

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

1.2 事件



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 事件是样本空间的子集，表示我们关心的试验结果。
- ▶ 基本事件只包含一个样本点，复杂事件可包含多个样本点。
- ▶ 用变量描述随机试验结果，包括离散和连续两类。
- ▶ 理解必然事件、不可能事件、互斥事件、对立事件、相等事件。
- ▶ 通过子集、交集、并集、差集、补集等操作表示事件关系。

在本节中，我们将系统介绍概率论中的“事件”这一核心概念。事件是样本空间中的一个子集，表示我们在随机试验中关心的结果。我们通过掷色子的例子，演示了如何定义各种事件，并引入了基本事件、必然事件、不可能事件、互斥事件、对立事件、相等事件等重要类型。此外，本节还通过集合视角和韦恩图，直观展示了事件间的包含、交集、并集、差集等关系，为后续的概率计算奠定基础。

事件

事件 (event)，是指随机试验结果中我们所关心的结果。

上一节提过，在随机试验中，每一个可能结果都是一个**样本点**；所有**样本点**构成随机试验的**样本空间** Ω 。

事件就是随机试验若干样本点的集合；也就是说，我们可以把样本空间想成一个“全集”，而事件是这个全集的某个“子集”。

本书用大写斜体字母代表事件，比如 A 、 B 、 C 、 D 、 A_1 、 A_2 、 A_3 等等。

在一次随机试验中，我们可以根据感兴趣的情况，定义多个不同的事件。

比如，抛一枚硬币这个试验，可能的结果是“正面”或“反面”，那么我们可以定义事件 A 为“出现正面”，事件 B 为“出现反面”；还可以定义事件 C 为“出现正面或反面”，这其实就是整个样本空间。

再如，掷一颗色子，这个随机试验的样本空间是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，表示色子可能出现的六个不同点数。在这个样本空间里，我们可以定义各种事件，“点数为 1”是一个事件 $A = \{1\}$ ；“点数为 6”可以是一个事件， $B = \{6\}$ ；“点数为偶数”也是一个事件， $C = \{2, 4, 6\}$ ；事件 D 可以定义为“色子点数大于 3”，即 $D = \{4, 5, 6\}$ 。这四个事件具体如图 1 所示。

