
CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是【 】.
- A. 无界的但不是无穷大量 B. 无穷大量
C. 有界的但不是无穷小量 D. 无穷小量
2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, 则【 】.
- A. 对任意正整数 n , 有 $a_n < b_n$ B. 对任意正整数 n , 有 $b_n < c_n$
C. 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 发散 D. 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散
3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 且 $f'''(x_0) > 0$, 则【 】.
- A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
4. 若 $f'(2x) = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 则 $\int f(x) dx =$ 【 】.
- A. $3x - e^{-\frac{x}{2}} + C$ B. $3x - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$
C. $3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$ D. $3x - 4e^{-\frac{x}{2}} + C$
5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 则【 】.
- A. $f(2) < 2f(1)$ B. $f(2) > 2f(1)$ C. $2f(2) < f(1)$ D. $2f(2) > f(1)$
6. 下列反常积分收敛的是【 】.
- A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} (x > 1)$ 的渐近线.

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \cdots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right).$

13. 设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可以确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$

14. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 的积分曲线 $y = y(x)$, 使其在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^3 - 3x + 1$ 在该点处的切线重合.

15. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt (0 \leq x \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的最值.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$, $F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$. 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

18. 设曲线 $y = y(x)$ 是第一象限内的连续曲线, 点 $A(0, 1), B(1, 0)$ 分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点. 点 $M(x, y)$ 为曲线 AB 上的任意一点, 过 $M(x, y)$ 作 x 轴的垂线, 与 x 轴交于点 C , O 为坐标原点, 已知梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$ ¹. 求 $y = y(x)$ 与 y 轴及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$, $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

¹此处有误, 应改为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

当 $x = \frac{1}{k\pi}, k \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \equiv 0$; 当 $x = \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi}, k \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$,

所以函数 $f(x)$ 无界, 但不是无穷大量.

2. **Solution.** D.

极限只描述数列在 n 趋近于无穷大时的行为, 所以 A, B 错误;

取 $a_n \equiv 0$, 则 $a_n \cdot c_n \equiv 0$, 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 收敛, 所以 C 错误;

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$, 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散, 所以 D 正确.

3. **Solution.** D.

利用 Taylor 公式, $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f'''(\xi)(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}f'''(\xi)(x - x_0)^2$,

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间, 故易见 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值.

另一方面, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta)(x - x_0)^3 = \frac{1}{6}f'''(\eta)(x - x_0)^3$,

其中 η 介于 x 和 x_0 之间, 故易见 $f(x_0)$ 既不是 $f(x)$ 的极大值, 也不是 $f(x)$ 的极小值.

由于 $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 所以 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧变号, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

4. **Solution.** C.

方程 $f'(2x) = e^{-x}$ 两边积分得 $f(2x) = -2e^{-x} + C$, 又因为 $f(0) = 1$, 所以 $C = 3$,

故 $f(2x) = -2e^{-x} + 3$, $f(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + 3$. 所以 $\int f(x)dx = 3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$.

5. **Solution.** A.

$f(x)$ 是上凸的, 所以 $\frac{f(0) + f(2)}{2} < f(1)$, 即 $f(2) < 2f(1)$.

6. **Solution.** D.

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1, \text{ 所以 } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \text{ 收敛.}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}. \text{ 当 } x=2 \text{ 时, } t=1, y=f(2)=3, f'(2) = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1.$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2)}{\frac{1}{n}} = f'(2) = 1.$$

8. **Solution.** $\frac{1}{3}$.

$$\text{令 } f(x)=2 \text{ 得 } x=0, f'(x)=3e^{-9x^2}, \text{ 所以 } g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

9. **Solution.** $\frac{\pi}{4-\pi}$.

$$\text{设 } \int_0^1 f(x) dx = C, \text{ 则 } f(x) = \frac{1}{1+x^2} + C\sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{方程两边从 } 0 \text{ 积分到 } 1 \text{ 得 } C = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + C \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}C, \text{ 解得 } C = \frac{\pi}{4-\pi}.$$

10. **Solution.** 4.

$$y' = \sqrt{\sin x}, \text{ 所以 } ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+\sin x} dx = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx,$$

$$\text{故 } s = \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^\pi \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 4.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \rightarrow +\infty$, 所以 $x=1$ 是曲线的竖直渐近线.

