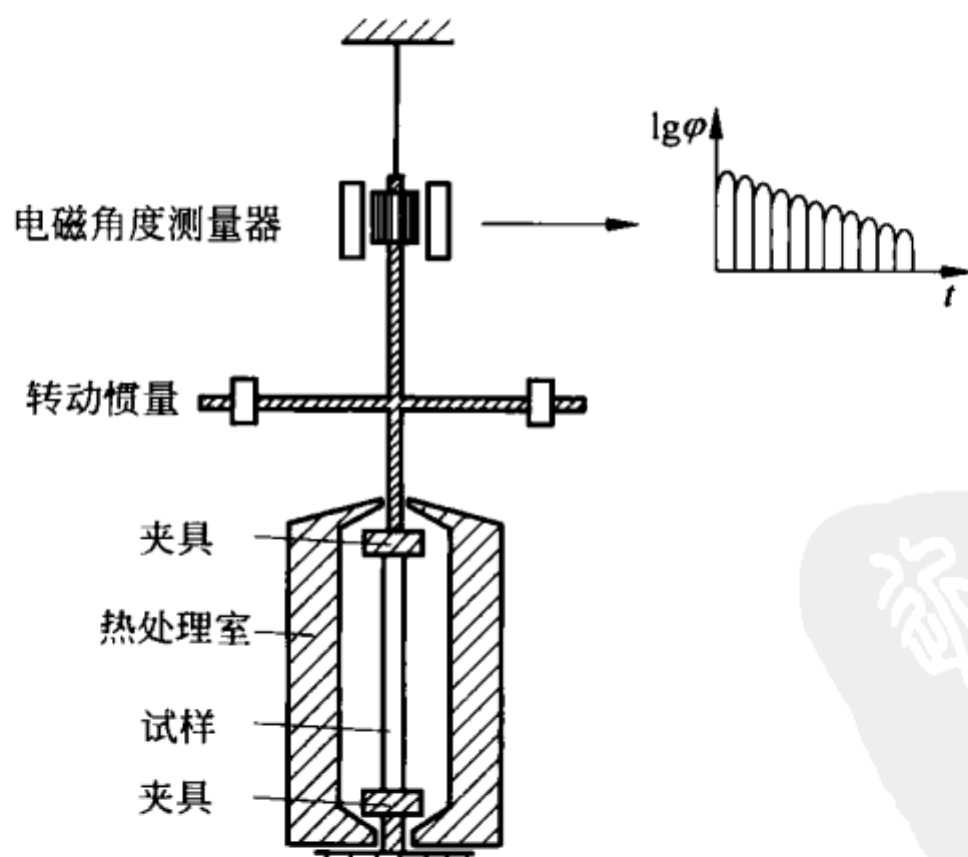


图 15.20 测量复数 G 模量的扭摆机构

解答：一个弹性杆件的扭矩为：

$$M = -\frac{I_p}{l}G\varphi$$

式中 I_p 为截面的极惯性矩，即

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

对于一个角频率为 ω 的周期性激励，对一个由高弹体制成的杆件也是有效的，但 $G\varphi$ 要用下式来代替：

$$G\varphi = G'\varphi + \frac{G''}{\omega}\dot{\varphi}$$

可以看出，这个表达式是正确的，因为对于复数激励 $\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\omega t}$ ，这个表达式正是复模量和偏转角的乘积： $\hat{G}\varphi = [G'(\omega) + iG''(\omega)]\varphi$ 。因此，对扭摆，使用角动量原理，得到方程：

$$\Theta\ddot{\varphi} + \frac{I_p}{l}\frac{G''}{\omega}\dot{\varphi} + \frac{I_p}{l}G'\varphi = 0$$

这个方程描述的角频率为：

$$\omega \approx \sqrt{\frac{I_p G'}{\Theta l}}$$

对数衰减率为：

$$\delta = \frac{I_p G''}{2l\Theta\omega}$$

这样一个阻尼振动的储能模量和损耗模量为：

$$G'(\omega) = \frac{l\Theta\omega^2}{I_p}, \quad G''(\omega) = \frac{2l\Theta\omega\delta}{I_p}$$

采用转动惯量 Θ 不同的物体，可以对不同的频率“抽样”，得到模量与频率的曲线。



第 16 章

橡胶摩擦和橡胶接触力学



橡胶和硬基材之间的摩擦性质在很多技术应用中非常重要,而且橡胶间的摩擦与金属或陶瓷等“硬”物体之间的摩擦有很大不同,Grosch(1962)的著作论述了他们的明显区别:橡胶摩擦与内摩擦密切相关。这点由下面的事实所证实:摩擦系数和温度的关系与复数剪切模量和温度的关系相互关联。这标志着橡胶摩擦具有体积性质。

16.1 高弹体和刚性粗糙面之间的摩擦

摩擦力可用两种方式来计算：直接计算切向力然后对时间取平均值，或者计算由材料变形产生的能量损耗。如果每秒钟消耗的能量为 \dot{W} ，宏观滑动速度为恒定值 v ，那么从宏观的角度来看，可以认为总能量损耗仅由摩擦力所耗散，由此可以写成：

$$\dot{W} = F_R v \quad (16.1)$$

摩擦力为能量损耗与滑动速度的比值，即

$$F_R = \frac{\dot{W}}{v} \quad (16.2)$$

在刚性表面和高弹体的接触中，能量可以仅通过高弹体的变形所耗散。由此，刚性表面和高弹体扮演着完全不同的角色，见图 16.1。如果一个高弹体在一个光滑的刚性平面上滑动（见图 16.1(a)），那么高弹体的变形状态与时间无关，因此没有能量损耗，摩擦力等于零（译者注：该情况需要在一定假设条件下成立，例如高弹体与光滑刚体表面无吸附力作用或无相对滑动）。另一方面，如果高弹体在一个粗糙的表面上滑动（见图 16.1(b)），那么高弹体的各个区域的变形状态与时间有关，有能量耗散。由此得到，在高弹体摩擦中，高弹体表面的粗糙度仅起很小的作用，摩擦力主要取决于刚性表面的粗糙度。因此，我们讨论一个粗糙刚性表面和一个高弹体之间的摩擦，并假设高弹体表面光滑。



图 16.1

(a) 光滑刚性平面上的粗糙橡胶；(b) 粗糙刚性平面上的光滑橡胶

计算高弹体中的变形和能量损耗。这里使用粗糙表面接触力学的结论（见第 7 章），如果用“顶尖”高度分布的平方根 l 与曲率半径的平均值 R 来描述粗糙表面，那么一个微凸体的平均接触面积为：

$$\Delta A \approx Rl \quad (16.3)$$

则一个微观接触的特征直径等于：

$$r \approx \sqrt{\Delta A} \approx \sqrt{Rl} \quad (16.4)$$

物体以速度 v 滑过特征尺寸为 r 的距离所用的时间为：

$$t \approx \frac{r}{v} \approx \frac{\sqrt{Rl}}{v} \quad (16.5)$$

这个过程中，特征频率的数量级为：

$$\tilde{\omega} \approx \frac{1}{t} \approx \frac{v}{r} \quad (16.6)$$

微观接触中的平均压力为：

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z \quad (16.7)$$

式中 $\kappa \approx 2$ (见第 7 章)。将表面梯度的平方根表示为：

$$\nabla z = \sqrt{\langle z'^2 \rangle} \quad (16.8)$$

橡胶的有效弹性模量等于^①：

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2(1+\nu)G}{1-\nu^2} \approx 4G \quad (16.9)$$

因为剪切模量与频率有关，所以式(16.6)的特征频率一定要代入平均压力的表达式(16.7)中，即

$$\langle \sigma \rangle = 4\kappa^{-1} |\hat{G}(\tilde{\omega})| \nabla z \quad (16.10)$$

这里，代入了频率相关模量，因为应力振幅和应变振幅通过这个复数剪切模量联系在一起。用下面的这个方程(来自第 15 章)计算微观接触的单位体积的能量损耗：

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \langle \sigma \rangle^2 \frac{G''(\tilde{\omega})}{|\hat{G}(\tilde{\omega})|^2} \quad (16.11)$$

与变形体积的深度 r 相乘，得到单位面积的能量损耗，如再除以法向应力，就得到摩擦系数：

$$\mu = \xi \nabla z \frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|} \quad (16.12)$$

这里， ξ 是通过更精确的计算建立的一个数量级为 1 的无量纲系数。数值仿真表明 $\xi \approx 1$ 。

在频率的中间区域，对多数种类的橡胶来说， $G'' \gg G'$ 。由此，得到 $\frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|} \approx 1$ ，则摩擦系数为：

$$\mu \approx \nabla z \quad (16.13)$$

① 实际上，橡胶可认为是泊松比 $\nu \approx 1/2$ 的不可压缩介质。

因此,在频率的中间区域,得到一个很简单的结论:摩擦系数等于表面梯度的平方根。这个结论有一个简单的物理原因,见图 16.2:对于纯虚数剪切模量的情况,介质很快会凹进表面,但慢慢地松弛到原来的形式,导致了图 16.2 中的情况发生。

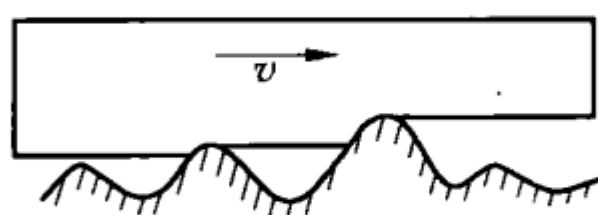


图 16.2 黏弹性材料与一个粗糙表面的接触

因为橡胶只与基材上那些微凸体是单面接触,因此很明显,摩擦系数(定义为水平力与法向力的比值)近似等于接触区域中表面的平均梯度。对于随机粗糙的表面,数值仿真表明,这个接触区表面的平均梯度可以与整个表面的平均梯度联系起来,也就得到了式(16.13)。

现在详细研究方程(16.12)。首先要注意 $\frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|}$ 总是等于或小于 1。

因此,摩擦系数永远不会大于表面平均梯度^①。对于由一根弹簧和一个 Maxwell 单元组成的橡胶的“标准模型”,频率相关模量为:

$$\hat{G}(\omega) = G_2 \frac{G_1 + i\eta\omega}{G_2 + i\eta\omega} \quad (16.14)$$

考虑到 $G_1 \ll G_2$, 有 $\tau = \eta/G_2$, 得到摩擦系数为:

$$\begin{aligned} \mu &\approx \frac{\tilde{\omega}\tau}{\sqrt{[1 + (\tilde{\omega}\tau)^2][(G_1/G_2)^2 + (\tilde{\omega}\tau)^2]}} \nabla z \\ &= \frac{v/\bar{v}}{\sqrt{[1 + (v/\bar{v})^2][(G_1/G_2)^2 + (v/\bar{v})^2]}} \nabla z \end{aligned} \quad (16.15)$$

上式中,代入了特征速度:

$$\bar{v} = \frac{r}{\tau} \quad (16.16)$$

式(16.15)反映的关系见图 16.3。当速度处于 $\bar{v}(G_1/G_2) < v < \bar{v}$ 这个区间时,摩擦系数保持相对常数,并等于 ∇z 。但要注意,根据式(16.10),与此同时,作用在微观接触上的应力也从速度较小时的 $\sigma_1 = 4\kappa^{-1}G_1\nabla z$,变化到了速度较大时的 $\sigma_2 = 4\kappa^{-1}G_2\nabla z$,因此,速度较大时,微观接触中材料受载更大。

对于有松弛时间的连续分布的流变学模型[参见式(15.50)和(15.51)],得到:

① 接触中没有黏着时,这是成立的。

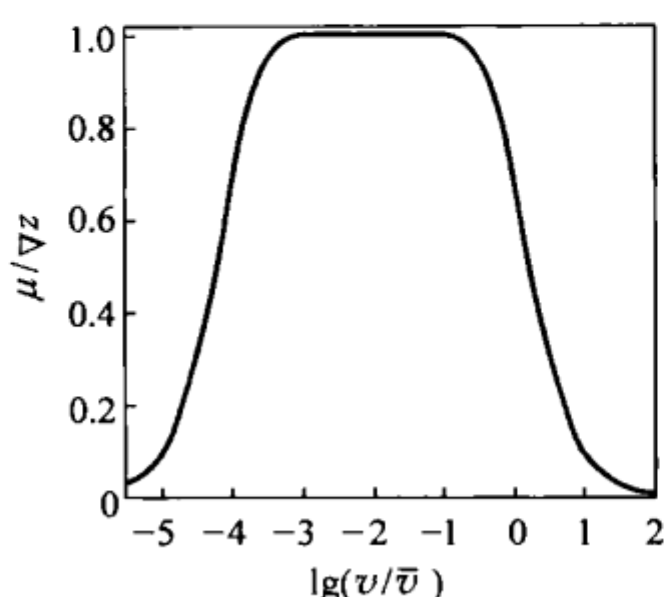


图 16.3 $G_2/G_1 = 10^4$ 时,“标准模型”中摩擦系数与滑动速度的关系

$$G'(\tilde{\omega}) = G_0 + G_1 \tau_1 \tilde{\omega} [\arctan(\tilde{\omega} \tau_2) - \arctan(\tilde{\omega} \tau_1)]$$

$$G''(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2} G_1 \tau_1 \tilde{\omega} \ln \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \frac{1 + (\tilde{\omega} \tau_1)^2}{1 + (\tilde{\omega} \tau_2)^2} \right) \quad (16.17)$$

对应的摩擦系数与滑动速度的函数关系见图 16.4。与“标准模型”相反,真实橡胶中的摩擦系数在几个数量级内都近似地保持常数,这种情况下,在曲线的“高原区”,摩擦系数也近似等于平均表面梯度 ∇z 。

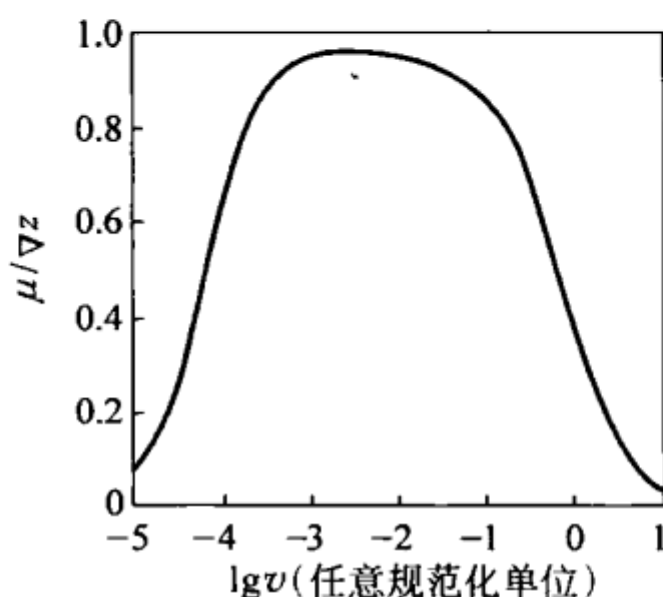


图 16.4 根据图 15.15 的 Prony 级数模型,摩擦系数与滑动速度的函数关系

摩擦系数与温度的关系也是由复数剪切模量与温度的关系决定的:曲线 μ , 作为 $\lg v$ 的函数, 随着温度的变化沿相同的方向移动, 移动的量等于频率相关模量。这个性质用于构造组合曲线来“测量”摩擦系数, 同样的方法用于“测量”频率相关模量(见第 15 章)。从而, 可以得到整个速度范围的曲线, 而这些范围在实际中是不能直接测量的。温度增加, 曲线向右移动(向速度更高的区域移动)。因此, 测量一段特定的温度, 再加上 WLF 移位函数, 就能构造出一条组合曲线, 对于任意的温度和速度, 摩擦系数都可以通过这个曲线来确定。两个高弹体的实验数据(组合曲线)见图 16.5。

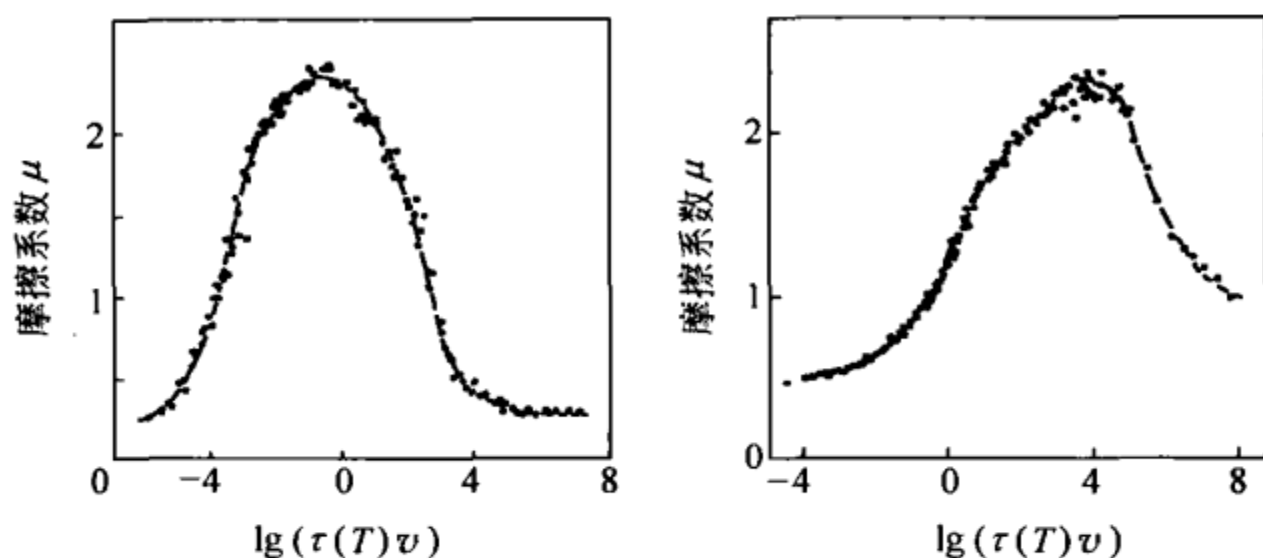


图 16.5 两种不同种类橡胶的摩擦系数与各种基材的关系

(来源: K. A. Grosch. The relation between the friction and viscoelastic properties of rubber. Proc. Roy. Soc., A2 74, (1963) 21)

16.2 滚动阻力

即使对于无滑动纯滚动,高弹体中也有能量耗散,存在与之相关的阻力。通常我们希望最小化这个阻力,同时最大化滑动摩擦。这是能实现的,因为滑动的特征频率 $\omega_{\text{sliding}} \approx v/\lambda$ (其中 λ 是基材粗糙轮廓的特征波长,数量级为 $10 \sim 100 \mu\text{m}$),和滚动的特征频率 $\omega_{\text{rolling}} \approx v/a$ (其中 a 是接触半径,在 5 cm 左右)相差约 2 或 3 个数量级。对于轮胎的正常运行,我们希望对应滑动频率 ω_{sliding} ,损耗模量大于储能模量, $G'' \geq G'$,而对应滚动频率 ω_{rolling} , $G'' \ll G'$ (见图 16.6)。

在满足滚动所希望的条件,也就是 $G'' \ll G'$ 的频率区间,储能模量与静态模量 G_∞ 都与频率无关。因此,在一阶近似中,可以将其看做纯弹性赫兹接触。

将滚动看做是轮子的“连续重置”,来估算滚动过程中的能量损失。对于一个半径为 R 的球体在一个刚性平面上的滚动(接触半径为 a),用下面的赫兹关系

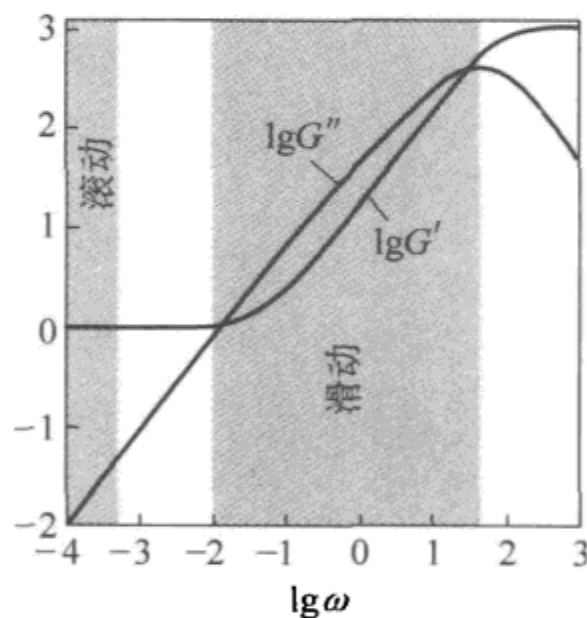


图 16.6 对于第 15 章中描述的高弹体的一个流变学模型,与频率相关的储能模量和损耗模量(因为滚动阻力保持较小,滑动速度保持较大(为常数),所以必须选择工作条件使得特征滚动频率处于左边的频率区域,特征滑动频率处于右边的频率区域)

式来计算法向力 F_N :

$$F_N \approx \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \approx \frac{16}{3} G_\infty R^{1/2} d^{3/2} \quad (16.18)$$

$$a^2 \approx Rd \quad (16.19)$$

式中 d 为压入深度。估算出特征频率为:

$$\omega \approx \frac{v}{a} \quad (16.20)$$

应变幅值为:

$$\epsilon_0 \approx \frac{d}{a} \quad (16.21)$$

根据式(15.23),得到单位体积的功率损耗为:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0^2 G''(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{v}{a} \left(\frac{d}{a} \right)^2 G''\left(\frac{v}{a}\right) \quad (16.22)$$

在总体积 $(2a)^3$ 中的能量损耗为:

$$\dot{W} \approx 4vd^2 G''\left(\frac{v}{a}\right) \quad (16.23)$$

将功率除以速度,得到阻力为:

$$F_w \approx 4d^2 G''\left(\frac{v}{a}\right) \quad (16.24)$$

在低频时,损耗模量总是与频率成正比,则可以写成如下形式:

$$G''(\omega) = \bar{\eta} \omega \quad (16.25)$$

式中 $\bar{\eta}$ 为低频时的动力黏度,则阻力为:

$$F_w \approx 4\bar{\eta} \left(\frac{a^2}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{a} \right) = 4\bar{\eta} \frac{a^3}{R^2} v \quad (16.26)$$

用赫兹结论式(5.24),重写本节中的符号,得到变形体积为:

$$a^3 = \frac{3RF_N}{16G_\infty} \quad (16.27)$$

对于阻力,有:

$$F_w \approx F_N \frac{3}{4} \frac{\bar{\eta}}{G_\infty} \frac{v}{R} = F_N \frac{3}{4} \frac{v\tau}{R} \quad (16.28)$$

“滚动摩擦系数”为:

$$\mu_{\text{rolling}} = \frac{F_w}{F_N} \approx \frac{3}{4} \frac{v\tau}{R} \quad (16.29)$$

其中 $\tau = \bar{\eta}/G_\infty$ 为高弹体的松弛时间。这个方程中的参数关系都是正确的,系数为 $3/4$,接近 1。由此可知,滚动摩擦系数与滚动速度和橡胶的(最大)

松弛时间的乘积成正比,与球体的曲率半径成反比。

16.3 高弹体的黏着接触

到现在为止,一直都假设高弹体表面与刚性表面之间没有黏着力。但对于足够光滑的表面,情况并不是这样。现在考虑刚性球体和光滑表面高弹体之间的黏着接触(见图 16.7)。接触边界可以看做是裂纹的尖端^①。平衡状态中,这个高弹体可以看做是一个弹性体,其静态剪切模量为 G_∞ ,有效弹性模量为:

$$E^* = \frac{2(1+\nu)G_\infty}{1-\nu^2} = \frac{2G_\infty}{(1-\nu)} = 4G_\infty \quad (16.30)$$

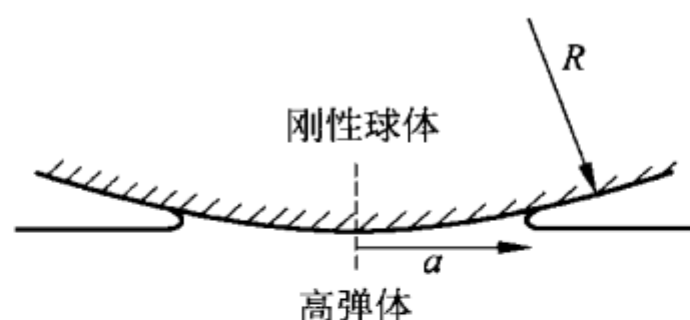


图 16.7 刚性球体和高弹体的接触(接触边界可看做是一个裂纹)

JKR 方程(6.20)给出了平衡状态中法向力 F_N 与接触半径 a 的关系:

$$F_N = E^* \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{R} - \left(\frac{8\gamma^* \pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right] \quad (16.31)$$

式中 γ^* 为有效表面能(也就是产生一个单位表面需要的能量)。下面,我们用这样的形式来表达方程(16.31),在该形式中能够很方便地将接触边界看做是裂纹的尖端。为了达到这个目的,先求出方程(16.31)中的 γ^* :

$$\gamma^* = \left(F_N - \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R} \right)^2 \frac{1}{8\pi a^3 E^*} \quad (16.32)$$

因为有效表面张力 γ^* 等于企图“关闭裂缝”(也就是扩大接触半径)的单位长度的作用力(线载荷),所以可以将方程(16.32)看做在裂纹尖端线载荷的一个平衡条件,左边是由表面范德华力产生的线载荷,右边是由连续体的弹性变形产生的反向相等的线载荷。将方程(16.32)的右边定义为:

$$D = \left(F_N - \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R} \right)^2 \frac{1}{8\pi a^3 E^*} \quad (16.33)$$

^① Johnson、Kendall 和 Roberts 的原始理论正是基于这个类比。

则平衡条件为：

$$\gamma^* = D \quad (16.34)$$

差值 $D - \gamma^*$ 可以看做是裂纹尖端的一个“驱动力”。在平衡状态时，这个力是没有的。如果法向力发生变化，那么裂纹将不再处于平衡状态。在一个纯弹性物体中，如果受到恒定的“力” $D - \gamma^*$ 的作用，裂纹尖端会加速扩大，直到速度达到弹性连续体中表面波的数量级（Rayleigh 波）。在一个黏弹性体中，由于能量大量耗散，它将会达到一个有限的速度。对于较慢的运动，大部分接触面可以看做是纯弹性的。另一方面，总能量损耗仅仅是在裂纹尖端一个相对较小的“过程区域”。Maugis 和 Barquins 提出了下面的方程，该方程将有效均匀载荷 $D - \gamma^*$ 与裂纹的传播速度 v 联系起来：

$$D - \gamma^* = \gamma^* \Phi(\tau(T)v) \quad (16.35)$$

式中 $\tau(T)$ 为 Williams-Landel-Ferry 函数。在中间速度区域，无量纲函数 $\Phi(\tau(T)v)$ 与速度 v 呈典型的幂函数关系：

$$\Phi(\tau(T)v) = \alpha(T)v^n \quad (16.36)$$

式中指数 n 处于典型的 $0.25 \sim 0.7$ 。例如对于一个玻璃球体在聚氨酯上的情况，其函数 Φ 见图 16.8。方程(16.35)和(16.36)能够使我们研究不同载荷下黏着过程的动力学(举例见本章习题 3)。

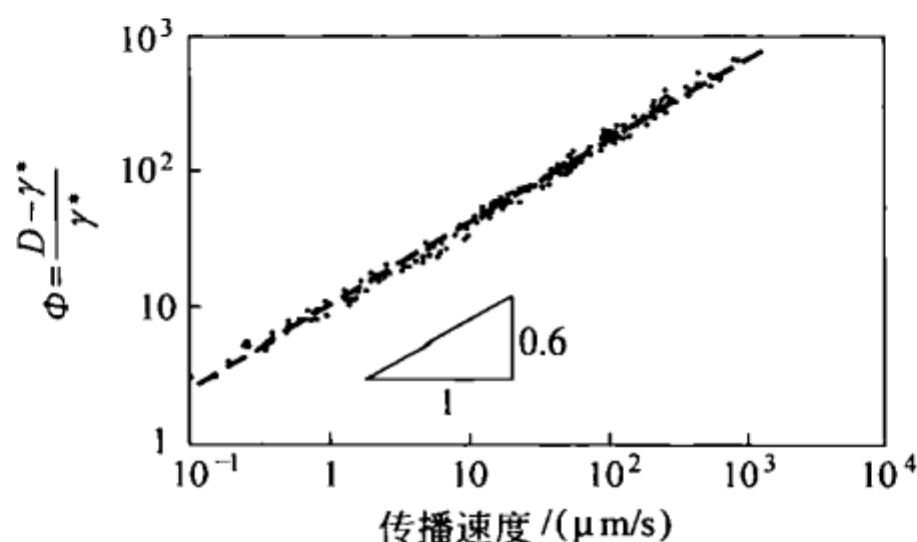


图 16.8 一个球体在聚氨酯上，在两个不同曲率半径和两个不同温度的条件下，“耗散函数” Φ 与裂纹传播速度之间的函数关系(同样的组合曲线可以通过不同压痕器的剥离实验来获得。图示的关系可近似为速度 $v_0 = 1 \mu\text{m/s}$ 时的函数 $\Phi \approx 10(v/v_0)^{0.6}$)

(来源：M. Barquins. Adherence, friction and wear of rubber-like materials. Wear, 1992, 158: 87-117)

习题

习题 1 假设一个刚性表面是两个随机函数的叠加, 其中一个函数的特征波向量为 k_1 , 梯度的平方根为 ∇z_1 , 另外一个函数的特征波向量为 k_2 且 $k_2 \gg k_1$, 梯度平方根为 ∇z_2 。计算这个表面与一个高弹体之间的摩擦系数。

解答: 从第 10 章中可以看到, 摩擦系数在不同的尺度的贡献是相加的, 只要每个尺度的贡献远小于 1 (实际上小于 0.3)。

首先研究的粗糙表面特征波向量为 k_1 且波向量的标准差为同一数量级。对于拥有这样一个谱特征的表面, 其高度 l_1 的粗糙度和标准差有相同的数量级: $l_1 \approx h_1$ 。通过将每个顶峰周围的表面表达为 $z = h_1 \cos k_1 x \approx h_1 \left(1 - \frac{1}{2} k_1^2 x^2\right)$, 可以估算顶峰的曲率半径。顶峰的曲率数量级为 $1/R = |z''(0)| \approx h_1 k_1^2$ 。用下式来估算一个微观接触的特征直径:

$$r \approx \sqrt{Rl} \approx \sqrt{\frac{h_1}{h_1 k_1^2}} = \frac{1}{k_1}$$

则这个特征直径与表面波形的特征长度有相同的数量级 (约为 $\frac{\lambda_1}{2\pi}$, 其中 λ_1 为特征波长)。

如果只有一个尺度, 并且特征波向量为 k_1 , 那么方程 (16.12) 可用于计算摩擦系数, 即

$$\mu_1 \approx \nabla z_1 \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|}$$

如果有两个尺度的粗糙度, 那么对摩擦系数的贡献 (只要这些贡献远小于 1) 相加等于:

$$\mu \approx \mu_1 + \mu_2 \approx \nabla z_1 \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|} + \nabla z_2 \frac{G''(k_2 v)}{|G(k_2 v)|}$$

习题 2 一个刚性轮在一块弹性板上滚动, 弹性板由许多相同的黏弹性单元组成 (“Winkler 弹性地基”, 见图 16.9), 计算轮子的滚动阻力系数。假设每个单元由一根弹簧 (弹簧常数为 $c dx$) 和一个阻尼 (阻尼常数为 δdx) 并联组成。