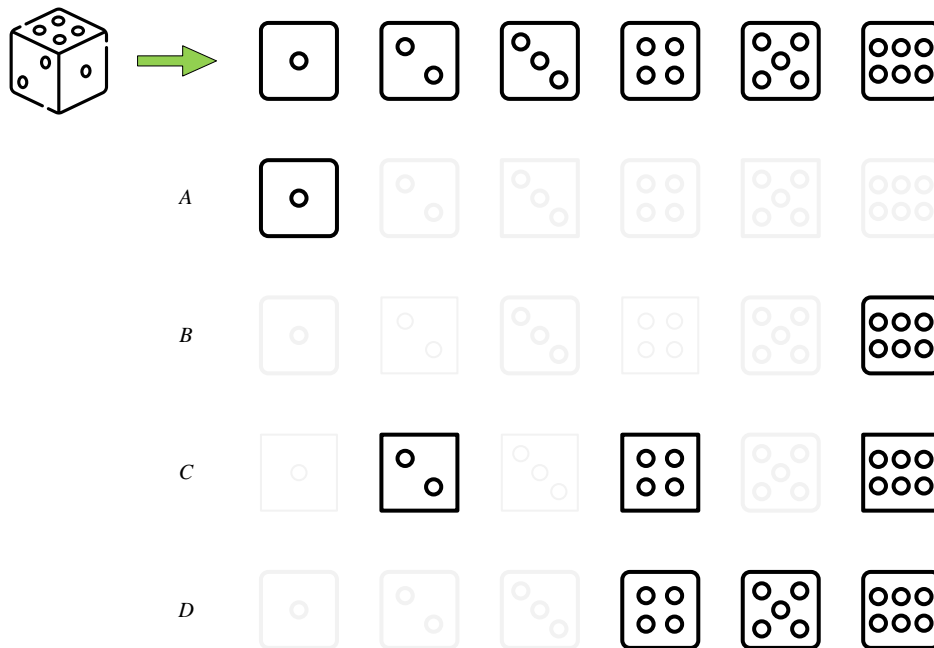


图 1. 掷一颗色子的不同事件

总结来说，随机试验中每一个我们关心的具体情况，都可以定义为一个事件，因此，一个随机试验很可能对应着不止一个我们感兴趣的事件。

掷两颗色子

沿用上一节的例子，掷两颗色子这个随机试验的样本空间 Ω 如图 2 所示。

图 2 中，横轴为第一颗色子点数，纵轴为第二颗色子点数。这个样本空间一共有 36 个样本点。而这个随机试验的各种事件（我们关心的结果）为这个样本空间的子集，即 36 个样本点的各种组合。

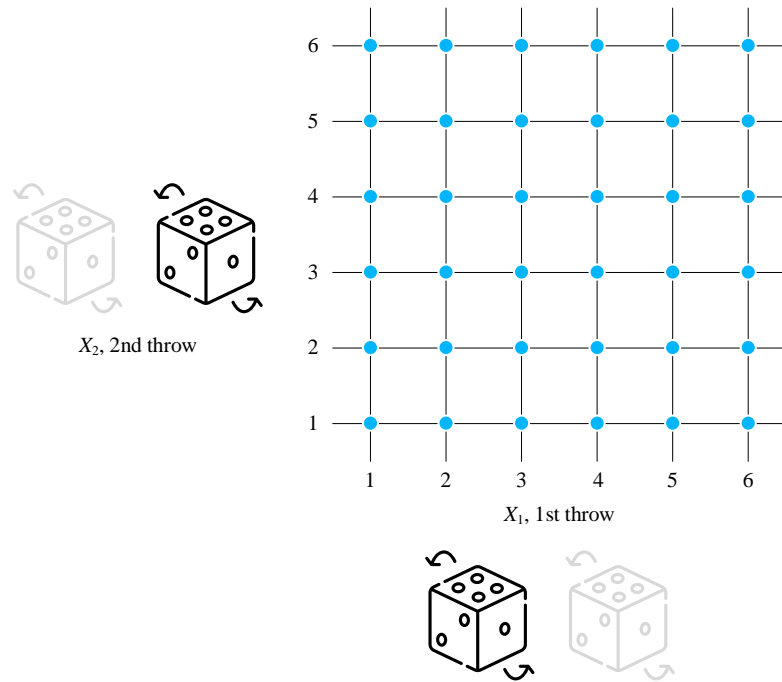


图 2. 掷两颗色子的样本空间

反复用文字描述“第一颗色子点数”、“第二颗色子点数”，相信大家也已经厌倦了。为了方便，我们用**随机变量** X_1 代表“第一颗色子点数”，用**随机变量** X_2 代表“第二颗色子点数”。

随机变量 (random variable) 是用来描述随机试验结果的变量，本书一般用大写斜体字母表示，比如 X 、 Y 、 Z 、 X_1 、 X_2 、 Y_1 、 Y_2 等等。

如图 2 所示， X_1 的取值为 1、2、3、4、5、6； X_2 的取值也是 1、2、3、4、5、6。

+ 随机变量有两种——离散随机变量、连续随机变量。如果随机变量的所有取值能够一一列举出来，可以是有限个或可数无穷个，这种随机变量被称作离散随机变量 (discrete random variable)。比如，抛一枚硬币，结果为 0 或 1。再如，掷一颗色子，点数为 1 到 6。与之相对的是，连续随机变量 (continuous random variable)。连续随机变量取值可能对应全部实数，或者数轴上某一区间。比如，温度、人的身高体重都是连续随机变量。再比如，鸢尾花花萼长度、花萼宽度、花瓣长度、花瓣宽度也都可以视作连续随机变量。

