

## 8

## Fundamentals of Stochastic Processes

## 随机过程入门

分析和模拟随时间变化的随机现象



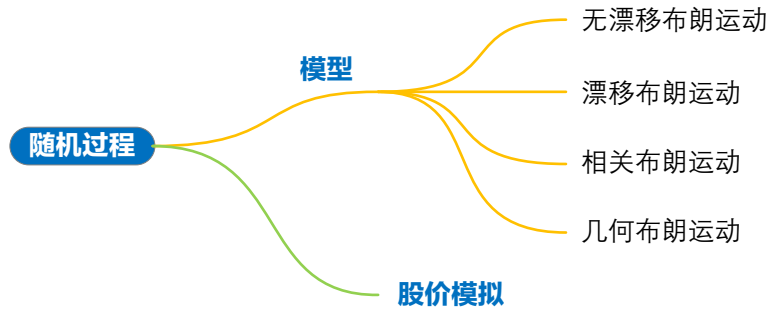
不断重复地观察这些运动给我极大的满足；它们并非来自水流，也不是源于水的蒸发，这些运动的源头是颗粒自发的行为。

*These motions were such as to satisfy me, after frequently repeated observation, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself.*

—— 罗伯特·布朗 (Robert Brown) | 英国植物学家 | 1773 ~ 1858



- ▶ `np.random.normal()` 产生服从正态分布随机数
- ▶ `matplotlib.patches.Circle()` 绘制正圆
- ▶ `seaborn.distplot()` 绘制频率直方图和 KDE 曲线
- ▶ `numpy.flipud()` 上下翻转矩阵
- ▶ `numpy.cumsum()` 累加



## 8.1 布朗运动：来自花粉颗粒无规则运动

1827 年，英国著名植物学家罗伯特·布朗通过显微镜观察悬浮于水中的花粉，发现花粉颗粒迸裂出的微粒呈现出不规则的运动，后人称之为**布朗运动** (Brownian motion)。这里一个有趣的细节是，实际上花粉自身在水中并没有呈现出布朗运动，而是其崩裂出的微粒。爱因斯坦在 1905 年第一个解释布朗运动现象。

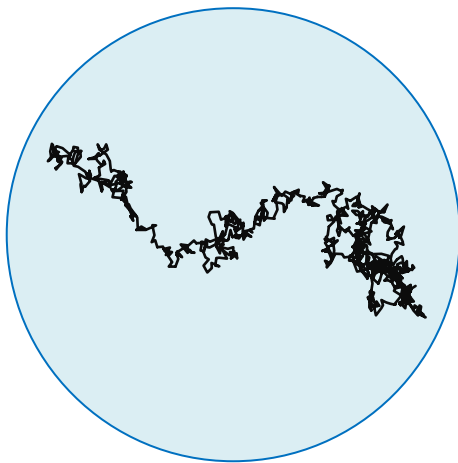


图 1. 平面上的随机运动



**罗伯特·布朗** (Robert Brown)

英国植物学家 | 1773 ~ 1858

丛书关键词：● 随机 ● 布朗运动 ● 几何布朗运动 ● 蒙特卡罗模拟



### 布朗运动定义

如果一个过程满足如下三个性质，则称  $X(t)$  为**布朗运动** (Brownian motion)。

第一，过程初始值为 0：

$$X(0) = 0 \quad (1)$$

第二， $X(t)$  几乎处处连续。

第三， $X(t)$  对应平稳独立增量。对于所有  $0 \leq s < t$ ,

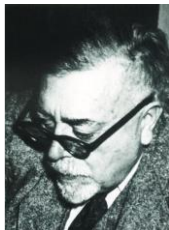
$$X(t) - X(s) \sim N(0, (t-s)\sigma^2) \quad (2)$$

对于  $t > 0$ ,  $X(t)$  是均值为 0，方差为  $\sigma^2 t$  的正态随机变量。也就是说， $X(t)$  的密度函数为：

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (3)$$

## 维纳过程

特别地，如果  $\sigma = 1$ ，这个过程被称作**标准布朗运动过程** (standard Brownian motion process)，也叫做维纳过程，本章用大写  $B$  表示。**维纳过程** (Wiener process) 得名于**诺伯特·维纳** (Norbert Wiener)。



**诺伯特·维纳** (Norbert Wiener)  
美国数学家 | 1894 ~ 1964  
丛书关键词：● 维纳过程 ● 蒙特卡罗模拟



假设  $t = 0$  时， $B(0) = 0$ ，微粒位置在原点处。在  $t$  时刻，如果  $x$  为微粒所在位置，对应的概率密度为：

$$f_{B(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad (4)$$

$B(t)$  也可以描述为：

$$B(t) \sim N(0, t) \quad (5)$$

这说明  $B(t)$  服从均值为 0、方差为  $t$  的正态分布。如图 2 所示，这个正态分布的标准差随  $t$  变化。

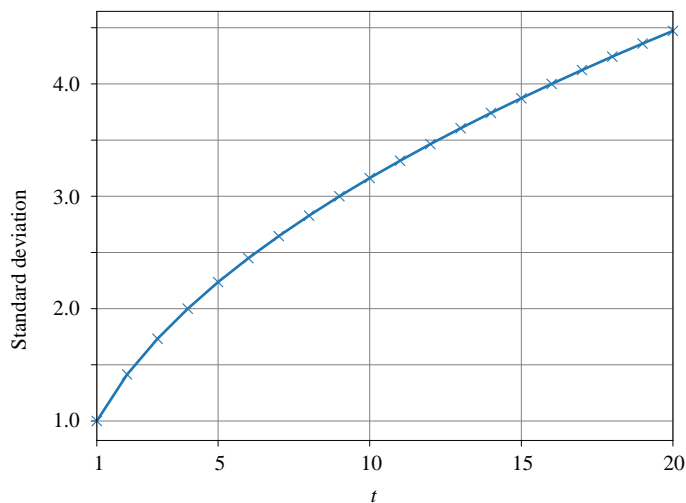


图 2. 维纳过程标准差随时间  $t$  变化

图 3 所示为 (4) 所示概率密度随  $x$ 、 $t$  变化曲面，图中仅仅保留曲线随位置  $x$  变化曲线。可以这样理解图 3 中的曲线，随着时间不断推移，微粒的运动范围不断扩大。也就是说，随着  $t$  增大，微粒出现在远离原点的“偏远”位置的可能性增大。注意，图 3 的纵轴是概率密度，不是概率值；但是，概率密度也代表可能性。

如果把视角换成时间  $t$ ，我们得到图 4。原点是微粒出发的位置，我们发现随着  $t$  增大，概率密度值不断减小。这说明微粒位于原点及其附近的可能性随着  $t$  增大而减小。而远离原点的位置，微粒出现的

可能性却随着时间  $t$  增大而增大。介于其间的位置，概率密度先增大后减小，可以用“涟漪”形容这种现象，微粒从原点汹涌而至，而又倏忽散去，雨散云飞。

图 5 所示为维纳过程概率密度随  $x$ 、 $t$  变化等高线。由于维纳过程概率密度函数期望值为 0，大家可以发现当  $t$  为定值时，概率密度的最大值出现在  $x = 0$  处。这就是为什么图 5 (b) 的平面等高线关于  $x = 0$  对称。

