
CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\frac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$, 则这两直线的位置关系为 ().
- A. 相交
B. 平行
C. 重合
D. 异面
2. 设函数 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^{xz} - 1$ 在点 $P(0, 1, 1)$ 附近满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 则下列说法错误的是 ().
- A. F 在点 P 处可微
B. $\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_P = 0$
C. $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_P = -2$
D. $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_P = \frac{1}{2}$
3. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) d\sigma = ()$.
- A. $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma$
B. $2 \iint_{D_1} xy d\sigma$
C. $\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) d\sigma$
D. 0
4. 已知函数 $f(x) = 1 - x (0 \leq x \leq \pi)$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (-\infty < x < \infty)$, 其中 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots)$, 则 $S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ()$.
- A. $-\frac{\pi}{2} - 1$
B. $-\frac{\pi}{2} + 1$
C. $\frac{\pi}{2} - 1$
D. $\frac{\pi}{2} + 1$

5. 设 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_{\Gamma} (y + 2z) \, ds = (\quad)$.

A. π

B. 2π

C. $-\pi$

D. 0

6. 关于级数的描述, 下列命题中正确的是 ().

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$, 则 $\oiint_S \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \, dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $P_0(1, 1, 2)$ 的法平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $\{x^{2023} + 2xy^3, ax^2y^2 - y^{2024}\}$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的梯度, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^{2n+1}$ 的和函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 一直线过点 $B(1, 2, 3)$ 且与向量 $s = (6, 6, 7)$ 平行, 求点 $A(3, 4, 2)$ 到此直线的距离 d .

12. 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}}$, 求 dz , $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)}$.

13. 求曲线积分 $I = \int_L (y^2 - \cos y) dx + x \sin y dy$, 其中有向曲线 L 为沿着正弦曲线 $y = \sin x$, 由点 $O(0, 0)$ 到点 $A(\pi, 0)$.

14. 求由曲面 $2z = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体 Ω 的体积 V .

15. 设 S 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成的闭曲面的外侧, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是 S 外法线的方向余弦, 求

$$I = \oiint_S [(x^3 + z^2) \cos \alpha + (y^3 + x^2) \cos \beta + (z^3 + y^2) \cos \gamma] dS.$$

16. 设 $f(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$, 将 $f(x)$ 展开成关于 x 的幂级数, 并求 $f^{(20)}(0)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 空间曲线 $L: x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$, $P_0(1, 2, -2)$ 为曲线 L 上的一点, 求 u 在 P_0 处沿曲线 L 的切向量方向 (t 增大的方向) \boldsymbol{l} 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{P_0}$, 并求函数 u 在 $P_0(1, 2, -2)$ 处的最大变化率.
18. 设函数 $f(x, y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}f(x, y) = (2ax + by) \mathrm{d}x + (2by + ax) \mathrm{d}y$ (a, b 为常数), 且 $f(0, 0) = -3$, $f'_x(1, 1) = 3$, 求点 $(-1, -1)$ 到曲线 $f(x, y) = 0$ 上的点的距离的最大值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 证明: $1 \leq \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq 2$.
20. 设 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} (n = 2, 3, \dots)$, 证明: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

显然 L_1 与 L_2 不平行、重合. 联立

$$L_1 : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 1, 2), \quad L_2 : (x, y, z) = (0, -1, 2) + s(1, 3, 3)$$

$$\text{解得 } \begin{cases} s = 1, \\ t = 2 \end{cases}, \text{ 所以两直线相交于点 } (1, 2, 5).$$

2. **Solution.** C.

在 $P(0, 1, 1)$ 处,

$$F_x = 2, \quad F_y = -1, \quad F_z = 0.$$

因为 $F_y \neq 0$, 可把 y 看作 x, z 的函数, 且

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = 2.$$

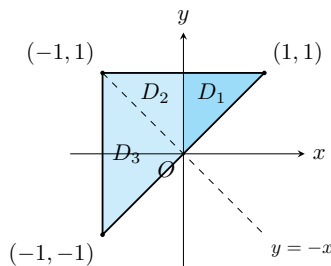
故选项 C 中的 -2 错误.