图 3 所示为掷两颗色子这个随机试验几个事件 (我们关心的结果)。

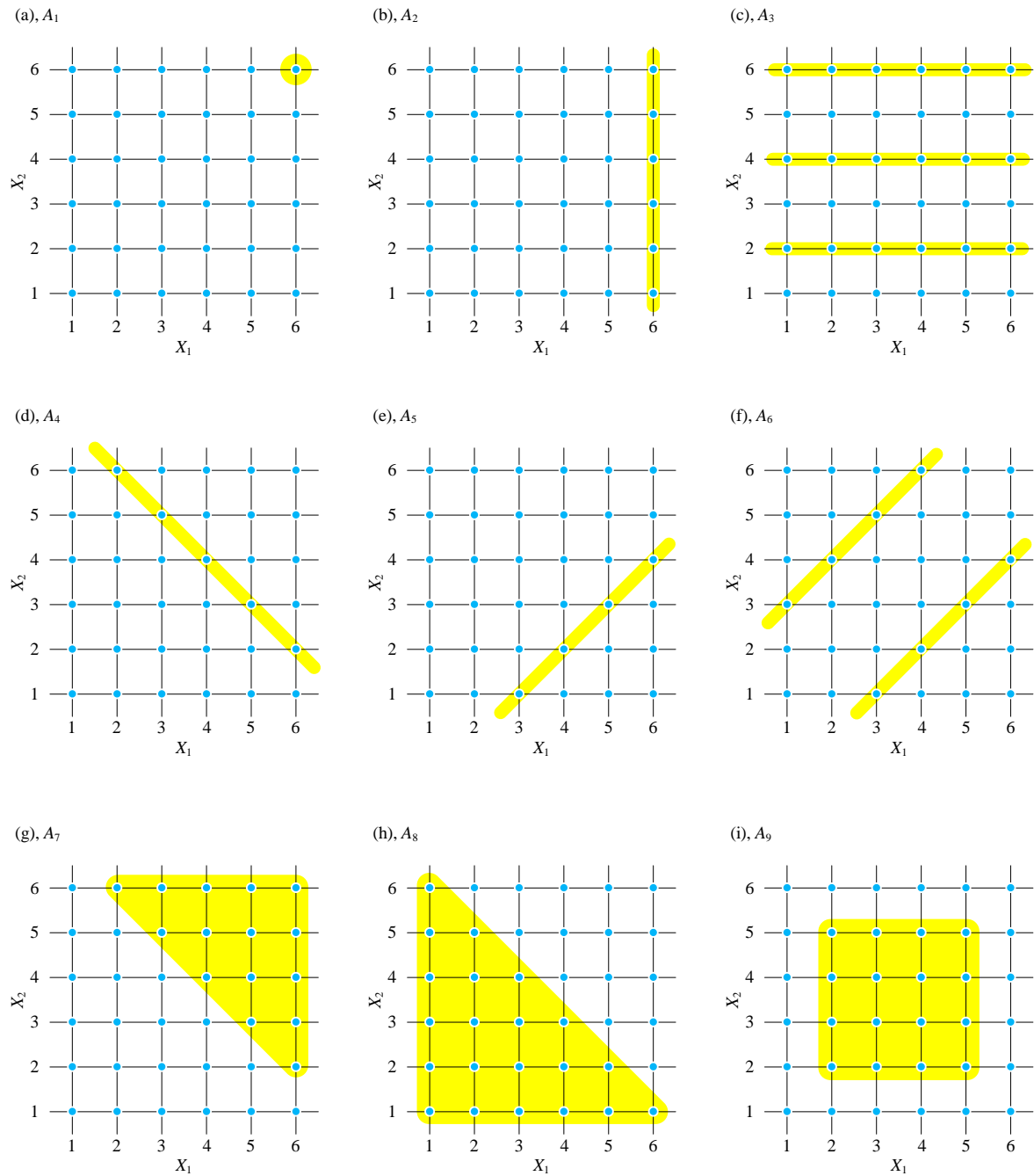


图 3. 掷两颗色子的样本空间中不同事件

下面，让我们聊聊图 3 中前几个事件。

如图 3 (a) 所示，这个事件的文字描述可以是“第一、二颗色子点数都为 6”，对应

$$X_1 = 6, X_2 = 6 \quad (1)$$

我们可以把这个事件定义为 $A_1 = \{(6, 6)\}$ ；显然， A_1 只有一个样本点，即 $\text{card}(A_1) = 1$ 。

图 3 (b) 的事件可以描述为“先后掷两颗色子，第一颗色子点数为 6 (也就是说，第二颗色子点数任意)”，对应 $X_1 = 6$ 。

$$X_1 = 6 \quad (2)$$

这个事件对应的集合为 $A_2 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ 。 A_2 有 6 个样本点，即 $\text{card}(A_2) = 6$ 。