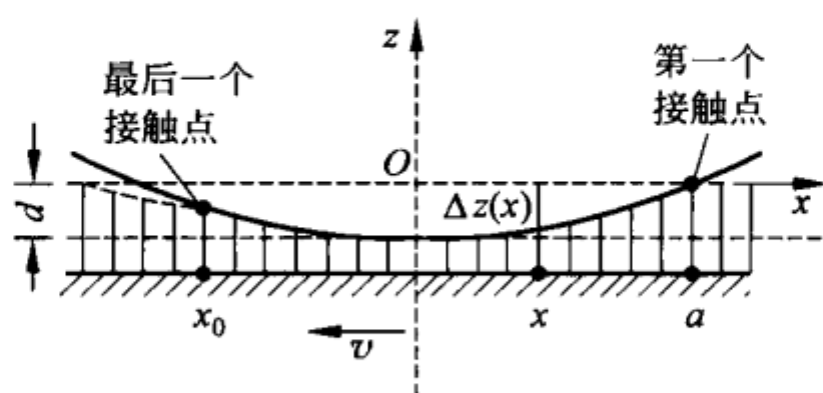


图 16.9 刚性轮被看做是平稳的。一块刚性平面上安装了一块黏弹性板, 这个整体作为一个 Winkler 地基模型, 以速度 v 向左运动。“渗透深度”为常数, 等于 d

解答: 接触点附近, 轮子的外形为:

$$z = -d + \frac{x^2}{2R}$$

式中 d 为压入深度。在点 x 处, 梯度为 $\tan\theta = z' = x/R$ 。基体沿负方向以速度 v 的运动导致了弹簧以速度 $\dot{z} = -vz' = -vx/R$ 沿垂直方向的运动。一个单元与轮子在力的作用下产生接触, 这个力等于:

$$dF_z = (-cz - \delta \dot{z})dx = (-cz + \delta v z')dx = \left[-c\left(-d + \frac{x^2}{2R}\right) + \delta v \frac{x}{R} \right] dx$$

总作用力的 z 分量为:

$$F_N = \int_{x_0}^a \left[-c\left(-d + \frac{x^2}{2R}\right) + \delta v \frac{x}{R} \right] dx$$

总作用力的 x 分量为:

$$F_W = \int_{x_0}^a \left[-c\left(-d + \frac{x^2}{2R}\right) + \delta v \frac{x}{R} \right] \frac{x}{R} dx$$

其中右边第一个接触点的坐标用 a 表示, 左边最后一个接触点用 x_0 表示。坐标 a 用条件 $z=0$ 来计算, x_0 用条件 $dF_z=0$ 来计算。由此可得:

$$a = \sqrt{2Rd}, \quad x_0 = -\sqrt{2Rd + \left(\frac{v\delta}{c}\right)^2} + \frac{v\delta}{c}$$

令 $\xi = x/\sqrt{2Rd}$, 将其代入 F_N 和 F_W 的表达式, 得到下式:

$$F_N = 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) d\xi$$

$$F_W = 2d^2 c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) \xi d\xi$$

其中

$$\kappa = \frac{2^{1/2} \delta v}{cd^{1/2} R^{1/2}} = \frac{2\delta v}{ca}$$

$$\xi_0 = -\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} + \frac{\kappa}{2}$$

滚动阻力的系数为：

$$\mu = \frac{F_w}{F_N} = \left(\frac{2d}{R}\right)^{1/2} \frac{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa\xi) \xi d\xi}{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa\xi) d\xi}$$

考虑两种极限情况：

(1) $\kappa \ll 1$ ：速度非常低。这种情况下近似 $F_N = \frac{4}{3} 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c$ 和 $F_w =$

$\frac{4}{3} d^2 c \kappa$ 是成立的。则滚动阻力的系数为：

$$\mu = \frac{d^{1/2}}{2^{1/2} R^{1/2} \kappa} = \frac{\delta v}{c R} = \frac{\tau v}{R}$$

其中 $\tau = \delta/c$ (可以将这个结果与式(16.29)的近似结果比较)。

(2) $\kappa \gg 1$ ：速度非常高,或者穿过一个液体板($c=0$)。在这种情况下,近似 $F_N = \delta v d$ 和 $F_w = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{d^{3/2} \delta \cdot v}{R^{1/2}}$ 是成立的。则阻力系数为^①：

$$\mu = \frac{2^{3/2}}{3} \left(\frac{F_N}{\delta v R} \right)^{1/2}$$

习题 3 一个球体和一个高弹体接触(无法向力),如果在 $t=0$ 时给它施加一个拉力 $F_N = -F_A = -\frac{3}{2} \gamma^* \pi R$, $F_N = -1.5 F_A$ 或 $F_N = -2 F_A$, 计算球体分开过程的动力学。相关数值: $R = 2 \text{ mm}$, $E^* = 10 \text{ MPa}$, $\gamma^* = 0.05 \text{ J/m}^2$, $\Phi \approx 10(v/v_0)^{0.5}$, $v_0 = 1 \text{ } \mu\text{m/s}$ 。

解答：用方程(16.35)来对问题求解,将这个方程写成下面的形式：

$$D - \gamma^* = 10 \gamma^* (v/v_0)^{0.5}$$

分别用黏着力和平衡半径的表达式：

$$F_A = \frac{3}{2} \pi \gamma^* R \text{ (这里等于 } 0.47 \times 10^{-3} \text{ N)}$$

^① 对于一个三维系统的转变,必须用 $4\bar{\eta}$ 来代替 δ : $\mu = \frac{1}{3} \left(\frac{2F_N}{\bar{\eta} v R} \right)^{1/2}$ 。更详细的解释见第 19 章。

$$a_0 = \left(9 \frac{\gamma^* \pi R^2}{2E^*} \right)^{1/3} \text{ (这里等于 } 6.56 \times 10^{-5} \text{ m)}$$

线载荷 D 可以表示为:

$$D = \gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2$$

在 $t=0$ 之前, 物体处于平衡, 没有载荷, 则接触半径为 a_0 。在 $t=0$ 之后的任何时刻, 下面的方程都是成立的:

$$\gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2 - \gamma^* = 10\gamma^* \left(\frac{v}{v_0} \right)^{0.5}$$

得到速度为:

$$v = -\frac{da}{dt} = \frac{v_0}{100} \left\{ \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2 - 1 \right\}^2$$

采用无量纲变量 $\tilde{a} = a/a_0$ 和 $\tilde{t} = tv_0/(100a_0)$, 初始条件为 $\tilde{t}=0$ 时, $\tilde{a}=1$, 则得到方程:

$$-\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \left[\left(\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \tilde{a}^{-3/2} - \tilde{a}^{3/2} \right)^2 - 1 \right]^2$$

对于三个不同的 F_N/F_A 比值, 这个方程的数值积分的结果见图 16.10。

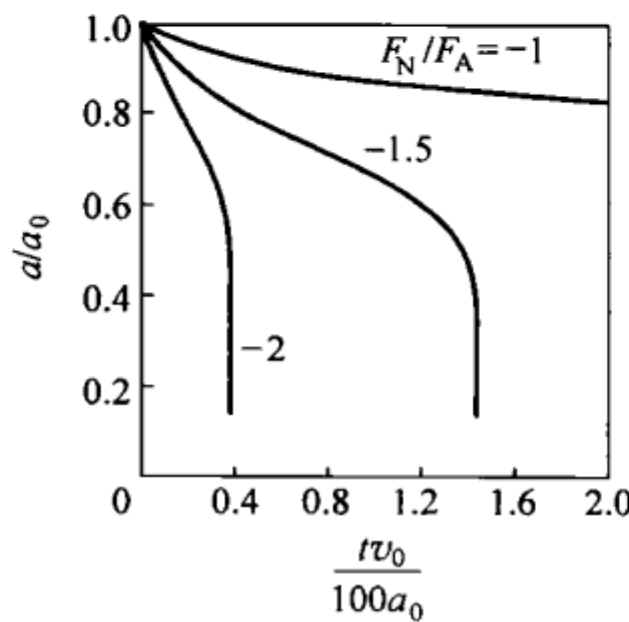
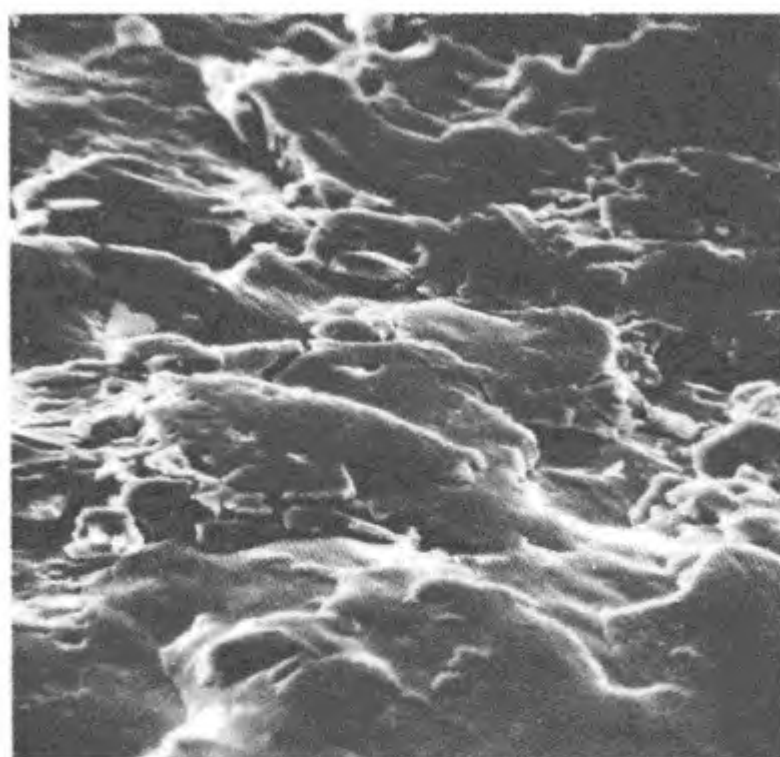
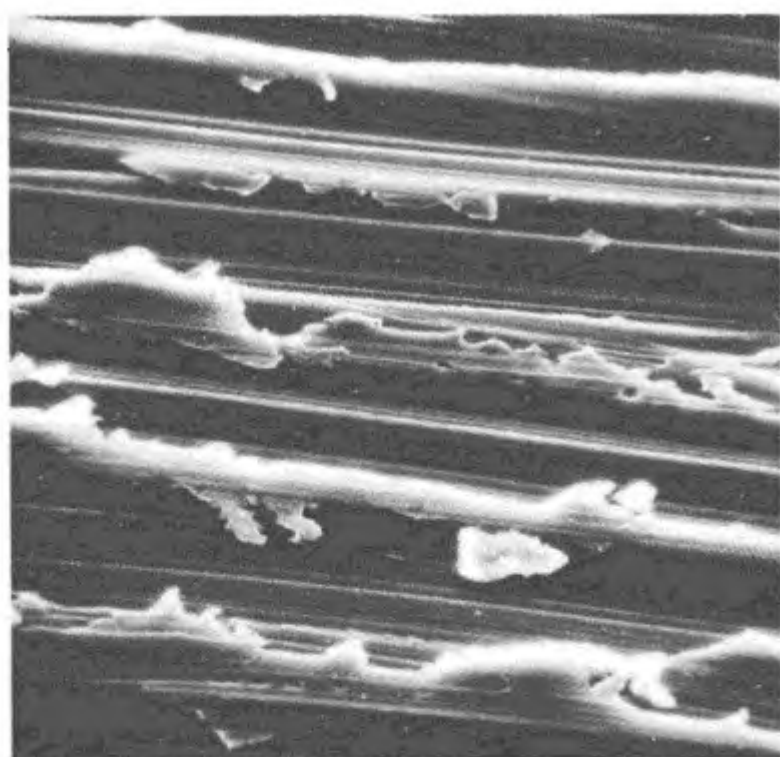


图 16.10 不同的法向力和接触半径与时间的关系

对于 $F_N = -F_A$, $t \rightarrow \infty$ 时, 系统趋近于平衡。法向力 $F_N = -1.5F_A$ 对应的是过临界分离力。球体在 $1.4 \times 100a_0/v_0 \approx 9 \times 10^3$ s 分开。

第 17 章 磨损



17.1 概述

磨损是零件损坏或机器和设备失效的主要原因之一。适当的材料选择、涂层、表面设计或润滑对提高经济效益来说很重要。

虽然摩擦和磨损基本上总是一起出现,但定性地看,它们是不同的现象。在很多模型中可以看到,摩擦中没有磨损。比如,在 Prandtl-Tomlinson 模型中就是有摩擦,没有磨损。没有摩擦的磨损也可以想象出来:磨损由无切向运动的法向接触产生(如黏着磨损)。

摩擦和磨损的不同机理使我们看到,对于不同的摩擦副(其他条件相同),磨损率会有好几个数量级的变化。但同时要注意的是,在特定的情况下,导致摩擦的那些过程也是产生磨损的原因,比如微接触的塑性变形。在这些情况下,摩擦和磨损总是紧密地联系在一起。

多数情况下,摩擦是我们不希望产生的现象,磨损也一样。但磨损也是很多工艺过程的基础,比如研磨、抛光或喷砂等。

通常按照磨损机理的不同,可以将其分为以下几种类型:

- ① 磨粒磨损。如果两个硬度差别较大的物体接触或第三方物体包含硬颗粒,则会发生磨粒磨损。
- ② 黏着磨损。发生在接触物体有相同或近似的硬度时。
- ③ 腐蚀磨损。与表面的化学改性和最终表面层的腐蚀有关。
- ④ 表面疲劳。由表面上滑动或滚动产生的交变载荷引起,而在单次载荷循环中,表面不会有明显的变化。

17.2 磨粒磨损

在磨粒磨损中,较硬材料的微凸体会穿透并切削较软的材料。表面上的刮痕是磨粒磨损的一个标志。为了估算磨粒磨损率,我们考虑这样一个模型:所有硬表面上的微接触都是圆锥状的(见图 17.1)。首先看一下在法向载荷 ΔF_N 作用下的单个微接触。

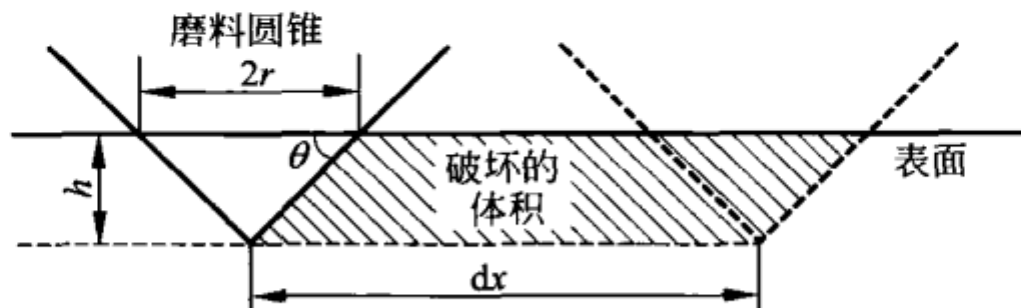


图 17.1 一个刚性圆锥作用下材料的犁槽

在这个法向力的作用下,圆锥压入到较软材料中。根据(较软材料的)硬度的定义 σ_0 ,有:

$$\Delta F_N = \sigma_0 \pi r^2 \quad (17.1)$$

圆锥在垂直平面上的投影面积等于 rh 。对于位移 dx ,圆锥切掉的体积 dV 为:

$$dV = rh dx = r^2 \tan \theta dx = \frac{\Delta F_N \tan \theta dx}{\pi \sigma_0} \quad (17.2)$$

作为粗略的估算,将该体积与材料磨损残片的体积联系起来,也就是二者相等。磨损率定义为磨损残片的体积除以滑动的长度,则磨损率等于:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\Delta F_N \tan \theta}{\pi \sigma_0} \quad (17.3)$$

所有微粗糙体的总和产生的磨损残片的体积为：

$$V = \frac{F_N \overline{\tan\theta}}{\pi\sigma_0}x \tag{17.4}$$

式中 $\overline{\tan\theta}$ 为所有微接触的 $\tan\theta$ 的加权平均值。这个方程经常被写为 Archard 磨损方程,即

$$V = \frac{k_{abr} F_N}{\sigma_0}x \tag{17.5}$$

磨损残片的体积与法向力和滑动长度成正比,与材料的硬度成反比。磨损系数 k_{abr} 表示磨粒表面的几何形状。

一种软材料和一个由很多硬颗粒嵌入固定住的磨粒物体之间的磨损称为两体磨损。磨粒磨损的一个特殊形式就是在摩擦副中存在硬质磨粒。这种磨损被称为三体磨损。

从表 17.1 可以看出,两体磨损的磨损系数处于 6×10^{-2} 到 6×10^{-3} 之间,而三体磨损的磨损系数要小约 1 个数量级。

表 17.1 磨粒磨损系数

| 作 者 | 磨损类型 | 微凸体大小/ μm | 材料 | $k/10^{-3}$ |
|------------------------------|------|----------------------|----|-------------|
| Spurr et al. (1975) | 两体 | — | 多种 | 60 |
| Spurr et al. (1975) | 两体 | 110 | 多种 | 50 |
| Avient et al. (1960) | 两体 | 40~150 | 多种 | 40 |
| Lopa (1956) | 两体 | 260 | 钢 | 27 |
| Kruschov and Babichev (1958) | 两体 | 80 | 多种 | 8 |
| Samuels (1956) | 两体 | 70 | 黄铜 | 5 |
| Toporov (1958) | 三体 | 150 | 钢 | 2 |
| Rabinowicz et al. (1961a) | 三体 | 80 | 钢 | 1.7 |
| Rabinowicz et al. (1961a) | 三体 | 40 | 多种 | 0.7 |

来源：E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials. Second Edition. John Wiley & Sons Inc. ,1995.

由方程(17.5)的磨损方程可得到,磨损残片的体积与滑动长度成正比。这点仅当较硬的材料没有被较软材料“填充”时才成立。在这个过程中,磨损率随着时间的增大而减小(见图 17.2)。

只要接触双方的表面性质没有发生变化(可以通过定期清理表面的残留磨粒来实现),磨损残片的体积就与滑动长度成正比。方程(17.5)表明,磨损率与较软材料的硬度成反比。倒数值 dx/dV 称为抗磨性,与材料的硬

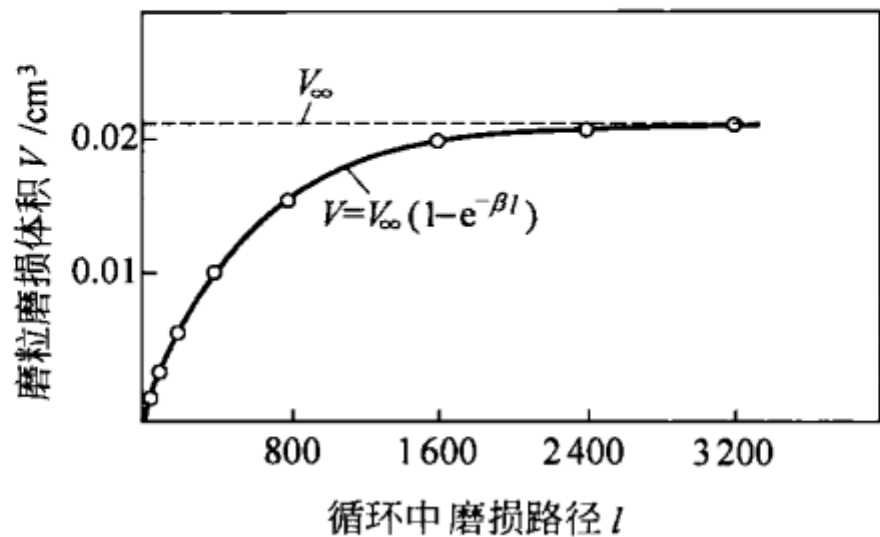


图 17.2 磨损系数随时间的变化

(数据来源: Mulhearn, T. O., Samuels L. E. The abrasion of metals; a model of the process. Wear, 1962, (5), 478-498)

度成正比。这个关系在很多实验中都被确认(见图 17.3)。另一方面,磨粒的硬度对磨损率的影响不大。

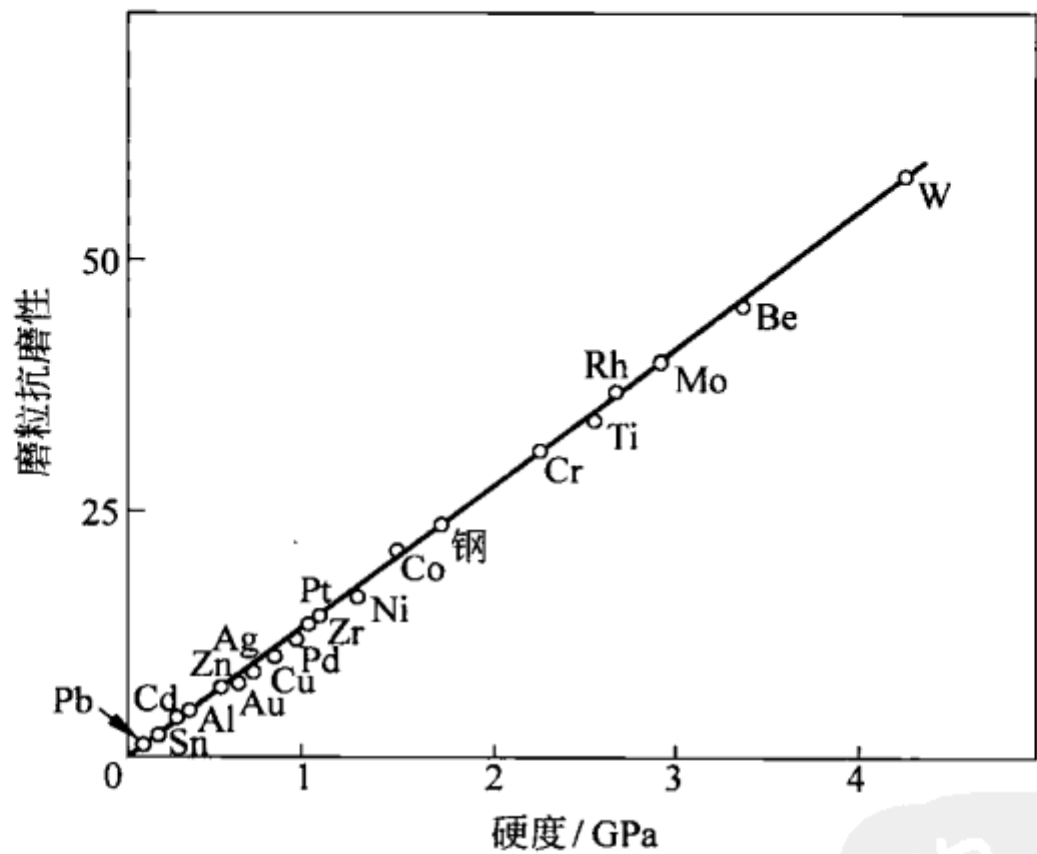


图 17.3 磨粒抗磨性与金属材料的硬度精确地成正比关系

(实验数据来源: Хрущев М. М., Бабичев М. А. Исследования изнашивания металлов (Investigations on the wear of metals). Moscow, 1960)

选择研磨材料时,不仅要考虑硬度,还要考虑它形成尖端削口的能力。由此可知,高硬度的脆性材料是首选。

方程(17.4)也可以用另外的方式来解释。因为由犁沟过程产生的摩擦系数 μ 等于 $\tan\theta$,式(17.4)也可以表示成下面的形式:

$$V = \tilde{k} \frac{F_N \mu x}{\sigma_0} = \tilde{k} \frac{W}{\sigma_0} \quad (17.6)$$

式中 W 为摩擦功。根据这点,磨损残片的体积正比于耗散能和材料硬度的比值。磨损残片的体积与能量的这个比例关系也适用于黏着磨损(见 17.3 节)和腐蚀磨损(见本章习题 1),这个关系也经常作为一个普遍的“磨损定律”被用于更多类型的磨损。

17.3 黏着磨损

如果摩擦副双方的硬度近似相等,那么另外一种磨损类型开始起主要作用,即黏着磨损。在摩擦学应用中,黏着磨损是最重要的磨损类型。在黏着磨损的摩擦学系统中,要求磨损量应该是最小的,因此要避免磨粒磨损的发生。黏着磨损的机理可以想象为,微粗糙峰焊接在一起,接着靠近表面的体积单元(磨损颗粒)被撕开。根据这个机理,可以研究单个颗粒的焊接和撕开。

金属材料的基本性质是,在超过临界应力后,它们会发生塑性变形。因此,如果材料受到拉伸载荷,那么在某个临界变形后会失效。相反,如果在压力作用下,超过弹性极限,双方会被焊在一起。虽然这个效应在宏观上看不到(类似于黏着的情况),但对于单个的微凸体接触是成立的。

现在考虑:接触双方在相对运动中,一个微凸体与另一个微凸体开始接触,形成一个直径为 D 的节点,随后又脱离(见图 17.4)。

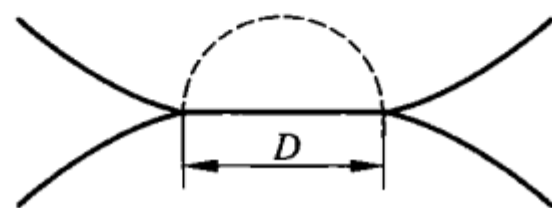


图 17.4 两个微凸体之间的一个“冷焊”节点

对于表面层,在典型的强度硬化阶段,所有的三个临界应力,也就是屈服强度、极限强度和“焊接应力”,有相同的数量级。微接触

中,微凸体开始接触时的应力达到了材料压痕硬度 σ_0 的数量级,则它们被焊在一起。如果将它们分开,则需要在破坏前再次达到几乎同样的应力 σ_0 ,只是正负号不一样。直接破坏前的弹性势能的数量级为 $U_{el} \approx \frac{\sigma_0^2}{2G} D^3$,当它大于黏着能 $U_{adh} \approx \gamma_{eff} D^2$ 时,才能够除去一个颗粒,这里的黏着能是为了建立两个自由表面需要的能量, γ_{eff} 是材料内界面的有效表面张力(也称为断裂韧性)。因此,仅当满足 $U_{el} > U_{adh}$ 时,一个颗粒才能被分开,于是有:

$$D > \frac{2G\gamma_{eff}}{\sigma_0^2} \quad (17.7)$$

对于很多简单的晶体,有 $\sigma_0 \propto G$ 。则式(17.7)写成如下形式:

$$D_c = \text{常数} \times \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\sigma_0} \quad (17.8)$$

这个方程给出了磨损颗粒直径的数量级与硬度和有效表面能的函数关系。对于式(17.8)中的常数,实验得到的数值约为 60 000^①。

因为一个颗粒的剥离会产生与此颗粒相同深度、相同直径的坑,所以可以假设由磨损产生的粗糙度与式(17.8)有相同的数量级。

在很多应用中,要求两个运动零件之间的间隙尽可能的小。但是经验表明,间隙也不能太小。否则,当所需的最小间隙与磨损颗粒的特征直径达到同一数量级时,表面损伤会越来越大,将其称为“galling”,即“烦恼”。对于最小间隙 h_{\min} ,经验方程为:

$$h_{\min} = 180\,000 \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\sigma_0} \quad (17.9)$$

为了估算黏着磨损率,我们考虑两个粗糙表面的接触(见图 17.5)。

法向力 F_N 等于接触物体的接触面积与硬度的乘积,即

$$F_N = \sigma_0 A \quad (17.10)$$

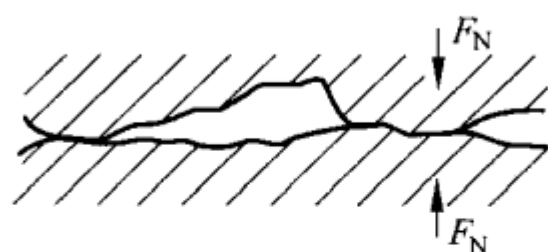


图 17.5 两个粗糙表面的接触

用 D 表示一个接触的平均直径, n 表示微接触的个数,则很明显有 $A \approx \frac{\pi D^2}{4} \cdot n$,由此可得:

$$n = \frac{4A}{\pi D^2} = \frac{4F_N}{\pi D^2 \sigma_0} \quad (17.11)$$

一个微凸体接触的“存留长度”与 D 的数量级相等。该微接触在这样的长度里形成又被破坏。沿 x 路径形成接触的总数目为:

$$N \approx n \frac{x}{D} \approx \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 D^3} \quad (17.12)$$

如果不是每一个微凸体接触的形成和破坏都会导致一个磨损颗粒的脱落,而磨损颗粒以概率 k^* 形成,那么产生的磨损颗粒的总体积为:

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{\pi D^3}{8} k^* N = \frac{\pi D^3}{12} \cdot k^* \cdot \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 D^3} = \frac{k^*}{3} \cdot \frac{F_N x}{\sigma_0} \quad (17.13)$$

① 这点可见 E. Rabinowicz 的著作: Friction and Wear of Materials. Second Edition, John Wiley & Sons Inc., 1995.

定义 $k^*/3$ 为系数 k_{adh} , 则得到黏着磨损定律:

$$V = k_{adh} \frac{F_N x}{\sigma_0} \quad (17.14)$$

对于黏着磨损也一样, 磨损残片的体积与法向力和滑动长度成正比, 与硬度成反比。这个方程称为 Holm-Archard 方程。

由于“单个磨损颗粒的产生与否是随机的”, 因此, 在摩擦副表面形成的磨粒污染也是很难确定的, 于是黏着磨损系数会在几个数量级内变化。对于两个合金金属表面之间的无润滑接触, 黏着磨损系数的典型数值约为 $k_{adh} \sim 10^{-3}$, 但在很好地润滑情况下或对于两个不公度的金属表面, 这个数值会小 3 或 4 个数量级。

17.4 低摩擦磨损的条件

低磨损滑动的条件取决于很多参数, 很难制定一些简单的法则。在润滑系统和无润滑系统中情况各不相同。在润滑系统中, 粗糙体充当润滑剂的存储器, 这种情况下可以将磨损最小化, 而在干摩擦系统中, 通常希望能建立尽可能光滑的表面。如果在微接触中没有达到材料的屈服应力, 那么表面仅发生纯弹性变形——假设两表面之间没有发生化学反应^①。因为微粗糙峰中的平均应力的数量级为 $\frac{1}{2} E^* \nabla z$, 根据式 (7.16) 以及发生在单个微接触的最大应力大概达到 $E^* \nabla z$, 则必须满足条件 $E^* \nabla z < \sigma_0$, 即

$$\nabla z < \frac{\sigma_0}{E^*} \quad (17.15)$$

对于很多金属材料, 硬度与弹性模量是相互关联的, 下式是成立的^②:

$$\frac{\sigma_0}{E} \approx 0.01 \quad (17.16)$$

为了使摩擦双方仅发生弹性变形, 表面必须极其光滑: 表面的平均梯度不能超过 0.01。另外, 希望粗糙度的波长保持尽可能的小, 从而使得微接触的直径保持小于式 (17.8) 中的直径, 从而达不到黏着磨损的条件。如果平均梯度大于式 (17.15) 的值, 那么较软材料在接触区将发生塑性变形。

① 对此, 一个简单的标准为, 接触材料不形成合金。

② 相关的统计数据见: E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials, Second Edition, John Wiley & Sons Inc., 1995.