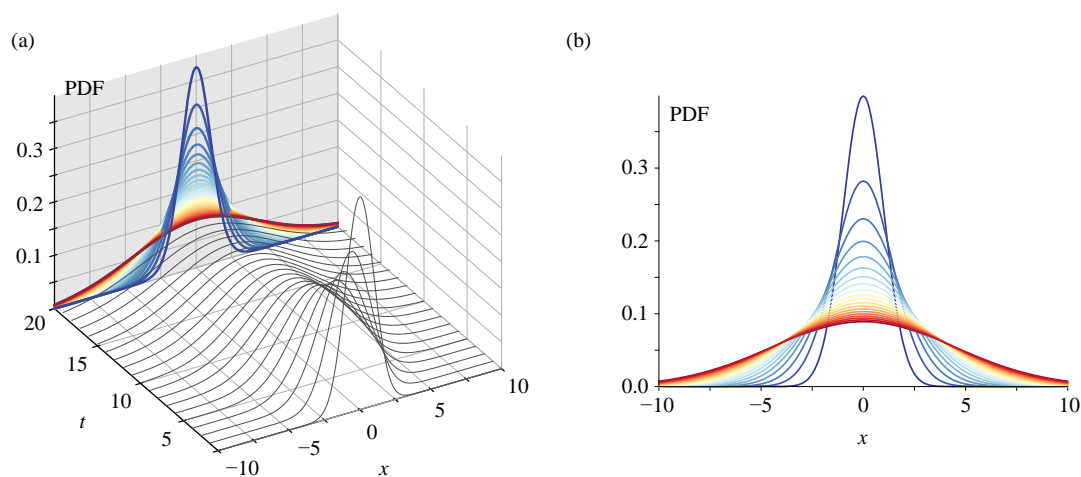


图 3. 维纳过程概率密度曲线随  $x$  变化， $t$  快照

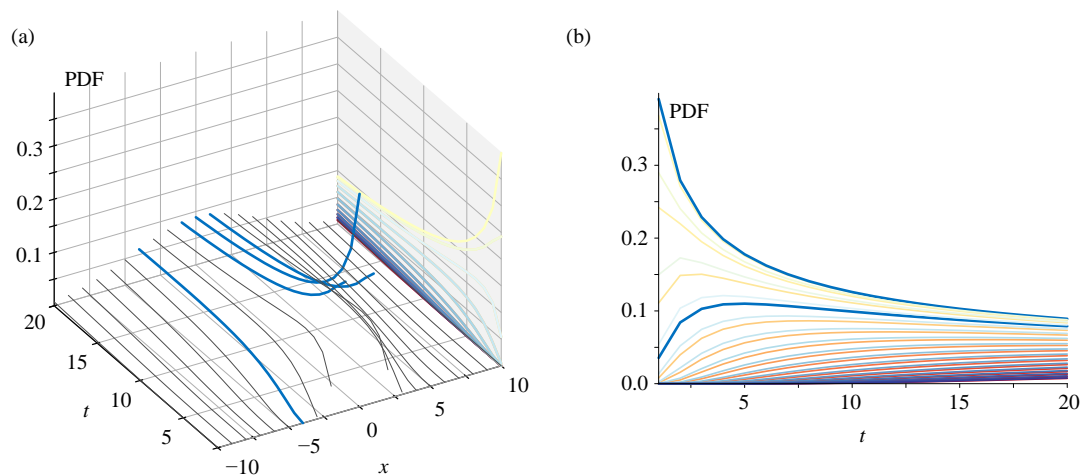
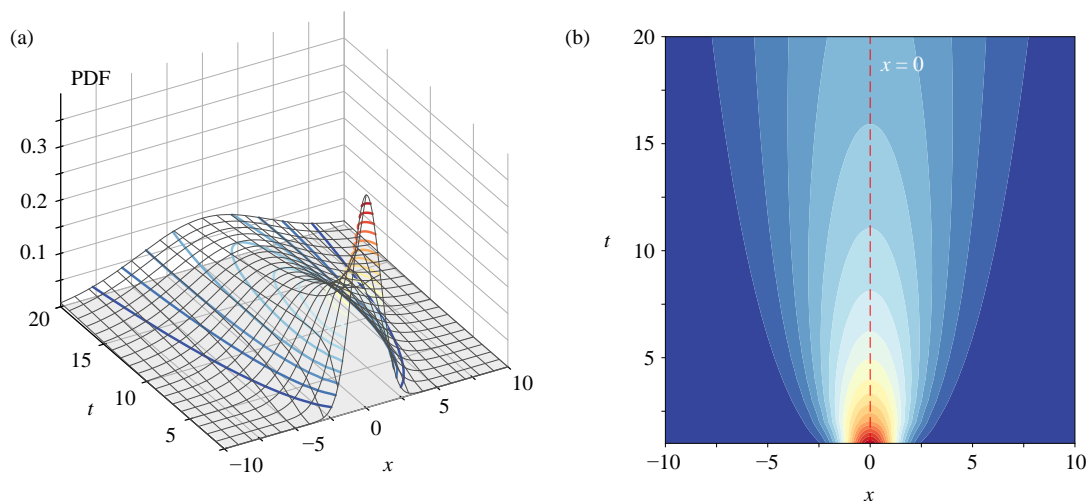


图 4. 维纳过程概率密度曲线随  $t$  变化， $x$  快照

图 5. 维纳过程概率密度随  $x$ 、 $t$  变化等高线

Bk6\_Ch8\_01.ipynb 绘制图 2。请大家自行绘制本节其他图像。

## 8.2 无漂移布朗运动

### 一维

无漂移布朗运动和标准布朗运动的关系为：

$$X(t) = \sigma B(t) \quad (6)$$

$\Delta X$  为  $X$  在小段时间  $\Delta t$  内位置变化：

$$\Delta X = \varepsilon \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

其中，随机数  $\varepsilon$  服从标准正态分布  $N(0, 1)$ ，这说明  $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ 。

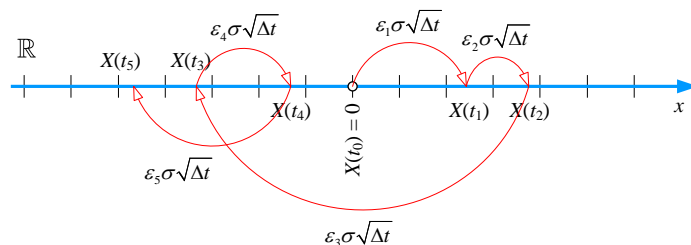


图 6. 某个微粒的一维无漂移布朗运动

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

在  $t_0 = 0$  时刻，微粒的位移  $X(t_0) = 0$ 。如图 6 所示， $t_n$  时刻，微粒的位移为  $X(t_n)$  可以写成一系列微小移动之和：

$$\begin{aligned}
 X(t_n) &= X(t_{n-1}) + \Delta X(t_{n-1}) \\
 &= X(t_{n-1}) + \varepsilon_n \sigma \sqrt{\Delta t} \\
 &= X(t_{n-2}) + \varepsilon_{n-1} \sigma \sqrt{\Delta t} + \varepsilon_n \sigma \sqrt{\Delta t} \\
 &\dots\dots \\
 &= X(t_0) + \varepsilon_1 \sigma \sqrt{\Delta t} + \varepsilon_2 \sigma \sqrt{\Delta t} + \dots + \varepsilon_{n-1} \sigma \sqrt{\Delta t} + \varepsilon_n \sigma \sqrt{\Delta t} \\
 &= \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中， $\sqrt{\Delta t} = t_n - t_{n-1}$ 。

图 7 给出的是 100 个微粒的 200 步无漂移布朗运动轨迹。这就好比在  $t = 0$  时刻，在数轴原点同时释放 100 个微粒，让它做沿着  $x$  轴无漂移布朗运动。图 7 右侧直方图为  $t = 200$  时刻，微粒在  $x$  轴上所处位置的分布。

同时图 7 也绘制出  $\pm\sigma\sqrt{t}$  和  $\pm 2\sigma\sqrt{t}$  这四条曲线。这里我们就可以用本书第 9 章讲过的 68-95-99.7 法则，请大家思考。