? 请大家思考，“掷两枚色子，至少一颗色子点数为 6”这个事件在图 3 的图像如何？这个事件对应的集合是什么？集合中又多少个样本点？“掷两枚色子，仅有一颗色子点数为 6”如何？“掷两枚色子，最多有一颗色子点数为 6”又如何？

图 3 (c) 对应的事件可写成“先后掷两颗色子，第二颗色子点数为偶数”，对应

$$X_2 = 2, 4, 6 \quad (3)$$

A_3 这个事件有 18 个样本点，即 $\text{card}(A_3) = 18$ 。

图 3 (d) 对应的事件可以写成“先后掷两颗色子，两颗色子点数之和为 8”，对应

$$X_1 + X_2 = 8 \quad (4)$$

这个事件集合为 $A_4 = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\}$ ， $\text{card}(A_4) = 5$ 。

图 3 (e) 对应的事件文字描述为“先后掷两颗色子，第一颗色子点数比第二颗大 2”，对应

$$X_1 - X_2 = 2 \quad (5)$$

这个事件子集为 $A_5 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$ ， $\text{card}(A_5) = 4$ 。

图 3 (f) 对应的事件文字描述为“先后掷两颗色子，两颗色子点数之差 (的绝对值) 为 2”，对应

$$|X_1 - X_2| = 2 \quad (6)$$

表 1 给出了这个事件对应的集合。

? 表 1 还列出先后掷两颗色子这个随机试验中其他事件 (我们感兴趣的结果)，请大家逐一分析。

⚠ 注意，由于 X_1 、 X_2 均为离散随机变量，因此图 3 中事件子集并不是绿色高亮的整片区域，仅仅是若干散点。这些散点均位于横纵轴 1 ~ 6 整数交叉坐标。

表 1. 掷两颗色子试验中，我们感兴趣的事件

图	X_1, X_2	事件描述	事件集合	基数
图 3 (a)	$X_1 = 6, X_2 = 6$	第一、二颗色子点数都为 6	$A_1 = \{(6, 6)\}$	$\text{card}(A_1) = 1$
图 3 (b)	$X_1 = 6$	第一颗色子点数为 6	$A_2 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$	$\text{card}(A_1) = 6$
图 3 (c)	$X_2 = 2, 4, 6$	第二颗色子点数为偶数	$A_3 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$	$\text{card}(A_3) = 18$
图 3 (d)	$X_1 + X_2 = 8$	第一、二颗色子点数之和为 8	$A_4 = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\}$	$\text{card}(A_4) = 5$
图 3 (e)	$X_1 - X_2 = 2$	第一颗色子点数比第二颗大 2	$A_5 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$	$\text{card}(A_5) = 4$
图 3 (f)	$ X_1 - X_2 = 2$	两颗色子点数之差为 2	$A_6 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$	$\text{card}(A_6) = 8$
图 3 (g)	$X_1 + X_2 \geq 8$	两颗色子点数之和 不小于 8	$A_7 = \{(6, 2), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$	$\text{card}(A_7) = 15$

			$(5, 6), (6, 6)\}$	
图 3 (h)	$X_1 + X_2 < 8$	两颗色子点数之和小于 8	$A_8 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (1, 6)\}$	$\text{card}(A_8) = 21$
图 3 (i)	$1 < X_1 < 6,$ $1 < X_2 < 6$	两颗色子取值均在 $[2, 6]$ 区间	$A_9 = \{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$	$\text{card}(A_9) = 16$

基本事件、必然事件、不可能事件、互斥事件、对立事件、相等事件

本节前文提过，我们通过事件来描述随机试验中可能出现的结果。事件是样本空间的子集，不同类型的事件有不同的特点和关系。

只含有一个样本点的事件叫做**基本事件** (elementary event)。也就是说，每一个基本事件对应随机试验中一个最小、不可再分的结果。

比如，掷一颗色子的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ；其中， $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{4\}$ 、 $\{5\}$ 、 $\{6\}$ 都是基本事件。图 3 (a) 也是一个基本事件。