这个效应“磨损中发生塑性变形”主要取决于表面最上层的性质。

在 17.3 节对黏着磨损的描述中,假设冷焊节点的形成和破坏发生在材料中的不同位置。如果材料形成了一层氧化物或被润滑,那么冷焊节点的形成和破坏就可能发生在同一个接触位置。表面的界面强度和材料的体积强度在黏着磨损中就发挥重要的作用,在方程(17.14)中没有明确地表示出来这一点。Kragelski^①引入了“正硬度梯度原理”作为发生低磨损摩擦条件的基本原理。根据这个原理,材料的最上面表面层的强度应该随着深度的增大而增大,这可以通过润滑、表面层的化学修饰、升高局部温度来软化金属、设计低表面能的表面层等来实现。如果接触材料没有形成合金,或形成的合金的强度小于这两种基材的强度,这些对于低磨损接触来说是有利的。如果由于某种原因,硬度的梯度是负的,那么磨损率会急剧增大。因此,氧化过程以及润滑膜分子层的相互作用对磨损影响很大,到现在为止,这点还没有进入到简单接触力学模型的框架中。

17.5 磨损作为摩擦区材料的运输工具

在磨损研究中,仅建立磨损颗粒脱落的条件是不够的。只要磨损颗粒还保持在摩擦区域,它们就不断地被暴露出来承载,形成集中负载,反复地损伤摩擦副表面。当材料离开摩擦表面时,磨损是最明显的。因此,从更广泛的意义上看,磨损不仅是一个强度问题,而且是将材料从摩擦区运输出去的问题。

根据 Kragelski 的观点,为了使材料具有较高的抗磨性,材料表面的屈服强度低于内部的屈服强度是有利的。下面研究这样一种材料的抗磨性:其表面层材料较软,剪切强度为 τ_c ,厚度为 h 。假设摩擦区的直径为 L 。

下面定性地估算磨损率。假设表面层表现出理想的塑性特征,表面层中的切向应力为恒定值 τ_c 并与滑动速度无关。引入表面层的有效黏度 η_{eff} ,使得该层中的剪切应力可以用黏性流体的公式来计算,即

$$\tau_c = \eta_{\text{eff}} \frac{v}{h} \quad (17.17)$$

由此可得:

① I. V. Kragelski. Friction and Wear. Butter Worth, London, 1965, 346.

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{h\tau_c}{v} \quad (17.18)$$

对于已经处于塑性屈服阶段的表面层及其他应力分量(例如正应力), 没有屈服强度。在一阶近似中, 其表现的行为就像是有效黏度为公式(17.18)中的液体。因此表面层会以一定的速度被挤压出来, 可以用方程(14.27)来估算该速度:

$$|\dot{h}| \approx \frac{2h^3}{3\pi\eta_{\text{eff}}R^4}F_N \approx \frac{2h^2v}{3\pi R^4\tau_c}F_N \quad (17.19)$$

因此, 从摩擦区域挤压出来的体积(磨损掉的材料)除以滑动距离就等于 $\frac{dV}{dx} = \frac{|\dot{h}| \pi R^2}{v} \approx \frac{8}{3} \frac{F_N}{\tau_c} \left(\frac{h}{2R}\right)^2$ 。数值仿真验证了这个方程的正确性, 仅常数略有变化。因此磨损方程可以写成下面形式^①:

$$V \approx \frac{F_N}{\sigma_0} \left(\frac{h}{L}\right)^2 x \quad (17.20)$$

这里引入了材料硬度 σ_0 。这个关系与磨损方程(17.14)的形式相同, 但是有一个几何因子 $(h/L)^2$, 从该因子可以看出, 对于小的 h 值和大的 L 值, 磨损率极其低。

17.6 高弹体的磨损

高弹体的磨损是一个非常复杂的过程, 甚至今天仍未完全搞清楚。在微接触中, 可以将磨损方程(17.14)用于黏着磨损的粗略估算中, 其中必须用平均应力表达式(16.10)来替换硬度 σ_0 , 即

$$V = k_{\text{adh}} \frac{\kappa F_N x}{4 |\hat{G}(vk)| |\nabla z|} \quad (17.21)$$

式中 $\kappa \approx 2$, 且 k 为粗糙度的特征波数。

描述橡胶磨损的特征时, 经常使用所谓的磨耗性 γ , 也就是磨损残片的体积与能量损耗的比值^②。磨耗性近似为:

$$\gamma = \frac{V}{\mu F_N x} = \frac{\kappa k_{\text{adh}}}{\mu 4 |\hat{G}(vk)| |\nabla z|} = \frac{\kappa k_{\text{adh}}}{4 \nabla z^2 \text{Im}(\hat{G}(vk))} \quad (17.22)$$

① V. L. Popov, I. Yu. Smolin, A. Gervé, B. Kehrwald. Simulation of wear in combustion engines. Computational Materials Science, 2000, 19(1~4): 285-291.

② 注意: 磨耗性 γ 不要与表面张力混淆, 本书中表面张力使用了相同的符号。

磨损性与复模量的虚部成反比,在速度的中间区域达到最小值(见图 17.6)。实验得到的磨损率与速度的函数曲线见图 17.7。

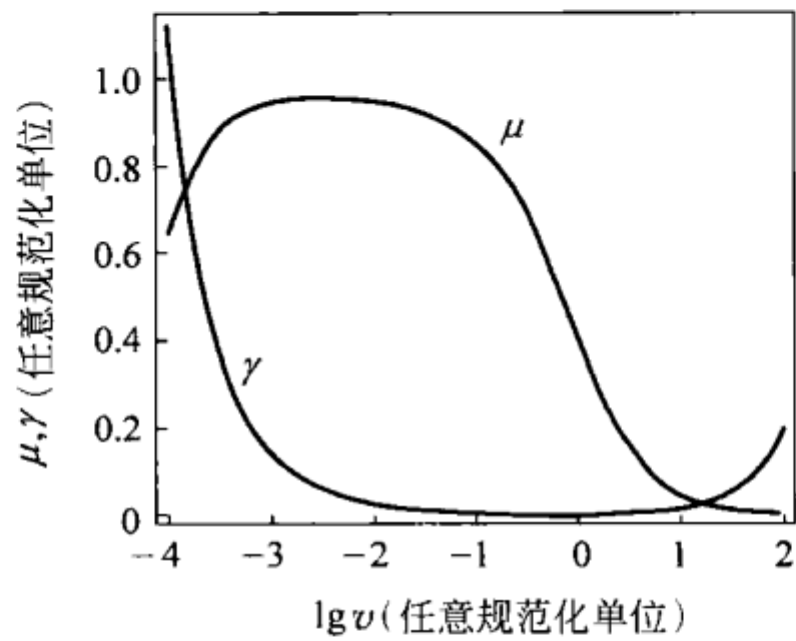


图 17.6 由方程(17.22)得到的摩擦系数和磨损性与速度的关系曲线(对于流变模型方程(15.51), $G_0 = 1, G_1 = 1\,000, \tau_1 = 10^{-2}, \tau_2 = 10^2, g(\tau) = \tau_1 \tau^{-2}$)

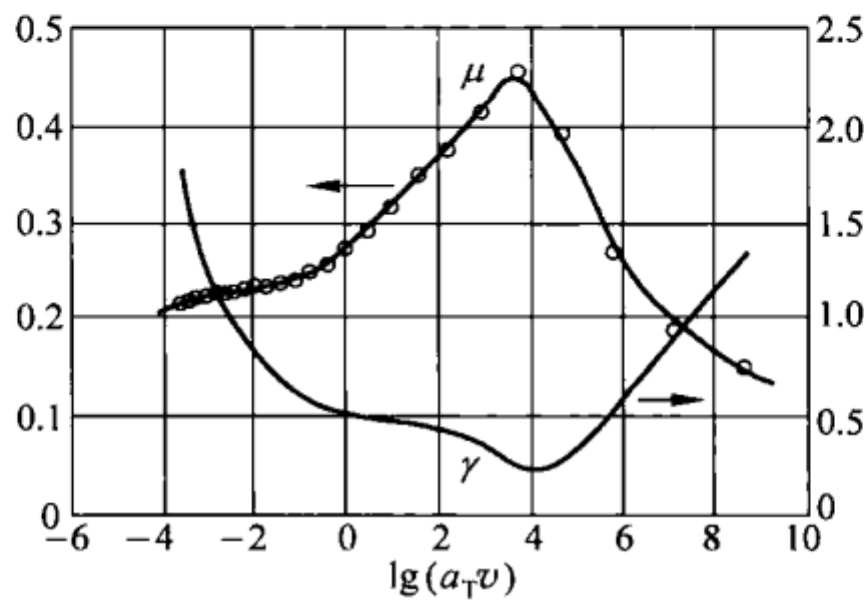


图 17.7 实验得到的橡胶的摩擦系数 μ 和磨损性 γ 与速度的关系
(数据来源: K. A. Grosch. The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds. Rubber Chemistry and Technology, 1996, 69: 495-568)

除了黏弹性质外,橡胶也表现为塑性性质。这些性质通过定义一个临界应力 σ_c 来描述,即“屈服应力”,橡胶中的这个应力不像金属中那样精确。假设橡胶的压痕硬度是这个值的 3 倍, $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$, 根据式(16.10),微接触中这个特征应力的数量级为:

$$\sigma \approx 4\kappa^{-1} | \hat{G}(vk) | \nabla z \tag{17.23}$$

如果这个应力达到材料的硬度,那么橡胶发生塑性变形,磨损迅速增大。此时的临界速度由下面的条件来计算:

$$\sigma_0 \approx 2 |\hat{G}(v_c k)| |\nabla z| \quad (17.24)$$

更精确的是在摩擦和磨损过程中将微接触中温度的变化考虑进去,因为复模量是与温度有关的。

对于大摩擦系数,在摩擦接触中发生失稳,有一部分接触表面处于黏连状态。物体的进一步运动只能通过拆离波(Schallamach 波)的传播产生,这是橡胶滚动的另外一个机理。

习题

习题 1 低速时的腐蚀磨损。一个半径为 R 的硬球形颗粒以速度 v_0 垂直撞在一个表面上(表面硬度 σ_0)。计算压入深度,压入直径和撞击所排开的体积。

解答: 根据 $a(t) \approx \sqrt{2Rd(t)}$, 将与时间相关的压入深度 $d(t)$ 和压入半径 $a(t)$ 联系在一起。接触面积为:

$$A(t) \approx 2\pi R d(t)$$

假设接触面中每一点的平均应力都为常数,并等于材料的硬度,则作用在球形颗粒的接触力等于 $-\sigma_0 2\pi R d(t)$ 。运动方程为:

$$m \frac{\partial^2 d(t)}{\partial t^2} = -2\pi\sigma_0 R d(t)$$

初始条件为 $d(0)=0, \dot{d}(0)=v_0$, 则解为:

$$d(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0 R}{m}}$ 。最大压入深度为:

$$d_{\max} = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\sigma_0 R}}$$

用密度来表示颗粒的质量: $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, 则得到:

$$d_{\max} = R \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\rho v_0^2}{\sigma_0}}$$

“压入”体积 ΔV 为：

$$\Delta V \approx \pi R d_{\max}^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho v_0^2}{2\sigma_0} = V \frac{\rho v_0^2}{2\sigma_0} = \frac{mv_0^2}{2\sigma_0}$$

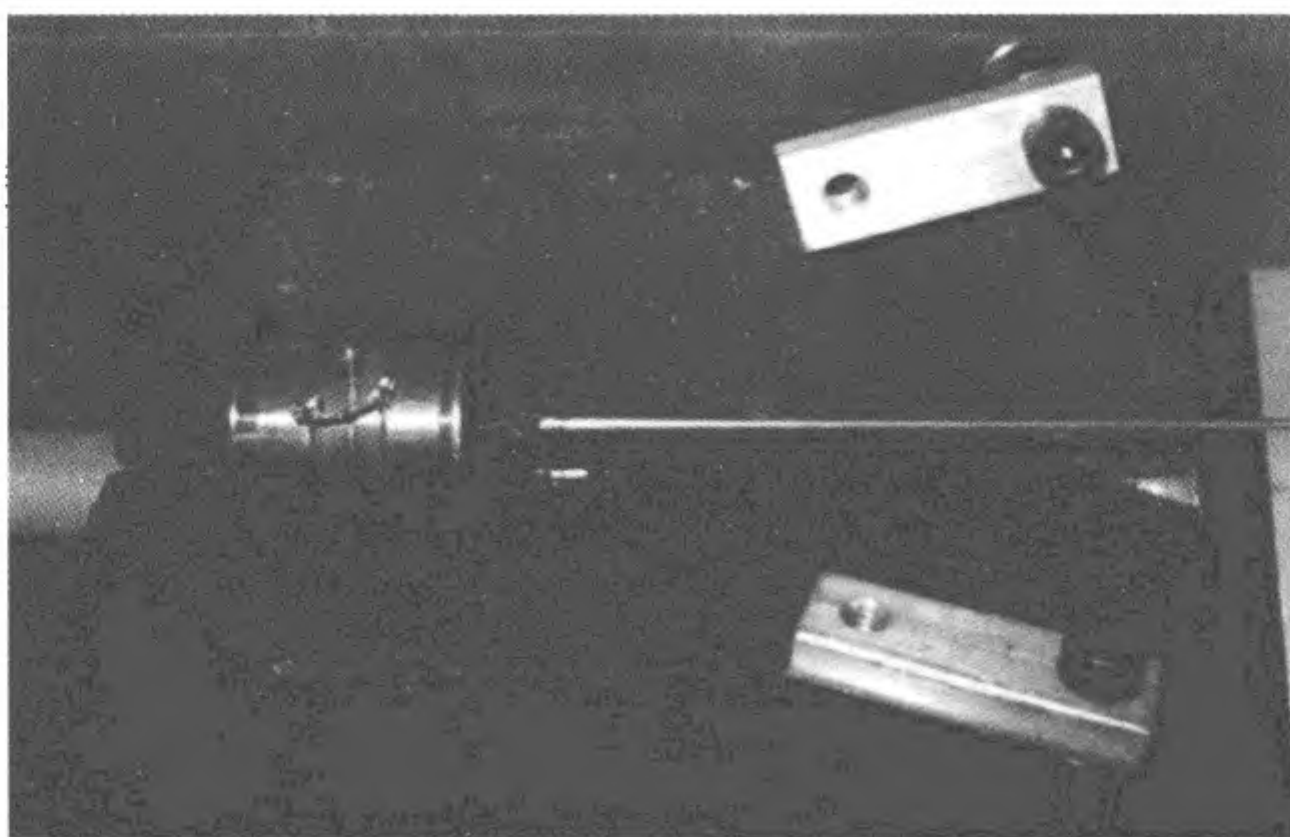
颗粒撞击中的压入深度等于颗粒的动能与材料硬度的比值。

磨损体积不仅取决于压入体积，而且与材料的重置有关。但是，通常磨损体积与压入体积成正比。



第 18 章

超声振动影响下的摩擦行为



采用不同频率和振幅的振动来影响摩擦力的办法已经在许多领域得到了广泛应用。最知名的低频应用是振动碾压机和振动板。高频振荡被用于金属加工、装配、拉丝和切割中来影响摩擦力。在纳米摩擦学设备(如原子力显微镜)中振动也被用于避免接触失稳。另外,利用振动和摩擦之间的相互作用还可以产生定向运动。例如,用振动来对混合物进行运输和分离。照相机中的行波电机的工作原理就是基于超声波振动。通常情况下,振动会导致摩擦力的下降,但在特定条件下也会导致摩擦力的增大或接触双方的焊连。在芯片封装技术中,超声波焊接和超声波结合就是基于这个原理。最后,振动也可以用于探索摩擦机理。

18.1 超声振动在宏观角度对摩擦的影响

1. 超声振动对静摩擦力的影响

研究通过两点支撑在基体上的一个物体(见图 18.1)。假设基体和试样之间的摩擦系数为 μ 。作为一阶近似,试样可以是刚性体,其长度可通过嵌入的一个压电单元来周期性地改变。

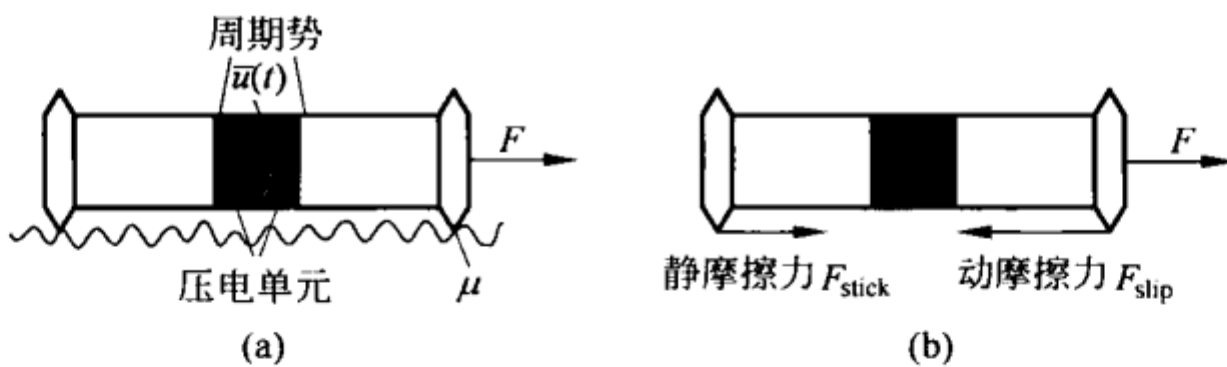


图 18.1

(a) 沿滑动方向振荡的试样; (b) 沿水平方向作用在试样上的力

在没有振动的情况下,为了使试样开始运动,必须施加一个临界力 $F_s = \mu F_N$,其中 F_N 是法向力,这里等于试样的重量。相反,如果试样的长度变化到使得接触点和基体之间产生了相对运动,那么在一个任意小的作用力 F 下试样都会开始这个运动。试样的受力图见图 18.1(b),其中试样的长度随时间在变化。对于较慢的长度变化,这个过程是准静态的,每个时刻每点上的所有力都处于平衡。因为在每个接触点,动摩擦力的大小都是恒定的,即

$$F_{\text{slip}} = \frac{1}{2} \mu F_N \quad (18.1)$$

如果试样的一端滑动而另一端粘住的话,摩擦力仅与外力保持平衡。在试样收缩阶段,接触后端滑动,前端粘住。这样,试样表现出一个类似蠕动且周期为 Δl 的运动,其中 Δl 是长度变化的幅值。这意味着,假设库仑摩擦定律是成立的,那么一个任意小的振幅和一个任意小的外力就足够使试样开始宏观运动:静摩擦力没有了。但是实验表明,这个结论仅适用于足够大的振幅(见下面静摩擦力与振幅的函数关系的实验数据)。

2. 振动对动摩擦力的影响

接下来,我们研究振动对滑动摩擦力的影响。振荡频率要足够高以使

得振荡不会被试样的稳态运动所影响。也就是说,试样的运动可以看做是一个速度为 v_0 的恒速运动和一个振荡速度的叠加。

(1) 沿滑动方向的振荡

如果试样根据下面的谐波关系振荡,即

$$l = l_0 + \Delta l \sin \omega t \quad (18.2)$$

那么两个接触点的坐标可以定义为:

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} l_0 + \frac{1}{2} \Delta l \sin \omega t, \quad x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} l_0 - \frac{1}{2} \Delta l \sin \omega t \quad (18.3)$$

其相对于基体的速度为:

$$\dot{x}_1 = v_0 + \frac{1}{2} \Delta l \omega \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \frac{1}{2} \Delta l \omega \cos \omega t \quad (18.4)$$

或

$$\dot{x}_1 = v_0 + \hat{v} \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \hat{v} \cos \omega t \quad (18.5)$$

式中 $\hat{v} = \frac{1}{2} \Delta l \omega$, v_0 为平均速度。为了简化,假设法向力平均地分布在两个接触点上,每个接触点上为 $F_N/2$,而且不随时间而变化,在该假设下得到作用在试样上的一个总摩擦力为:

$$F_R = \frac{\mu F_N}{2} [\operatorname{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \omega t) + \operatorname{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \omega t)] \quad (18.6)$$

在一个振荡周期内对这个力取平均值,得到宏观摩擦力为:

$$\langle F_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_R(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu F_N}{2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \xi) + \operatorname{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi)] d\xi \quad (18.7)$$

在一个周期内积分中的这两项的贡献是相等的,所以仅对其中一个积分,然后乘以 2 就可以了,即

$$\langle F_R \rangle = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi) d\xi \quad (18.8)$$

考虑两种情况:

① $v_0 > \hat{v}$ 。这种情况下,速度总是正的,物体向一个方向运动,摩擦力在大小和方向上都是恒定的。此时的摩擦力 $\langle F_R \rangle = \mu F_N$ 。

② $v_0 < \hat{v}$ 。这种情况下,速度在一个周期中一部分是正的,另一部分是负的(该时间周期见图 18.2,分别用 +1 和 -1 表示)。在正的区域,摩擦力为 μF_N ,在负的区域为 $-\mu F_N$ 。速度符号改变的时刻由 $v_0 - \hat{v} \cos \xi^* = 0$ 这个条件来计算,由此可得:

$$\xi^* = \arccos(v_0 / \hat{v}) \quad (18.9)$$

从图 18.2 很容易可以看到, 对式(18.8)积分可以得到:

$$\begin{aligned} \langle F_R \rangle &= \mu \frac{F_N}{2\pi} [(2\pi - 2\xi^*) - 2\xi^*] = \mu \frac{2F_N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \xi^* \right) \\ &= \mu \frac{2F_N}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{v_0}{\hat{v}}\right) \right] \end{aligned}$$

或

$$\langle F_R \rangle = \begin{cases} \frac{2\mu F_N}{\pi} \arcsin\left(\frac{v_0}{\hat{v}}\right), & v_0 < \hat{v} \\ \mu F_N, & v_0 > \hat{v} \end{cases} \quad (18.10)$$

与实验数据相比, 这个关系见图 18.3。

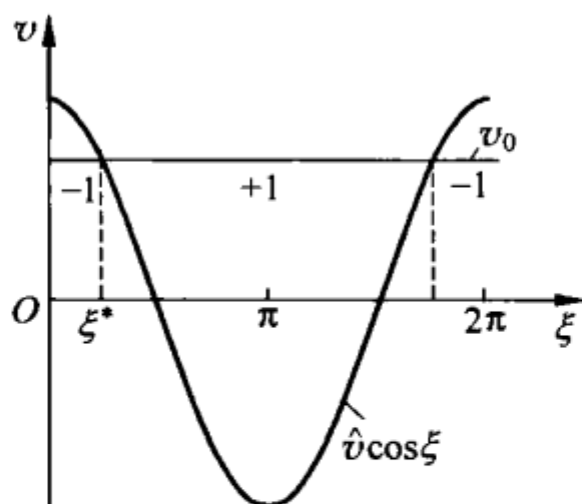


图 18.2 对式(18.8)积分计算的说明

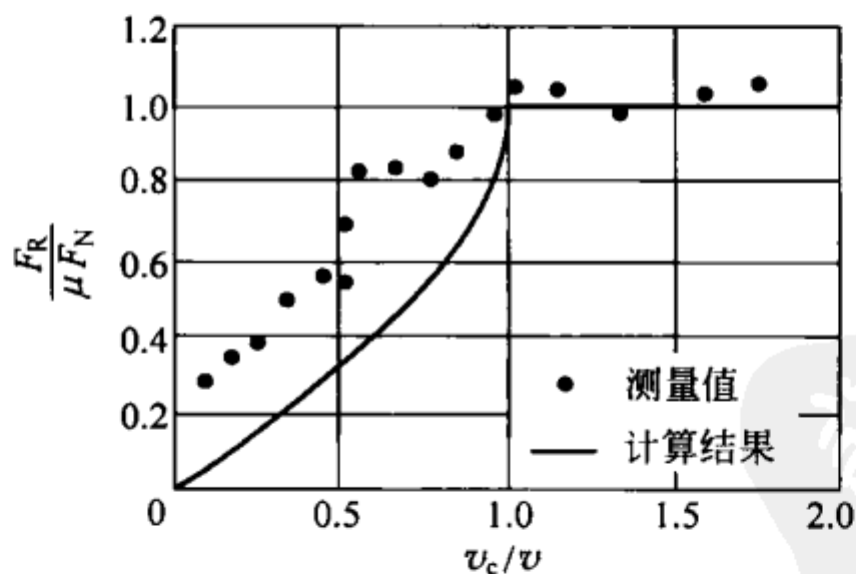


图 18.3 理论和实验数据的比较(利用平行于运动方向的振动来减小摩擦)
(数据来源: Storck H., Littmann W., Wallaschek J., Mracek M. The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to traveling wave ultrasonic motors. Ultrasonics, 2002, 40: 379-383)

(2) 垂直于滑动方向的振动

这种情况下, 振荡速度为:

$$v_1 = \hat{v} \cos \omega t \quad (18.11)$$

该速度总是垂直于滑动方向(见图 18.4(b))。通过受力图(见图 18.4(c)), 摩擦力的瞬时值为

$$F_R = \mu F_N \cos \varphi \quad (18.12)$$

考虑到 $\tan \varphi = \hat{v}/v_0$, 则摩擦力为:

$$F_R = \frac{\mu F_N}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \omega t\right)^2}} \quad (18.13)$$

宏观摩擦力, 也就是微观水平力的平均值为:

$$\langle F_R \rangle = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \xi\right)^2}} \quad (18.14)$$

这个关系和实验数据的比较见图 18.5。与平行于滑动方向的振动的情况相反, 这种情况下的摩擦系数总是小于没有超声波振动时的摩擦系数。

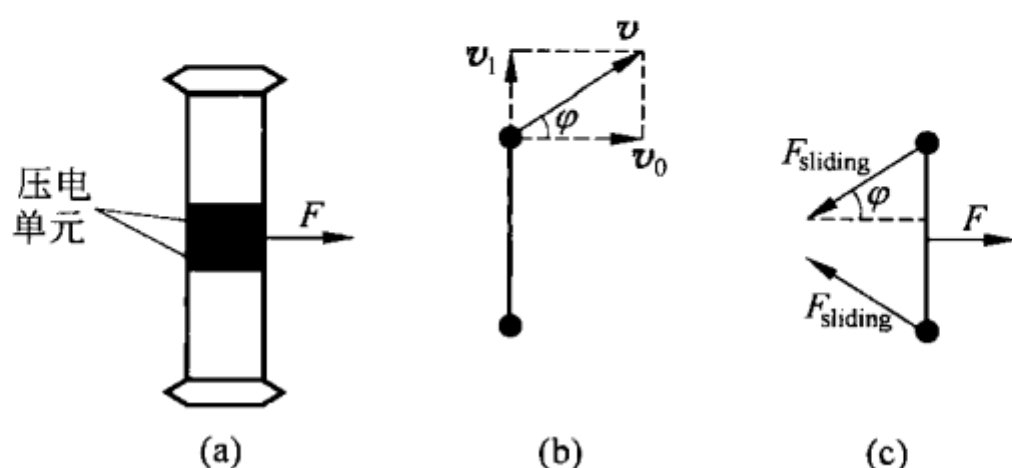


图 18.4 垂直于滑动方向的振荡(俯视图)

(a) 简要的实验图; (b) 速度图; (c) 受力图

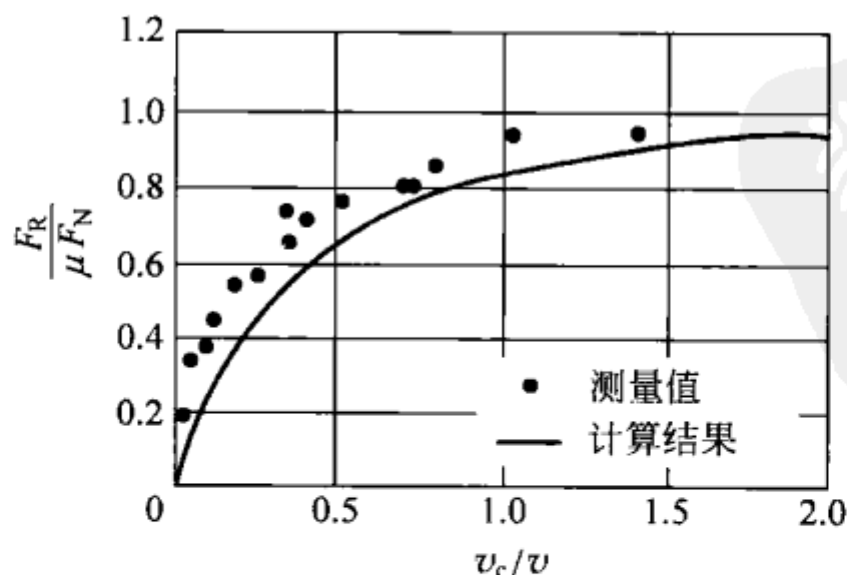


图 18.5 通过垂直于运动方向的振动来减小摩擦的理论和实验数据(数据来源与图 18.3 相同)

理论结果与实验结果的一个重要区别在于,速度很低时,实验所得的摩擦系数没有趋近于零,而理论结果则是趋近于零。这也是库仑的宏观摩擦定律不再适用于小振幅的一个表现。

18.2 超声振动在微观角度对摩擦的影响

宏观摩擦力等于作用于物体和基体之间按时间平均的切向力。因此,仅在指定的对切向力取平均的时间里,才能使用“宏观摩擦力”这个词。在足够小的空间尺度和时间尺度,宏观摩擦定律就失效了(目前在 AFM 实验中,摩擦学二项式仍然成立)。因此它不能用于研究任意小的振幅下振动对摩擦的影响。

采用 Prandtl-Tomlinson 模型(见第 11 章)来说明宏观摩擦力在小尺度的失效,而且必须进行修正。将这个模型用于上面的两个物体接触的系统。考虑总质量为 m 的两个质点,它们之间的距离根据下式来变化:

$$l(t) = l_0 + \Delta l \sin \omega t \quad (18.15)$$

两个质点都在一个周期势中。方程(11.1)修改为:

$$m \ddot{x} = F - \eta \dot{x} - \frac{F_0}{2} [\sin k(x - l(t)/2) + \sin k(x + l(t)/2)] \quad (18.16)$$

没有振动时,要使这个系统开始运动,必须施加作用力:

$$F_{s0} = F_0 \left| \cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) \right| \quad (18.17)$$

因此, F_{s0} 的物理意义为没有超声波振动时的静摩擦力。

现在,假设长度 l 根据式(18.15)振荡,对方程(18.16)在周期 $T = 2\pi/\omega$ 内取平均值;用尖括号来表示这个时间的平均值:

$$m \langle \ddot{x} \rangle = F - \eta \langle \dot{x} \rangle - \frac{F_0}{2} \langle \sin k(x - l(t)/2) + \sin k(x + l(t)/2) \rangle \quad (18.18)$$

只要系统没有宏观运动(也就是宏观上处于静止状态),平均值 $\langle \ddot{x} \rangle$ 和 $\langle \dot{x} \rangle$ 就等于零,静摩擦力为:

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_0}{2} \langle \sin k[x_0 - (l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2] + \sin k[x_0 + (l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2] \rangle \\ &= F_0 \sin k x_0 \cdot \langle \cos k(l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2 \rangle \\ &= F_0 \sin k x_0 \cdot \left[\cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) \left\langle \cos \left(\frac{1}{2} k \Delta l \sin \omega t \right) \right\rangle \right] \end{aligned}$$

$$- \sin\left(\frac{1}{2}kl_0\right) \left\langle \sin\left(\frac{1}{2}k\Delta l \sin\omega t\right) \right\rangle \right] \quad (18.19)$$

第二项的平均值等于零(因为这是对一个奇函数取平均值)。第一项的平均值根据下面的扩展来计算^①:

$$\cos(\zeta \sin\varphi) = J_0(\zeta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\zeta) \cos(2n\varphi) \quad (18.20)$$

其中 J_n 是第 n 阶 Bessel 函数。因此摩擦力为:

$$F = F_0 \sin kx_0 \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) \quad (18.21)$$

该力是坐标 x_0 的函数,其最大值

$$F_s = F_0 \left| \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) \right| = F_{s0} \left| J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) \right| \quad (18.22)$$

等于静摩擦力。可以看出,静摩擦力取决于振幅,这个关系见图 18.6。

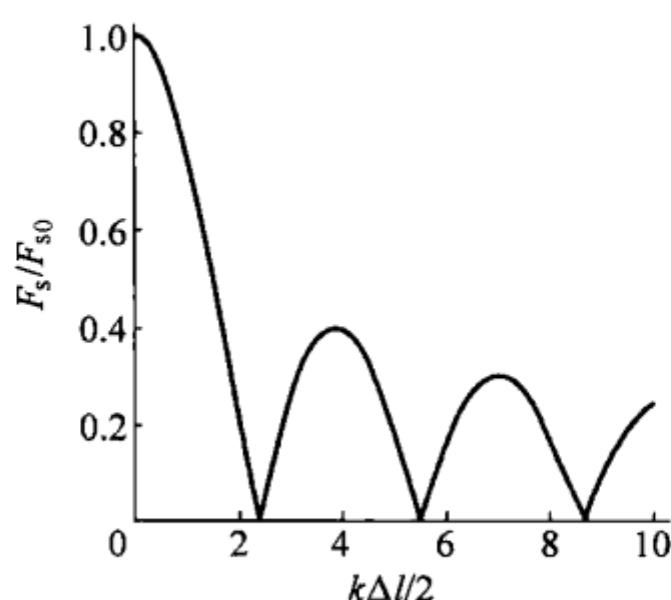


图 18.6 在一个空间周期势中,对于一个两体系统,静摩擦力与振幅的关系

该摩擦力随着振幅的增大而减小,当 $k\Delta l/2 = 2.4048$ (即 $\Delta l \approx 0.77\Lambda$) 时摩擦力为零,其中 Λ 是势的波长。如果相互作用势包含了几个傅里叶分量,那么静摩擦力的振荡就变得模糊,得到的就是一个连续的减函数。这个例子里,能识别出从无超声波振动的静摩擦到有超声波振动的宏观结果 ($F_s = 0$) 的逐渐过渡。可以看到,静摩擦力在某振幅下有明显的减小,这个振幅提供给我们关于相互作用势特征波长的一个信息。这点可用于摩擦谱学中来研究摩擦机理。

^① O. J. Farrell, B. Ross 求出的问题: Gamma 和 Beta 函数, Legendre Polynomials, Bessel 函数。The Macmillan Company, 1963, 410.

