

## 30

Cardioid

## 心形线

从心形线说起，展示模数乘法表之美



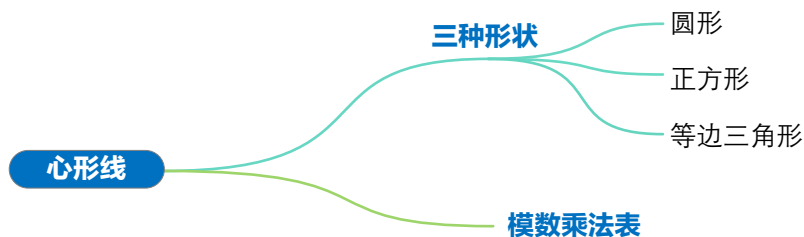
博爱是好事，因为真正的力量就蕴藏在其中。深爱之人会付出更多，做成更多事情，并且能够取得更大的成就。而在爱的驱使下所做的一切都会变得出色。

*It is good to love many things, for therein lies the true strength, and whosoever loves much performs much, and can accomplish much, and what is done in love is well done.*

——文森特·梵高 (Vincent van Gogh) | 荷兰后印象派画家 | 1853 ~ 1890



- ◀ % 求余数（取模）
- ◀ matplotlib.pyplot.cm 提供各种预定义色谱方案，比如 matplotlib.pyplot.cm.rainbow
- ◀ numpy.column\_stack() 将两个数组列合并
- ◀ pandas.DataFrame() 创建数据帧
- ◀ seaborn.heatmap() 绘制热图



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 30.1 心形线

本书前文介绍过如何用参数方程绘制心形线 (cardioid)。本章则要介绍一种全新的方法绘制心形线，并且以此为起点介绍更多类似可视化方案展示数学之美。

如图 1 所示，绘制一个正圆，将周长 36 等分，获得 36 个点，从 0 开始编号。

然后，开始绘制正圆的弦，(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8)、(5,10) ... 大家可能已经发现弦的两端编号有简单的规律。第一个点对应的编号分别为 1、2、3、4、5 ...；第二个点的编号“旋转速度”是第一个点编号的两倍，2、4、6、8、10 ... 这些弦的构成的包络就是心形线。