必然事件 (certain event) 是指随机试验中一定会发生的事件，也就是概率为 1 的事件。

如图 4 所示，掷一颗色子，得到点数大于 0，就是一个必然事件；因为在样本空间中，每个可能结果都满足这一条件。这个事件等于整个样本空间。

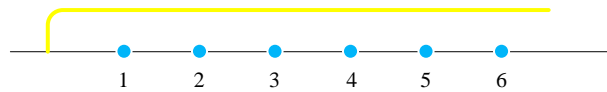


图 4. 必然事件：掷一颗色子，得到点数大于 0

不可能事件 (impossible event) 是指随机试验中一定不会发生的事件，对应空集 \emptyset 。如图 5 所示，掷一颗色子，得到点数大于 6，就是一个不可能事件；因为在色子的样本空间中没有满足条件的点数。



图 5. 不可能事件：掷一颗色子，得到点数大于 6

互斥事件 (disjoint event)，也称**不相容事件**，是指随机试验中不可能同时发生的事件。

用集合的语言来说，就是这些事件两两交集为空集。

如图 6 所示，掷一颗色子，如果定义事件 A 为“掷出的点数小于 3”，定义事件 B 为“掷出点数大于 4”，那么在一次掷骰子试验中，不可能同时掷出一个既是“小于 3”又“大于 4”的点数，所以事件 A 与事件 B 是互斥事件。



图 6. 互斥事件：掷出的点数小于 3；掷出点数大于 4

对立事件 (complementary event, opposite event)，也叫**逆事件**，指的是随机试验中不可能同时发生，且必有一个发生的两个事件。

如图 7 所示，掷一颗色子，事件 A 代表结果为奇数，事件 B 代表结果为偶数。显然，如果事件 A 发生，那么事件 B 必然不发生；如果事件 A 不发生，那么事件 B 必然发生。

换句话说，对立事件是互斥事件的特殊情况，它们不仅不能同时发生，而且它们的并集构成必然事件。

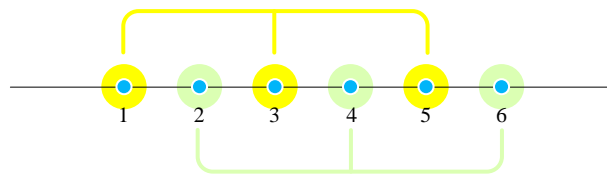


图 7. 对立事件：掷出的点数为奇数；掷出点数为偶数

简单来说，**相等事件** (equivalent event) 是逻辑上等价的事件，可以相互替代的。

比如，如图 8 所示，“掷一颗色子点数为奇数”、“掷一颗色子点数非偶数”就是相等事件。

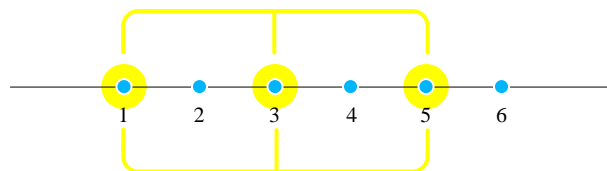


图 8. 相等事件：掷出的点数为奇数；掷出点数为非偶数

事件的集合运算、韦恩图

在概率论中，集合是我们理解随机现象的核心工具。无论是在构建样本空间，还是在定义、分析事件时，集合都提供了一种清晰的数学语言。通过集合的视角，我们不仅能描述事件之间的包含、互斥、对立等关系，还能借助集合的运算（如并集、交集、差集和补集）来刻画多个事件同时或分别发生的逻辑结构。

为了帮助理解事件之间的关系，我们常使用**韦恩图** (Venn diagram) 进行可视化。韦恩图通过不同集合的重叠或分离，形象地表示事件之间的交集、并集与差集：重叠的部分代表事件同时发生（交集），合并的区域表示至少有一个事件发生（并集），而不重叠的部分则对应某事件发生而另一个未发生的情况（差集）。

必然事件，即整个**样本空间** (sample space)。比如，前文提过的例子，掷一颗色子随机试验中，得到点数大于 0，这显然是个必然事件，对应韦恩图如图 9 所示。