3. **Solution.** A.

如图, 用直线 $y = -x$ 将三角形区域 D 分为 D_2 和 D_3 ,

则由对称性可知

$$\begin{aligned} \iint_D (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma &= \iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma \\ &\quad + \iint_{D_3} (xy + \cos x \sin y) \, d\sigma \\ &= \iint_{D_2} \cos x \sin y \, d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, d\sigma. \end{aligned}$$



4. **Solution.** C.

该正弦级数表示函数 $f(x) = 1 - x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的奇延拓. 因而

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

5. **Solution.** D.

由轮换对称性可知

$$\oint_{\Gamma} x \, ds = \oint_{\Gamma} y \, ds = \oint_{\Gamma} z \, ds$$

所以

$$\oint_{\Gamma} (y + 2z) \, ds = \oint_{\Gamma} (x + y + z) \, ds = 0.$$

6. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum u_n$ 收敛, 但 $u_n^2 = \frac{1}{n}$, $\sum u_n^2$ 发散;

对于 B 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum u_n$ 发散;

对于 C 选项, 考虑 $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^{n-1}$, 则 $\sum (u_n + v_n) \equiv 0$ 收敛, 但 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 均发散;

但 $\sum u_{2k} = \sum \frac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \frac{1}{2k-1}$ 均发散;

对于 D 选项, 若 $\sum a_n^2$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) < \infty,$$

因而 $\sum \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{13\pi R^4}{9}$.

由对称性可知

$$\oiint_S x^2 \, dS = \oiint_S y^2 \, dS = \oiint_S z^2 \, dS = \frac{1}{3} \oiint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS.$$

又球面上 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 而 $|S| = 4\pi R^2$, 所以

$$\oiint_S x^2 \, dS = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

因而

$$\iint_S \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \, dS = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{4\pi R^4}{3} = \frac{13\pi R^4}{9}.$$

8. **Solution.** $x - y = 0$.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $G(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$, 则两曲面的法向量可取为

$$\nabla F = (2x, 2y, -1), \quad \nabla G = (4x, 4y, -2z).$$

在 $P_0(1, 1, 2)$ 处切线的方向向量可取为 $\mathbf{s} = \nabla F \times \nabla G = (2, 2, -1) \times 4(1, 1, -1) = 4(-1, -1, 0)$,
因此法平面方程为

$$x - y = 0.$$

9. **Solution.** 3.

记 $P = x^{2023} + 2xy^3$, $Q = ax^2y^2 - y^{2024}$, 则 $\text{grad}u(x, y) = \{P, Q\}$ 等价于 $du = Pdx + Qdy$, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{2023} + 2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2 - y^{2024}),$$

即

$$6xy^2 = 2axy^2.$$

因此 $a = 3$.

10. **Solution.** $xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 计算

$$\overrightarrow{BA} = (2, 2, -1), \quad |\mathbf{s}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11.$$

则点到直线的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{BA} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(2, 2, -1) \times (6, 6, 7)|}{11} \\ &= \frac{|4(1, -1, 0)|}{11} = \frac{20\sqrt{2}}{11}. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 由链式法则,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \cdot \frac{-\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = (2x - y)e^{-\arctan \frac{x}{y}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \cdot \frac{\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = (2y + x)e^{-\arctan \frac{x}{y}}. \end{aligned}$$

因而

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = e^{-\arctan \frac{x}{y}} [(2x - y)dx + (2y + x)dy].$$

由 $z_x(x, y) = (2x - y)e^{-\arctan \frac{x}{y}}$ 可知 $z_x(0, y) = -y \cdot e^{-\arctan 0} = -y$, 所以 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)} = -1$.