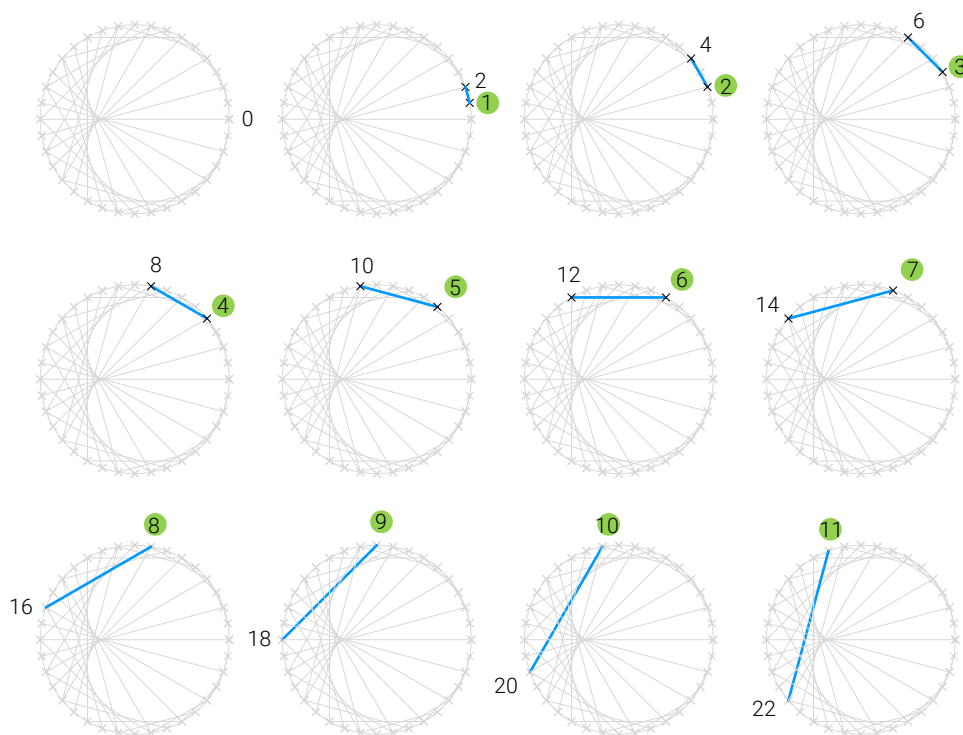


图 1. 用正圆一组弦呈现心形线

大家可能会问，如果弦的第二个点编号的旋转速度是第一个点的“三倍”，形成的图形又会怎样？四倍？五倍？

图 5 ~ 图 9 可以帮我们回答这个问题。Bk2\_Ch30\_01.ipynb 绘制这些子图，下面聊聊代码 1。

**a** 用 `hsv` 颜色映射产生一组渐变色渲染弦线段。选 `hsv` 颜色映射的原因一方面是因为这个颜色映射首尾闭合；此外，`hsv` 颜色非常鲜艳。

**b** 为弦线段的第一个端点序号，即 1、2、3、4、5 ...

**c** 计算弦线段第二个端点序号。这句代码用到了取模运算。举个例子，当  $k = 2$  且  $N = 36$  时，如果  $i$  分别取 1、2、3、4、5，计算结果为 2、4、6、8、10。这符合图 1 要求。

顺着这个视角展开，图 5 ~ 图 9 这几组图形本身展现的数学之美之外，它们还和模数乘法表 (modular multiplication table) 有关，这是下一节要介绍的内容。

**d** 绘制弦线段。

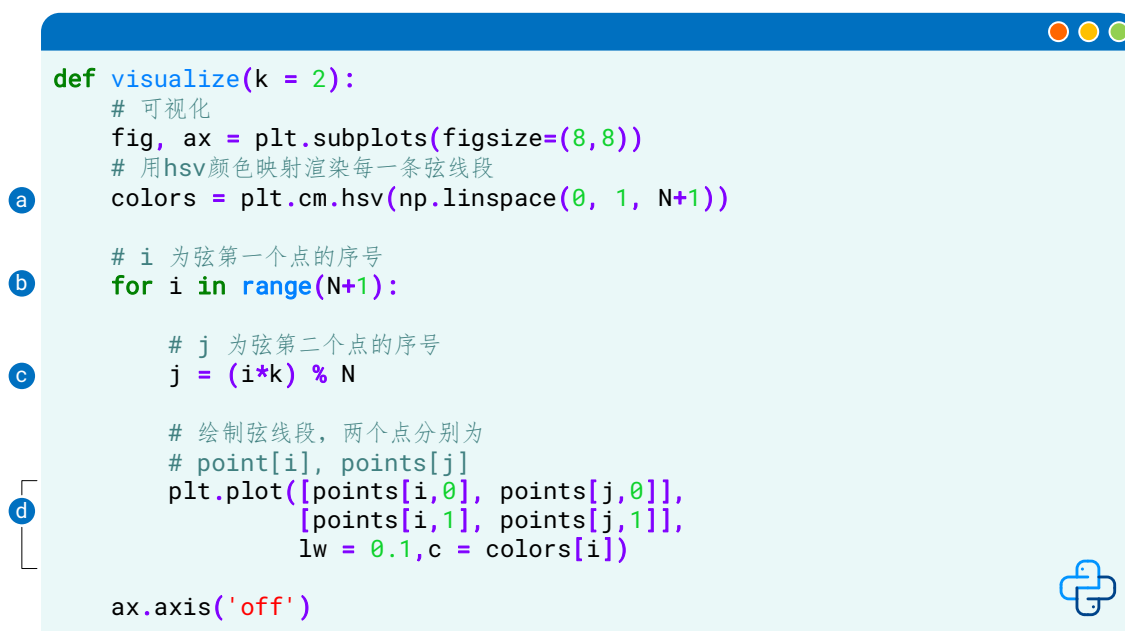
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



代码 1. 可视化心形线 | Bk2\_Ch30\_01.ipynb

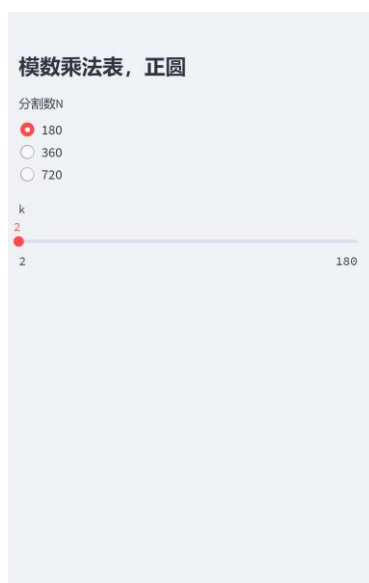


图 2. 用正圆展示模数乘法表的 App, Streamlit 搭建 | Streamlit\_modular\_multiplication\_circle.py