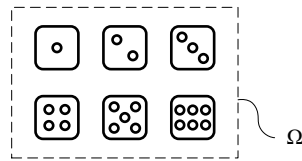


图 9. 必然事件

如图 10 所示，当我们说事件 B 包含事件 A 时，意思是所有可能导致事件 A 发生的结果，也一定会导致事件 B 发生。换句话说，只要事件 A 发生了，事件 B 也一定发生。

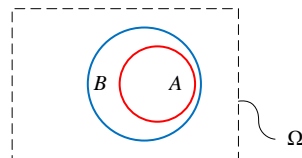


图 10. 包含事件的文氏图

如图 11 所示，掷一颗色子随机试验中，事件 A 为结果点数为 6，即 $A = \{6\}$ ；事件 B 为结果点数为偶数，即 $B = \{2, 4, 6\}$ 。也就是说，掷一颗色子，结果为 6 (事件 A 发生)，结果为偶数 (事件 B) 也就发生了。

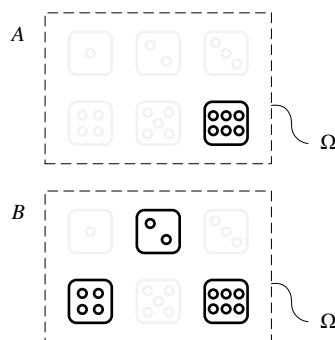


图 11. 事件 A 为结果点数为 6，事件 B 为结果点数为偶数

代码 1 判断图 11 中两个之间的包含关系，下面聊聊其中关键语句。

a 定义了一个集合 A ，其中只包含一个元素 6。在这里，集合 (set) 是一种 Python 数据类型，用来存储不重复的元素，常用于表示数学中的“集合”。因此，这行代码表示一个事件 A ：掷骰子的结果是 6。

b 定义了另一个集合 B ，其中包含三个元素 2、4、6。这代表一个事件 B ：掷出的结果是偶数。

c 使用了 Python 集合的方法 `.issubset()`，意思是“判断集合 A 是否是集合 B 的子集”。它会返回一个布尔值 (True 或 False)。如果 A 的所有元素都出现在 B 中，就返回 True，否则返回 False。因为 {6} 中的 6 确实在 {2, 4, 6} 中，所以结果会是 True。

d 中的 `A <= B` 的功能和 `.issubset()` 完全相同。

代码 1. 判断包含关系 | PS_Ch01_02_01.ipynb

```
## 定义事件A和事件B
a A = {6}
# 事件A: 掷出6
b B = {2, 4, 6}
# 事件B: 掷出偶数

## 判断包含关系
c A.issubset(B)

# 也可以写成
d A <= B
```

和事件

事件 A 与事件 B 为样本空间 Ω 中的两个事件， $A \cup B$ 代表 A 和 B 的**和事件** (union event)，指的是某次试验时，事件 A 或事件 B 发生 (图 12)；也就是说，A、B 可以同时发生，也可以任何一个发生。

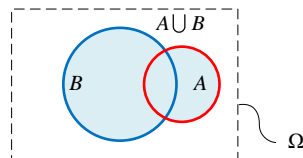


图 12. 和事件的文氏图

掷一颗色子随机试验中，如图 13 所示，定义事件 A 为结果点数小于 4，即 $A = \{1, 2, 3\}$ ；事件 B 为结果点数为偶数，即 $B = \{2, 4, 6\}$ 。A、B 的和事件为 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 。

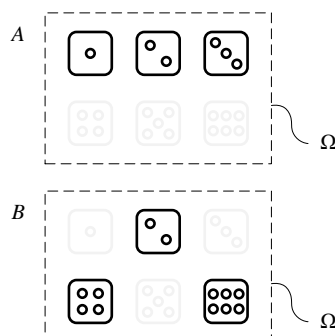


图 13. 事件 A 为结果点数小于 4，事件 B 为结果点数为偶数

代码 2 完成图 13 中 A 、 B 的和事件运算，请大家自行学习。

代码 2. 计算和事件 |  PS_Ch01_02_02.ipynb

```
## 定义事件A、事件B
a A = {1, 2, 3}
# 事件A: 点数小于4
b B = {2, 4, 6}
# 事件B: 点数为偶数

## 计算和事件 (并集)
c union = A | B

# 也可以写成
d A.union(B)
```