18.3 静摩擦力与振幅函数关系的实验研究

实验研究采用图 18.1 所示的系统,测得了静摩擦力与振幅的函数关系^①。实验中频率为 60~70 kHz,振幅达到 1 μm 。采用一个激光振动计来测量振幅。对于钢试样和不同的金属基材,结果见图 18.7。

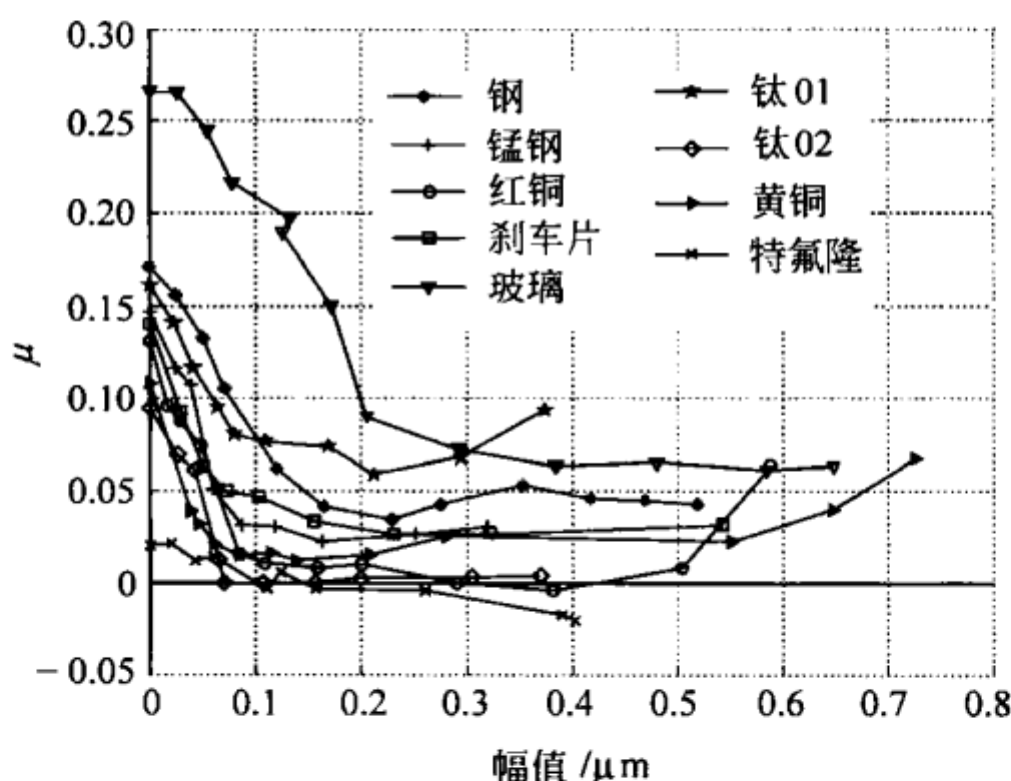


图 18.7 对于多种材料与 C45 钢接触,静摩擦系数与振幅的关系

对于多数摩擦对,摩擦系数随着振幅的增大而减小。在给定的条件下,对于给定的摩擦副,振荡幅度(该长度下,摩擦力明显减小)决定了摩擦过程的特征空间尺度。对于不同的材料,摩擦过程的特征空间尺度是不同的。表 18.1 给出了 9 种不同材料的结果,从中能辨别出第一次实验和系统已经磨合后的实验。

对于多数材料,系统磨合后的特征长度尺度小于初始状态,但是黄铜和玻璃例外。由表 18.1 可以看出,对于所有研究的材料,特征尺度约处于 10 nm 到 100 nm 之间。对于金属,特征尺度在 20 nm 到 60 nm 之间变化。这个尺度的物理起源还没有完全明了,可能与边界层的厚度有一定的关系。振幅较大时,试样受热,边界层失去了效果,因此在大的超声波振幅下,摩擦系数典型地再次增大。振幅更大时,就是强金属性黏着和摩擦焊了。

橡胶和铝定性地表现出不同的行为(见图 18.8)。橡胶的行为不是由

^① V. L. Popov, J. Starcevic. Tribospectroscopic study of a steel-steel friction couple. Tech. Phys. Lett., 2005, 31(4): 309-311.

纳米级的相互作用决定的。和其他金属相比,铝的摩擦学行为有所不同,这可能是由于氧化层容易被破坏,导致了摩擦过程不再属于边界层摩擦范围。

表 18.1 对于第一次实验和磨合后多次实验取平均,各种材料的特征摩擦尺寸 l_0

| 摩擦片材料 | l_0/nm (第一次实验) | l_0/nm (运行后) |
|----------------|-------------------------|-----------------------|
| 低碳钢 C45 | 61 | 41 |
| 奥氏体锰钢 X120Mn12 | 39 | 24 |
| 钛 Ti01 | 34 | 27 |
| 钛 Ti02 | 25 | 22 |
| 钛 Ti03 | 50 | — |
| 红铜 | 42 | 37 |
| 黄铜 | 17 | 29 |
| 刹车片 | 31 | 29 |
| 玻璃 | 104 | 111 |

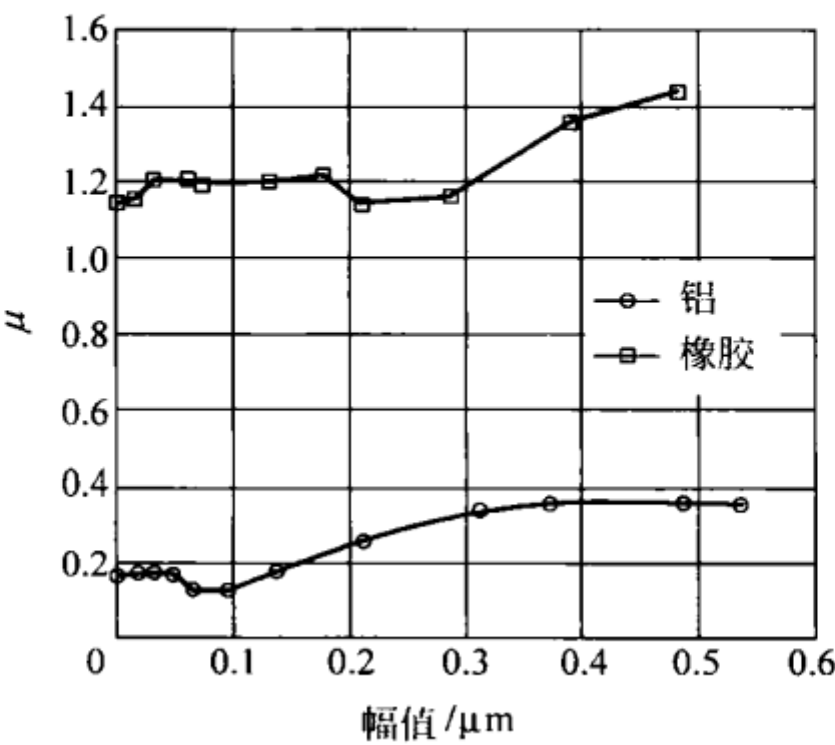


图 18.8 对于橡胶和铝,静摩擦系数与振幅的关系

图 18.7 中特氟隆(聚四氟乙烯)的摩擦系数很小,随着振幅的增加变为负值(译者注:该实验数据是没有考虑振动引起的力,原则上摩擦系数为 0 或负值是违反基本力学原理的)。这种情况,通常发生在非对称结构,形成“棘齿^①”状的表面,此时即使没有外力也能发生定向运动。

摩擦光谱学研究表明,在边界层摩擦条件下,振幅从约 100 nm 开始,就已经可以使用宏观摩擦定律。幅值(数量级为 20~60 nm)非常小时,摩擦系数会迅速下降。这样的幅值足够用于控制摩擦系数。

① 棘齿的详细说明见 11.5 节。

18.4 动摩擦力与振幅函数关系的实验研究

在很多摩擦力主动控制的应用中,知道动摩擦力与振幅的关系很重要。本节将介绍采用超声波销-盘摩擦磨损机得到的典型实验结果(原理见图 18.9(a))。

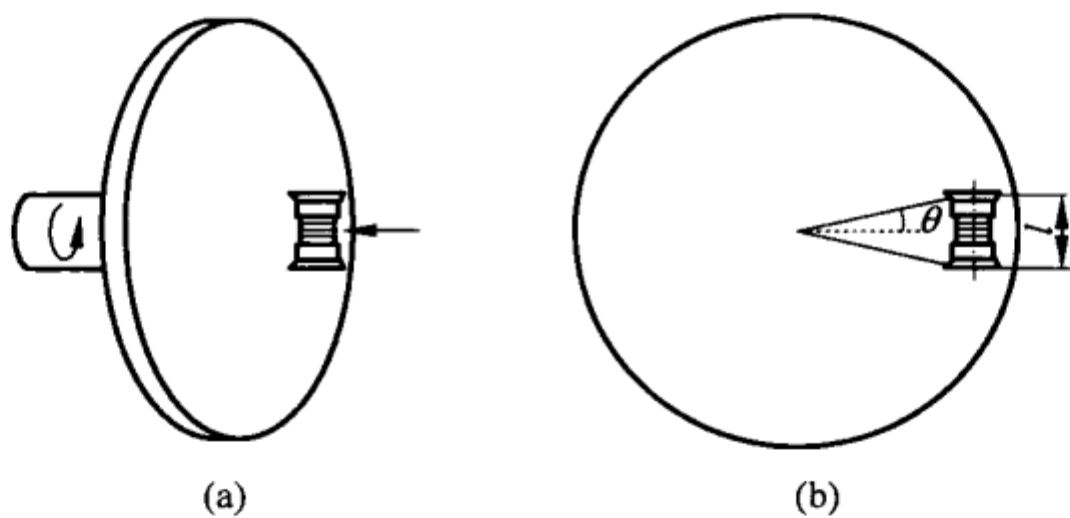


图 18.9

(a) 超声波销-盘摩擦磨损机的结构; (b) 超声波销-盘摩擦磨损机上滑动的几何关系

对于不同的振幅,钢对钢接触的动摩擦力与滑动速度的关系见图 18.10。

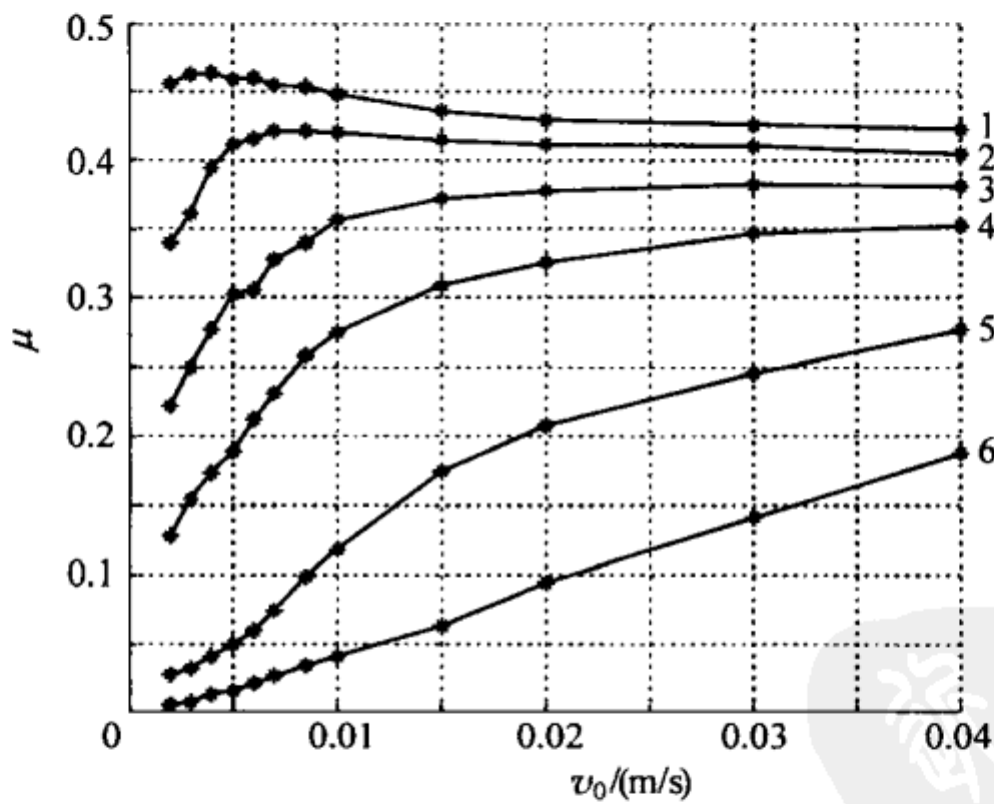


图 18.10 “钢对钢”接触中摩擦系数与滑动速度和振幅的关系,其中频率为 45 kHz, $\theta=31.5^\circ$, 振幅为下列值: 1—0.023 μm ; 2—0.056 μm ; 3—0.095 μm ; 4—0.131 μm ; 5—0.211 μm ; 6—0.319 μm

(数据来源: V. L. Popov, J. Starcevic, A. E. Filippov. Influence of ultrasonic in-plane oscillations on static and sliding friction and intrinsic length scale of dry friction. Trib. Lett. ,2009,DOI 10.1007/s11249-009-9531-6)

定性的、类似的关系在其他摩擦学接触对中也能发现。没有振动时,摩擦力随着速度的增大轻微下降(见图 18.10 中曲线 1)。这会导致失稳的发生。如果用振幅约 $0.1 \mu\text{m}$ 的超声波振荡来激励系统,那么摩擦力就变成了随滑动速度增大的单调函数(见图 18.10 中曲线 3),这个效应可以用于抑制由摩擦产生的失稳。

铝是一个例外。在钢和铝接触对中,摩擦系数既与滑动速度无关,也与振幅无关,只是在恒定值 $\mu \approx 0.6 \pm 0.1$ 左右有强烈波动(见图 18.11)。

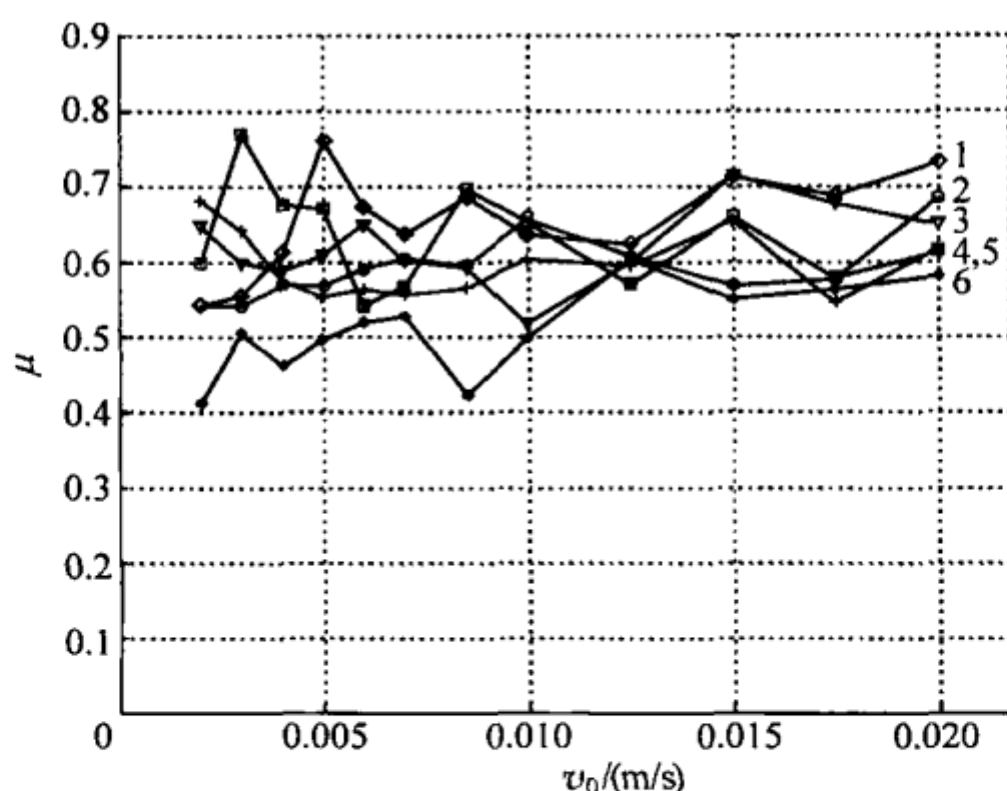


图 18.11 摩擦系数与铝-钢接触对的关系,振荡频率为 48 kHz,振幅为下列值:
1— $0.21 \mu\text{m}$; 2— $0.081 \mu\text{m}$; 3— $0.31 \mu\text{m}$; 4— $0.14 \mu\text{m}$; 5— $0.41 \mu\text{m}$; 6— $0.035 \mu\text{m}$ 。摩擦系数在 0.6 左右表现出强烈的波动,但是表现出与滑动速度或振幅无关(数据来源同于图 18.10)

习题

习题 1 计算一个“随机 Prandtl-Tomlinson 模型”中静摩擦力与振幅的关系。在大幅值的极限情况,静摩擦力与振幅有什么关系?

解答: 假设在 Prandtl-Tomlinson 模型中,一个质点与基体的相互作用力不是周期函数,而是可以用傅里叶积分形式来表达的一个随机函数,于是有:

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(k) \sin(kx + \varphi_k) dk$$

假设相位 φ_k 是与 δ 关联的:

$$\langle \sin \varphi_k \sin \varphi_{k'} \rangle = \langle \cos \varphi_k \cos \varphi_{k'} \rangle = \Phi \delta(k - k')$$

这里,尖括号的意思是在一个统计系统内的平均值。 $\delta(\xi)$ 是狄拉克 δ 函数。 Φ 是一个常数,被定义为随机力的均方根。基体作用在整个系统上的水平力等于:

$$\begin{aligned} F &= F(x_0 - l(t)/2) + F(x_0 + l(t)/2) \\ &= \int_0^\infty f(k) \sin[k(x_0 - l(t)/2) + \varphi_k] dk \\ &\quad + \int_0^\infty f(k) \sin[k(x_0 + l(t)/2) + \varphi_k] dk \end{aligned}$$

按时间平均计算(与式(18.19)~(18.21)的做法一样)的结果为:

$$F(x_0) = 2 \int_0^\infty f(k) \sin(kx_0 + \varphi_k) \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) dk$$

为了计算物体振荡时的最大静摩擦力,令该力为坐标 x_0 的随机函数。静摩擦力的分布函数可以通过数值计算得到。可以看出,静摩擦力的平均值与这个力的均方根的数量级相等^①。因此,静摩擦力与振幅关系的主要特性可以通过计算这个力的均方根来决定:

$$\begin{aligned} \langle \overline{F(x)^2} \rangle &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(k) f(k') [\sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'})] \\ &\quad \times \cos \frac{kl_0}{2} \cos \frac{k'l_0}{2} J_0\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) J_0\left(\frac{k'\Delta l}{2}\right) dk dk' \end{aligned}$$

这里“—”的意思是按时间取平均值。将上面提到的关联条件考虑进去,得到 $\langle \sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'}) \rangle = \Phi \delta(k - k')$ 。 δ 函数的积分结果为 $\int_{-\infty}^\infty \delta(k - k') dk' = 1$ 。得到力的均方值为:

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = 4\Phi \int_0^\infty f^2(k) \cos^2 \frac{kl_0}{2} J_0^2\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) dk$$

如果长度 l_0 是“宏观上很大”,也就是它远远大于相互作用势的任意特征尺度,那么对于 l_0 的任意变化,在积分中函数 $\cos^2 \frac{kl_0}{2}$ 的变化要远远快于其他的因子,则上式可以用 $1/2$ 来代替:

^① 平均摩擦力和这个力的均方根几乎成正比,这是由平均静摩擦力的直接数值计算确定的。见: O. K. Dudko, V. L. Popov, G. Putzar. Tribospectroscopy of randomly rough surfaces. Tribology International, 2006, 39(5): 456-460.

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = 2\Phi \int_0^\infty f^2(k) J_0^2\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) dk$$

这种情况下,摩擦力与平均连接长度无关,仅取决于功率谱 $f(k)$ 和振幅 Δl 。

对于大振幅, Bessel 函数可以用其渐进式来代替:

$$J_0(\zeta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right)$$

这个力的均方根等于:

$$\begin{aligned} \langle \overline{F(x)^2} \rangle &= \frac{8\Phi}{\pi\Delta l} \int_0^\infty \frac{f(k)^2}{k} \cos^2\left(\frac{k\Delta l}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dk \\ &= \frac{4\Phi}{\pi\Delta l} \int_0^\infty \frac{f(k)^2}{k} [1 + \sin(k\Delta l)] dk \end{aligned}$$

对于大 Δl , 积分的第二项可以忽略, 因为它是一个快速振荡函数。由此, 这个力的均方值

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = \frac{4\Phi}{\pi\Delta l} \int_0^\infty \frac{f(k)^2}{k} dk$$

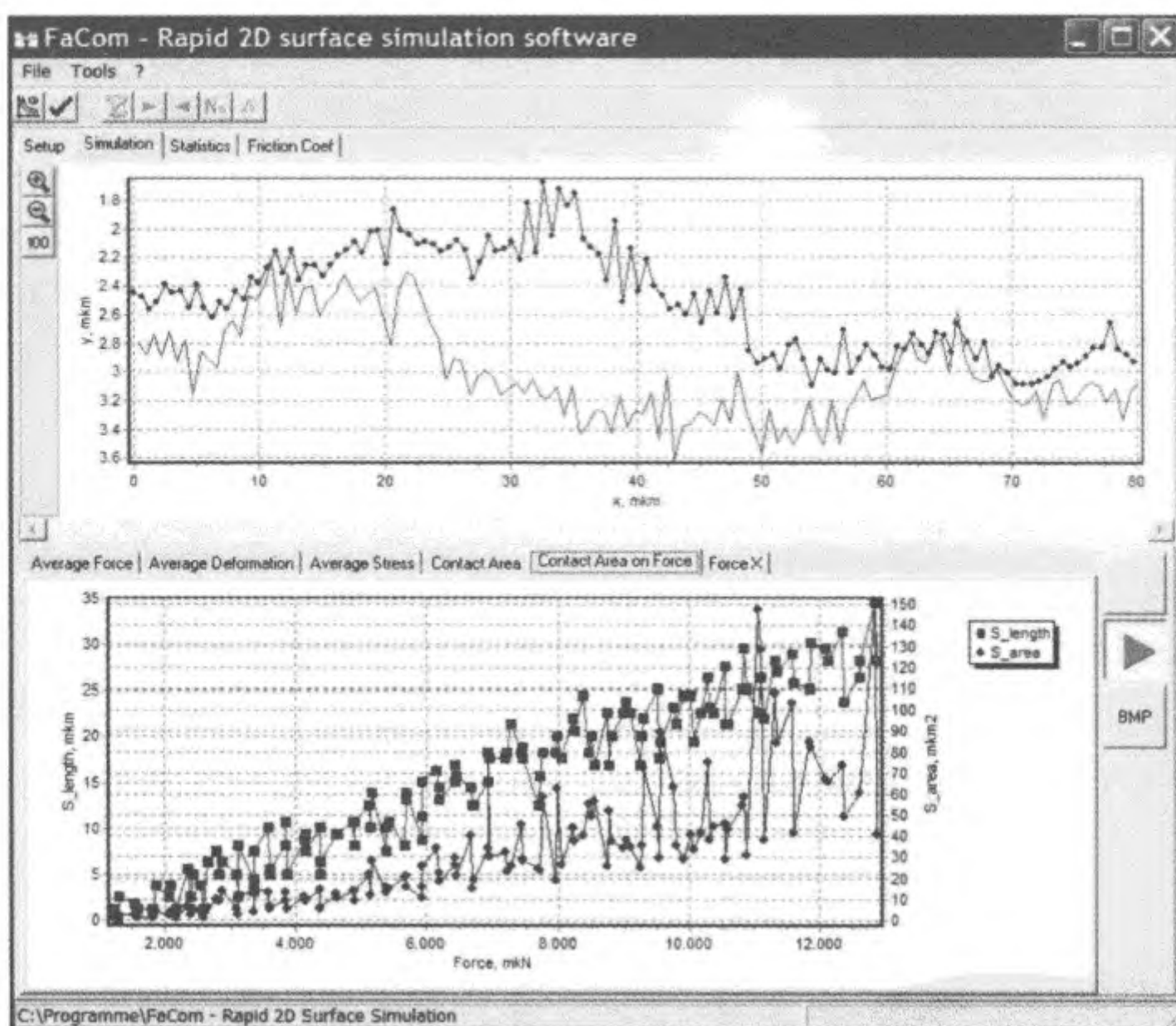
与振幅成反比, 力本身与振幅的平方根成反比, 即

$$F_s \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta l}}$$



第 19 章

摩擦物理学中的数值仿真方法



前面章节中我们研究的接触和摩擦问题都是基于简单的模型系统。这些模型给出了复杂摩擦学系统的总体概述,但大量的摩擦学问题却无法给出解析式,特别是在处理摩擦学系统最优化问题中。这些情况下,研究人员和工程学者必须采用数值方法计算。但要记住的是,数值方法的效率主要取决于前期的分析准备工作。

本章中,我们简要概述一下用于接触力学中的一些最重要的方法,对其

中的一种仿真方法,也就是“降维方法”做了详细的介绍。该方法可以用于仿真宏观摩擦学系统,最重要的是将摩擦力的“多尺度特性”考虑进去。

19.1 概述

1. 多体系统

多体系统的计算机仿真对于当今工业发展来说是必不可少的。随着精确性要求的提高,对于尽可能精确地再现接触和摩擦现象的要求也在不断提高,其中很大一部分研究都集中在寻找使简单接触条件和库仑摩擦定律得以应用的方法上。最主要的兴趣是找到最有效的算法(计算时间和编程时间)。接触通常被看做是单面刚性约束。根据摩擦规律,存在一个最大静摩擦力,而且动摩擦力与滑动速度有关。但是,通常假定动摩擦力是常数,而且等于最大静摩擦力(译者注:实际上动摩擦力略小于最大静摩擦力)。

将摩擦放到多体系统程序中的最简单方法是,用一个摩擦力与速度的连续函数来近似摩擦定律。在处理中,摩擦力是给定的,与速度的关系是已知的。使用的典型的力的形式(见图 19.1)为:

$$F_R = \frac{2}{\pi} \mu F_N \arctan(v/\hat{v}) \quad (19.1)$$

采用这个形式,我们不需要去区分静摩擦和动摩擦。特征速度 \hat{v} 一定要选择,以使得它比系统的特征滑动速度要小。这种情况下,关系式(19.1)同时表达了力在黏连区和滑动区中的行为^①。

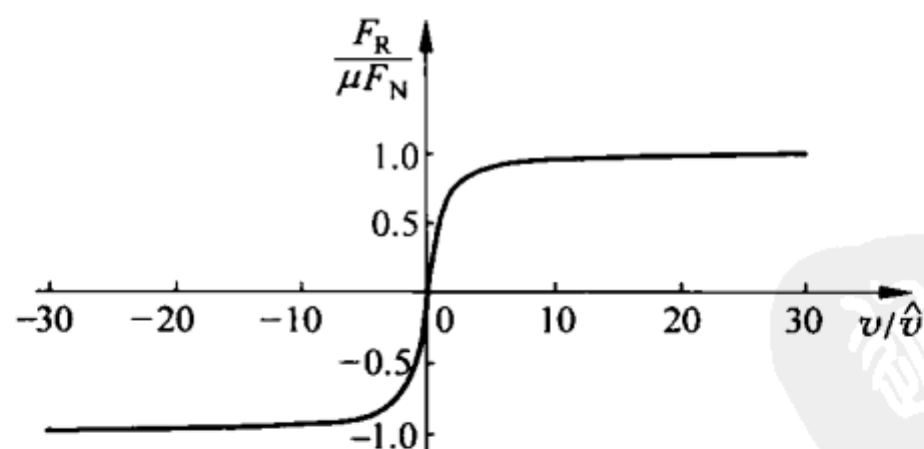


图 19.1 通过一个速度的连续函数来逼近摩擦定律

^① 这种情况下,“黏连”是以一个很低的速度在滑动,摩擦力让自己本身“自动地”等于修正的静摩擦力,介于 $-\mu F_N$ 和 $+\mu F_N$ 之间。对于很多摩擦学应用问题,这个方法符合摩擦力的实际性质。

2. 有限元方法

在很多应用中,压力分布和接触边界的变形很重要。有各种各样的可用的仿真方法来计算弹性和塑性变形,这些方法使我们能够研究黏着接触和摩擦现象。基于离散化连续性方程的程序被广泛地使用,尤其是有限元方法(FEM)和边界元法。

基于 FEM 框架的接触问题解法是在 20 世纪 70 年代发展起来的。今天,商业的 FE 程序使用的是所谓的从节点到面公式,该公式考虑了与另一个表面的单元有关的表面节点。

在很多实际应用(密封,金属成型工艺,渗透试验)中,在接触双方之间会发生大变形、材料的非线性行为和大幅度相对运动等。这些情况下,接触问题要用从面到面的公式来更稳定、更精确地进行仿真(Mortar 法)^①。

滚动接触问题(轮轨,轮胎和地面接触)也可用 FE 方法来研究。任意拉格朗日-欧拉法(ALE)^②是计算这类接触问题的一个有效方法。空间稳态离散化使得接触区域网格的分辨率更高。这在解决稳态滚动的问题中是特别适合的,因为这种情况下的解与时间无关,但是难以将非弹性材料行为考虑进去,因为网格节点并不是绑定的材料上的点。

3D-FE 模型的优点在于:①正确地表达几何特征(尺寸,表面形态,自由度);②能够计算出整个物体中应力和变形。因为网格很好,对于粗糙表面,3D-FE 模型要很长的处理时间。在处理很多参数和最优化时,这是一个特别明显的弱点。因此,有限元方法不适用于计算粗糙表面之间的摩擦力。

3. 边界元法

边界元法特别适用于计算接触,因为只需要表面的离散化。这个方法在接触问题中比较重要,我们将作更多详细的介绍。这里仅讨论一个弹性体和一个刚性平面的法向接触问题。

① M. A. Puso, T. A. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 601-629.