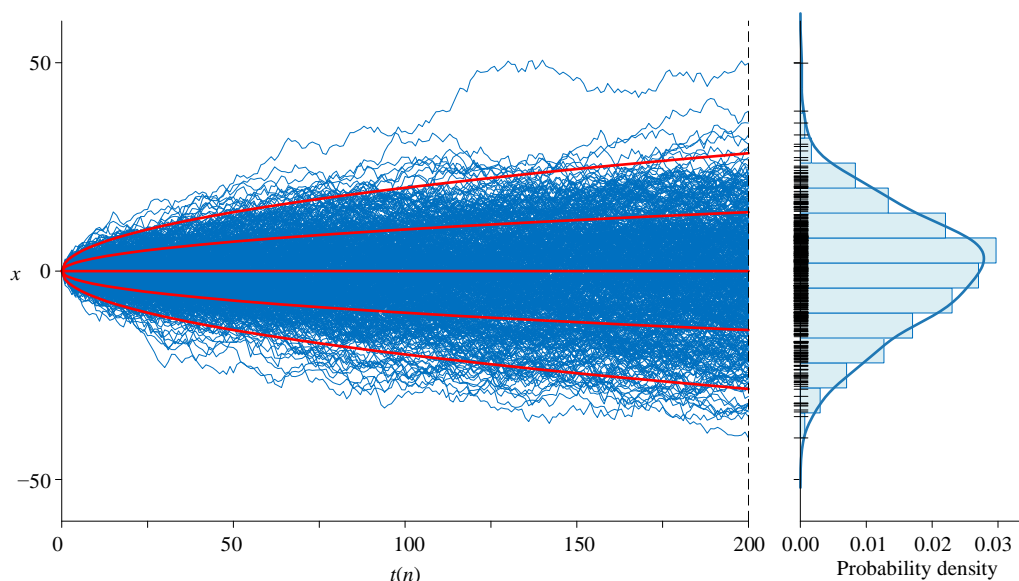


图 7. 100 个微粒一维无漂移布朗运动轨迹和运动范围

图中的每一个微粒随机漫步的路径，都是不同的。换句话说，任意两个微粒的运动轨迹相同的概率几乎为零。

图 8 所示为微粒在不同  $t$  在  $x$  轴上分布的快照，图中我们也可以看到 68-95-99.7 法则。

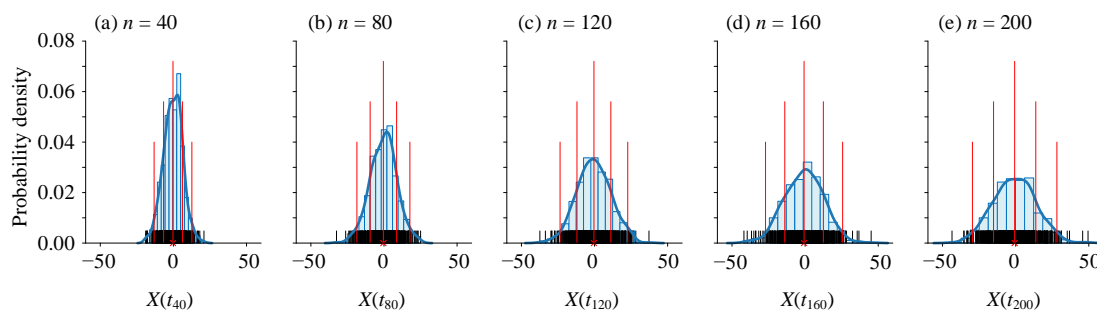
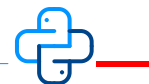


图 8. 100 个微粒无漂移布朗运动轨迹在不同时刻位置分布的快照



Bk6\_Ch8\_02.ipynb 绘制图 7 和图 8。

## 二维

在二维平面里，微粒的随机漫步更像布朗运动中炸裂的花粉颗粒一样。在  $t_n$  时刻， $X(t_n)$  为微粒的横坐标值， $Y(t_n)$  为微粒的纵坐标值：

$$\begin{cases} X(t_n) = \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \\ Y(t_n) = \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j \end{cases} \quad (9)$$

图 9 所示为某个微粒从原点出发完全的二维无漂移布朗运动，运动过程显得“浑浑噩噩”、“生无可恋”。

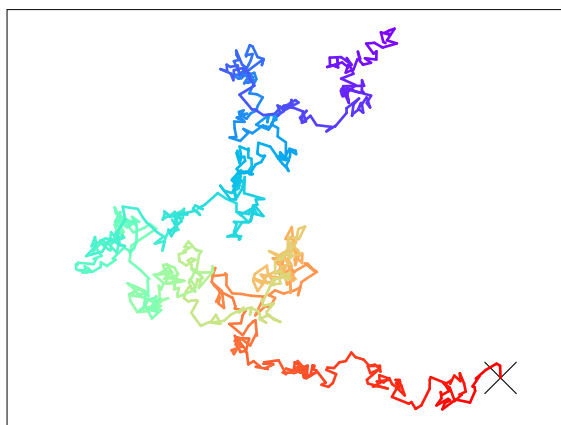


图 9. 平面二维无漂移随机漫步



Bk6\_Ch8\_03.ipynb 绘制图 9。



## 8.3 漂移布朗运动：确定 + 随机

前面介绍了零漂移布朗运动，微粒的运动只具有随机成分，而没有确定成分。如果在零漂移布朗运动基础上，引入确定成分，我们便得到**漂移布朗运动** (Brownian motion with drift)：

$$X(t) = \underbrace{\mu t}_{\text{Drift}} + \underbrace{\sigma B(t)}_{\text{Random}} \quad (10)$$

其中， $\mu$  为漂移率， $\sigma$  为标准差。这说明  $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ 。

如果把上式看做是物体直线运动的话， $\mu t$  相当于是匀速运动部分，也就是漂移，确定的成分。如图 10 所示，漂移率  $\mu$  可以为正，可以为负，当然也可以为 0。

$\sigma B(t)$  相当于随机漫步，可以理解为噪音，即随机成分，代表不确定性。

打个比方， $\mu t$  就是浩浩汤汤的历史进程，大势所趋。 $\sigma B(t)$  就是时时刻刻的生活细节，琐碎繁杂。

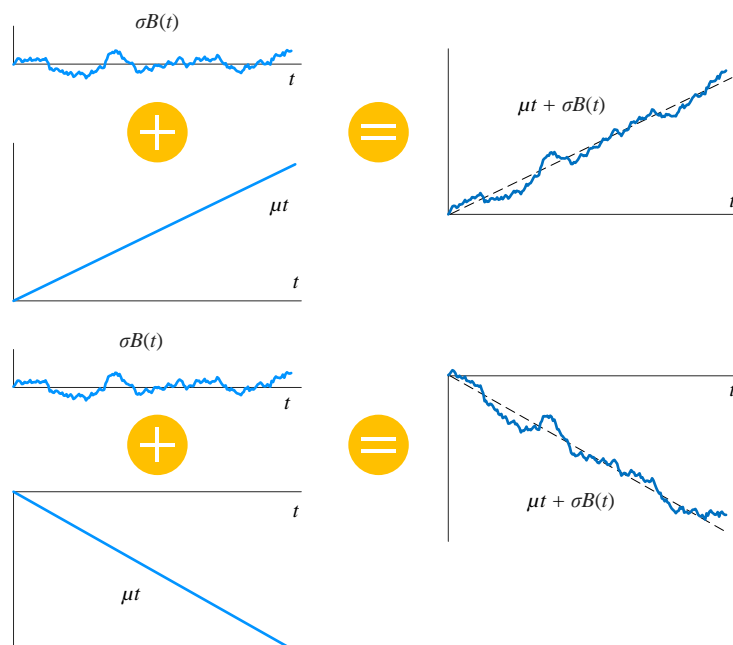


图 10. 解构定向漂移布朗运动

图 11 所示为漂移布朗运动概率密度随  $x$ 、 $t$  变化曲面。类似图 3，图 11 中仅仅保留曲线随位置  $x$  变化曲线。类似无漂移布朗运动，随着时间不断推移，漂移布朗运动微粒的运动范围不断扩大。同时，我们能够看到概率密度的对称轴随着时间增大而移动。