积事件

与之相对的，如图 14 所示， $A \cap B$ 代表 A 和 B 的**积事件** (intersection event)，指的是某次试验时，事件 A 和事件 B 同时发生。延续上例，如图 15 所示， $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 4, 6\}$ 。 A 、 B 的积事件为 $A \cap B = \{2\}$ 。

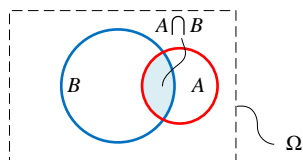
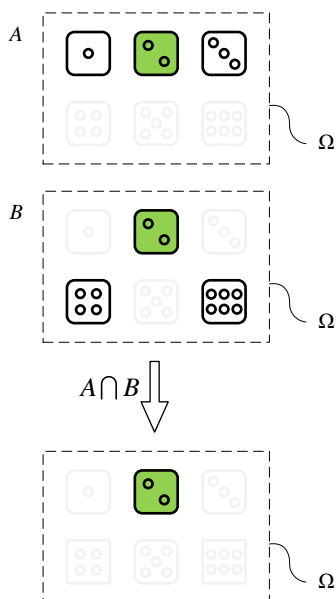


图 14. 积事件的文氏图

图 15. A 、 B 的积事件：事件 A 为结果点数小于 4，事件 B 为结果点数为偶数

代码 3 计算图 13 中定义 A 、 B 的积事件，请大家自行学习。

代码 3. 计算积事件 |  PS_Ch01_02_03.ipynb

```
## 定义事件A、事件B
a A = {1, 2, 3}
# 事件A: 点数小于4
b B = {2, 4, 6}
# 事件B: 点数为偶数

## 计算积事件（交集）
c A & B

# 也可以写成
d A.intersection(B)
```

互斥

如图 16 所示，事件 A 和事件 B **互斥** (mutually exclusive)，意味着 $A \cap B = \emptyset$ 。这意味着它们不可能同时发生。

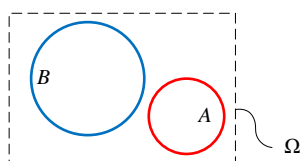
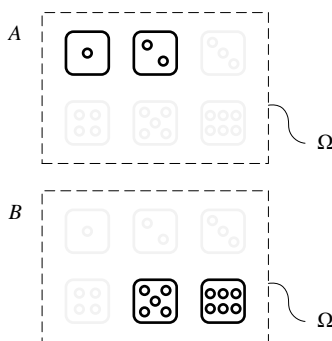


图 16. 互斥事件的文氏图

如图 17 所示，掷一颗色子随机试验中，定义事件 A 为结果点数小于 3，事件 B 为结果点数大于 4。显然，事件 A 和事件 B 不能同时发生，两者互斥。

? 请大家自行写代码计算图 17 中 A 、 B 事件的和事件、积事件。

图 17. 事件 A 为结果点数小于 3，事件 B 为结果点数大于 4

代码 4 判断图 17 中事件互斥。

代码 4. 判断事件互斥 | PS_Ch01_02_04.ipynb

```
## 定义事件A和事件B
a A = {1, 2}
# 事件A: 点数小于3
b B = {5, 6}
# 事件B: 点数大于4

## 判断是否为互斥事件
c A.isdisjoint(B)

# 交集为空集也代表互斥
d A & B
```

差事件

如图 18 所示，事件 A 与事件 B 的**差事件** (difference of events)，记作 $A - B$ ，是指在一次随机试验中，事件 A 发生而事件 B 不发生的所有结果所构成的事件。也就是说， $A - B$ 包含那些属于 A 但不属于 B 的样本点。差事件强调的是 A 独有的部分，当我们关心事件 A 的发生，但又排除了事件 B 对其的“干扰”时，就会用到这个集合运算。