② U. Nackenhorst. The ALE-formulation of bodies in rolling contact: theoretical foundations and finite element approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 4299-4322.

式(5.7)给出了在连续压力分布作用下,弹性体表面上一个点的垂直位移。将研究区域分为 $N \times N$ 单元,假设每个单元上的压力都是常数。一个二次表面单元中的压力 p_{ij} 和一个垂直表面位移 u_{ij} 之间的关系可以解析为^①:

$$u_{ij} = \sum_{\hat{i}=1}^N \sum_{\hat{j}=1}^N K_{ij\hat{i}\hat{j}} p_{\hat{i}\hat{j}} \quad (19.2)$$

式中

$$K_{ij\hat{i}\hat{j}} = \frac{\Delta}{\pi E^*} \left[a \ln \left(\frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{d + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) + b \ln \left(\frac{d + \sqrt{b^2 + d^2}}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \right) \right] \\ + c \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{b + \sqrt{c^2 + b^2}} \right) + d \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + d^2}} \right) \quad (19.3)$$

且

$$\begin{cases} a = i - \hat{i} + \frac{1}{2}, & b = i - \hat{i} - \frac{1}{2} \\ c = j - \hat{j} + \frac{1}{2}, & d = j - \hat{j} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (19.4)$$

Δ 为网格间距。方程(19.2)可以写成矩阵的形式:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{p} \quad (19.5)$$

式中矩阵 \mathbf{A} 为 $N^2 \times N^2$ 维。在接触问题中,接触面积的大小和位置在刚开始是不知道的。因此,接触问题必须通过迭代来求解。在接触区域,表面间分开的距离为零(也就是说在这个区域,弹性表面的位移是已知的)。在接触面以外,压力为零;相反,位移一般不等于零。开始时,先假设表面接触。变量分别为:接触面内为 p_i 和 u_i ,接触面外为 p_a 和 u_a 。其中 u_i 和 $p_a = 0$ 是已知的。根据式(19.5)重新排列后,得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_a \end{Bmatrix} \quad (19.6)$$

最终表达为:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i \quad (19.7)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_a \quad (19.8)$$

① A. E. H. Love. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. (4th edition), Cambridge University Press. 也见: K. L. Johnson. Contact Mechanics(6th printing of the 1st edition), Cambridge University Press, 2001, 54.

式(19.7)中方程组的解在接触区域产生了一个压力 p_i 。有了压力,再使用式(19.8),就可以算出接触面外的位移 u_a 。一般第一个迭代步骤在接触面产生的是一个负压力(拉伸应力),在接触面外产生的是一个负分开距离。现在选择一个新的接触面,使得处于拉伸应力的所有点从接触面移走,有负分开距离的所有点被带入接触面。使用这样的新接触面近似法,重复之前描述的计算,不断地迭代,直到没有拉伸应力存在或没有负分开距离为止(达到一个合理的近似值)。

4. 粒子法

粒子法提供了求解接触和摩擦问题的另一个方法,该方法中离散的粒子是计算的重点。这些粒子不是实际的(物理)物体,而是纯粹的“为了计算的单元”。采用该方法必须选择粒子之间的相互作用力,以便材料的弹性和塑性行为可以正确地描述。因此,既不是求解宏观连续体方程,也不是求解微观分子动力学方程,而是对一个合适的替代系统的微观方程求解。粒子的大小可以进行调整以适合待研究的问题,例如,研究地震时,粒子的尺寸可以是米的数量级。

摩擦力是由过程所决定的,如弹性变形和塑性变形、断裂、粒子的脱落和重组等。这些过程发生在微观接触中。可移动元胞自动机法(MCA)是对微观接触过程成功仿真的一个方法^①。

19.2 接触问题从三维到一维的简化

现在,我们讨论一个特别适合对粗糙表面进行仿真的方法。用这种方法得到的摩擦定律可以用于宏观系统动力学仿真。这里仅研究“典型的摩擦学系统”,即可以用于摩擦定律来描述其特征,特别是摩擦力近似正比于法向力。这意味着真实接触面积远远小于表面接触面积。

对于“典型的摩擦学系统”来说,有很多的性质允许将接触问题进行很大简化,从而进行快速计算,甚至是多尺度系统中也可以这样做。降维方法中这些简化包括:

^① V. L. Popov, S. G. Psakhie. Numerical simulation methods in tribology. Tribology International, 2007, 40(6): 916-923.

- ① 对于运动速度远小于声速的情况^①,变形可看做是准静态的;
- ② 势能以及力-位移关系,是局部性质,仅取决于微观接触的形态,而与物体整体的外形和尺寸无关;
- ③ 相反,动能为“全局性质”,仅取决于物体整体的外形和尺寸,与微接触的形态无关;
- ④ 接触力学中很多重要的性质可以很好地用一维系统来近似,从而可大幅度减小计算时间。

这四个性质在很多宏观摩擦学系统中都能找到,因此,该方法的应用领域非常广泛。但要注意的是,使用这些方法时必须满足上面的条件。下面将详细讨论这些简化假设。

19.3 宏观摩擦学系统中的接触问题

1. 准静态

在多数摩擦学系统中,单元之间的相对运动速度(最大 30 m/s)远远小于声速(在金属中约几千 m/s)。这种情况下,可以将问题看做是准静态的。即使对于非稳态过程,虽然此时整个系统不能再看做是处于稳态的,但对于单个微接触来说,类稳态条件还是满足的。在绝大多数实际应用中,为了计算变形我们都可以采用平衡条件,也就可以使用前面章节中所有静态接触力学的结论。

2. 弹性能作为一个局部性质

如第 7 章我们所看到的,摩擦学系统在典型的工作条件下,接触双方从很多微观接触开始接触,这些微接触的总面积远远小于表面名义接触面积。在特定条件下,这些单个的接触点可以看做是相互独立的。

通过计算单个变形接触面的势能进一步研究其弹性变形。将一个直径为 D 的圆柱压头压入一个物体中(见图 19.2)。

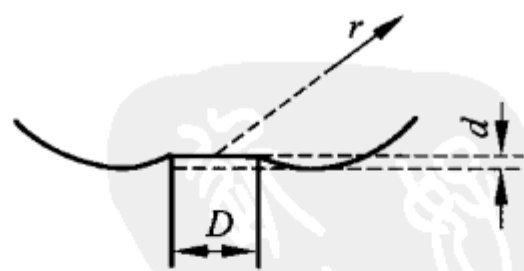


图 19.2 将一个平整的圆柱压头压入一个弹性半空间体(压入深度为 d)

^① 这个条件在多数实际摩擦学接触中都是满足的。

在距离压痕点距离较大的点 r 处,弹性体的位移为:

$$u \simeq \frac{Dd}{r} \quad (19.9)$$

变形估算为 $\epsilon \simeq \frac{du}{dr} \simeq -\frac{Dd}{r^2}$, 能量密度估算为 $E \simeq \frac{1}{2}G\epsilon^2 \simeq \frac{1}{2}G \frac{D^2 d^2}{r^4}$ 。

通过积分得到弹性能为:

$$U \simeq \int G \frac{D^2 d^2}{r^4} \pi r^2 dr = \pi G D^2 d^2 \int \frac{dr}{r^2} \quad (19.10)$$

这个积分在上限是收敛的。因为渐近式(19.9)仅当 $r > D$ 时成立,则下限的数量级一定为 D (下极限为 0 时,该积分发散)。因此,弹性能集中在线性尺寸数量级为 D 的一个体积里,这个结果我们已经在前面章节中所有的估算中用过。换句话说:

弹性能是一个局部量,仅与微接触附近接触面的形态和变形有关。宏观物体的尺寸和形状在这个问题的接触力学中不重要。

如果接触区域之间的距离远大于它们的直径,那么它们可以看做是相互独立的。

3. 动能作为一个全局性质

一个物体的动能在行为上的表现刚好相反。如果一个物体以速度 v_0 (速度远小于声速)与一个直径为 D 的压头相撞(见图 19.3),产生的压入速度为 v_0 ,那么在以速度 v_0 运动的参考系中,速度分布的数量级为:

$$v(r) = \frac{D \dot{d}}{r} = \frac{D v_0}{r} \quad (19.11)$$

在实验系统中,物体的总动能为:

$$\begin{aligned} K &\approx \frac{1}{2} \int \rho \left(v_0 - \frac{v_0 D}{r} \right)^2 dV \approx \frac{1}{2} \int \rho v_0^2 dV - \int \rho v_0^2 \frac{D}{r} dV \\ &\approx \frac{1}{2} m v_0^2 - \int \rho v_0^2 \frac{D}{r} 2\pi r^2 dr \approx \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{D}{R} \right) \end{aligned} \quad (19.12)$$

如果接触面的直径远小于物体的大小,那么忽略一阶项 D/R ,动能等于 $m v_0^2 / 2$ 。

动能是一个“非局部”性质,与接触面形态无关,在一阶近似中,可以认

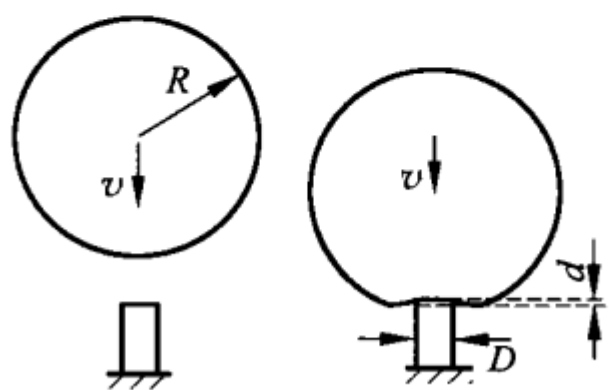


图 19.3 研究物体动能的草图(一个固体弹性体以速度 v_0 与一个刚性圆柱头相撞)

为它等同于将物体作为一个整体,进行“刚性移动”时的动能。

实际上在前面计算球体与墙撞击的时间时已经使用了这个性质。因此得到这个结论:在“典型条件下”,可以将一个宏观系统看做是刚性质点 m 来描述它的惯性。而它的弹性性质完全由它的微接触的刚度来决定。其近似关系如图 19.4 所示。

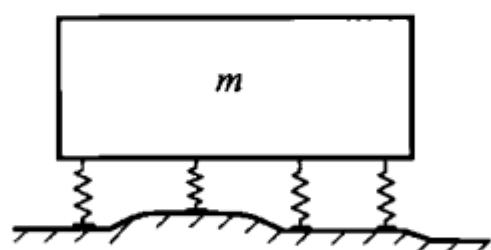


图 19.4 在“典型条件下”,可以用一个刚性质点 m 来正确地描述一个宏观系统的惯性。而它的弹性性质完全由接触的非线性刚度决定

在多数现有的条件下,三维系统的惯性(体积力等)与接触性质完全无关。前者是完全宏观的,而后者是完全微观的。正是这种分离使我们在宏观系统动力学中能够将摩擦力看做是表面力。

要注意的是,这个性质不是“不证自明的”,比如在二维系统中就不成立了。在二维尺度,要用积分 $\int dr/r$ 来代替式(19.10),而该积分在两个极限都是对数发散的。因此,在二维的情况下,弹性接触能既与接触形态有关,也与物体的尺寸和外形有关。同样的结论对于动能也成立。

上述讨论的性质都是三维的,而我们本身也生活在三维世界中,因而可以利用这个优势来帮助我们理解多元接触中的动能与势能的尺度分离。

4. 接触问题的降维

三维物体间的接触还有另外一个重要性质,即它与某种一维问题的接触性质很类似。下面介绍该类比的基本理念:如果一个圆压头压进一个弹性连续体的表面,那么接触刚度与它的直径 D 成正比(见方程(5.11)):

$$c = DE^* \quad (19.13)$$

该性质可以用一维弹性基体重新生成(见图 19.5(a))。为了满足方程(19.13),单位长度的刚度必须选为 E^* 。每个弹簧的刚度必须为:

$$\Delta c = E^* \Delta x \quad (19.14)$$

如果一个半径为 R_1 的“球体”与弹性基体接触(压入深度为 d ,见图 19.5),那么得到的接触半径为:

$$a = \sqrt{2R_1 d} \quad (19.15)$$

法向力等于:

$$F_N(d) = \frac{4\sqrt{2}E^*}{3} \sqrt{R_1 d^3} \quad (19.16)$$

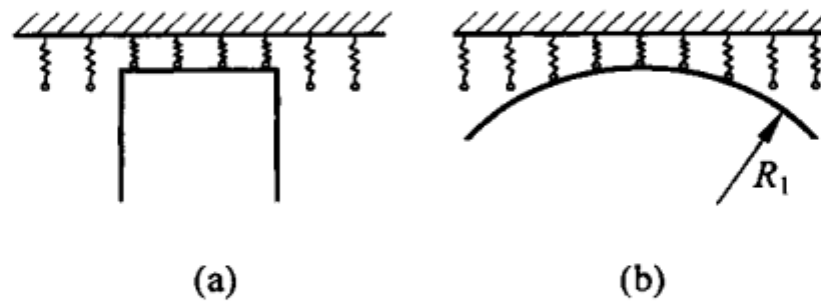


图 19.5 一维弹性基体分别与一个“圆柱”压头和一个“球体”接触

如果选择半径为：

$$R_1 = R/2 \quad (19.17)$$

则方程(19.15)和(19.16)都符合赫兹理论。

一个旋转对称三维刚体和一个弹性连续体之间的接触,可以表示为刚体的一维截面与一个弹性基体的接触,其中该截面的曲率半径为原来的一半,弹性基体的单位长度的刚度为 E^* 。

这个法则对于每个圆柱压头和每个有任意曲率半径的抛物体都是成立的。

因为椭圆和刚性平面之间的接触可以近似为一个球体和一个平面的接触(用高斯半径 $\sqrt{R^{(1)}R^{(2)}}$, 见方程(5.30)), 则也可以用一维系统来表示非旋转对称系统。因此,法向力与接触面积的赫兹关系仍然成立。非圆截面方程(5.13)给出的压头刚度表明,一维方法也适用于方形和三角形截面,其中误差小于 3%。这种情况下,根据这个法则,接触的“一维直径”表示为 $D=(4A/\pi)^{1/2}$ 。

三维接触的切向刚度也与接触直径成正比:

$$c_{\perp} \approx \frac{4G}{2-\nu} \cdot 2a \quad (19.18)$$

因此,切向刚度也可以用一维弹性基体来表示。弹性基体中单个弹簧的切向刚度要根据下式来选择:

$$\Delta c_{\perp} = \frac{4G}{2-\nu} \Delta x \quad (19.19)$$

对于差别这么大的旋转对称接触和非对称接触,力-渗透深度和力-接触面积与尺度是无关的,因此可以得出结论:这种方法对随机的粗糙表面也是成立的。

19.4 多元接触问题的降维方法

为了研究两个有粗糙表面物体的接触,必须建立一个一维轮廓的法则,使得该轮廓在接触力学上等同于三维物体(见图 19.6)。这里使用

Greenwood-Williamson 模型的几个观点。最终证明替代系统的结果和质量比 Greenwood-Williamson 模型本身更好。

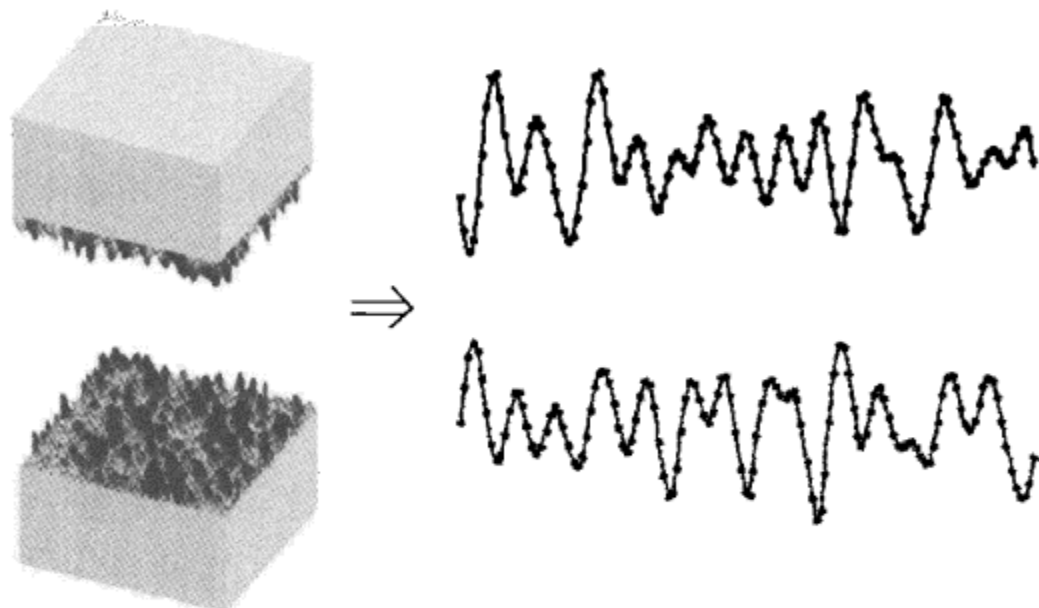


图 19.6 用两个等效的一维“粗糙线”来代替两个三维物体

在 Greenwood-Williamson 模型中,单个接触被认为是相互独立的。这个条件下,只有微凸体的高度分布和曲率半径起作用,所以首先是要产生一个一维系统,该系统具有需要的高度统计学分布和曲率半径。

为了简化,假设(一个三维体的)二维表面的形貌可以明确地用它的功率谱 $C_{2D}(\mathbf{q})$ 来描述,其中功率谱定义为:

$$C_{2D}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^2x \quad (19.20)$$

其中 $h(\mathbf{x})$ 是对高度取平均值的高度分布,从而使得 $\langle h \rangle = 0$; $\langle \cdot \rangle$ 是对全体统计值取平均。另外,假设表面形貌在统计学上是均匀的、各向同性的,在此条件下,功率谱 $C_{2D}(\mathbf{q})$ 仅与波矢量 \mathbf{q} 的大小 q 有关。

同样地,引入一维“表面”的功率谱 $C_{1D}(q)$ ——“粗糙线”:

$$C_{1D}(q) = \frac{1}{2\pi} \int \langle h(x)h(0) \rangle e^{-iqx} dx \quad (19.21)$$

在二维情况下,有了功率谱,表面形貌计算为:

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{q}} B_{2D}(\mathbf{q}) \exp[i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \phi(\mathbf{q}))] \quad (19.22)$$

其中

$$B_{2D}(\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{L} \sqrt{C_{2D}(\mathbf{q})} = \bar{B}_{2D}(-\mathbf{q}) \quad (19.23)$$

相位 $\phi(\mathbf{q}) = -\phi(-\mathbf{q})$, 相位随机地分布在区间 $[0, 2\pi)$ 。

一维情况下,有:

$$h(x) = \sum_q B_{1D}(q) \exp[i(qx + \phi(q))] \quad (19.24)$$

其中

$$B_{1D}(q) = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} C_{1D}(q) = \bar{B}_{1D}(-q) \quad (19.25)$$

快速数值计算是基于快速傅里叶变换(FFT),而不是对式(19.22)或(19.24)进行直接求和计算。

理论和数值分析得出了下面从二维功率谱到一维功率谱的变换:

为了产生与三维系统有相同接触性质的一维系统,一维功率谱必须遵守以下的法则:

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q) \quad (19.26)$$

对这个法则进行讨论:二维和一维情况下,高度的均方根分别为:

$$\langle h^2 \rangle_{2D} = 2\pi \int_0^\infty q C_{2D}(q) dq \quad (19.27)$$

$$\langle h^2 \rangle_{1D} = 2 \int_0^\infty C_{1D}(q) dq \quad (19.28)$$

当 $C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q)$ 时,它们相等。相应的曲率的均方根 $\langle \kappa^2 \rangle$ 在这种情况下也是相等的^①。论文^②表明,采用这种方式得到的曲线,关于接触力学的性质是等效于三维体的。特别是,功率谱为方程(19.26)的一维“表面”的高度分布与二维表面的高度分布是一致的,一维系统尖端的曲率半径是三维系统的一半,该比值正是接触性质所需要的。因此得到的力-位移关系和力-接触面积关系是正确的。

现在研究一个表面是随机生成的三维体的接触例子。生成的表面有 64×64 个点。法向力与实际接触面积的相互关系用边界元法来计算(见图 19.7)。根据式(19.26)计算得到的一维功率谱,生成一维的“粗糙线”。这条粗糙线被压成一条刚性线,它决定了那些长为 l_i 的连接区域。由此,接触面积定义为:

$$A_{c,1D} = \frac{\pi}{4} \sum_j l_j^2 \quad (19.29)$$

在 450 个随机表面内对所有结果取平均。对于三维系统和一维系统,整个表面与法向力关系的比较见图 19.8。可以看出,对于粗糙表面,一维和三维结果很好地吻合。

① 对于二维的情况,定义 $\kappa^2 = \kappa^{(1)} \kappa^{(2)}$, 其中 $\kappa^{(1)}$ 和 $\kappa^{(2)}$ 是表面的主曲率半径。

② T. Geike, V. L. Popov. Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension. Phys. Rev. E., 2007, 76: 036710.

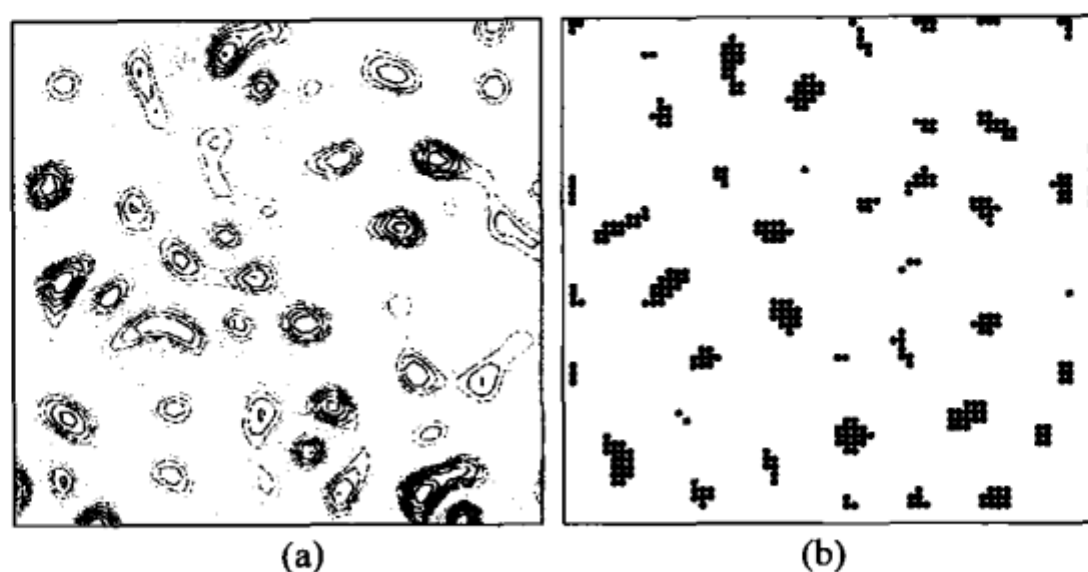


图 19.7 二维表面形貌(图(a))和法向力作用下产生的微接触(图(b))
(用边界元法数值计算的结果)

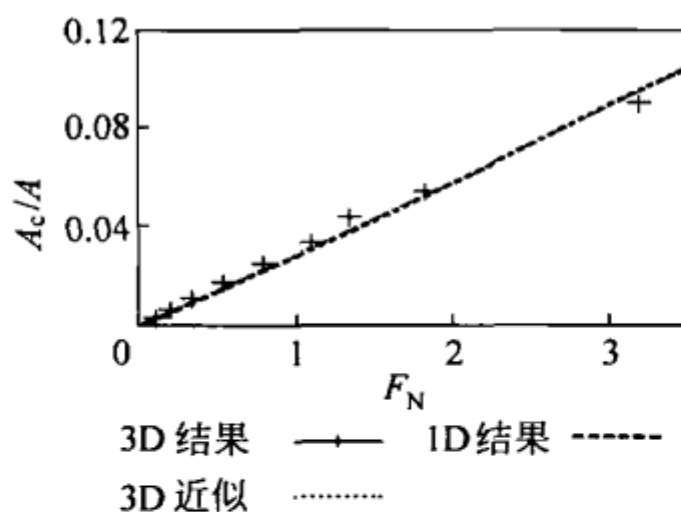


图 19.8 相对接触面积与法向力 F 的关系图(A_c 为实际接触面积, A 为表面接触面积)。根据三维结果(交叉点基于 450 个表面, 细虚线是平均值的线性近似)和一维结果(粗点线)的比较发现, 一维结果和三维结果的线性近似靠得非常近, 很难区分

由此可得:

对于旋转对称和非旋转对称的三维刚性体, 以及弹性连续体的随机粗糙表面来说, 单个接触可以用一个合适的一维线性轮廓来表示, 该轮廓弹性基体的单位长度刚度等于 E^* 。力-位移、力-接触面积和力-接触长度关系在三维和一维中是一致的。

要提到的是, 弹性基体很早就被很多学者研究, 但那时是作为“万不得已的手段”来使用。这个模型的成功是基于上述三维接触和弹性基体接触的类比。

19.5 降维和黏弹性质

对于橡胶这样的黏弹体, 当压入速度和滑动速度小于最小声速(对应于最小的弹性模量)时, 接触可以看做是准静态的。如果满足这个条件, 并以

频率 ω 激励高弹体的一个面,那么力和位移之间存在一个线性关系,它们的比值即刚度,而刚度与接触半径成正比。因此,这个系统也可以用一个一维系统来表示,其中必须要根据式(19.14)来选择单个弹簧的刚度。橡胶可以看做是不可压缩介质,则有 $\nu=1/2$ 及

$$\Delta c \approx E^*(\omega) \Delta x = \frac{E(\omega)}{1-\nu^2} \Delta x = \frac{2G(\omega)}{1-\nu} \Delta x = 4G(\omega) \Delta x \quad (19.30)$$

对于橡胶,弹性基体的单个“弹簧”的刚度是剪切模量与网格间距的乘积的4倍。

在一维模型中,应力-应变关系式(15.2)必须用下式来代替:

$$\tilde{F}_i(t) = 4\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\delta}(t') dt' \quad (19.31)$$

19.6 降维模型中应力的表达

只要物体发生弹性变形或黏弹性变形,我们就不必关注接触面上产生的应力信息。但是,如果物体发生塑性变形,或由于应力峰值而出现磨损,那么仿真时就需要接触中产生的应力信息。在一维模型中,只有弹簧力是直接定义的,而应力不是。下面将对一维模型中的应力进行定义:此应力与弹性变形情况下的赫兹应力分布一致。

一根弹簧中的力为:

$$\tilde{F}_i = \Delta x E^* \delta_i = \Delta x E^* \left(d - \frac{x_i^2}{2R_1} \right) \quad (19.32)$$

式中 δ_i 是弹簧 i 的位移, Δx 是网格间距。应力可以定义为:

$$\sigma_i = \frac{\tilde{F}_i}{b \sqrt{\delta_i R_1}} \quad (19.33)$$

式中 b 是待定常数。应力与曲率半径有关,因此是一个非局部量^①。由式(19.33)、(19.32)和(19.16),我们得到:

$$\sigma_i = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{F_N}{a^2} \frac{\Delta x}{b} \sqrt{1 - \frac{x_i^2}{a^2}} \quad (19.34)$$

对于赫兹球体接触,这个应力分布为:

① 下面的讨论可以作为这个应力形式引用的依据:单个接触的接触半径等于 $a = \sqrt{2\delta R}$,其中 δ 是渗透深度。平均应力近似为 $\sigma \propto \frac{F_N}{a^2} \propto \frac{F_N/a}{a} \propto \frac{\langle \tilde{F}_i \rangle}{\sqrt{R\delta}}$, 其中 $\langle \tilde{F}_i \rangle$ 是接触面的平均弹簧力。这正是式(19.33)的形式。使用与坐标相关的渗透深度 δ_i 来产生赫兹应力分布,这可以从经验中得到。

$$\sigma = \frac{3F_N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (19.35)$$

当常数 b 等于如下数值时,这两个应力分布一致:

$$b = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \Delta x \quad (19.36)$$

因此,应力可以由局部弹簧力 \tilde{F}_i 和局部变形 δ_i 来计算:

$$\sigma_i = \frac{\tilde{F}_i \sqrt{2}}{\pi \Delta x \sqrt{\delta_i R_1}} \quad (19.37)$$

对屈服准则,根据方程(19.37),应该使用非局部量 σ_i ,而不是局部力 \tilde{F}_i 。

19.7 降维模型框架中的计算步骤

降维计算过程主要包括以下步骤:

(1) 首先测量摩擦表面(例如,使用白光干涉显微镜或原子力显微镜进行测量)。

(2) 使用快速傅里叶变换方法计算表面的二维功率谱。

(3) 根据式(19.26)的法则将其转换为一维功率谱。

(4) 由这个功率谱来产生一维“粗糙线”,该线具有与原来三维系统相同的接触性质。

(5) 根据式(19.14)选择弹性性质。

(6) 将物体相互挤压并沿切向作相对移动,平均切向力与平均法向力的比值就是摩擦系数。

(7) 除了摩擦系数外,计算接触中的实际接触总面积、接触总长度(简单地求 $L = \sum_j l_j$) 以及它们的分布、平均应力和应力分布等。

19.8 降维方法框架中的黏着、润滑、空穴和塑性变形

这个降维方法可以进行扩展:在润滑接触中,将黏着、润滑和空穴考虑进去。细节见本书特别推荐的扩展阅读文献。

习题

习题 1 对于一个给定表面形貌的刚性表面和一个光滑黏弹性体之间接触,给出它们之间摩擦系数的计算步骤,其中黏弹性体可以采用一根弹簧和一个与速度成正比的阻尼并联组成的流变学模型。

解答:

(1) 测量刚性表面的轮廓 $h(x, y)$ (见图 19.9), 并作为输入数据保存为二维数组。

(2) 采用 FFT, 计算表面的傅里叶变换 $B(q_x, q_y)$ (见图 19.10), 然后计算功率谱: $C_{2D}(q_x, q_y) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 |B_{2D}(q_x, q_y)|^2$ 。