图 12 所示为含漂移布朗运动概率密度曲线随  $t$  变化，在不同  $x$  点上的快照。

图 13 所示为含漂移布朗运动概率密度随  $x$ 、 $t$  变化等高线，图中能够明显地看到 (10) 漂移项。

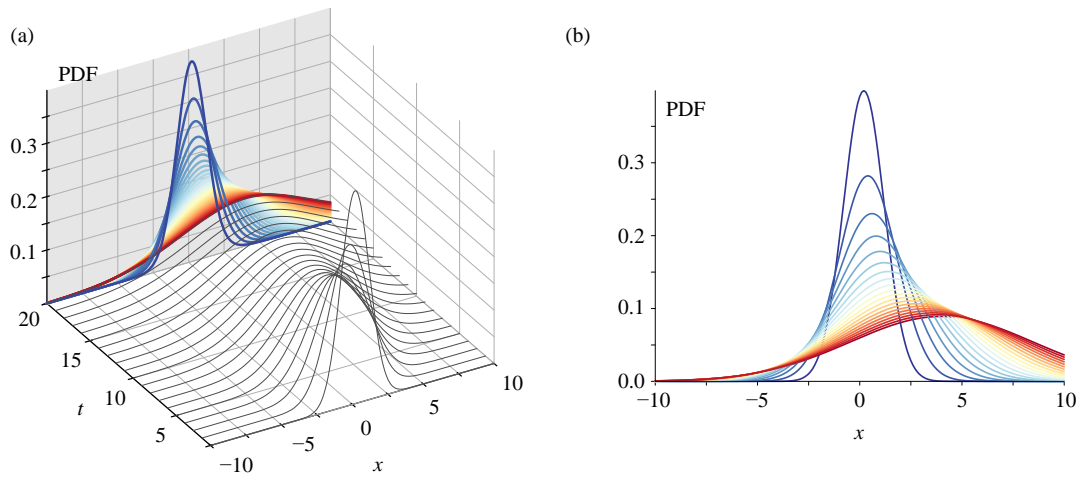


图 11. 漂移布朗运动概率密度曲线随  $x$  变化,  $t$  快照

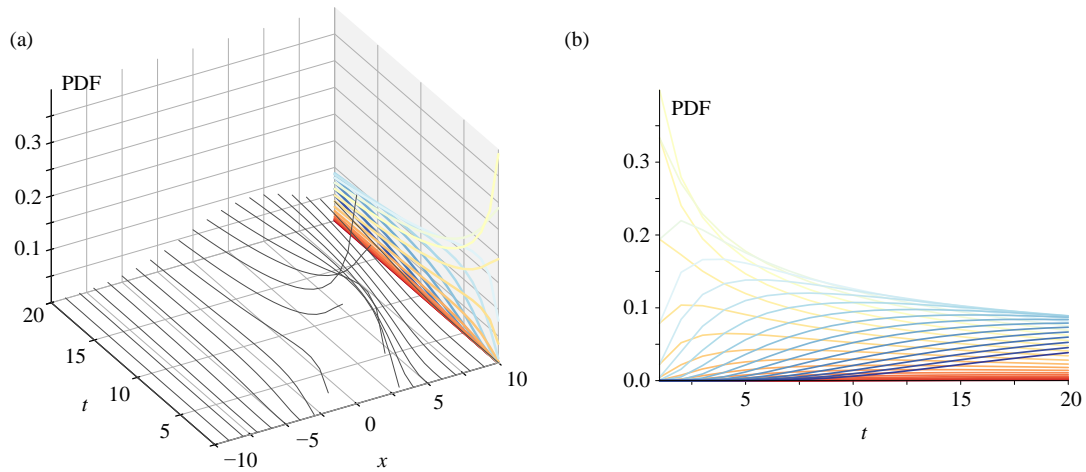


图 12. 含漂移布朗运动概率密度曲线随  $t$  变化,  $x$  快照

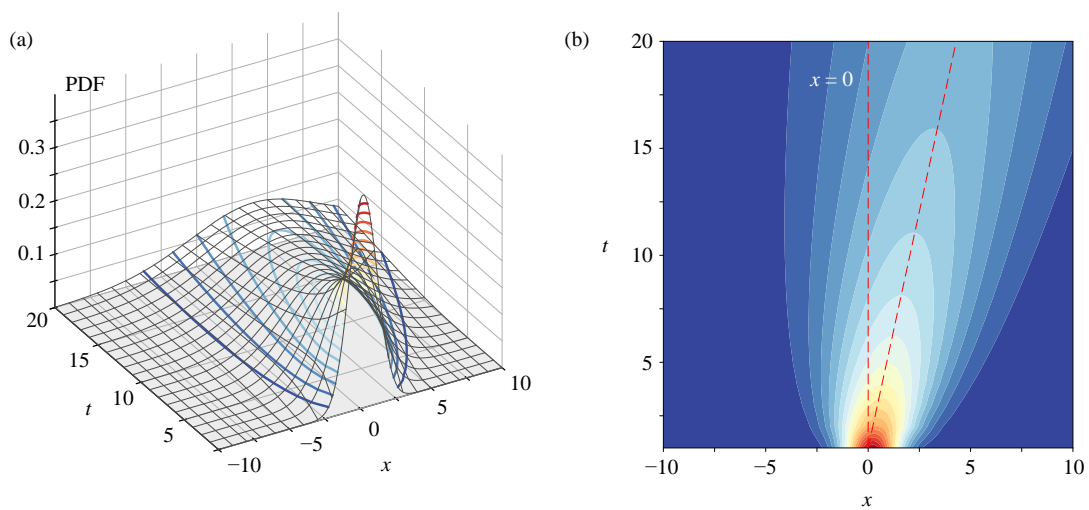


图 13. 含漂移布朗过程概率密度随  $x$ 、 $t$  变化等高线

## 离散形式

为了方便蒙特卡洛模拟，我们也需要得到含漂移布朗过程的离散形式。

首先，写出 (10) 的微分形式：

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \quad (11)$$

这样，(10) 的离散化形式可以写成：

$$\Delta X(t) = \Delta t \cdot \mu + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon \quad (12)$$

然后，把上式写成累加形式：

$$X(t_n) = \Delta t \cdot n\mu + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \quad (13)$$

图 14 给出的是 100 个微粒的 200 步含漂移布朗运动轨迹。能够明显地看到运动轨迹“整体”表现出“向上”的运动趋势，这来自于定向漂移成分  $\mu t$ 。此外，这些轨迹在时间  $t$  处的期望值就是  $\mu t$ 。图 14 右侧直方图为  $t = 200$  时刻，微粒在  $x$  轴上所处位置的分布。

图 14 也绘制出  $\mu t \pm \sigma\sqrt{t}$  和  $\mu t \pm 2\sigma\sqrt{t}$  这四条曲线。图 15 所示为微粒在不同  $t$  在  $x$  轴上分布的快照，图中我们也可以看到 68-95-99.7 法则。

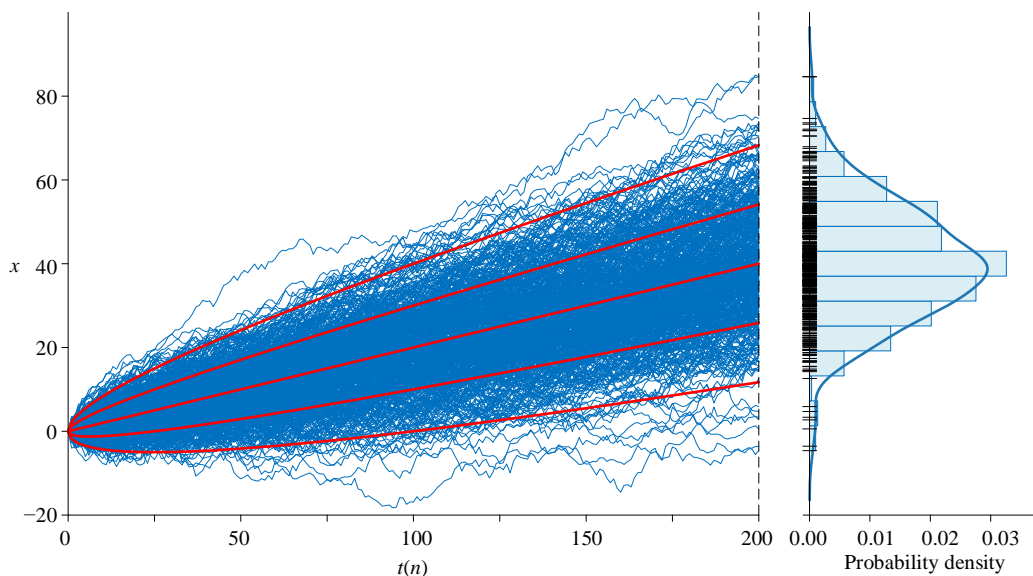


图 14. 100 个微粒一维含漂移布朗运动轨迹和运动范围

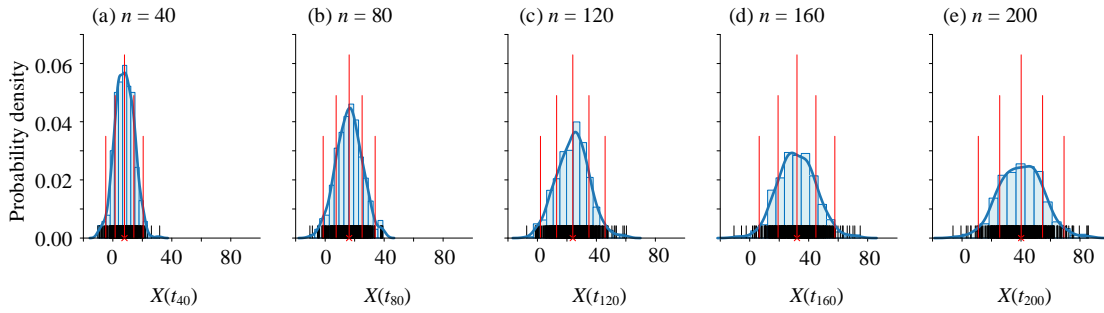


图 15. 100 个微粒含漂移布朗运动轨迹在不同时刻位置分布的快照



Bk6\_Ch8\_04.ipynb 绘制图 14 和图 15。

## 8.4 具有一定相关性布朗运动

上一章介绍如何产生具有一定相关性的随机数，本节介绍如何据此产生满足一定相关性的布朗运动。

如图 16 所示，给定固定时间间隔  $\Delta t$ ， $\Delta \mathbf{X}(t)$  为在  $\Delta t$  满足一定相关性布朗运动分步步长构成的矩阵为：

$$\Delta \mathbf{X}(t) = \mathbf{E}(\mathbf{X})\Delta t + \mathbf{Z}\mathbf{R}\sqrt{\Delta t} \quad (14)$$