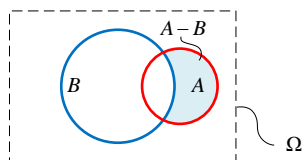
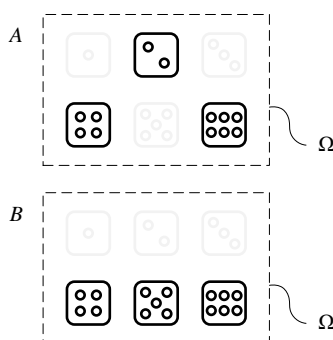


图 18. 差事件的文氏图

如图 19 所示，在掷一枚色子的试验中，定义事件 A 为“点数为偶数”，事件 B 为“点数大于 3”，那么差事件 $A - B$ 就是“点数为 2”。

? 请大家计算图 19 中的差事件 $B - A$ 。

图 19. 事件 A 代表结果为偶数，事件 B 代表点数大于 3

代码 5 计算图 19 中差事件 $A - B$ 。

代码 5. 计算差事件 | PS_Ch01_02_05.ipynb

```
## 定义事件A和事件B
a A = {2, 4, 6}
# 事件A: 点数为偶数
b B = {4, 5, 6}
# 事件B: 点数大于3

# 计算差事件
c A - B

# 也可以写成
d A.difference(B)
```

如图 20 所示，如果事件 A 和 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$ ，事件 A 与事件 B 互为**对立事件** (complementary Event)，即逆事件。即，对于任意一次试验，事件 A 和事件 B 有且仅有一个发生。

A 的对立事件 (补集) 也记作 \bar{A} ，即

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$\bar{A} = \Omega - A \quad (7)$$

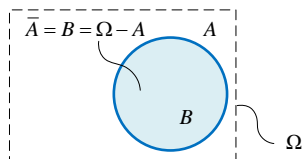
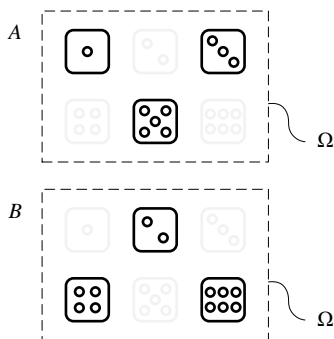


图 20. 逆事件的文氏图

如图 21 所示，掷一颗色子，定义事件 A 代表结果为奇数，事件 B 代表结果为偶数；事件 A 、 B 互为对立事件。

图 21. 事件 A 代表结果为奇数，事件 B 代表结果为偶数

代码 6. 判断对立事件



PS_Ch01_02_06.ipynb

```
## 定义样本空间与事件
Omega = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
# 样本空间
A = {1, 3, 5}
# 事件A: 奇数
B = {2, 4, 6}
# 事件B: 偶数

## 判断对立
# 判断集合交集是否为空，即判断互斥
a A & B == set()

# 判断集合的并集是否覆盖样本空间
b (A | B) == Omega

# 也可以判断B是否等于A的补集
c A_complement = Omega - A

# A的补集
d B == A_complement
```



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 连续抛两颗色子，请在图 2 上可视化如下事件：

- ▶ 第一、二颗色子点数都为 1；
- ▶ 第一颗色子点数为 1，第二颗色子点数为 6；
- ▶ 两颗色子都是奇数；
- ▶ 两颗色子点数之和为 7；
- ▶ 两颗色子点数之和大于 7；
- ▶ 两颗色子点数之差为 3；
- ▶ 两颗色子点数之差小于 3；
- ▶ 两颗色子点数的乘积为 6。

Q2. 连续抛三枚硬币，定义如下事件，请大家类似表 1 的表格比较这些不同结果。

- ▶ 全部都是正面。
- ▶ 全部都是反面。
- ▶ 至少有 2 个正面。
- ▶ 第二枚硬币的结果为反面。

Q3. 掷一颗色子，定义如下事件，手算完成集合运算：

- ▶ A ：点数为奇数； B ：点数为偶数；计算 A 、 B 的和事件、积事件；
- ▶ A ：点数为基数； B ：点数小于 4；计算 A 、 B 差事件 ($A - B$ 和 $B - A$)；
- ▶ A ：点数大于 3； B ：点数小于 4；判断 A 、 B 是否互斥；
- ▶ A ：点数大于 3；计算 A 的对立事件。

Q4. 编写 Python 代码完成 Q3. 运算。