

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2015-2016 学年第 1 学期

考试科目： 概率论与数理统计

考试类型：（闭卷）考试

考试时间： 120 分钟

学号 _____ 姓名 _____ 年级专业 _____

题号	一	二	三	总分
得分				
评阅人				

得分	
----	--

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1、下列命题正确的是(C)

(A) 若事件 A 发生的概率为 1，则 A 为必然事件；

(B) 若随机变量 X 与 Y 不独立，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ 不一定成立；

(C) 若 X 是连续型随机变量，且 $f(x)$ 是连续函数，则 $Y=f(X)$ 不一定是连续型随机变量；

(D) 设 A, B 是任意两个事件，则 $\bar{A}B=A\cup B$.

2、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+6x-9}$ ，若 $P(X>C)=P(X\leq C)$ ，则 C 的值为(B).

(A) 0; (B) 3; (C) $-\sqrt{3}$; (D) -3.

3、设总体 $X\sim N(0,1)$ ， (X_1, X_2, \dots, X_n) 是其简单随机样本， \bar{X}, S^2 分别是其样本均值和样本方差，则下列各式正确的是(D).

(A) $\bar{X}\sim N(0,1)$;

(B) $n\bar{X}\sim N(0,1)$;

(C) $\frac{\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$;

(D) $(n-1)S^2\sim \chi^2(n-1)$.

4、设随机变量 $X\sim N(0,1)$ ， $Y\sim N(0,1)$ ，则下列结论正确的是(D)

(A) $X+Y$ 服从正态分布；

(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

(C) X^2/Y^2 服从 F 分布；

(D) X^2 和 Y^2 均服从 χ^2 分布.

5、在假设检验的 U 检验法中, 对给定的检验水平 α , 下列判断正确的是(D).

(A) 若 $H_0: \mu = \mu_0$, 对 $H_1: \mu \neq \mu_0$, 则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| > u_\alpha\}$,

(B) 若 $H_0: \mu \geq \mu_0$, 对 $H_1: \mu < \mu_0$, 则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$,

(C) 若 $H_0: \mu \leq \mu_0$, 对 $H_1: \mu > \mu_0$, 则拒绝域为 $W = \{u \mid u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$,

(D) 若 $H_0: \mu = \mu_0$, 对 $H_1: \mu \neq \mu_0$, 则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$.

6、设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ 未知, 从中抽取容量为 16 的样本, 其样本均值为 \bar{X} , 样本方差为 S^2 , 则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是(C).

(A) $\bar{X} \mp \frac{S}{16} u_{0.025}$; (B) $\bar{X} \mp \frac{S}{16} t_{0.05}(n-1)$;

(C) $\bar{X} \mp \frac{S}{4} t_{0.025}(n-1)$; (D) $\bar{X} \mp \frac{S}{4} u_{0.025}$.

得分	
----	--

二、填空题 (本大题共 7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

1、随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立并且服从同一分布, 数学期望为 μ , 方差为 σ^2 ,

这 n 个随机变量的简单算术平均数为 \bar{X} , 则 $D(X_i - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$.

2、若事件 A 和 B 相互独立, $P(A)=\alpha$, $P(B)=0.3$, $P(\bar{A} \cup B)=0.7$, 则 $\alpha = \frac{3}{7}$.

3、设 $X \sim N(10, \sigma^2)$, 且 $P(10 < X < 20) = 0.3$, 则 $P(0 < X < 10) = 0.3$.

4、设某物体的质量 $X \sim N(\mu, 0.01)$, 为使未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的长度不超过 0.1, 则至少应测量 16 次.

5、设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$, 则 $P\{0.5 \leq X \leq 2.5\} =$

0.5.

6、某机器生产的零件长度 (cm) 服从参数为 $\mu = 10.05, \sigma = 0.06$ 的正态分布. 规定长度在范围 10.05 ± 0.12 cm 内为合格品, 则从中抽取一产品为不合格品的概率为 0.0456. (已知 $\Phi(2) = 0.9772$)

7、设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，其中

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{3}{12}X_3, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3,$$

$\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计，则其中 $\hat{\mu}_3$ 在 μ 的估计中最有效.

得分	
----	--

三、解答题（本大题共 6 小题，共 61 分）

1、甲、乙两人轮流投篮，甲先投. 一般来说，甲、乙两人独立投篮的命中率分别为 0.7 和 0.6. 但由于心理因素的影响，如果对方在前一次投篮中投中，紧跟在后面投篮的这一方的命中率就会有所下降，甲、乙的命中率分别变为 0.4 和 0.5. 求：

(1) 乙在第一次投篮中投中的概率；（5 分）

(2) 甲在第二次投篮中投中的概率.（5 分）

解：令 A_1 表示事件“乙在第一次投篮中投中”，

令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮中投中”， $i=1, 2$

$$\begin{aligned} (1) \quad P(A_1) &= P(B_1)P(A_1|B_1) + P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1}) \\ &= 0.7 \times 0.5 + 0.3 \times 0.6 = 0.53. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P(A_1) = 0.53, \Rightarrow P(\overline{A_1}) = 0.47$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1)P(B_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1}) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \\ &= 0.53 \times 0.4 + 0.47 \times 0.7 = 0.541. \end{aligned}$$

2、已知随机变量 X 服从在区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，令 $Y=2X+1$ ，求 Y 的概率密度函数.（10 分）