也就是说， $\mathbf{X}(t) \sim N(\mathbf{E}(\mathbf{X})t, \Sigma t)$ 。 $\mathbf{R}$  是  $\Sigma$  的 Cholesky 分解的三角矩阵。图 16 中，矩阵  $\mathbf{Z}$  为随机数矩阵，服从  $N(0, \mathbf{I})$ 。

图 17、图 18 所示为具有正相关的两条漂移布朗运动蒙特卡洛模拟结果。图 19、图 20 所示为具有负相关的两条漂移布朗运动蒙特卡洛模拟结果。

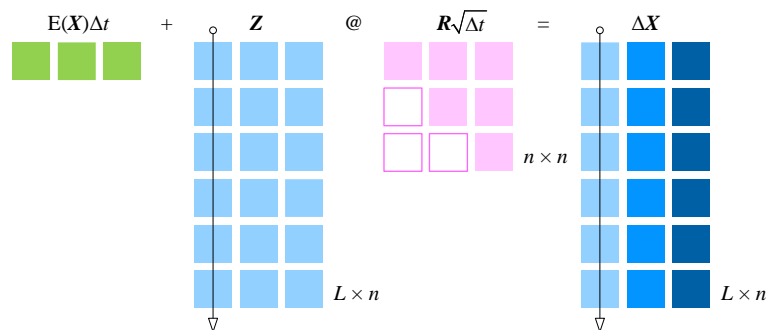
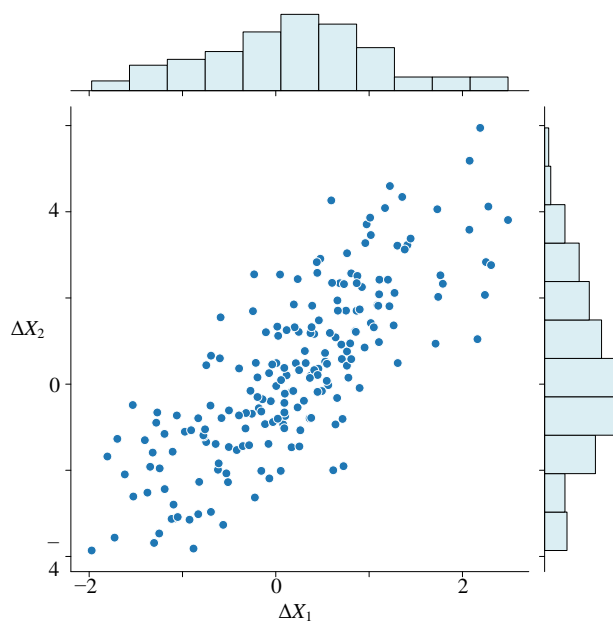
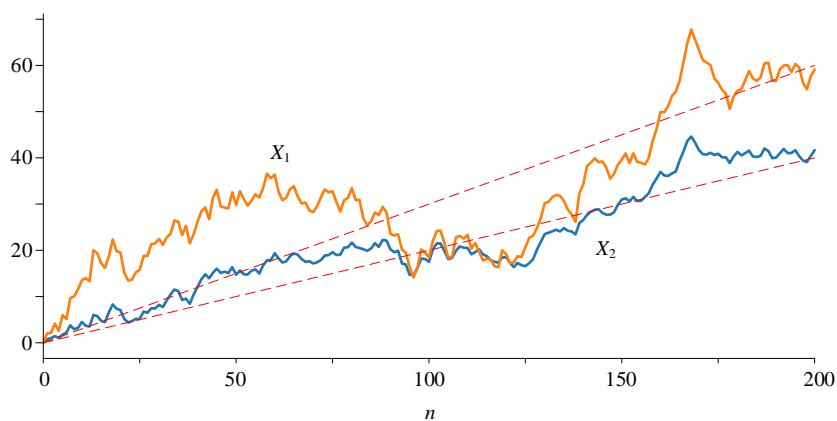
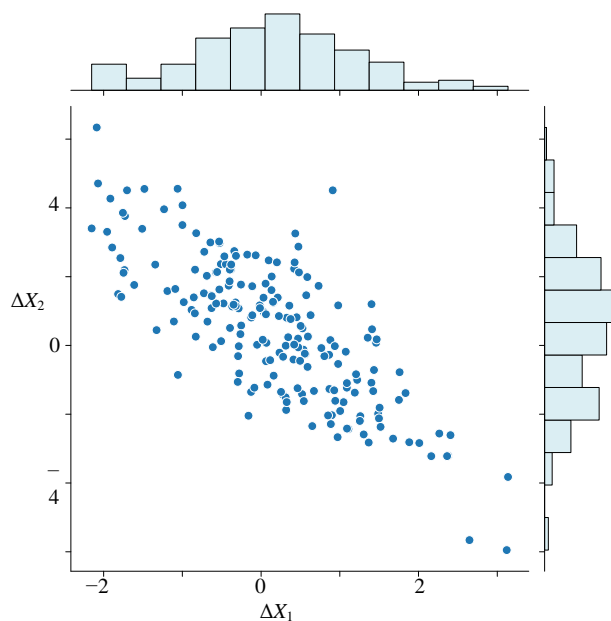
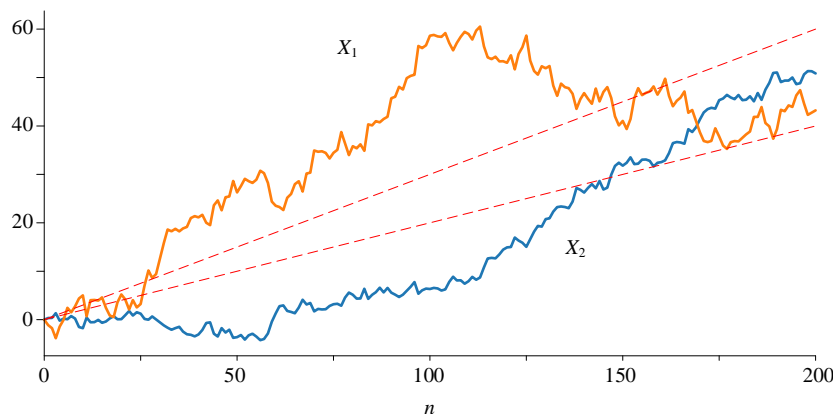


图 16. 计算具有一定相关性布朗运动矩阵运算

图 17. 分步步长的散点图,  $\rho = 0.8$ 图 18. 两条具有正相关关系的行走轨迹,  $\rho = 0.8$

图 19. 分步步长的散点图,  $\rho = -0.8$ 图 20. 两条具有负相关关系的行走轨迹,  $\rho = -0.8$ 

Bk6\_Ch8\_05.ipynb 绘制图 17 ~ 图 20。

## 8.5 几何布朗运动

满足下式的随机微分方程的过程，被称作**几何布朗运动** (Geometric Brownian motion, GBM)：

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \quad (15)$$

上式也可以写成：

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) \quad (16)$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

利用**伊藤引理** (Ito's Lemma)，求解得到  $X(t)$ ：

$$X(t) = X(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right) \quad (17)$$