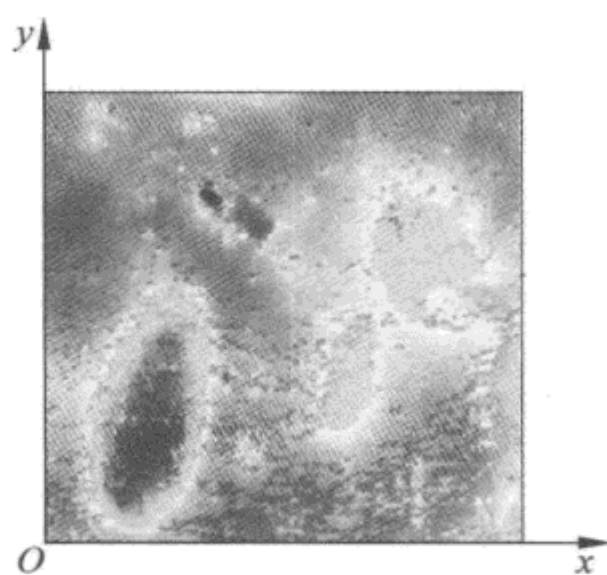


图 19.9 表面形貌测量的例子

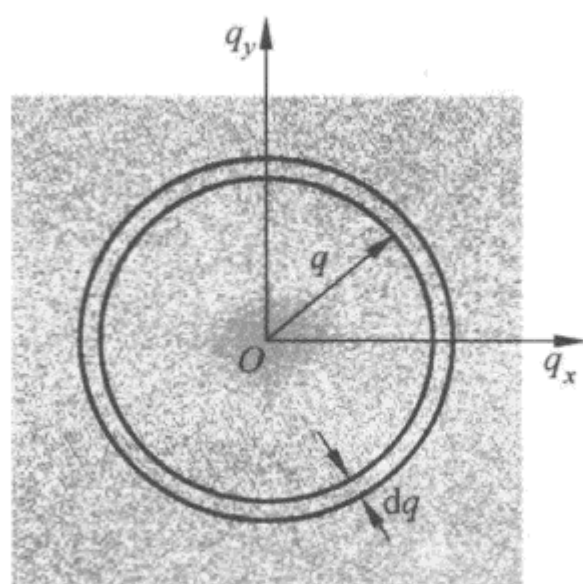


图 19.10 图 19.9 所示表面形貌的功率谱

(3) 在半径为 q 和相同的离散区间 dq 的一个循环中取平均值 (见图 19.10), 得到与角度无关的功率谱 $C_{2D}(q)$ 。

(4) 根据式(19.26), 计算一个等效的一维功率谱: $C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q)$ 。

(5) 有了这个功率谱, 用方程(19.24)和(19.25), 得到一个一维的轮廓。在下面的计算中这个轮廓就代表了原先的二维表面。

(6) 为了证明正确性, 计算初始二维表面的均方根 Δh_{2D} 和产生的一维表面的均方根 Δh_{1D} 。它们在多次计算中的平均值必须一致。

(7) 进行动力学仿真。定义刚性粗糙线的零水平为 z 轴的零点 (见图 19.11)。在一开始, 采用间距为 Δx 的网格将这条刚性线离散。在离散点它的轮廓为 h_i 。将黏弹性材料的未受干扰的水平定义为 z_0 。用相同的

网格间距 Δx 来离散代表黏弹性材料的这条线。

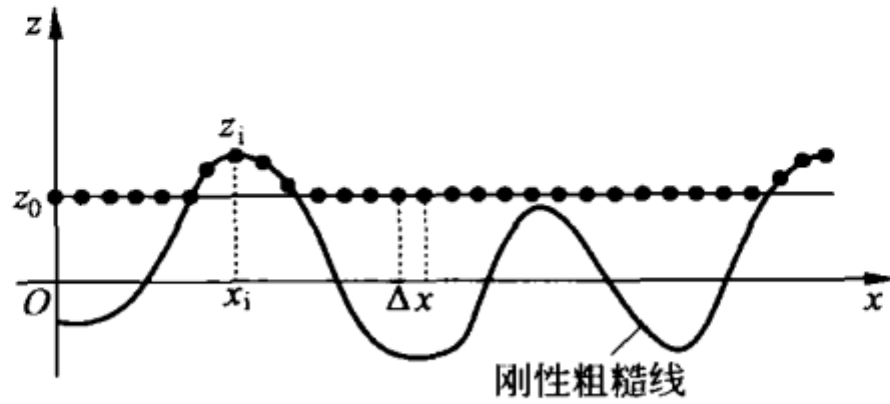


图 19.11 对于一个黏弹性材料和一个粗糙刚性表面之间的接触, 获得的一维替代模型

(8) 粗糙轮廓以速度 v 向左移动: $h(x, t) = h(x + vt)$ 。在离散点的值为: $h_i(t_n) = h(i\Delta x + vn\Delta t)$, 其中 n 是时间分割的数目。

(9) 粗糙表面和黏弹性材料之间的相互作用定义为: ①黏弹性材料不能穿过刚性表面; ②如果黏弹性材料的一个点移动了距离 Δz_i , 并且它的速度等于 $\Delta \dot{z}_i$, 那么根据式(19.30), 作用在这个点的力为:

$$f_i = 4G\Delta x\Delta z_i + 4\eta\Delta x\Delta \dot{z}_i$$

其中 G 是(三维)黏弹性材料的剪切模量, η 为它的黏度; ③这个力不可以是负的(没有黏着)。

(10) 通过将黏弹性材料放在刚性线“附近”来“初始化”系统: 就是从零点到大约 $3\Delta h_{1D}$ 这段距离。因此满足条件 $h_i \geq z_0$ 的物体上的这些点与粗糙表面发生接触。最初设置作用在系统上的力等于 $f_i = 4G(h_i - z_0)$ 。作用在黏弹性材料上的总力等于:

$$F = \sum_{\text{接触的点}} f_i = 4G\Delta x \sum_{\text{接触的点}} (h_i - z_0)$$

沿垂直方向施加法向力 $-F_N$ 。

(11) 选择时间分割的步数: 在时间 Δt 里, 上面的物体总是离散位移 Δx , 则时间分割的步数为:

$$\Delta t = \Delta x / v$$

(12) 时间环: 在下一个阶段(移动 Δx), 再检查是否满足条件 $h_i(t_{n+1}) \geq z_i$, 这种方式下计算出新的接触点。作用在这些点的力为:

$$f_i(t_{n+1}) = 4G\Delta x(h_i(t_{n+1}) - z_0) + 4\eta\Delta x(h_i(t_{n+1}) - z_i(t_n)) / \Delta t$$

对于在上一步中接触的点, 最初假设它们仍然与表面接触, 因此, 它们的坐标从 $z_i(t_n) = h_i(t_n)$ 变为 $z_i(t_{n+1}) = h_i(t_{n+1})$ 。用相同的公式计算这个

力。如果这个力是正的,那么这些点仍然处于接触。如果是负的,那这些点不再接触,作用在它们上面的力变为零。

对于那些没有处于接触的点,用下面的条件来计算它们的新位置:

$$G \cdot (z_i(t_n) - z_0) + \eta \frac{z_i(t_{n+1}) - z_i(t_n)}{\Delta t} = 0$$

由此可得:

$$z_i(t_{n+1}) = z_i(t_n) - \frac{G}{\eta} \cdot \Delta t (z_i(t_n) - z_0)$$

因此,作用在材料上的总力等于:

$$F = \sum_i f_i(t_{n+1}) = \sum_i 4G\Delta x (h_i(t_{n+1}) - z_0) + 4\eta\Delta x (h_i(t_{n+1}) - z_i(t_n))/\Delta t$$

这是所有处于接触的点的总和。

因为法向力应该保持不变,则上表面 z_0 要变化以使得总垂直力等于 F_N 。为了达到这点,物体要移动 Δz ,产生这个运动的力为:

$$\Delta F = -\Delta z \sum_i (4G\Delta x + 4\eta\Delta x/\Delta t) = -\Delta z N(4G\Delta x + 4\eta\Delta x/\Delta t)$$

这里, N 为接触点的数目。同上一步中计算得到的力一样,它必须刚好产生力 F_N :

$$-\Delta z N(4G\Delta x + 4\eta\Delta x/\Delta t) + F = F_N$$

由此得到:

$$\Delta z = \frac{F - F_N}{N(4G\Delta x + 4\eta\Delta x/\Delta t)}, \quad z_0(t_{n+1}) = z_0(t_n) + \Delta z$$

(13) 为了计算切向力,将作用在点 i 上的法向力乘以表面倾斜角的正切值:

$$f_{x,i} = f_i \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}$$

再对所有接触点求和:

$$F_x = \sum_{\text{接触的点}} f_i \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}$$

(14) 比值 F_x/F_N 为摩擦系数的瞬时值。对总时间求平均,得到平均摩擦系数。

第 20 章

地震与摩擦



地壳板块动力学也可以看做是摩擦学的一部分。地壳是由地壳板块构成的,由于地幔中的对流,板块很慢地相对移动。在数百万年的时间范围内,这些运动决定了地球表面的结构。在小时间范围内,它们是地震产生的原因。摩擦模型可用于描述单个断层的动力学,也可以将地壳板块描述为颗粒介质。地震力学的模型是基于这样的基本观察:地震不会由于一个在地壳板块中突然形成并传播的新裂缝而发生,而是由一个沿已有断层的突然滑动而发生。除了其他的证据之外,下面这个事实也确认了这点:由地震产生的应力降低(几个 MPa)远小于地壳岩石的强度。因此,相比于断裂

力学,地震更是一个摩擦物理学现象。从 Brace 和 Byerlee 的研究^①开始到最近,地震都被理解为一种黏滑失稳^②。

20.1 概述

由于地壳板块的缓慢移动,应力在断层的摩擦区域不断积累,当超过某个临界值时,就导致了快速、忽动忽停的运动,我们把这些运动视为地震。相似的失稳甚至也发生在最简单的摩擦学实验系统中,例如一个被一根软弹簧缓慢拉动的物体,地震的一些普遍性质已经可以用这样一个简单的模型来说明。在黏滑失稳的最简单模型(第 12 章习题 1)中,假设当接触区剪切应力与法向应力的比值大于静摩擦系数 μ_s 时,开始滑动。如果物体开始运动,那么摩擦系数会降低到一个较小的值 μ_k ,这将导致一个黏滑类型的摩擦失稳的发生。在第 12 章(习题 1)中,我们看到在黏滑阶段位移 u 为:

$$u = 2 \frac{F_s - F_k}{c} \quad (20.1)$$

式中, c 是弹簧刚度; $F_s = \mu_s F_N$ 是静摩擦力; $F_k = \mu_k F_N$ 为动摩擦力; F_N 为法向力。在滑动阶段能量的损耗等于:

$$E = F_k u = 2 \frac{F_k (F_s - F_k)}{c} \quad (20.2)$$

在实际断层中没有单个的质量和离散的弹簧单元。相反,应该求解考虑了摩擦学定律的弹性理论力学方程。这里只做一个简单的估算。假设接触面的线性尺寸为 L ,它小于地壳板块脆性部分的厚度 D (schizosphere)^③。在这个接触面上一个相关的运动导致体积为 $L \times L \times L$ 的显著的位移和变形的发生。这个立方体的刚度的数量级为 $c \approx GL$ 。由方程(20.1)和(20.2),估算出在一个滑动事件中的位移和能量损耗:

$$u \approx 2F_N \frac{\mu_s - \mu_k}{GL} \approx \frac{2\sigma_N L}{G} (\mu_s - \mu_k) \quad (20.3)$$

$$E \approx \mu_k F_N u \approx 2\sigma_N^2 \frac{\mu_k (\mu_s - \mu_k)}{G} L^3 \quad (20.4)$$

① W. F. Brace, J. D. Byerlee, Stick slip as a mechanism for earthquakes. Science, 1966, 153: 990-992.

② 这仅对于地震从地壳板块的上层开始发生成立。

③ 我们称这样的地震为“弱地震”。

式中 $\sigma_N = F_N/L^2$ 为法向应力。

对于强地震(滑动长度大于 schizosphere 厚度 D), 在长度为 L 的断裂区的刚度可以估算为 $c \approx GD$ 。在滑动事件中估算的位移是相等的, 损耗的能量为:

$$E \approx \sigma_N^2 \frac{\mu_k(\mu_s - \mu_k)}{G} DL^2 \quad (20.5)$$

因此, 损耗能在弱地震中与滑动长度的立方成正比, 在强地震中与滑动长度的平方成正比。

这个模型中地震持续的时间可以估算为:

$$T \approx \frac{4L}{c_{\text{sound}}} \quad (20.6)$$

式中 c_{sound} 为地壳板块中剪切波的速度。对于 $L \approx 100$ km 的大地震, 时间约为 1 min。

20.2 地震的量化

地震矩 M 是用来度量地震强度的量:

$$M = GAu \quad (20.7)$$

式中 G 为岩石的剪切模量(典型量约为 30 GPa), A 为断口面积, u 为沿断裂表面的平均位移。地震矩是确定地震震级的基础。地震震级 M_w 定义为:

$$M_w = \frac{2}{3}(\lg M - 9.1) \quad (20.8)$$

在上述简单摩擦模型中, 估算出地震矩(地震尺度定律)为:

$$M \approx 2\sigma_N(\mu_s - \mu_k)L^3, \quad \text{对弱地震}(L < D) \quad (20.9)$$

$$M \approx 2\sigma_N(\mu_s - \mu_k)DL^2, \quad \text{对强地震}(L > D) \quad (20.10)$$

因此, 地震矩与断层中的法向应力成正比, 在弱地震中与滑动带的立方成正比, 强地震中与滑动带的平方成正比。

我们考虑两个弹性体的摩擦接触, 其中表观接触面积为 \tilde{A} 。这两个物体沿切向相对移动了长度 \tilde{L} (这个长度应该远大于失稳事件中的滑动长度 u , 即对应式(20.3)的位移)。如果每次地震中滑动带的特征长度都是 L , 那么接触面中滑动带的数目为 \tilde{A}/L^2 。由此, 数目为

$$N \approx \frac{\tilde{A}}{L^2} \frac{\tilde{L}}{u} \approx \frac{G\tilde{A}\tilde{L}}{2\sigma_N(\mu_s - \mu_k)L^3} \quad (20.11)$$

的地震在整个长度 \tilde{L} 内都会发生。因此,对于给定滑动长度的数量级,地震的频率与滑动长度的立方成正比,或者根据式(20.9),与地震矩成反比:

$$N \propto M^{-1} \quad (20.12)$$

由于在现实中系统没有特征长度,我们可以假设:不同长度 L 的位移以相同的概率发生。这种情况下,式(20.12)对地震的分布也是成立的。用符号 $\phi(M)$ 表示出现地震的概率密度,则我们可以将估算式(20.12)写成这样的形式:

$$N \propto \phi(M)M \propto M^{-1} \quad (20.13)$$

由此得到:

$$\phi(M) \propto M^{-2} \quad (20.14)$$

地震矩大于 M 的地震发生的概率 $\Phi(M)$ 等于:

$$\Phi(M) = \int_M^{\infty} \phi(M) dM \propto \int_M^{\infty} M^{-2} dM = M^{-1} \quad (20.15)$$

这个定律由 Gutenberg 和 Richter 在经验研究的基础上于 1954 年提出,称为 Gutenberg-Richter 定律^①。

这个 Gutenberg-Richter 定律既适用于弱地震,也适用于强地震。图 20.1 用加利福尼亚 1984—2000 年的地震数据说明了 Gutenberg-Richter 定律。

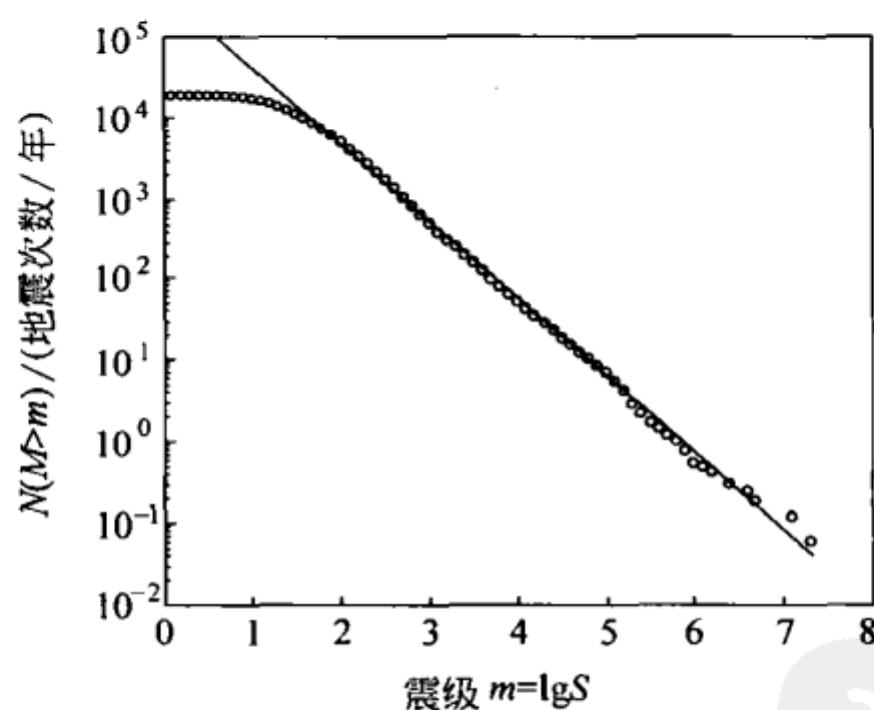


图 20.1 每年震级大于 m 的地震次数 $N(M > m)$,圆圈)。这条直线代表了 Gutenberg-Richter 定律, $\lg N(M > m) \propto -bm$,其中 $b=0.95$ (数据来源于加利福尼亚 1984—2000 年的地震记录,335 076 次地震,约每天 150 次。资料来源: P. Bak et. al. Phys. Rev. Lett. 2002,88(17): 178501)

^① B. Gutenberg, C. F. Richter. Seismicity of the Earth and Associated Phenomena (2nd ed.). N. J.: Princeton University Press, 1954, 17-19 ("Frequency and Energy of Earthquakes").

20.3 岩石的摩擦定律

在式(20.1)的估算中假设的摩擦定律(见图 12.11)过于简化了。在 Brace 和 Byerlee 的研究之后,关于岩石的摩擦定律被广泛研究,导致了干摩擦“标准模型”的重大变化。特别是,“静摩擦”和“动摩擦”之间的区别被证明是相对的,而且可以用速率相关和状态相关的摩擦的观点来代替^①。例如在描述地震成因、地震耦合、前期滑动和后期滑动以及对于高频应力振荡的低灵敏度(如地球潮汐)等方面,这个广义摩擦定律的新观点被证明是非常成功的。因此下面将集中讨论岩石的摩擦定律。

库仑(Coulomb)已经知道,静摩擦系数随着时间而缓慢增大,并且动摩擦系数与速度有关(库仑定律中,摩擦系数与速度无关)。Dieterich^②的实验研究表明,这些效应之间存在一个相近的关系。他的研究被 Ruina 的理论^③概括为与速率相关和状态相关的摩擦定律。在 Dieterich-Ruina 摩擦定律中,摩擦系数与瞬时速度 v 和状态变量 θ 有关:

$$\mu = \mu_0 - a \ln\left(\frac{v^*}{|v|} + 1\right) + b \ln\left(\frac{v^* \theta}{D_c} + 1\right) \quad (20.16)$$

其中对状态变量,下面的动力方程是成立的:

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|v| \theta}{D_c}\right) \quad (20.17)$$

方程(20.16)中的常数 a 和 b 都是正的,数量级从 10^{-2} 到 10^{-3} , D_c 在实验条件下的数量级为 $10 \mu\text{m}$,对于更大的系统,它的比例因子还不清楚;典型的 v^* 的值约为 0.2 m/s 。这个摩擦定律证明是普遍适用的,不仅可以应用于岩石,也可以用于各种性质的材料,如聚合物、玻璃、纸、木材和一些金属等。

在静态情况下, $\theta = t$ 是成立的。因此,状态变量 θ 可以解释为微接触从开始形成的运动起的平均年龄。当运动速度为恒定的 v ,并且初始条件为 $\theta(0) = \theta_0$ 时,方程(20.17)的解为:

① 在 12.6 节研究由摩擦引起的振动中,已经讨论过一个与状态相关的摩擦的简单模型。

② J. H. Dieterich. Modelling of rock friction: 1. Experimental results and constitutive equations. J. Geophys. Res., 1979, 84: 2161-2168.

③ A. I. Ruina. Slip instability and state variable friction laws. J. Geophys. Res., 1983, 88: 10359-10370.

$$\theta(t) = \frac{D_c}{|v|} + \left(\theta_0 - \frac{D_c}{|v|} \right) \exp\left(-\frac{|v|t}{D_c}\right) \quad (20.18)$$

在滑动长度 D_c , 状态变量 θ 松弛到新的平衡值。由此, D_c 值可以理解为临界滑动长度, 沿着该长度所有存在的微接触都被破坏, 被新的微接触代替。在这个转变过程之后, $\theta(\infty) = \frac{D_c}{v}$ 是成立的, 这与状态变量 θ 作为一个年龄变量的解释也是一致的, 这种情况下, θ 的稳态值等于微接触的平均接触时间。

对于稳态滑动, 摩擦系数为:

$$\mu = \mu_0 - (a - b) \ln\left(\frac{v^*}{|v|} + 1\right) \quad (20.19)$$

对于较小的速度, $|v| \ll v^*$, 摩擦定律表达式(20.16)可以写成:

$$\mu \approx \mu_0 - a \ln\left(\frac{v^*}{|v|}\right) + b \ln\left(\frac{v^* \theta}{D_c}\right) \quad (20.20)$$

我们将快速研究一下它的一些最重要的性质。Dieterich-Ruina 摩擦定律不仅很好地描述了稳态摩擦过程, 而且对非稳态转变过程也进行了很好的描述。我们考虑滑动速度为 v_1 的一个摩擦过程。根据式(20.19), 稳态摩擦系数等于:

$$\mu^{(1)} \approx \mu_0 + (a - b) \ln\left(\frac{v_1}{v^*}\right) \quad (20.21)$$

如果滑动速度从 v_1 迅速变到 v_2 , 那么在式(20.20)中只有第二项在瞬时发生了变化, 摩擦系数增加了 $\Delta\mu_1 = a \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$, 此时摩擦系数为:

$$\mu^{(2)} = \mu_0 + a \ln\left(\frac{v_2}{v^*}\right) - b \ln\left(\frac{v_1}{v^*}\right) \quad (20.22)$$

发生转变后, 它的值为:

$$\mu^{(3)} = \mu_0 + (a - b) \ln\left(\frac{v_2}{v^*}\right) \quad (20.23)$$

因此, 它变化了 $\Delta\mu_2 = -b \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ 。这个行为的说明见图 20.2, 实验数据来源于 C. Marone^①。对于图 20.2 所示的系统, $v_2/v_1 = 10$, $\Delta\mu_1 \approx 0.01$, $\Delta\mu_2 \approx -0.014$ 。常数 a 和 b 分别为 $a \approx 0.004$, $b \approx 0.006$ 。

① C. Marone. Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 1998, 26: 643-696.

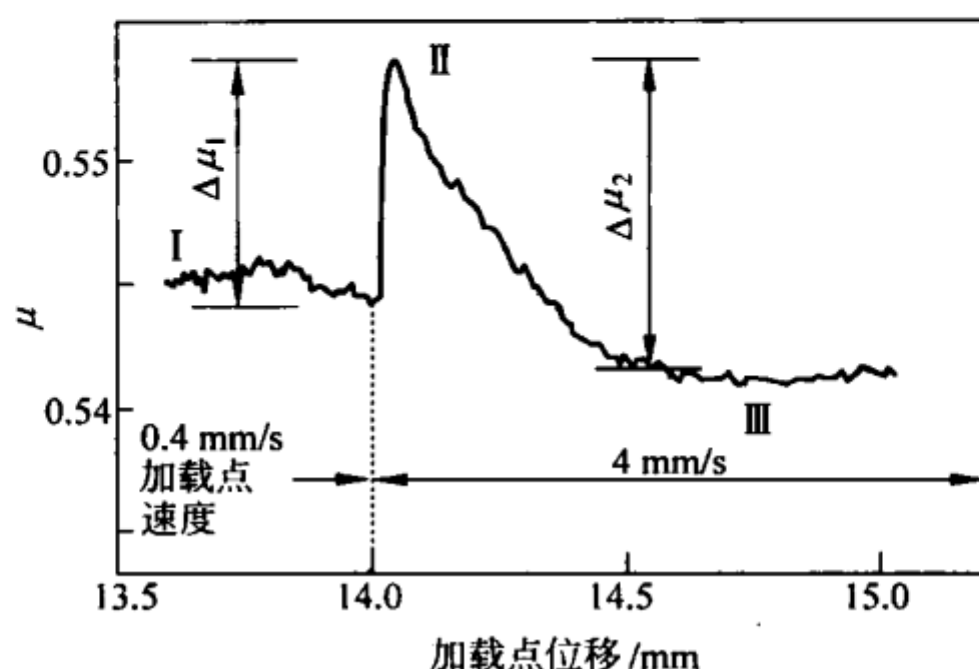


图 20.2 在速度突然变化时,摩擦系数的改变(刚开始摩擦力迅速增大,由 I 变到 II,随后松弛到一个新的稳态值 III)①

到现在为止,我们讨论了法向应力为恒定值的摩擦定律。我们很容易看出,这个模型的公式并不完整。通过增大法向应力,新的微凸体开始接触;对这些新接触点,“接触时间”在此时开始了。因此,即使没有切向运动,法向应力的突然增大会导致接触的更新和平均接触时间的减小。因为粗糙表面之间的真实接触面积与法向力成正比, $A \propto \sigma_N$, 因此在一阶近似中,法向应力的变化 $d\sigma_N$ 会导致接触面积的变化, $dA \propto d\sigma_N$ 。如果我们继续用平均接触时间来说明状态变量,那么根据, $d\theta/\theta = -dA/A = -d\sigma_N/\sigma_N$, 平均接触时间也会随着变化(因为新产生的接触表面的年龄为零)。因此对于 θ , 动力方程(20.17)一定要修正,也就是要增加 $-\frac{\theta}{\sigma_N} \dot{\sigma}_N$ 项。这个形式的修正对于 Linker 和 Dieterich② 的实验数据是成立的,但是多了一个现象系数 ζ , 即

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|v|}{D_c} \right) - \zeta \frac{\theta}{\sigma_N} \dot{\sigma}_N \quad (20.24)$$

20.4 在速率相关和状态相关摩擦下滑动的稳定性

我们再考虑图 12.1 所示的模型,该模型用下面的运动方程来描述:

$$m \ddot{x} + F(\dot{x}, \theta) + cx = cv_0 t \quad (20.25)$$

① C. Marone. Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. Annu. Rev. Earth Planet. Sci., 1998, 26: 643-696.

② M. F. Linker, J. H. Dieterich. Effects of variable normal stress on rock friction; observations and constitutive equations. J. Geophys. Res., 1992, 97: 4923-4940.