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1, \text{ 且}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{1-t}} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(\sqrt{1-t} - 1)}{t\sqrt{1-t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(-\frac{1}{2}t)}{t} = \frac{1}{2},$$

所以 $y = x + \frac{1}{2}$ 是曲线的斜渐近线.

12. **Solution.** 由定积分的定义,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \cdots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

13. **Solution.** 方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 两边微分, 得

$$e^{xy}(ydx + xdy) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2} dy = 0,$$

当 $x=0$ 时, $y=1$. 代入上式得 $dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dy = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$.

14. **Solution.** 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

对于 $f(x) = 2e^x$, $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y^* = Axe^x$,

代入方程得 $A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 2Axe^x = 2e^x$, 解得 $A = -2$,

所以非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x$.

曲线 $y = x^3 - 3x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 $(3x^2 - 3) \Big|_{x=0} = -3$,

所以有 $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2 = -3 \end{cases}$, 解得 $C_1 = 3$, $C_2 = -2$.

因此满足条件的积分曲线为 $y = 3e^x - 2e^{2x} - 2xe^x$.

15. **Solution.** 由题可知 $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x^2+2x}$, 所以

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) d(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3} f(x)(x-1)^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx.\end{aligned}$$

令 $u = -x^2 + 2x$, 则 $du = (-2x + 2)dx = -2(x-1)dx$, $(x-1)^2 = -u + 1$, 所以

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^2 e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (-u+1) e^u du = \frac{1}{6} \int_0^1 (e^u - ue^u) du \\ &= \frac{1}{6} \left[e^u \Big|_0^1 - (u-1)e^u \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{6} (e - 2).\end{aligned}$$

16. **Solution.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x^3 - t^3) dt + \int_x^1 (t^3 - x^3) dt \\ &= x^3 t \Big|_0^x - \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + \frac{t^4}{4} \Big|_x^1 - x^3 t \Big|_x^1 \\ &= \frac{3}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以 $f'(x) = 6x^3 - 3x^2 = 3x^2(2x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$.

计算 $f(0) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{32}$, $f(1) = \frac{3}{4}$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{32}$, 最大值为 $\frac{3}{4}$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x = 0$ 时, $F(0) = 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$ 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - \tan x] = 0$, 结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f(0) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = f'(0) - 1 = 1,$$

所以 $f'(0) = 2$. 当 $x \neq 0$ 时, 令 $u = xt$, 则 $du = xdt$, 所以

$$F(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \int_0^x f(u) \cdot \frac{du}{x} = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}.$$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}$, $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} - F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0) = 1$.

$$\text{所以 } F'(x) = \begin{cases} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x)$ 显然连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = f'(0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0) = 1,$$

因此 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution.** 由题可知点 C 的坐标为 $(x, 0)$, $S_{\text{梯形}OCMA} = \frac{1}{2}x(1+y)$, $S_{\text{曲边三角形}CBM} = \int_x^1 y dx$,

所以 $\frac{1}{2}x(1+y) + \int_x^1 y dx = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$. 方程两边求导得 $\frac{1}{2}(1+y) + \frac{1}{2}x \cdot y' - y = \frac{1}{2}x^2$, 即

$$y' - \frac{1}{x}y = x - \frac{1}{x}.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\frac{1}{x})dx} \left(C + \int \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{f(-\frac{1}{x})dx} dx \right) \\ &= x \left[C + \int \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \left(C + x + \frac{1}{x} \right) \\ &= x^2 + Cx + 1. \end{aligned}$$

将点 B 坐标 $(1, 0)$ 代入得 $C = -2$, 所以曲线 $y = y(x)$ 的解析式为 $y = x^2 - 2x + 1$.

因此旋转体的体积 $V = \int_0^1 2\pi xy(x)dx = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - 2x + 1)dx = \frac{\pi}{6}$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ 可知 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$, 结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$.

由积分中值定理, $\exists \eta \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, 使得 $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = f(\eta) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}f(\eta)$,

所以 $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = f(\eta)$, 由 Rolle 定理, $\exists \delta \in (\eta, 2)$, 使得 $f'(\delta) = 0$.

再由 Rolle 定理即得 $\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, \delta\right) \subset (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

20. **Proof.** 由 Taylor 公式, $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, 其中 ξ 介于 x 和 $\frac{1}{2}$ 之间.

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| \int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right] dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right] dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \right| = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$