$X(t)$  的期望值为：

$$E(X(t)) = X(0) \exp(\mu t) \quad (18)$$

$X(t)$  的方差：

$$\text{var}(X(t)) = X(0)^2 \exp(2\mu t) (\exp(\sigma^2 t) - 1) \quad (19)$$

$X(t)$  的标准差为：

$$\text{std}(X(t)) = X(0) \exp(\mu t) \sqrt{\exp(\sigma^2 t) - 1} \quad (20)$$

对  $X(t)$  求对数得到：

$$\begin{aligned} \ln X(t) &= \ln \left( X(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right) \right) \\ &= \ln X(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \end{aligned} \quad (21)$$

可以发现  $\ln X(t)$  为布朗运动，也就是说  $\ln X(t)$  的概率密度服从高斯分布。

## 离散形式

(21) 的离散形式为：

$$\ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (22)$$

有了上式，我们就可以进行蒙特卡洛模拟。图 21 所示为 100 个微粒几何布朗运动轨迹。图 22 所示为微粒在不同时刻位置分布的快照。

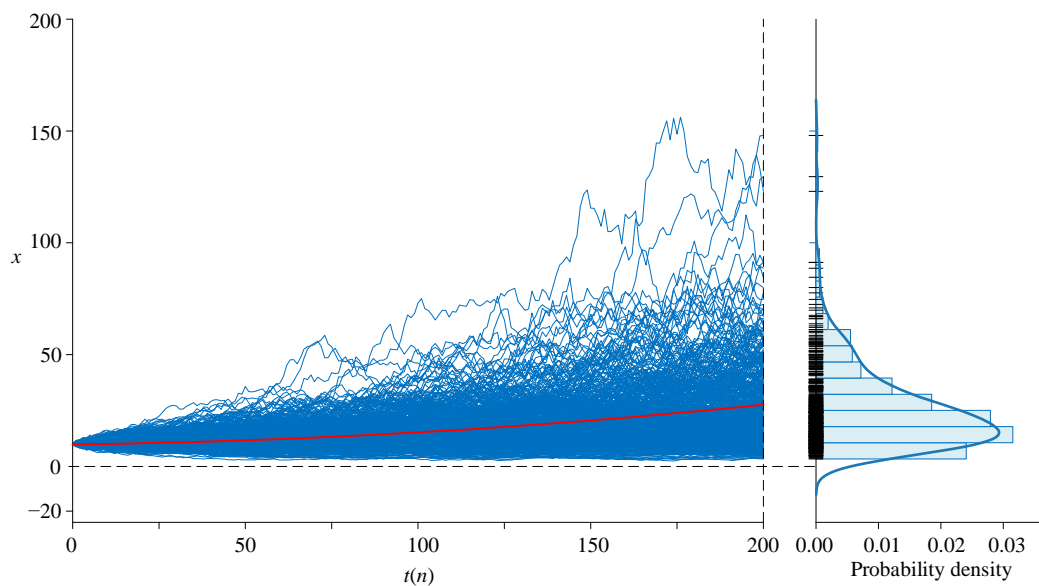


图 21. 100 个微粒几何布朗运动轨迹

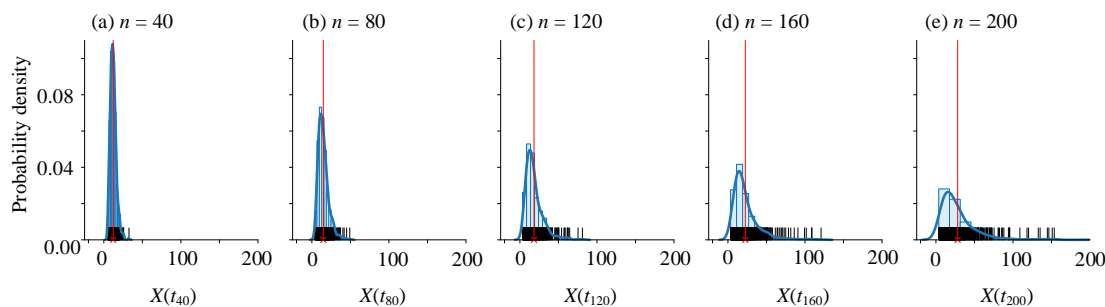


图 22. 100 个微粒几何布朗运动轨迹在不同时刻位置分布的快照



Bk6\_Ch8\_06.ipynb 绘制图 21 和图 22。

## 模拟股票股价走势

实践中，几何布朗运动常用来模拟股票股价走势。如图 23 所示，长期观察股票股价，可以发现走势，而且股价不能为负值。更重要的是，股价收益率分布可以用高斯分布来描述。



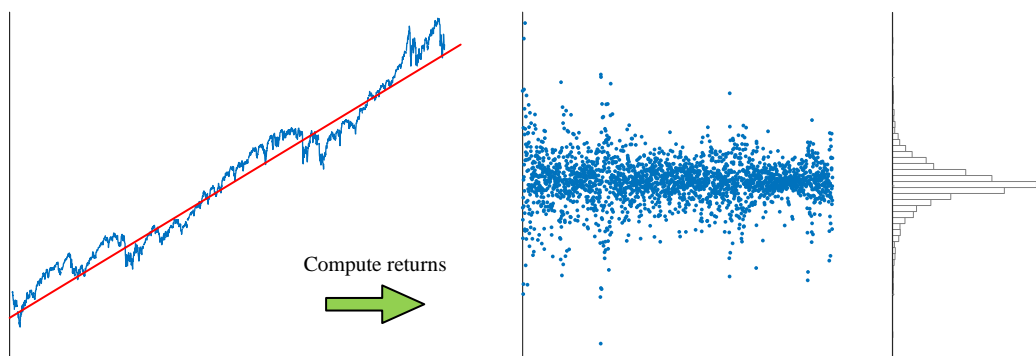


图 23. 某只股价走势、收益率

## 8.6 股价模拟

用**几何布朗运动** (geometric Brownian motion, GBM) 模拟股价  $S_t$ ,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (23)$$

其中  $W_t$  为维纳过程,  $\mu$  收益率期望值,  $\sigma$  为收益率波动率。

股价  $S_t$  解析解为:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (24)$$

$S_0$  为初始股价, 经过一小段时间  $\Delta t$ , 股价变化为  $\Delta S$ :

$$\Delta S = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right) \quad (25)$$

$\varepsilon$  随机数服从标准正态分布。图 24 总结整个蒙特卡洛模拟股价走势过程。历史数据用来校准模型。图 25 所示为 S&P 500 指数在一段时间内的走势。图 26 所示为其日对数回报率。图 27 给出日对数回报率的分布情况, 我们可以计算得到均值和方差, 这些参数可以用来校准模型。图 28 所示为蒙特卡洛模拟结果。