13. **Solution.** 设

$$P = y^2 - \cos y, \quad Q = x \sin y.$$

将曲线 L 与有向线段 AO 补成闭曲线, 围成区域记为 D . 由 Green 公式,

$$\oint_{L+AO} P dx + Q dy = - \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

因为

$$Q_x - P_y = \sin y - (2y + \sin y) = -2y,$$

故

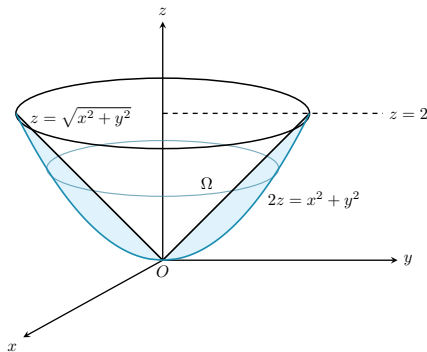
$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D y \, dx \, dy - \int_{\pi}^0 (-1) \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y \, dy - \pi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 联立 $2z = x^2 + y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 得 $z = 0$ 或 $z = 2$,

所以 Ω 在 xOy 平面上的投影为圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq 4$,

积分区域 Ω 如图所示. 用柱坐标代换,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D dx \, dy \int_{\frac{r^2}{2}}^r dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r - \frac{r^2}{2} \right) r \, dr \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



15. **Solution.** 记 S 所围成的区域为 Ω . 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S [(x^3 + z^2) \cos \alpha + (y^3 + x^2) \cos \beta + (z^3 + y^2) \cos \gamma] \, dS \\ &= \oiint_S (x^3 + z^2) \, dy \, dz + (y^3 + x^2) \, dz \, dx + (z^3 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} [3x^2 + 3y^2 + 3z^2] \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

用球坐标代换,

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \\ &= \frac{6\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{6\pi}{5} (1 - \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{3(2 - \sqrt{2})\pi}{5}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 由

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1,$$

令 $t = \frac{x}{4}$, 并对两边求导, 得

$$\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x}{4} \right)^n, \quad |x| < 4.$$

因此

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{4^{n+2}},$$

所以

$$f^{(20)}(0) = \frac{21!}{4^{22}}.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 点 $P_0(1, 2, -2)$ 对应参数 $t = 1$. 曲线 L 的切向量为

$$\tau = (1, 4, -8), \quad \tau_0 = \frac{1}{9}(1, 4, -8).$$

计算

$$\nabla u = \left(\frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

在 P_0 处

$$\nabla u(P_0) = \left(\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right).$$

因而沿切线方向的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \nabla u(P_0) \cdot \tau_0 = \left(\frac{8}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{27} \right) \cdot \frac{1}{9}(1, 4, -8) = -\frac{16}{243}.$$

最大变化率即

$$|\nabla u(P_0)| = \frac{1}{27} \sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

18. **Solution.** 由题意

$$f_x = 2ax + by, \quad f_y = 2by + ax.$$

因为 $f_{xy} = f_{yx}$, 故 $a = b$. 又

$$f_x(1, 1) = 2a + b = 3,$$

所以 $a = b = 1$. 于是

$$df = (2x + y)dx + (x + 2y)dy = d(x^2 + xy + y^2),$$

并由 $f(0, 0) = -3$ 得

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3.$$

曲线 $f(x, y) = 0$ 即

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

在曲线 $f(x, y) = 0$ 上任取一点 (x, y) , 则 $(-1, -1)$ 到该点的距离为 $d = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$.

用 Lagrange 乘数法, 设 $F(x, y, \lambda) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x+1) + \lambda(2x+y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y+1) + \lambda(x+2y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}, \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases}, \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

计算 $d(1, 1) = 2\sqrt{2}$, $d(-1, -1) = 0$, $d(2, -1) = 3$, $d(-1, 2) = 3$, 所以最大值为 3.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由轮换对称性,

$$\iint_D \cos y^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos x^2 \, dx \, dy.$$

所以

$$\iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, dx \, dy = \iint_D (\cos x^2 + \sin x^2) \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_D \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \, dx \, dy.$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \, dx \, dy &\leq \iint_D \sqrt{2} \sin \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \, dx \, dy \leq \iint_D \sqrt{2} \cdot 1 \, dx \, dy, \\ 1 &\leq \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, dx \, dy \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

20. **Proof.** $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{-\frac{1}{2}},$

利用 Taylor 公式 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

由于 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 都收敛, 所以 $\sum a_n$ 收敛.