其中摩擦力 $F(\dot{x}, \theta) = F_N \mu(\dot{x}, \theta)$, 现在由方程(20.20)和(20.17)定义。稳态解为:

$$x = v_0 t - \frac{F(v_0, \theta)}{c}, \quad \theta_0 = \frac{D_c}{v_0} \quad (20.26)$$

通过考虑稳态解有一个微扰动:

$$x = x_0 + v_0 t + \delta x, \quad \theta = \theta_0 + \delta \theta \quad (20.27)$$

我们得到线性化方程:

$$m \delta \ddot{x} + F_{,v} \delta \dot{x} + c \delta x + F_{,\theta} \delta \theta = 0, \quad \delta \dot{\theta} = -\frac{1}{v_0} \delta \dot{x} - \frac{v_0}{D_c} \delta \theta \quad (20.28)$$

式中

$$F_{,v} = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} = F_N \frac{a}{v_0}, \quad F_{,\theta} = \left. \frac{\partial F}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = F_N \frac{b v_0}{D_c} \quad (20.29)$$

将下式代入:

$$\delta x = A e^{\lambda t}, \quad \delta \theta = B e^{\lambda t} \quad (20.30)$$

则得到特征方程为:

$$\lambda^3 + \underbrace{\lambda^2 \left(\frac{F_N a}{m v_0} + \frac{v_0}{D_c} \right)}_P + \underbrace{\lambda \left(\frac{c}{m} + \frac{F_N (a-b)}{m D_c} \right)}_Q + \underbrace{\frac{c v_0}{m D_c}}_R = 0 \quad (20.31)$$

稳定性标准要求 $R=PQ$ (见 12.7 节), 即

$$\frac{c v_0}{m D_c} = \left(\frac{F_N a}{m v_0} + \frac{v_0}{D_c} \right) \left(\frac{c}{m} + \frac{F_N (a-b)}{m D_c} \right) \quad (20.32)$$

临界刚度为:

$$c = \frac{(b-a)}{D_c} \left(F_N + \frac{m v_0^2}{a D_c} \right) \quad (20.33)$$

如果 $a > b$, 那么滑动总是稳定的。相反, 如 $a < b$, 则只有当刚度大于临界刚度表达式(20.33)时滑动是稳定的。对于非常小的速度, 式(20.33)的断层稳定性标准简化为:

$$c > \frac{(b-a)}{D_c} F_N \quad (20.34)$$

这个结果也可以写成另外一种形式, 仅当

$$F_N < \frac{c D_c}{b-a} \quad (20.35)$$

时, 滑动是稳定的。也就是说, 法向力要足够小。对于一个连续体, 我们使用这个关系 $c \approx GL$; 仅当 $F_N < \frac{GL D_c}{b-a}$ 或

$$L \sigma_N < \frac{GD_c}{b-a} \quad (20.36)$$

时,滑动是稳定的,式中我们代入了法向应力 $\sigma_N \approx F_N/L^2$ 。根据这点,足够小的块体总是表现为稳定滑动。然而,当块体的线性尺寸大于

$$L_c = \frac{GD_c}{\sigma_N(b-a)} \tag{20.37}$$

时,块体将出现非稳态滑动。

决定稳定性与否的最重要的参数是 $b-a$,它与材料、温度和压力有关。对于最上层地壳中的典型矿物花岗岩,当温度低于 300°C 时,这个参数是正的,高于 300°C 时变为负的(见图 20.3)。这意味着我们不要期望在温度大于 300°C 的大陆地壳深层发生地震。

更加详细的、非线性的稳定性分析表明,用式(20.20)中的摩擦定律,对于有限的干扰,滑动可以用一个稳定性图来描述,在图 20.4 中,定性地给出了这个稳定性图。

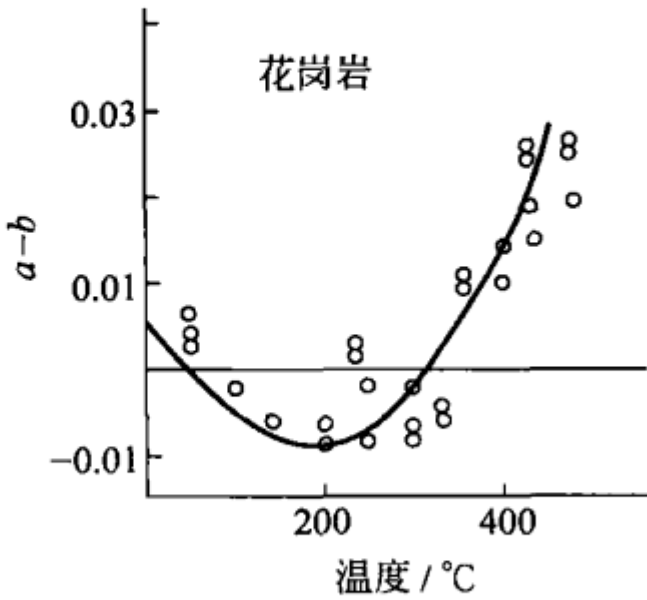


图 20.3 对于花岗岩,参数 $a-b$ 与温度的关系

(数据来源: C. H. Earthquakes and friction laws, Nature, 1998, 391: 37-42)

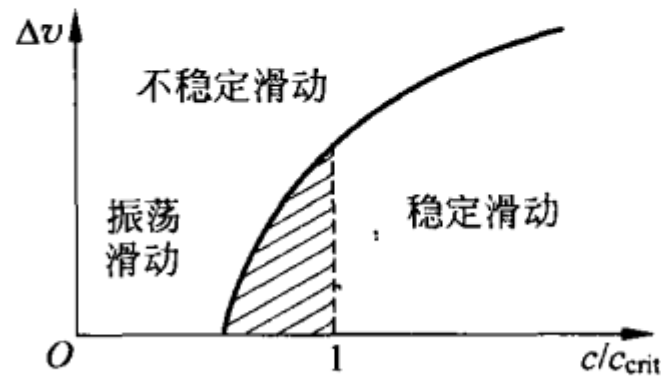


图 20.4 对于式(20.25)的系统,使用式(20.20)和(20.17)中的摩擦定律来定性地表示稳定性图。稳态滑动被一个突然的牵引速度的变化 Δv 所干扰。对于小干扰,当弹簧刚度大于临界刚度时,运动是稳定的。当刚度大于临界刚度时,足够大的干扰将导致失稳的发生。对于刚度小于临界刚度,有一片区域稳态滑动是稳定的,但速度总是有限的,而且在一个稳态值左右振荡。在“不稳定”滑动区域,滑动速度(不考虑惯性)在有限的时间里变为无限大

三个稳定性区域的存在暗示了下面的地震动力学：地壳中满足失稳标准时，它们才会成核。但是，只要它们能产生足够大的速度突变，它们就会传播到稳定区。一进入稳定区，剪切传播就很快被抑制。

20.5 地震成核和后期滑动

虽然人们感觉地震是一个突然的震动，通常没有明显的警告标志，但是在这之前有一个缓慢的发展过程，我们称之为成核。在这个阶段，它们可以看做是准静态的：每个点在每个时刻都满足平衡条件。在简单的“块模型”（Dieterich 提出的式(20.20)摩擦定律）中，假设以恒定的速度 v_0 拉弹簧，平衡条件的形式为：

$$c(x_0 + v_0 t - x) = F_N \left[\mu_0 - a \ln \left(\frac{v^*}{|v|} \right) + b \ln \left(\frac{v^* \theta}{D_c} \right) \right] \quad (20.38)$$

这个方程，结合下面关于状态变量的动力方程：

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|\dot{x}| \theta}{D_c} \right) \quad (20.39)$$

可以通过数值来求解。但是在滑动之前有一个加速蠕变，接着滑动速度 $v = \dot{x}$ 远大于稳定蠕变时的速度： $v \gg D_c / \theta_0 = v_0$ 。于是，方程(20.39)简化为：

$$\frac{d\theta}{dx} = - \left(\frac{\theta}{D_c} \right), \quad \theta = \theta_0 e^{-x/D_c} \quad (20.40)$$

代入方程(20.38)，我们得到：

$$\frac{c}{F_N} (x_0 + v_0 t - x) = \left(\mu_0 + a \ln \frac{\dot{x}}{v^*} + b \ln \frac{\theta_0 v^*}{D_c} \right) - \frac{bx}{D_c} \quad (20.41)$$

这个方程可以直接积分：

$$A \int_0^t \exp \left(\frac{cv_0}{aF_N} t \right) dt = \int_0^x \exp \left(- \frac{Bx}{a} \right) dx \quad (20.42)$$

其中

$$A = v^* \exp \left(- \frac{\mu_0}{a} - \frac{b}{a} \ln \frac{\theta_0 v^*}{D_c} + \frac{cx_0}{aF_N} \right) \quad (20.43)$$

等于 $t=0$ 时刻的滑动速度 \dot{x}_0 ，且

$$B = \left(\frac{b}{D_c} - \frac{c}{F_N} \right) \quad (20.44)$$

方程(20.42)的解为：

$$x = - \frac{a}{B} \ln \left[1 - \frac{\dot{x}_0 B F_N}{c v_0} \left(\exp \left(\frac{c v_0}{a F_N} t \right) - 1 \right) \right] \quad (20.45)$$

由这个式子得到蠕动的典型趋势,见图 20.5。根据式(20.45)中对数部分等于零来计算失稳出现的时间:

$$t_c = \frac{aF_N}{cv_0} \ln \left(1 + \frac{cv_0}{\dot{x}_0 BF_N} \right) \quad (20.46)$$

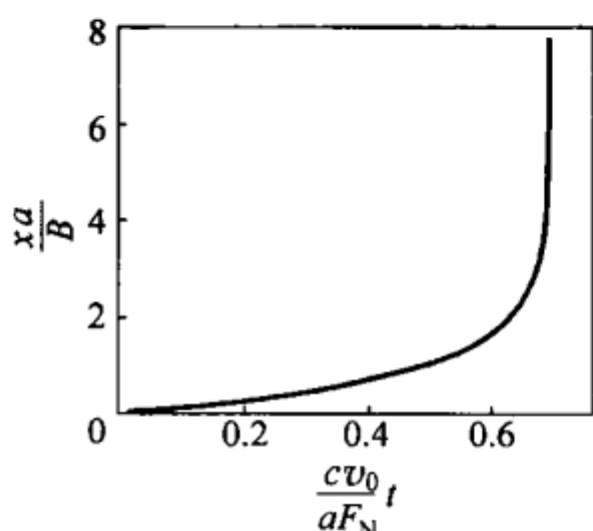


图 20.5 根据方程(20.45),令 $\frac{\dot{x}_0 BF_N}{cv_0} = 1$, 得到滑动之前的加速蠕动

在失稳附近,可用下面表达式来对式(20.45)近似:

$$x \approx -\frac{a}{B} \ln \left[\frac{\dot{x}_0 B}{a} \left(1 + \frac{cv_0}{\dot{x}_0 BF_N} \right) (t_c - t) \right] \quad (20.47)$$

根据下面关系式,滑动速度增大:

$$\dot{x} \approx \frac{a}{B} (t_c - t)^{-1} \quad (20.48)$$

在实验室里,用简单的摩擦学模型,对滑动之前的加速蠕动也做了检测(见图 20.6)。

同样在滑动之后,一般也有一定的“后期滑动”,可以用相同的摩擦定律来描述。在滑动后的瞬间,由于大滑动路径(见方程(20.40)),变量 θ 实际变为零。因此滑动后瞬间,可以用下面方程直接描述:

$$\dot{\theta} \approx 1, \quad \theta \approx t - t'_c \quad (20.49)$$

其中 t'_c 为滑动结束的时间。对于较小的速度 v_0 ,“弹簧力” F 可认为是常数。则方程(20.38)可写成:

$$\frac{F}{F_N} = \left(\mu_0 + a \ln \frac{\dot{x}}{v^*} + b \ln \frac{v^* (t - t'_c)}{D_c} \right) \quad (20.50)$$

由此得到:

$$\dot{x} = v^* e^{\frac{1}{a} \left(\frac{F}{F_N} - \mu_0 \right)} \cdot \left(v^* \frac{t - t'_c}{D_c} \right)^{-b/a} \quad (20.51)$$

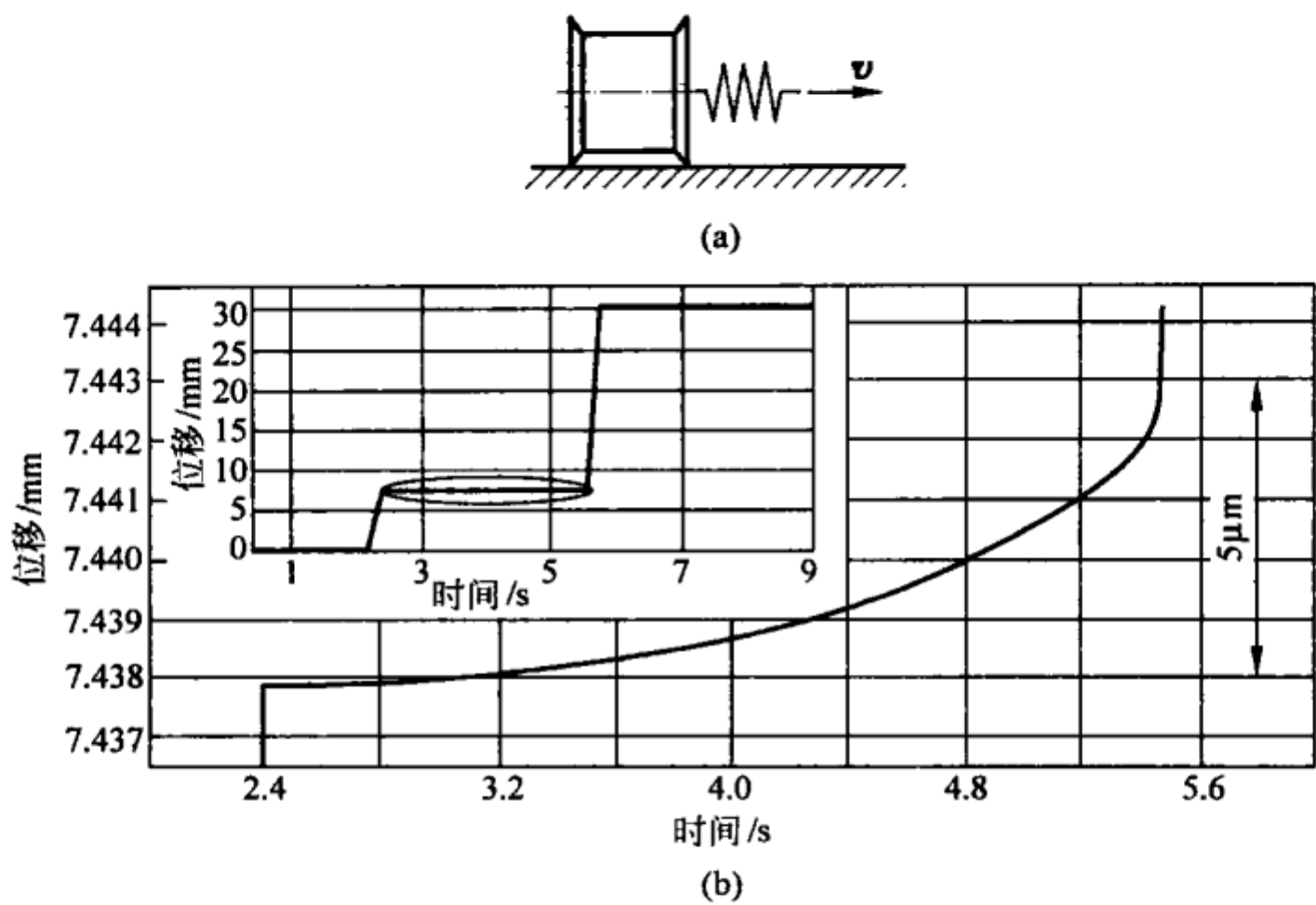


图 20.6 对于图(a)所示的实验,一个钢制物体在一个钢基材上滑动,这个物体的位置与时间函数的实验记录为(b)。位置测量的分辨率为 8 nm。子图中可以看到两个跳跃,分别为 8 mm 和 22 mm。整个“黏连”阶段(子图中圈起来部分)如高分辨率的主图所示,可以看出,在整个“黏连”阶段有一个缓慢的蠕动过程,在靠近“滑动”阶段的位置时,这个蠕动增长很快(实验提供: V. L. Popov,J. Starcevic,TU Berlin)

指数 b/a 的数量级总是 1。在图 20.7 所示的例子中,这个指数等于 1.5。后期滑动的强度与前期滑动不同,主要表现在对残余应力[残余应力与 $(F/F_N - \mu'_0)$ 成正比]很敏感,该强度与断裂位置的精确结构或材料副有关。

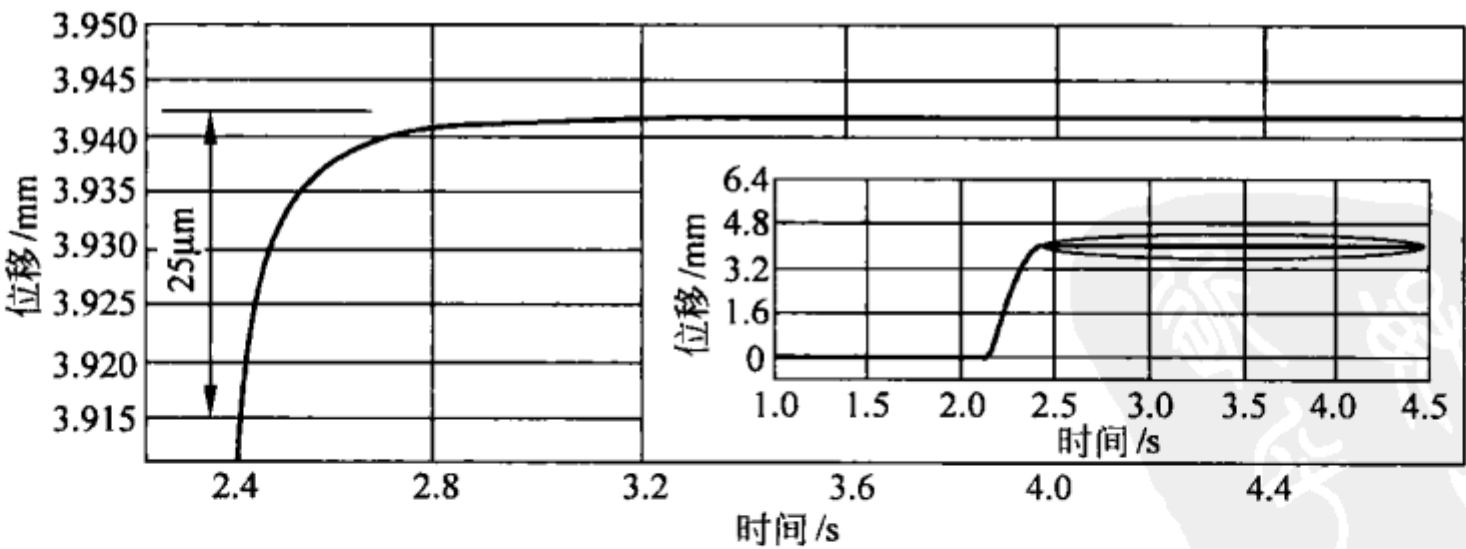


图 20.7 对于图 20.6(a)所示的实验,一个钢制物体在一个玻璃基材上滑动,这个物体的位置与时间函数的实验记录。可以看到滑动约为 4 mm。滑动后的“黏着”阶段(子图中的圈起来部分)如高分辨率的主图所示。可以看到,在“黏着”阶段(后期滑动)有一个逐渐放慢的蠕动(实验提供: V. L. Popov,J. Starcevic,TU Berlin)

20.6 前震和余震

如果方程(20.48)所描述的蠕动,以一连串相同长度 l 的离散滑动(前震)的形式发生,那么下面的方程描述了前震的频率 \dot{n} :

$$\dot{n}_{\text{foreshocks}} \approx \frac{a}{Bl} (t_0 - t)^{-1} \quad (20.52)$$

类似而言,该方法也适用于“后期滑动”。如果方程(20.51)所描述的后期滑动,以一连串相同长度 l 的离散滑动(余震)的形式发生,那么下面的方程描述了余震的频率 \dot{n} :

$$\dot{n}_{\text{aftershocks}} = \frac{v^*}{l} e^{\frac{1}{a}(\frac{F}{F_N} - \mu_0)} \cdot \left(v^* \frac{t - t'_0}{D_c} \right)^{-b/a} \quad (20.53)$$

对于前震和余震,方程(20.52)和(20.53)形式的幂函数称为 Omori 定律,是由 Fusakichi Omori 于 1894 年根据经验得到的。

前震是地震成核的一部分。在更详细的连续表述中,前震发生在“主震”的震中附近。相反,余震提供了一个应力释放的途径,这些应力是由主震产生的。通常,余震集中在主震的滑动区边缘。

20.7 块介质和断层结构的连续介质力学

一般来说,地质材料(geomedia)是由多个单碎片组成的颗粒介质。这样一个介质的剪切强度本质上是由单个块状体之间的摩擦力决定的。我们考虑受到一个应力张量和孔隙压力 p 作用的一个颗粒状、多孔的介质,其中应力张量的主应力为 $\bar{\sigma}_3 < \bar{\sigma}_2 < \bar{\sigma}_1$,见图 20.8(a)。在图示的两维图中,沿垂直于图示平面的中间应力 $\bar{\sigma}_2$ 对滑移不起作用。

将应力张量减去流体静压的孔隙压力,算出决定材料行为的有效应力张量:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 - p, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 - p, \quad \sigma_3 = \bar{\sigma}_3 - p \quad (20.54)$$

在与轴“1”成角度 θ 的一个截面(见图 20.8(b))上,法向应力和切向应力为:

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (20.55)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (20.56)$$

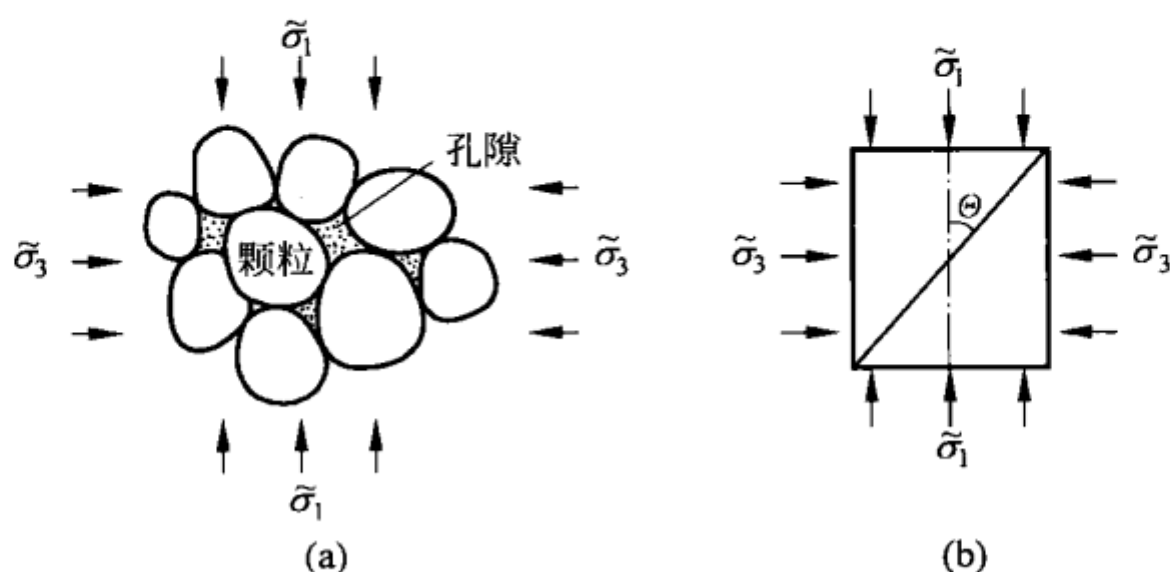


图 20.8 在主应力 $\tilde{\sigma}_1$ 和 $\tilde{\sigma}_3$ 以及孔隙压力 p 的作用下的多孔、颗粒状介质

或

$$\sigma_N = \frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_3}{2} - \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} \cos 2\theta - p \quad (20.57)$$

$$\tau = \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} \sin 2\theta \quad (20.58)$$

根据这点,孔隙压力会导致在任意截面上法向应力的减小,但是对剪切应力没有影响。

仅当剪切应力 τ 达到 $\mu\sigma_N$ 时,截面上开始滑动:

$$\tau = \mu\sigma_N \quad (20.59)$$

或者将黏着的贡献考虑进去:

$$\tau = \tau_0 + \mu\sigma_N \quad (20.60)$$

这里, μ 为“内摩擦系数”,一般可以由独立实验所决定。图 20.9 用不同种类岩石的实验数据说明了这个准则。对于岩石,摩擦系数的典型实验值在 0.6 与 0.85 之间。

这个准则称为颗粒介质的库仑断裂准则。这个关系用图 20.10 中一条直线表示了出来。在任意夹角为 θ 的截面上,所有法向应力和切向应力在 (σ_N, τ) 平面上形成了一个圆,也就是莫尔圆。如果这个圆整体处于直线方程(20.60)的下方,如图 20.10(a)所示,那么在任何一个截面上都不满足断裂条件。通过增大主应力 σ_1 ,减小 σ_3 或者向左移动总应力圆(例如根据方程(20.57),通过增大孔隙压力),莫尔圆会与直线方程(20.60)相切(见图 20.10(b))。此时,一个截面首次满足断裂准则,此截面的角度为:

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (20.61)$$

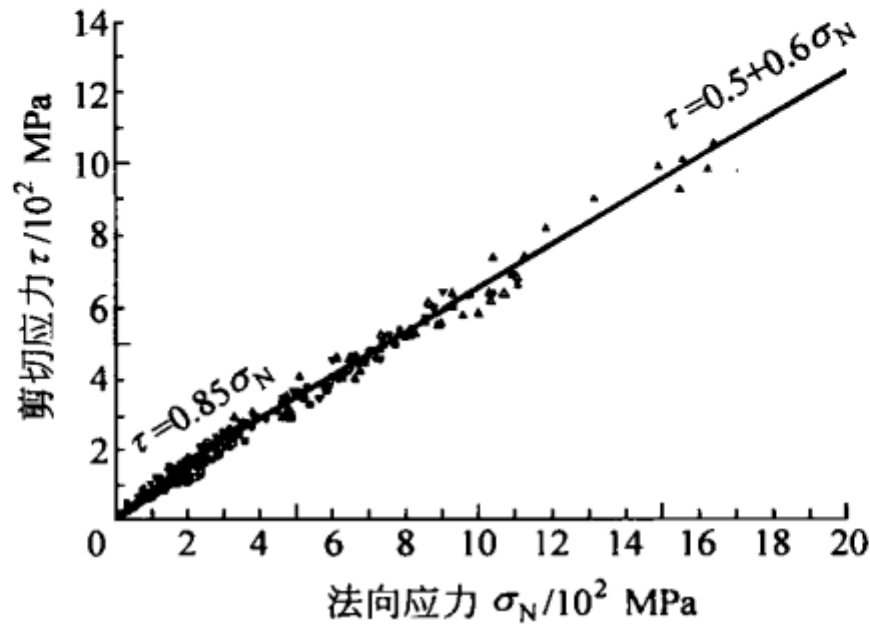


图 20.9 对几种不同的岩石,“摩擦强度”与法向应力的关系

(数据来源: J. D. Byerlee, Friction of rocks, Pure. Appl. Geophys., 1978, 116: 615-626)

式中 φ 是摩擦角:

$$\tan\varphi = \mu \tag{20.62}$$

对于摩擦系数为 0.6, 我们得到 $\theta \approx 0.52$ (或 30°), 对于 $\mu = 0.85$, 角度为 $\theta \approx 0.43$ (或 25°)。

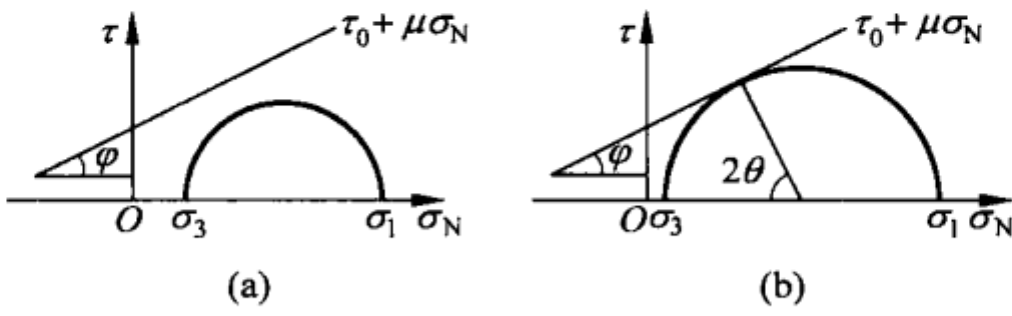


图 20.10 平面应力的莫尔圆和库仑断裂准则

由图 20.10(b), 我们可以用主应力来表示方程(20.60)对应的准则:

$$\sigma_1(\sqrt{1+\mu^2} - \mu) - \sigma_3(\sqrt{1+\mu^2} + \mu) = 2\tau_0 \tag{20.63}$$

则断裂面之间的主应力为线性关系。深层钻探的应力测量表明, 这个条件对于所有的深度都是满足的。也就是说, 地壳在所有深度都是接近临界状态的。如果主应力 σ_3 是负的(处于拉伸), 那么通常将下面的标准用于断裂中:

$$\sigma_3 = -\sigma_0 \tag{20.64}$$

Anderson^① 首次认识到, 断层的基本种类可以用颗粒介质的性质来轻

① E. M. Anderson. The Dynamics of Faulting. Edinburgh, Oliver & Boyd, 1951.

松地解释。他的分类是基于这样的观察：地壳表层中应力张量的主轴总是分别垂直和平行于表面。相对于地球表面，最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 的轴线方向，有三种可能，见图 20.11(a)~(c)。产生的断层种类为：正断层（见图 20.11(a)）、逆断层（见图 20.11(b)）和走滑断层（见图 20.11(c)）。如果最小的应力是负的，那么表面会在垂直于这个负应力方向的平面上分开（发散断层，见图 20.11(d)）。地震中滑动的种类除了影响震级外，还对产生的破坏性有影响。走滑断层(c)会导致最大切向加速度，正断层作用会导致强海啸（如果地震发生在海底的话）。

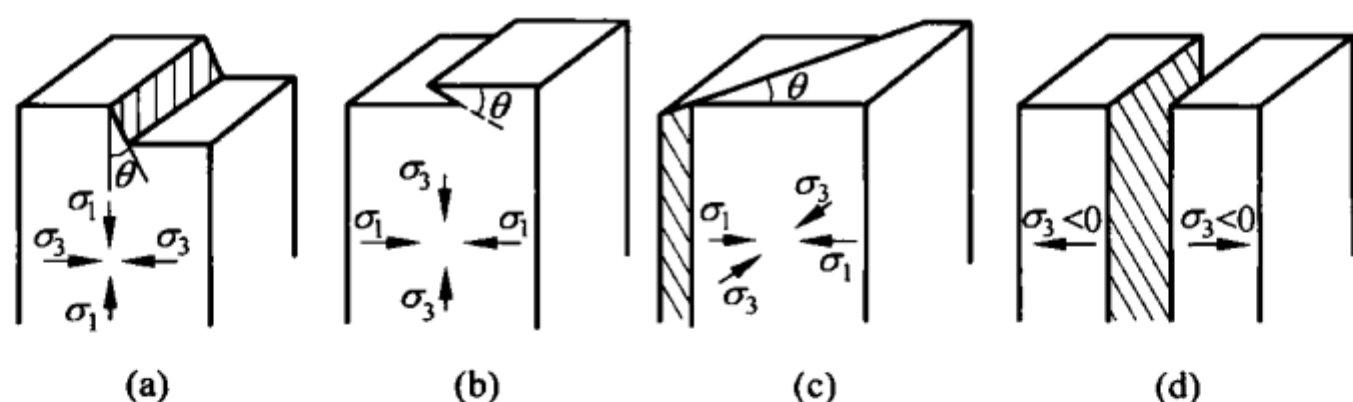


图 20.11 根据 Anderson 的观点对滑动的分类

(a) 正断层；(b) 逆断层；(c) 走滑断层；(d) 分散断层

20.8 地震可以预测吗？

这个问题在过去的 10 年里被讨论了很多次。是和不是这两个答案都有其核心支持者。这两个观点都可以用上述的简单地震模型来阐述。

如果认为地震是一个黏滑失稳，我们用恒定静摩擦和动摩擦系数的简单摩擦定律，在滑动事件之前是没有运动的，也就没有即将滑动的迹象，则不可能预测地震。不论系统变得多么复杂，即使将其扩展到连续体，在本质上也并没有变化。一个分布式系统表现出复杂的行为，这点通过已知地震的统计性质反映了出来（Gutenberg-Richter 定律和 Omori 定律）。但是，这些性质有一个纯粹的统计特点。因此，它们在震后分析中起到了作用，但是不能预测地震的地点和时间。

但是，这个结论是基于一个不完全正确的概念。实验室实验（见 20.5 节）和地震测量表明，在地震之前总是有一个加速蠕动，这是局部应力接近临界值的一个警告信号。这也是一个乐观的原因。同时，20.5 节中的实验数据表明了问题所在：为了有效地观察蠕动过程，需要以非常高的分辨率

来测量地壳中位移。但是,目前的地震测量工具的频域,仍然达不到测量很小位移所需要的分辨率,因此只能希望将来有更好的测量方法和模型,来实现地震预测能力上的突破^①。

习题

习题 1 两个弹性半空间在法向应力 σ_N 作用下被压在一起,然后受到一个逐渐增大的切向应力 τ ,直到发生黏滑失稳。假设在接触面库仑摩擦定律成立,静摩擦和动摩擦系数为恒定值(分别为 μ_s 和 μ_k),计算相对滑动速度和断裂表面的加速度。

解答: 在上述条件下,介质中只有剪切波,用下面的波动方程来描述:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{\text{sound}}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \text{其中} \quad c_{\text{sound}}^2 = \frac{G}{\rho}$$

相同的方程对于 u 的所有时间导数和空间导数都成立,也就对应 $\tau = G\partial u/\partial z$ 成立:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = c_{\text{sound}}^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}$$

失稳前的瞬间应力等于 $\tau_s = \mu_s \sigma_N$,运动开始后,应力等于 $\tau_k = \mu_k \sigma_N$ 。这些边界条件下,波动方程的解为 $\Delta\tau = \sigma_N(\mu_k - \mu_s)$ 的一个阶梯函数,这个波以速度 $c_{\text{sound}} = \sqrt{G/\rho}$ 沿材料深度方向传播。从表面 $u(z - c_{\text{sound}}t)$ 传播的波,对于其波动方程的任意解,表达式 $v = \frac{\partial u}{\partial t} = -c_{\text{sound}} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{c_{\text{sound}}}{G} \tau$ 均成立。在应力突变 $\Delta\tau = \sigma_N(\mu_k - \mu_s)$ 和速度突变 Δv (断层表面速度)之间,存在下面关系:

$$\Delta v = -\frac{c_{\text{sound}}}{G} \Delta\tau = \frac{c_{\text{sound}}}{G} \sigma_N(\mu_s - \mu_k) = \frac{\sigma_N(\mu_s - \mu_k)}{\sqrt{G\rho}}$$

伴随的加速度除了在波前是无穷大外,其他任何地方都等于零。

习题 2 和习题 1 一样,考虑两个弹性半空间的接触。假设静摩擦系数 μ_s 在长度 D_c (滑动长度)内,线性降低到动摩擦系数的值 μ_k 。计算这种情况下断裂表面的最大加速度。

^① 这是基于加利福尼亚的地震实验数据的讨论,见: C. Thurber, R. Sessions. Assessment of creep events as potential earthquake precursors; application to the creeping section of the San Andreas fault. California, Pure Appl. Geophys., 1998, 152: 685-705.