这种方法缺陷很明显, 历史数据未必能够代表未来趋势。此外, 由于假设回报率服从正态分布, 没有考虑到“厚尾”问题, 也就是所谓的“黑天鹅”问题。

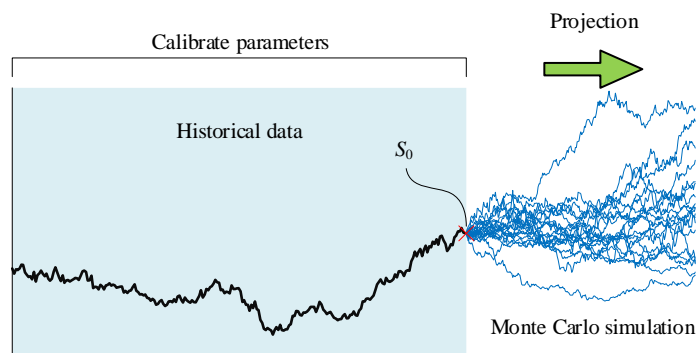


图 24. 基于历史数据估计参数，和蒙特卡洛模拟预测未来股价可能走势



图 25. S&amp;P 500 价格水平数据

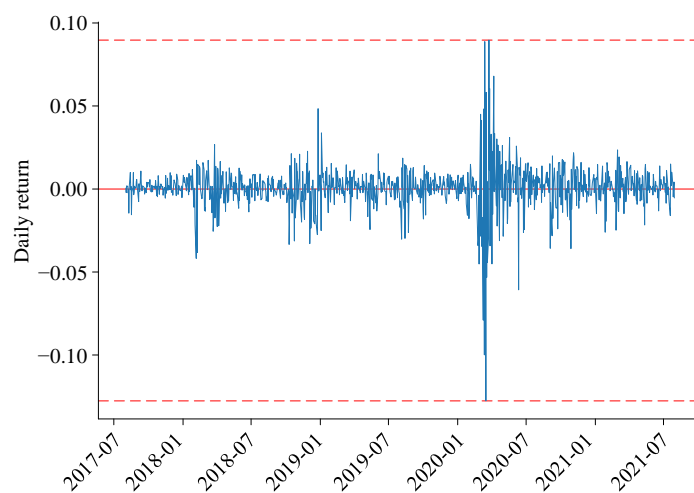


图 26. S&amp;P 500 日对数回报率

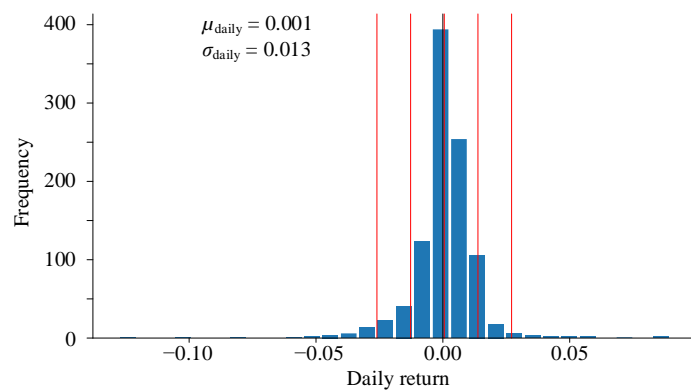


图 27. S&amp;P 500 日对数回报率分布

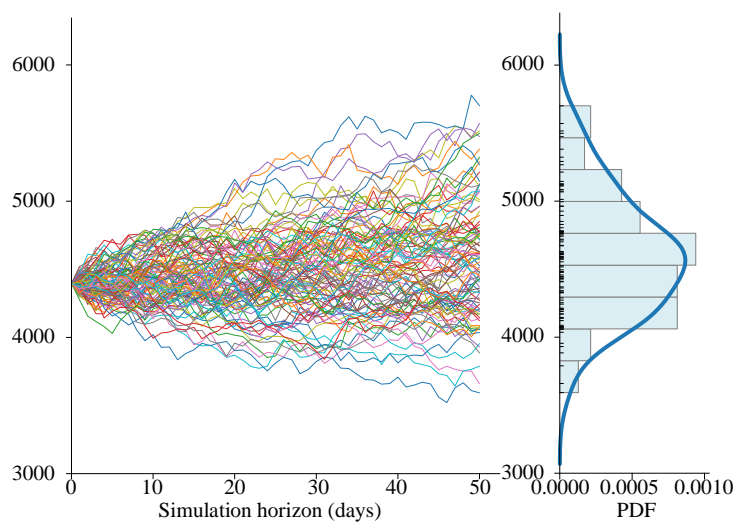


图 28. S&amp;P 500 蒙特卡洛模拟

此外，图 29 所示的二叉树也可以用来模拟股票股价，本书不做展开。

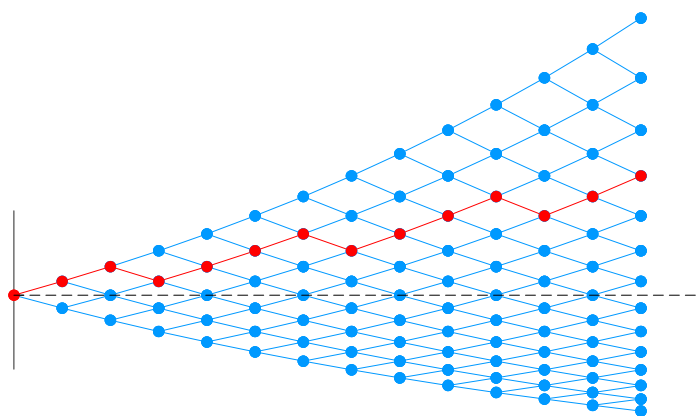


图 29. 二叉树随机路径模拟股票股价



Bk6\_Ch8\_07.ipynb 绘制图 25 ~ 图 28。

## 8.7 相关股价模拟

当时间戳为列方向时，下式为几何布朗过程计算对数回报率矩阵  $X$  矩阵运算式：

$$X = \left( \mu - \frac{(\text{diag}(\Sigma))^T}{2} \right) \Delta t + ZR\sqrt{\Delta t}$$

图 30 所示为上式矩阵运算过程。 $\mu$  为股价年化期望收益率行向量。 $\Sigma$  为年化方差协方差矩阵。 $Z$  是由随机数发生器产生的服从标准正态分布的线性无关随机数， $Z$  为列方向数据矩阵，每列代表一个变量；上三角矩阵  $R$  来自 Cholesky 分解  $\Sigma$  得到。 $\Delta t$  设定为 1/252。

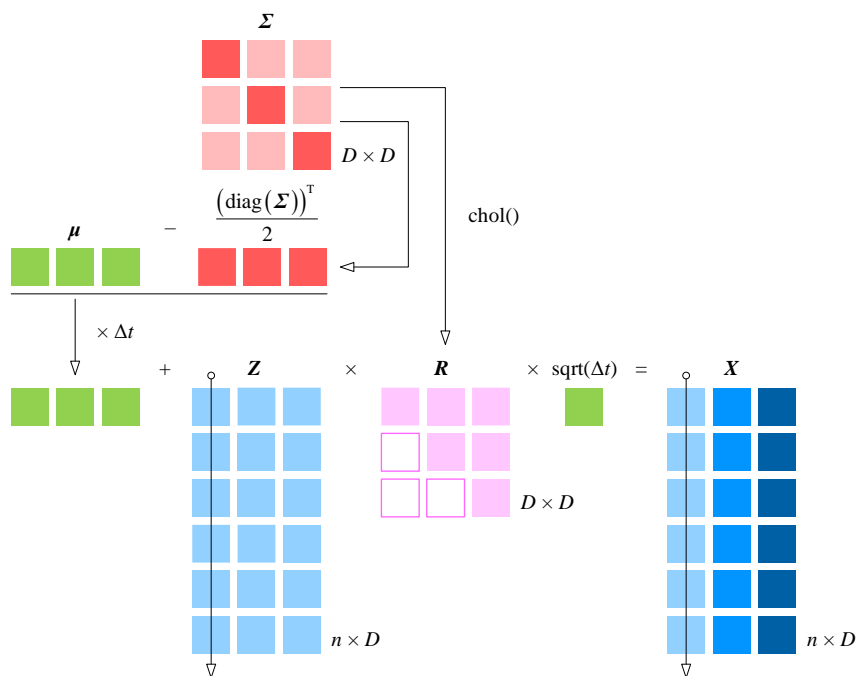


图 30. 几何布朗过程离散式的矩阵运算过程，列方向矩阵

模拟多路径相关股价走势具体矩阵运算过程如图 31 所示，其中矩阵  $Z$  和矩阵  $X$  的形状为  $n \times D \times n_{\text{paths}}$ 。 $n_{\text{paths}}$  为蒙特卡罗模拟轨迹的数量。