解：已知 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 1 \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-1}{2}\} = F_X\left(\frac{y-1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

因此 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < y < 3, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \dots\dots (5 \text{ 分})$$

3、设随机变量 X 的概率密度为： $f(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$ ，求：

(1) 常数 a ；(3 分)

(2) X 的分布函数 $F(x)$ ；(4 分)

(3) 条件概率 $P\left\{X > \frac{1}{2} \mid X \leq 1\right\}$ 。(4 分)

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 \left(a - \frac{a}{2}x\right) dx = \left(ax - \frac{a}{4}x^2\right) \Big|_0^2 = a = 1.$ (3 分)

即 $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ (4 分)

(3) $P\left\{X > \frac{1}{2} \mid X \leq 1\right\} = \frac{P\left\{\frac{1}{2} < X \leq 1\right\}}{P\{X \leq 1\}} = \frac{F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{F(1)} = \frac{5}{12}.$ (4 分)

4、已知健康人的红血球直径服从均值为 $7.2 \mu m$ 的正态分布，今在某患者血液中随机测得 9 个红血球的直径如下：7.8, 9.0, 7.1, 7.6, 8.5, 7.7, 7.3, 8.1, 8.0. 问该患者红血球平均直径与健康人的差异是否显著不同($\alpha = 0.05$)？(已知 $t_{0.025}(8) = 2.3060, t_{0.05}(8) = 1.860, t_{0.025}(9) = 2.262, t_{0.05}(9) = 1.833$)

解：由题意知,需检验假设:

$$H_0: \mu = 7.2; H_1: \mu \neq 7.2 \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

总体方差未知,所以选择统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

得拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

将 $n=9, t_{0.025}(8)=2.3060, s=0.5874, \bar{x}=7.9$, 代入上式得……4 分

$$|t|=3.5753 > 2.3060,$$

所以拒绝原假设, 即可认为患者红血球平均直径与健康人的差异是显著不同的.……2 分

5、设总体 X 的概率密度函数为 $f(x, \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$, 其中 θ 为未知参数, 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体的简单随机样本观测值, 试求未知参数 θ 的矩估计和极大似然估计. (10 分)

解: (1) $E(X) = \int_0^1 x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $E(X) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{x}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

可得参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} \right)^2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

(2) 似然函数为 $L(\theta) = (\sqrt{\theta})^n (x_1 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1)(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

将 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 求导并令其为 0 即得到似然方程

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + (\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \frac{1}{2\sqrt{\theta}} = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

解之得参数 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^{-2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

6、设某经销商与某出版社订购下一年的挂历, 根据该经销商以往多年的的经销经验, 他得出需求量分别为 150 本、160 本、170 本、180 本的概率分别为 0.1、0.4、0.3、0.2, 各种订购方案的获利 $X_i (i=1, 2, 3, 4)$ (百元) 是随机变量, 经计算各种订购方案在不同需求情况下获利的分布如下:

订购方案 需求数量及概率	需求 150 本 (概率 0.1)	需求 160 本 (概率 0.4)	需求 170 本 (概率 0.3)	需求 180 本 (概率 0.2)
订购 150 本获利 X_1	45	45	45	45
订购 160 本获利 X_2	42	48	48	48
订购 170 本获利 X_3	39	45	51	51

订购 180 本获利 X_4	36	42	48	54
------------------	----	----	----	----

问: (1) 该经销商应订购多小本挂历, 可使期望利润最大? (5 分)

(2) 为使期望利润最大且风险最小, 经销商应订购多小本挂历? (5 分)

解 (1) 在这四种方案下期望利润分别为:

$$E(X_1) = 45 \times 0.1 + 45 \times 0.4 + 45 \times 0.3 + 45 \times 0.2 = 45, \dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_2) = 42 \times 0.1 + 48 \times 0.4 + 48 \times 0.3 + 48 \times 0.2 = 47.4, \dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_3) = 39 \times 0.1 + 45 \times 0.4 + 51 \times 0.3 + 51 \times 0.2 = 47.4, \dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_4) = 36 \times 0.1 + 42 \times 0.4 + 48 \times 0.3 + 54 \times 0.2 = 45.6 \dots 1 \text{ 分}$$

由于 $E(X_2) = E(X_3) > E(X_4) > E(X_1)$, 所以该经销商应订购 160 本或 170 本
可获最大期望利润.....1 分

(2) 现从这些可获最大期望利润的方案选择方差最小 (风险最小) 的订购方案, 因为

$$E(X_2^2) = 42^2 \times 0.1 + 48^2 \times 0.4 + 48^2 \times 0.3 + 48^2 \times 0.2 = 2250 \dots 1 \text{ 分}$$

$$Var(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = 2250 - 47.4^2 = 3.24 \dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_3^2) = 39^2 \times 0.1 + 45^2 \times 0.4 + 51^2 \times 0.3 + 51^2 \times 0.2 = 2262.6 \dots 1 \text{ 分}$$

$$Var(X_3) = E(X_3^2) - [E(X_3)]^2 = 2262.6 - 47.4^2 = 15.84 \dots 1 \text{ 分}$$

显然, $Var(X_2) < Var(X_3)$ 所以该经销商应订购 160 本风险最小, 且期望利润
高.....1 分