解答：从接触面开始相对滑动，一直到相对位移 D_c ，接触面的摩擦应力为：

$$\tau = G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0,t} = \sigma_N \left(\mu_s - \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c} u \right) \Big|_{z=0,t}$$

对于传播的表面波，其波动方程的普遍解为 $u = \frac{\tau_0}{G} z + f(z - c_{\text{sound}} t)$ ，其中 $\tau_0 = \mu_s \sigma_N$ 是远离断裂点的恒定的宏观应力。因此，我们得到下面的表面位移方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c} u$$

如果运动以一个干扰 u_0 开始，那么表面位移为：

$$u = u_0 \exp\left(\frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c} t\right)$$

加速度等于：

$$\ddot{u} = \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c}\right)^2 u_0 \exp\left(\frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c} t\right)$$

因此，在位移和加速度之间存在这个关系： $\ddot{u} = \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} \frac{\mu_s - \mu_k}{D_c}\right)^2 u$ 。当位移达到 $u = D_c$ 的瞬间，加速度 \ddot{u} （断层表面加速度）达到最大值：

$$\ddot{u}_{\max} = \frac{\sigma_N^2 (\mu_s - \mu_k)^2}{G \rho D_c}$$

由此看出，加速度的最大值与滑动长度 D_c 成反比，速度的最大值与习题 1 中的相等。

习题 3 和习题 1 一样，考虑两个弹性半空间的接触。假设在一个滑动过程中，摩擦系数从静态值 μ_s 呈指数减小到动态值 μ_k ，其中特征时间为 t_0 （松弛时间）^①。计算这种情况下的断层表面的最大速度和最大加速度。

解答：从接触面的相对滑动开始，接触面的摩擦应力为：

$$\tau = G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0,t} = \sigma_N [\mu_s e^{-t/t_0} + \mu_k (1 - e^{-t/t_0})]$$

① 这个假设对应于滑动长度 D_c 与速度的线性因子，这是典型的颗粒介质的情况（参见：T. Hatano. Scaling of the critical slip distance in granular layers. Geophysical Research Letters, 2009, 36: L18304 doi: 10.1029/2009GL039665.）。

对于传播的表面波,其波动方程的普遍解为 $u = \frac{\tau_0}{G}z + f(z - c_{\text{sound}}t)$, 其中 $\tau_0 = \mu_s \sigma_N$ 为远离断裂表面的恒定宏观应力。得到的表面速度的方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma_N c_{\text{sound}}}{G} (\mu_s - \mu_k) (1 - e^{-t/t_0}) = \frac{\sigma_N (\mu_s - \mu_k)}{\sqrt{G\rho}} (1 - e^{-t/t_0})$$

加速度等于:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sigma_N (\mu_s - \mu_k)}{\sqrt{G\rho} t_0} e^{-t/t_0}$$

在 $t \gg t_0$ 时,速度达到最大值:

$$\dot{u}_{\max} = \frac{\sigma_N (\mu_s - \mu_k)}{\sqrt{G\rho}}$$

在 $t=0$ 时,加速度 \ddot{u} 达到最大值:

$$\ddot{u}_{\max} = \frac{\sigma_N (\mu_s - \mu_k)}{\sqrt{G\rho} t_0}$$



附录

本附录计算了在几个应力分布下一个弹性半空间体表面的位移,这是接触力学中重要的内容。

1. 半径为 a 的圆中的法向应力

其表达式为:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{A. 1})$$

这里,我们仅计算表面的法向位移。该位移由公式(5.7)给出,这里我们重复一遍:

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint P_z(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (\text{A. 2})$$

式中

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{A. 3})$$

使用的坐标系如图 A.1 所示。

由于该应力分布的旋转对称性,一个点的法向位移仅与其距原点的距离 r 有关,因此,只要计算 x 轴上那些点的位移就够了。下面我们计算点 A 处的法向位移。为此,需要确定由点 B 处的应力引起的 A 点位移,并在应力作用面上将该位移对所有可能的 B 点位置积分。由于旋转对称性,点 B 的应力仅与其距离原点的距离 t 有关。对于这个距离,我们有 $t^2 = r^2 + s^2 + 2rscos\varphi$ 。因此,压力分布为:

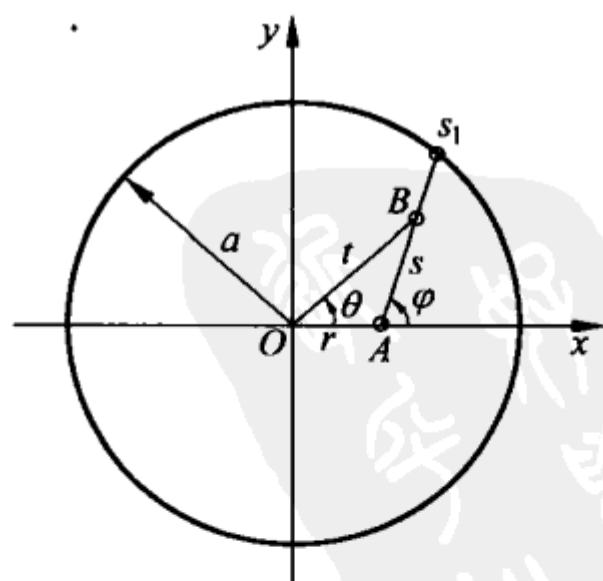


图 A.1 圆形区域受到法向应力的作用,计算其法向位移

$$\begin{aligned}
 p(s, \varphi) &= p_0 \left(1 - \frac{r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi}{a^2} \right)^{-1/2} \\
 &= p_0 a (a^2 - r^2 - s^2 - 2rs \cos \varphi)^{-1/2} = p_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} \quad (\text{A. 4})
 \end{aligned}$$

其中令 $\alpha^2 = a^2 - r^2$, $\beta = r \cos \varphi$ 。

这个位移的 z 分量为：

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds \right) d\varphi \quad (\text{A. 5})$$

这里, s_1 是方程 $\alpha^2 - 2\beta s - s^2 = 0$ 的正根。在 ds 内的积分为：

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds = \frac{\pi}{2} - \arctan(\beta/\alpha) \quad (\text{A. 6})$$

很明显有 $\arctan[\beta(\varphi)/\alpha] = -\arctan[\beta(\varphi + \pi)/\alpha]$ 。因此对 φ 积分，“arctan”的这一项就变为零了。于是有：

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} d\varphi = \frac{\pi(1-\nu^2)p_0 a}{E} = \text{常数} \quad (\text{A. 7})$$

从这个结果可以直接看出，如何来产生这样的压力分布：通过一个硬圆柱压头的压入来产生。

作用在整个面上的力等于：

$$F = \int_0^a p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2 \quad (\text{A. 8})$$

接触刚度定义为力与位移的比值：

$$c = 2aE^* \quad (\text{A. 9})$$

2. 赫兹应力分布

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A. 10})$$

该应力作用下，产生的垂直位移为：

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds \right) d\varphi \quad (\text{A. 11})$$

这个表达式中对 ds 的那部分积分为：

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds = -\frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\beta/\alpha) \right] \quad (\text{A. 12})$$

再对 $d\varphi$ 积分, $\alpha\beta$ 和“arctan”这两项就没有了, 剩下的为：

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} (\alpha^2 + \beta^2) d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

3. 一个细圆环状的均匀应力分布

点 r 处的位移计算为:

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{s} \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}} \\
 &= \frac{F_N}{2aE^*} \frac{4}{\pi^2 (1 + r/a)} K\left(2 \frac{\sqrt{r/a}}{1 + r/a}\right)
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

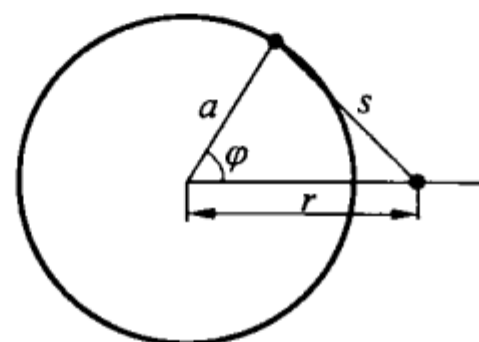


图 A.2 对于一个细圆环状的均匀应力分布, 计算点 r 处的垂直位移

其中 F_N 为法向力, $K(\kappa)$ 为第一类完全椭圆积分:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \tag{A.15}$$

这个位移见图 A.3。在 $r \approx a$, 位移有一个对数奇点:

$$u_z = \frac{F_N}{2aE^*} \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{8}{|r/a - 1|}, \quad |r/a - 1| \ll 1 \tag{A.16}$$

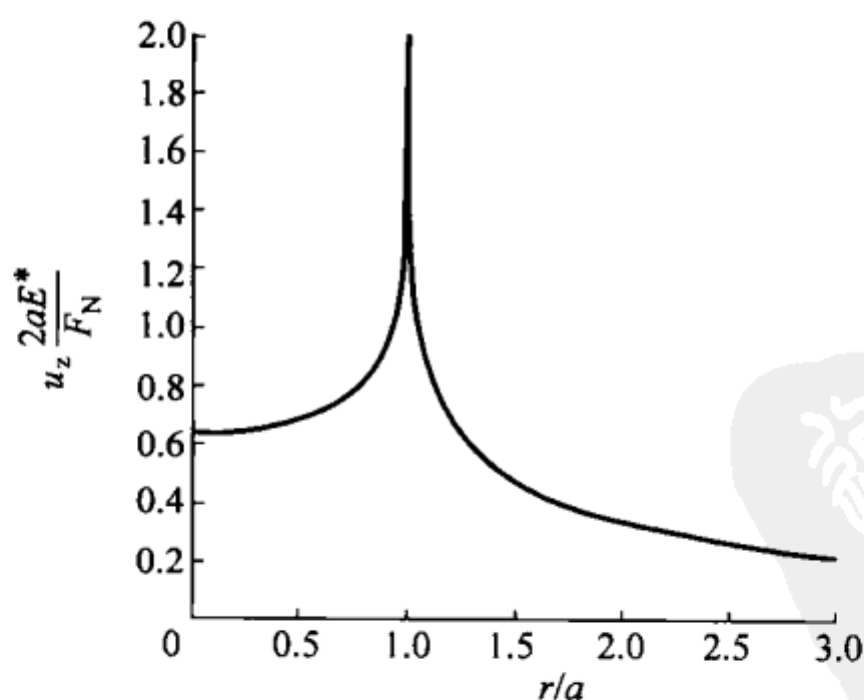


图 A.3 在一个细圆环状压力作用下的表面位移

扩展阅读文献

这个文献列表并不完整,仅作为延伸阅读和参考指南。

第 1 章

- D. Dowson. History of Tribology. London: Longman Group Limited, 1979, 678.
- E. Rabinowicz. Friction and Wear of Materials (2nd edition). John Wiley & Sons Inc. ,1995.
- F. P. Bowden, D. Tabor. The Friction and Lubrication of Solids. Oxford: Clarendon Press, 2001.
- B. N. J. Persson. Sliding Friction: Physical Principles and Applications. Springer, 2002.
- D. F. Moore. The Friction and Lubrication of Elastomers. Oxford: Pergamon Press, 1972, 288.
- I. L. Singer, H. M. Pollock (Eds.). Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- B. N. J. Persson, E. Tosatti (Eds.). Physics of Sliding Friction. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- H. Czichos, K. H. Habig. Tribologie-Handbuch: Reibung und Verschleiß. 2. , überarb. und erw. Aufl. , Wiesbaden, Vieweg, 2003. IX, 666 S.
- K. V. Frolov(Ed.). Modern Tribology: Results and Perspectives (in Russian). Moscow, 2008, 480 S.

第 2 章

- E. Rabinowicz. Friction and Wear of Materials (2nd edition). John Wiley & Sons Inc. ,1995.

第 3 章

- J. Israelachvili. Intermolecular and Surface Forces. Academic Press (1985-2004).
- A. J. Kinloch. Adhesion and Adhesives: Science and Technology. London: Chapman and Hall, 1987, 441.
- B. V. Deryagin, N. A. Krotova, V. P. Smilga. Adhesion of Solids. New York: Consultants Bureau, 1978, 457.
- K. Kendall. Molecular Adhesion and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii. General Theory of van der Waals' Forces. Sov. Phys. Usp. , 1961, 4: 153-176.
- D. Maugis. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2000.

第 4 章

- F. M. Fowkes (Ed.). Contact Angle, Wettability and Adhesion. American Chemical Society, 1964.
- D. Maugis. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2000.

第 5 章

- K. L. Johnson. Contact Mechanics (9th printing). Cambridge University Press, 2003.
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Theory of Elasticity (Theoretical Physics, Vol. 7) (3rd edition). Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999, 8-9.
- I. N. Sneddon. The Relation Between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile. Int. J. Eng. Sci. , 1965, 3: 47-57.

第 6 章

- K. L. Johnson. Contact Mechanics (9th printing). Cambridge University Press, 2003.
- B. V. Deryagin, N. A. Krotova, V. P. Smilga. Adhesion of Solids. New York: Consultants Bureau, 1978, 457.
- M. K. Chaudhury, T. Weaver, C. Y. Hui, et al. Adhesive Contact of

Cylindrical Lens and a Flat Sheet. J. Appl. Phys. , 1996, 80 (1): 30-37.

D. Maugis. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2000.

第 7 章

S. Hyun, L. Pei, J. F. Molinari, et al. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. Phys. Rev. E, 2004, 70: 026117 (12 pp).

B. N. J. Persson. Contact mechanics for randomly rough surfaces. Surface Science Reports, 2006, 61: 201-227.

R. Holm. Electric Contacts: Theory and Application (4th completely rewritten ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1967. XV, 482.

第 8 章

K. L. Johnson. Contact Mechanics (9th printing). Cambridge University Press, 2003.

第 9 章

K. L. Johnson. Contact Mechanics (6th printing of the 1st ed.). Cambridge University Press, 2001.

J. J. Kalker. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990, 314 S.

A. Böhmer. Auswirkung des Werkstoffverhaltens auf die Rechnerisch Ermittelte Belastbarkeit der Schiene. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2004.

第 10 章

F. P. Bowden, D. Tabor. The Friction and Lubrication of Solids. Oxford: Clarendon Press, 2001.

E. Rabinowicz. Friction and Wear of Materials (2nd edition). John Wiley & Sons Inc. , 1995.

M. Köhler. Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten zwischen zwei metallischen Festkörpern. Göttingen: Cuvillier Verlag, 2005.

F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, et al. Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: experiments and a heuristic model. Phys. Rev. E, 1994, 49: 4973-4988.

第 11 章

- E. Meyer, R. M. Overney, K. Dransfeld, et al. Nanoscience: Friction and Rheology on the Nanometer Scale. Singapore: World Scientific Pub. Co., 1998, 373.
- M. H. Müser, M. Urbakh, M. O. Robbins. Statistical mechanics of static and low-velocity kinetic friction. *Advances in Chemical Physics* (Ed. by I. Prigogine, S. A. Rice), 2003, 126: 187-272.
- A. E. Filippov, V. L. Popov. Fractal Tomlinson model for mesoscopic friction: from microscopic velocity-dependent damping to macroscopic Coulomb friction. *Physical Review E*, 2007, 75: Art. No. 027103.
- P. Reimann. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports*, 2002, 361: 57-265.
- V. L. Popov. Nanomachines: methods of induce a directed motion at nanoscale. *Physical Review E*, 2003, 68: Art. No. 026608.

第 12 章

- N. M. Kinkaid, O. M. O' Reilly, P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267 (1): 105-166.
- M. Schargott, V. Popov. Mechanismen von Stick-Slip- und Losbrech-Instabilitäten. *Tribologie und Schmierungstechnik*, 2004, Heft 5: S. 9-15.

第 13 章

- H. Blok. The flash temperature concept. *Wear*, 1963, 6: 483-494.
- J. C. Jaeger. Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. *Proc. R. Soc.*, 1942, 56: 203-224.
- V. L. Popov. A. Fischersworring-Bunk, Thermisch-mechanische Instabilität in Reibkontakten. *Tribologie und Schmierungstechnik*, 2008, Bd. 55, Heft 5: S. 9-11.

第 14 章

- D. F. Moore. *The Friction and Lubrication of Elastomers*. Oxford: Pergamon Press, 1972, 288.
- N. Petrow, O. Reynolds, A. Sommerfeld, A. G. M. Michell. *Theorie der*

- hydrodynamischen Schmierung. Verlag Harri Deutsch, 2. Auflage, 2000, 227 S. (Reihe Ostwalds Klassiker, Bd. 218).
- G. Vogelpohl. Betriebssichere Gleitlager: Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb. Berlin: Springer-Verlag, 1958, 315 S.
- R. Gohar. Elastohydrodynamics (2nd edition). Singapore: World Scientific Pub. Co., 2002, 446.
- M. Wisniewski. Elastohydrodynamische Schmierung. Grundlagen und Anwendungen. Renningen-Malmsheim: expert-Verlag, 2000 (Handbuch der Tribologie und Schmierungstechnik; Bd. 9).

第 15 章

- G. Saccomandi, R. W. Ogden. Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids. (CISM International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures). Wien: Springer-Verlag, 2004.
- D. F. Moore. The Friction and Lubrication of Elastomers. Oxford: Pergamon Press, 1972, 288.

第 16 章

- K. A. Grosch. The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1963, 274 (1356): 21-39.
- K. A. Grosch. The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds. Rubber Chemistry and Technology, 1996, 69: 495-568.

第 17 章

- E. Rabinowicz. Friction and Wear of Materials (2nd edition). John Wiley & Sons Inc., 1995.
- I. Kleis, P. Kulu. Solid Particle Erosion. London: Springer-Verlag, 2008, 206.
- K. H. zum Gahr. Microstructure and Wear of Materials. Amsterdam: Elsevier, 1987, 560 S.
- M. Müller, G. P. Ostermeyer. Cellular automata method for macroscopic surface and friction dynamics in brake systems. Tribology International, 2007, 40: 942-952.

第 18 章

- J. Wallaschek. Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors. *Smart Materials and Structures*, 1998, 7: 369-381.
- T. Sashida, T. Kenio. *An Introduction to Ultrasonic Motors*. Oxford Science Publications, 1994.

第 19 章

- P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, 2006, 518.
- P. Wriggers, U. Nackenhorst (Eds). *Analysis and Simulation of Contact Problems: (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics)*. Berlin: Springer, 2006.
- T. Geike, V. L. Popov. Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension. *Phys. Rev. E*, 2007, 76: 036710 (5pp.).
- T. Geike, V. L. Popov. Reduzierte Beschreibung des 3D adhäsiven Kontaktes zwischen rauen Oberflächen. *Tribologie und Schmierungstechnik* 2006, 53 (3): 5-9.
- T. Geike, V. L. Popov. Reduction of three-dimensional contact problems to one-dimensional ones. *Tribology International*, 2007, 40: 924-929.
- T. Geike, V. L. Popov. Reduced description of mixed lubrication. *Tribology International*, 2008, 41: 542-548.
- T. Geike, V. L. Popov. Cavitation within the framework of reduced description of mixed lubrication. *Tribology International*, 2009, 42: 93-98.
- T. Geike. Theoretische Grundlagen eines schnellen Berechnungsverfahrens für den Kontakt rauer Oberflächen. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2007. (URL: <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2008/1748/>.)

第 20 章

- C. H. Scholz. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, 2002.
- C. H. Scholz. Earthquakes and Friction Laws. *Nature*, 1998, 391: 37-42.
- J. H. Dieterich. Earthquake nucleation and faults with rate and state-

dependent strength. *Technophysics*, 1992, 211: 115-134.

M. D. Trifunac, A. G. Brady. On the correlation of seismic intensity scales with the peaks of recorded strong ground motion. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1975, 65 (1): 139-162.

Y. Ben-Zion. Collective behavior of earthquakes and faults: continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes, and different dynamic regimes. *Rev. Geophys.*, 2008, 46: RG4006 (70 pp).



各章压题图片说明

第 1 章：一个埃及巨像的运输。来源于 Tehuti-Hetep 的墓碑(约公元前 1880 年)。

第 2 章：柏林 Spandau 一座桥的轴承 (V. Popov. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 3 章：石壁上的壁虎 (Zhengdong Dai. Institute for Bio-inspired Structure and Surface Engineering. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics)。

第 4 章：植物上的水滴 (V. Popov. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 5 章：一个光弹性盘和一个圆柱接触中的应力分布 (J. Thaten. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 6 章：一个胶质体和一个钢圆柱之间的黏着接触 (J. Thaten. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 7 章：一个光弹性盘和一个粗糙表面接触的应力分布 (J. Thaten. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 8 章：以与法向呈不同的角度加载，一个盘与一个球体接触中的滑动区和环形磨损(微动磨损)(已获得 K. L. Johnson 和 Cambridge University Press 的许可)。

第 9 章：轮轨接触 (J. Starcevic. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 10 章：柏林工业大学力学研究所的销-盘摩擦机 (J. Thaten. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 11 章：在“原子级光滑”平面上的原子力显微镜的尖端(示意图)。

第 12 章：用激光测振器测得的一个制动盘的振荡本征模 (U. von Wagner. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 13 章：在不同滑动角度下滚动轮胎的热成像 (F. Böhm. SFB 181

Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder. Forschungsbericht 2. Halbjahr 1988-1. Halbjahr 1991, TU Berlin, S. A1-68)。

第 14 章：一个波形表面上的蠕流——实验测得的流体线和与解析计算的比较(得到 University of Bayreuth, M. Scholle 的许可)。来源：M. Scholle. Habilitation Treatise. See also: M. Scholle, A. Wierschem, N. Aksel. Creeping films with vortices over strongly undulated bottoms. Acta Mech., 2004, 168: 167-193.

第 15 章：橡胶(橡皮擦)(V. Popov. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 16 章：橡胶轮胎(V. Popov. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 17 章：磨粒磨损和黏着磨损的典型图片。左图：铁与铝的磨粒磨损；右图：黏着引起的黏合，材料为淬火及回火的 C45。来源：Bundesanstalt für Materialforschung und-prüfung, Berlin, Ms. Binkowski, provided by Dr. H. Klotz。

第 18 章：摩擦波谱仪中的试样(J. Starcevic. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 19 章：软件的用户界面窗口，该软件用于快速计算粗糙表面间接触性质(FaCom-Fast Computation of rough surfaces. V. Popov, T. Geike, S. Korostelev, A. Dimaki. Institute for Mechanics. TU Berlin)。

第 20 章：West Marin, 1906。1906 年旧金山地震引起的 Olema 地区的裂缝。由 G. K. Gilbert 拍摄(图片提供：Anne T. Kent California Room, Marin County Free Library)。



索引

A

Amontons, Guillaume 3

Archard 5

B

Barquins 203

Blok 154

Bowden 5,109

Bradley 23,56

边界元法 235

边界层摩擦 168

变形 9,13,43,239

塑性变形 9,15,68,102,110,208,
235,246

弹性变形 9,11,16,24,102

表面 2,9,10,17,18,21,26

粗糙表面 5,37,63,109,196,213

可湿润表面 37,41

排斥表面 37,41

亲水表面 37,38

憎水表面 37,38

表面粗糙度 5,63,107,108

表面能 21

相对表面能 27

表面张力 21,33

有效表面张力 202,212

玻璃转化温度 188

泊松比 8,9,197

不稳定性 27

C

Carter 4

Coulomb, Charles Augustin 4

超声波振动 220,224

超滑 128

弛豫时间 185

尺度相关 68,73

粗糙度 5,25,64,65

搓板纹 136,156

D

d'Alembert 140

da Vinci, Leonardo 3,102

Derjagin 6

Dieterich 254

Dowson 170

Dupuit 4

Dzyaloshinskii 27,273

打滑 92

横向打滑 99

打滑比 93,96,98

打滑速度 91

带传动 100

带摩擦 114

地壳板块动力学 250

地震 250,251

地震成核 259,262

地震尺度定律 252

地震强度 252

地震预测 266

地震震级 252

地震矩 252

电接触 63,69

动摩擦力 3,81,103,145,221,229

断层 250,252,264

断层结构 262

断层稳定性标准 257

断层走滑 265

分散断层 265

逆断层 265

正断层 265

断层表面 267

断层表面加速度 267

断层表面速度 246

多相材料 111,117

E

Ertel 169

Euler, Leonard 3

二硫化钼 171

F

法向接触 7,81

黏着法向接触 7,56

范德华力 20,22,27,57

分岔集 129-131

复数剪切模量 179,180,182,190,
195,197,199

G

Goodyear 178

Greenwood 5,63

Grosch 5,195

Gutenberg-Richter 定律 253,265

高弹体 106,177,195,216

高弹体黏弹性质 202

滚动接触 91,92

滚动阻力 200

H

Hamrock 170

Hardy 5,167

Hertz, Heinrich 6

Holm 214

Hook, Robert 4

后期滑动 254,259,260

混合摩擦 5,137,163,167

活化体积 166

活化能 166,189

J

Jaeger 154

JKR 理论 6,56,57

Johnson 6

棘轮 128

集中电阻 69

记忆函数 179

尖叫 136,143

主动抑制尖叫 141

尖叫被动抑制 141

剪切模量 9,26,82,179

静态剪切模量 179,202

降维方法 234,237,241,246

接触 1,5

切向接触 61,81,82,85

滚动接触 91,92

热接触 63,69,71

电接触 63,69

接触长度 63,70,109

接触刚度 7,14,15

接触角 33

滞后接触角 35

接触理论 46,64

Greenwood-Williamson 接触理论
(即 GW 模型) 64

赫兹接触理论 46,64

节点-面公式 235

金属皂 112,168

近似半空间 23,43

静摩擦力 3,4,81,128,226,251

K

Kendall 6,23,43

Kragelski 215

Kramers-Kronig 关系 181

Kruschov, M. 6

抗磨性 178,210

可移动元胞自动机法 237

库仑断裂准则 263,264

块介质 262

L

Lennard-Jones 势 20

Lifschitz 27

流体 159,161,164

牛顿流体 165,166

流变学 187,188

橡胶流变学 186

润滑剂流变学 166

流变学模型 184-186,247

硫化 178

M

Marone 255

Maugis 203

Maxwell 单元 185,190

Morin 4

MoS₂ 171

Müller 6,56

Müser, M. 275

毛细力 32,33,37,38

密封 2,72

面-面公式(Mortar 法) 235

摩擦 1,2,4

低磨损摩擦 215

动摩擦 4,103,104

干摩擦 3,4,85,102,159,237

混合摩擦 5,137,163,167

静摩擦 4,32,35,103,104,234,
254,266

库仑摩擦 85,102

摩擦焊 227

摩擦角 90,104

摩擦力 2,4,5,32,35,105,235

静摩擦力 3,4,81,128,226,251

摩擦系数 3,104,106,107,111,162,
173,204,246

动摩擦系数 103,104,113,265,266

静摩擦系数 103,104

内摩擦系数 263

磨损性 216,217

磨损 2,3,6,92,107,208

搓板型磨损 156

腐蚀磨损 209,212

两体磨损 210

黏着磨损 208,209,212

磨粒磨损 6,209

三体磨损 210

磨损方程 210,216

磨损系数 168

黏着磨损系数 214

磨粒磨损系数 210

N

Navier-Stokes 方程 152,160

纳米机械 128

内部状态变量 145

能量密度 9

黏滑 135,251

黏弹性材料 178,182,193,247

黏着 2,3,19,23,25,246

粗糙表面的黏着 73

黏着系数 76

弹性体之间的黏着 56

黏着力 8,19,31,59

扭转 83

O

Obreimov 62

Ostermeyer, G. P. 276

P

Persson 5

Petrov, N. 4

Pitaevskii 27

Prandtl-Tomlinson 模型 121,122

Prony 级数 189,190

佩克莱特数 154

Q

牵引力-打滑曲线 96

前期滑动 254,261

前震 262

切向接触 61,81,82,85

无滑动切向接触 84

屈服应力 9,175,217

曲率半径 12,35,64,242

高斯曲率半径 40,48,53

R

Rabinowicz 6

Reynolds, Osborne 4

Riedler 153,154

Robbins, M. O. 275

Roberts 6,43,56

Ruina 254

热扩散率 154

热循环蠕动 116

任意拉格朗日-欧拉法 235

蠕流 171,280

润滑 1,3,39,208,215,246

流体动力润滑 5,159,161

润滑边界层(边界润滑) 167

润滑剂 111,171

固体润滑剂 170,171

润滑剂流变学 166

S

Schallamach 波 218

Scholz, C. H. 277

Stribeck 5

Stribeck 曲线 137,163

熵弹性 178

渗透深度 204,245

绳摩擦 114

失稳 134,137-139,146,218,230

弹性失稳 125,127,128

摩擦失稳 107,136

塑性指数 68

瞬现温度 154

T

Tabor 5

Tomlinson 模型 120,121

Toporov 6

弹性半空间 13,43,44,50

弹性地基 204

弹性流体动力学 168

弹性失稳 125,127,128

U

Urbakh, M. 275

W

Wallaschek 223

Wenzel 38

Williams-Landel-Ferry 函数 203

Williamson 5

WLF 方程 188

稳定性 136,256

无回声室 140

X

橡胶 19,26,28,186,195

橡胶摩擦 5,104,195

行波电机 220

Y

压力分布 45,60

赫兹压力分布 46,51,52,90

移位函数 187,188,199

硬度 6,10,15,16,69,110,111,215

有限元方法 235

有效应力张量 262

余震 262

Z

主曲率半径 36,48,243

状态变量 145

自旋 101

自锁 112,113,148

自锁-滑动 135,147,148

组合曲线 188,189

阻尼 132,139

临界阻尼 140,141

负阻尼 137,139

轴承材料 111

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 接触力学与摩擦学的原理及其应用

作者= (德) 波波夫著

页码= 2 8 4

I S B N = 2 8 4

S S 号 = 1 2 8 5 8 1 9 1

d x N u m b e r = 0 0 0 0 0 8 1 9 0 4 4 4

出版时间 = 2 0 1 1 . 1 0

出版社 = 该引擎未能查询到

定价：6 0 . 0 0

试读地址 = [http://book.szdnnet.org.cn/views/specif
ic/2929/bookDetail.jsp?dxNumber=00000819044
4&d=E8CFE6EA667E0F00F4F48584D0291954&fenlei
=1302040305#ctop](http://book.szdnnet.org.cn/views/specif
ic/2929/bookDetail.jsp?dxNumber=00000819044
4&d=E8CFE6EA667E0F00F4F48584D0291954&fenlei
=1302040305#ctop)

全文地址 = [http://png8.5read.com/image/ss2jpg.dll
?did=b1&pid=FC48CC941AAEC8EF053F7FE8A0D4700
9C0A33C1DEB45D432C6FBD1D6A2B447F17DB088DB1E
13A3E09A12E646233DA8E018198D87A28351BCCE0A5
20B2E4AC850C32F5EDBBE87C4216598DD614D7CB4C7
817DAC7F5A5F874E5848EA87B9EB6477CDCC841041A
0F94AA66AD1675823092754D9&jid=/](http://png8.5read.com/image/ss2jpg.dll
?did=b1&pid=FC48CC941AAEC8EF053F7FE8A0D4700
9C0A33C1DEB45D432C6FBD1D6A2B447F17DB088DB1E
13A3E09A12E646233DA8E018198D87A28351BCCE0A5
20B2E4AC850C32F5EDBBE87C4216598DD614D7CB4C7
817DAC7F5A5F874E5848EA87B9EB6477CDCC841041A
0F94AA66AD1675823092754D9&jid=/)