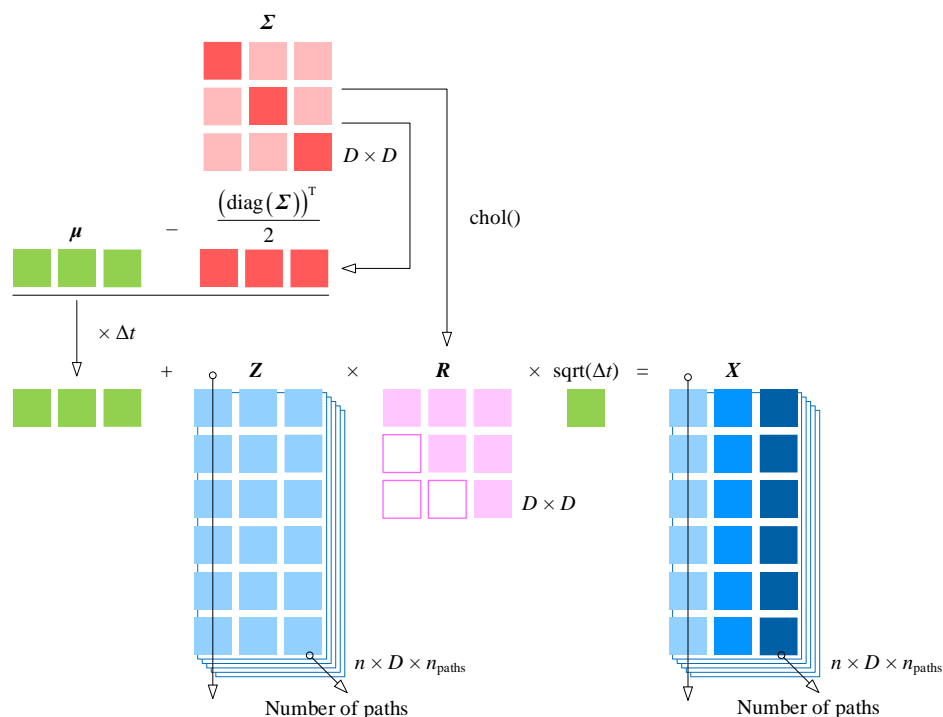


图 31. 几何布朗过程离散式的矩阵运算过程，多路径

图 32 所示为几只股票真实股价和归一化股价走势图。图 33 所示为日收益率的协方差矩阵、相关性系数矩阵。图 34 所示为协方差矩阵的 Cholesky 分解。图 35 所示为一组相关性股价的模拟。这种模拟方法的显著缺点是 Cholesky 分解，当协方差矩阵过大 Cholesky 分解可能会不稳定。此外，只有正定矩阵才能 Cholesky 分解。大家如果感兴趣可以搜索 Benson-Zangari 蒙特卡洛模拟，这种方法避免 Cholesky 分解。

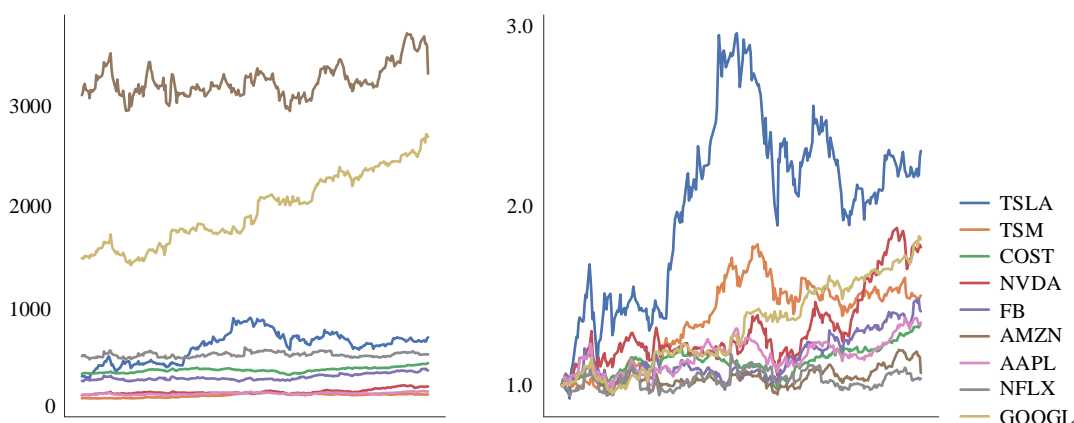


图 32. 几只股票走势和初值归一化股价

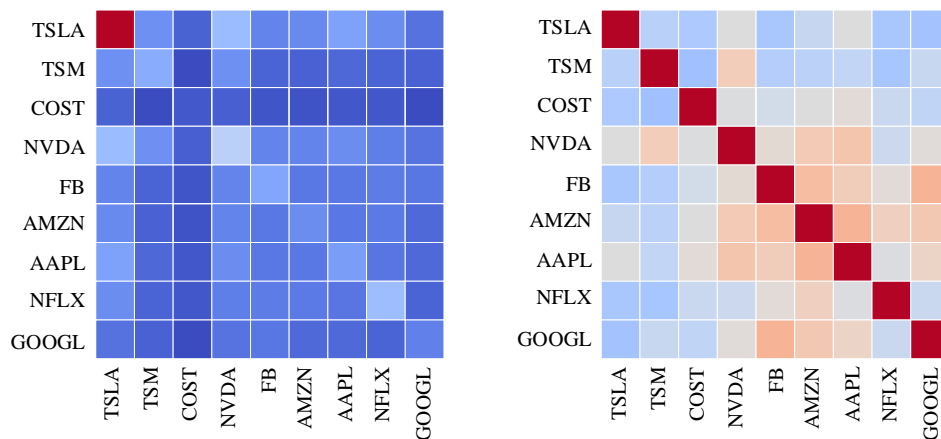


图 33. 协方差矩阵和相关性系数矩阵热图

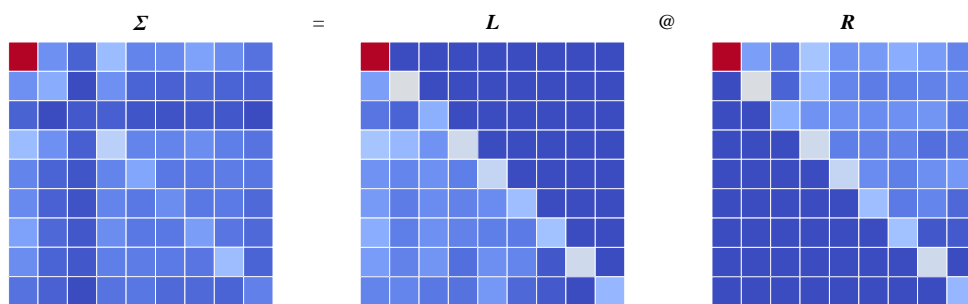


图 34. 对协方差矩阵进行 Cholesky 分解

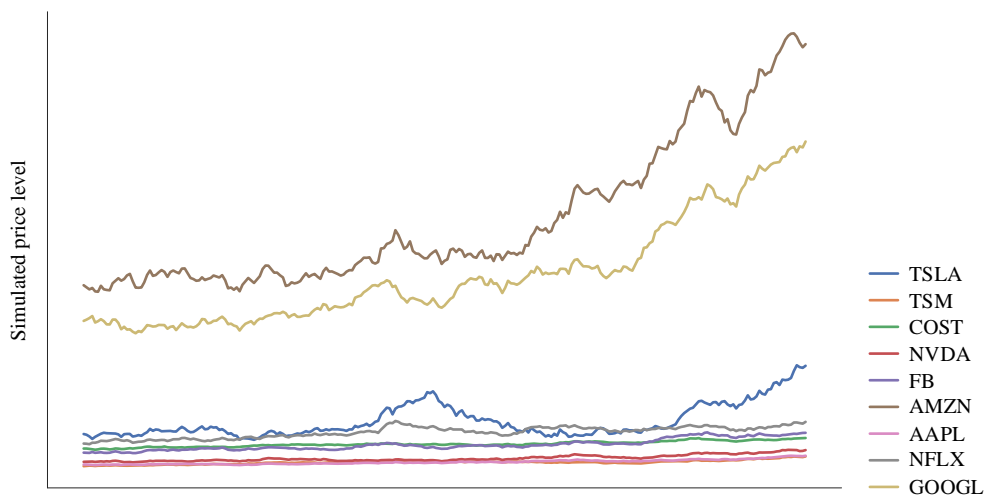
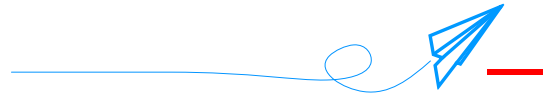


图 35. 一组蒙特卡罗模拟相关性股价结果



Bk6\_Ch8\_08.ipynb 完成本节相关股价模型，请大家自行学习。



布朗运动是一种连续随机过程，最早由数学家罗伯特·布朗研究。它具有随机性质，其中随机变量在时间上的变化呈现出连续的、不可预测的特性。布朗运动在金融学和自然科学等领域中被广泛应用。对于有漂移布朗运动，除了随机波动，还存在一个漂移项，导致整体的平移。这可以看作是布朗运动在整体上呈现上升或下降趋势。

当涉及到多个布朗运动时，它们之间可能存在一定的相关性。这种相关性可以通过考虑多维布朗运动或使用随机过程中的协方差结构来建模。

几何布朗运动是布朗运动的一种形式，其关键特征是随机变化的比例是连续时间的指数函数。这使得几何布朗运动在金融学中被广泛用于建模股价。蒙特卡洛模拟是一种常见的股价模拟方法，利用布朗运动的随机性生成多个可能的未来路径。