用类似的思路，我们还绘制了图 10 ~ 图 13（正方形）和图 14 ~ 图 17（等边三角形）这两组图像。请大家自行学习 Bk2\_Ch30\_02.ipynb 和 Bk2\_Ch30\_03.ipynb。

此外，请大家根据 Bk2\_Ch30\_02.ipynb 和 Bk2\_Ch30\_03.ipynb 尝试创建两个类似图 2 的 App。

## 30.2 模数乘法表

模数乘法表是一种数学工具，用于展示在模运算下的乘法结果。模运算通常是指取余数运算，图 3 所示为在模 5 下的乘法表将展示 0 到 4 的整数在乘法运算中的余数结果。

其实这个表很容易理解，以第 1 行第 1 列结果为例，对应的算式为  $0 \times 0 \bmod 5 = 0$ 。也就是说，0 对 5 取余（取模）结果为 0。请大家注意，取余并不完全等同于取模。大家应该还记得 Python 中取模的运算符为 %。请大家自己算一下图 3 中其余模数运算，以便加深理解。

0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1
	0	1	2	3	4

图 3. 模数乘法表, mod 5 |  Bk2\_Ch30\_04.ipynb

图 4 示为在模 36 下的乘法表将展示 0 到 35 的整数在乘法运算中的余数结果。请大家特别注意图 4 的第 3 行，它对应图 1。

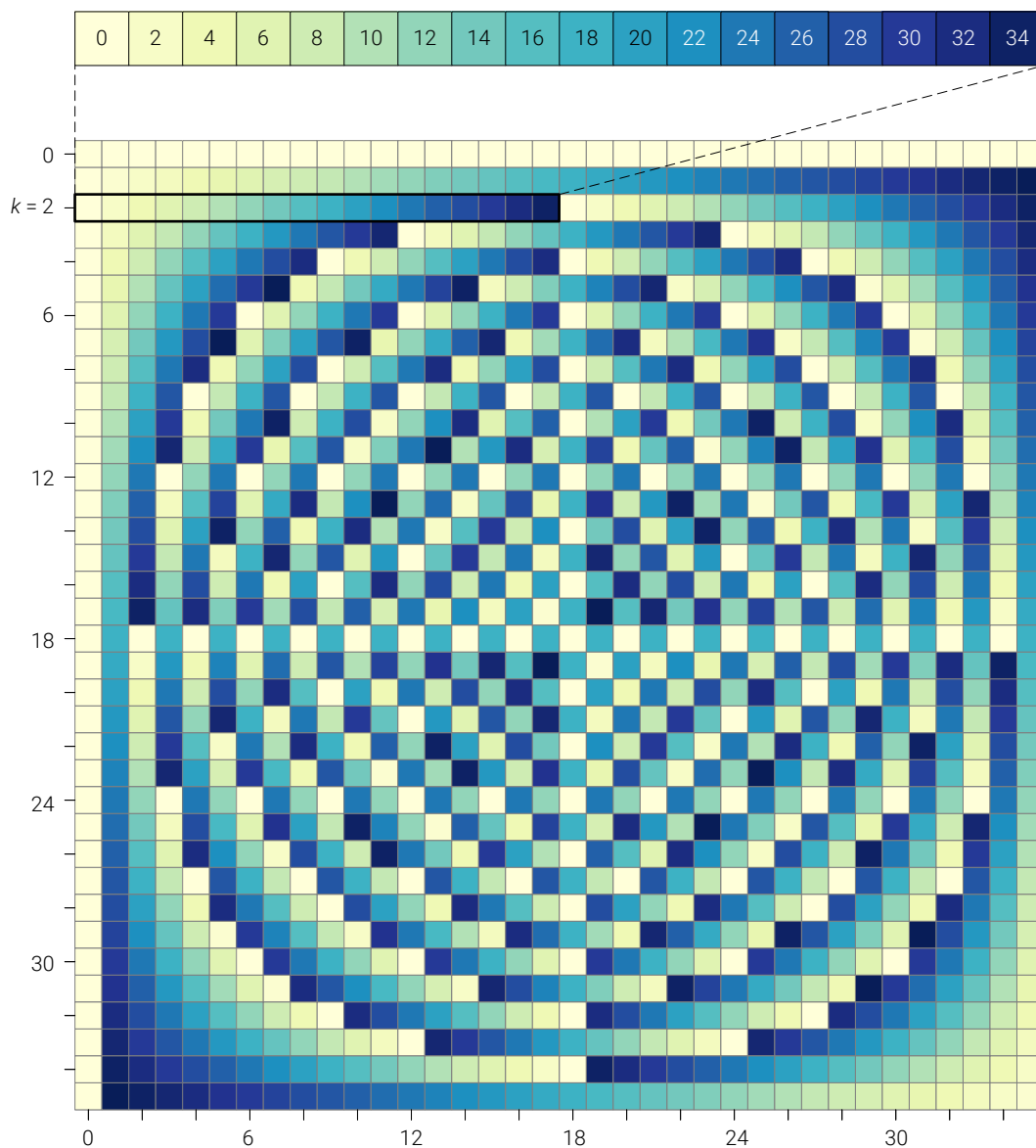
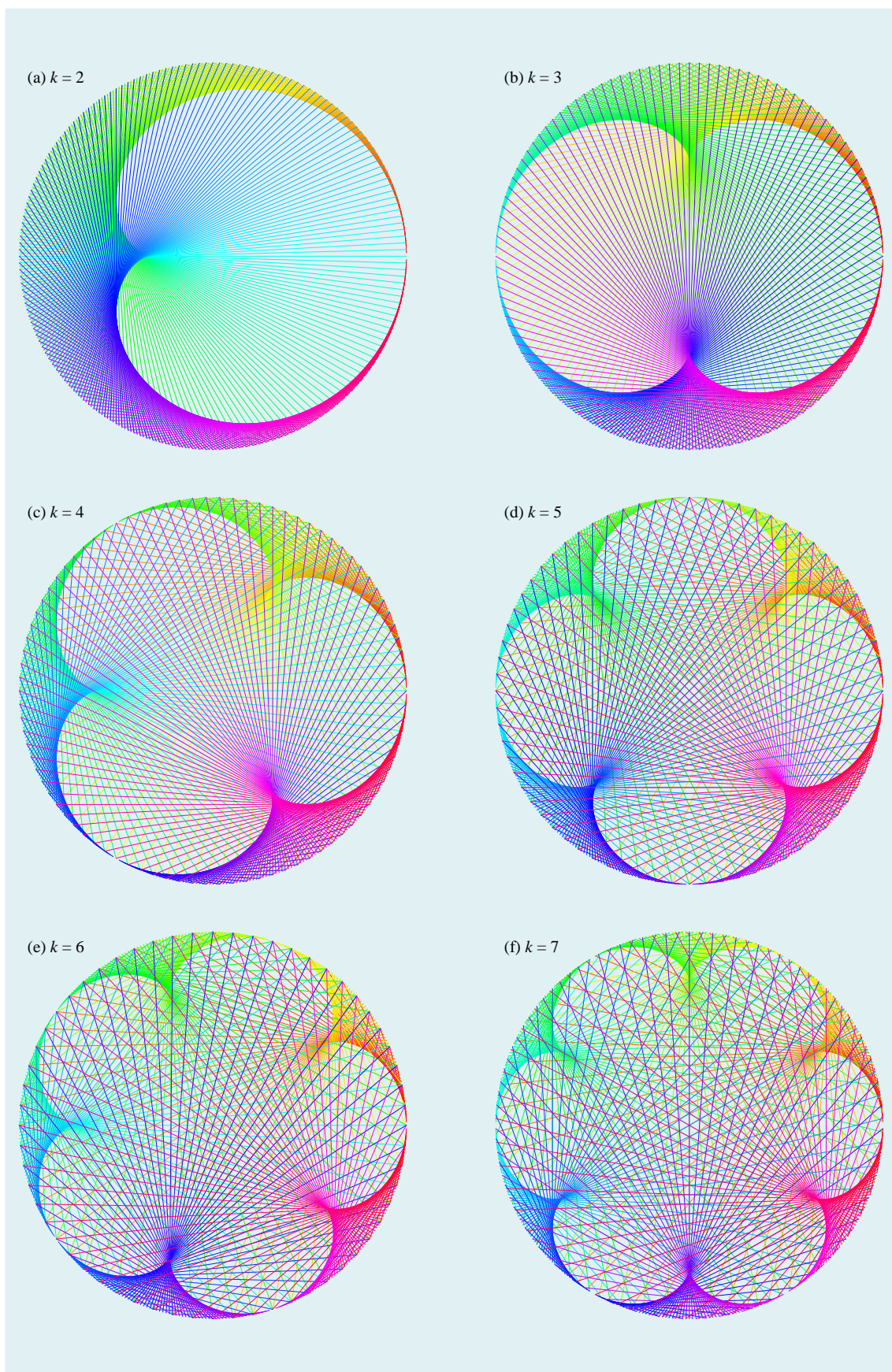



图 4. 模数乘法表, mod 36 | Bk2\_Ch30\_04.ipynb

本章从心形线扩展到模数乘法表，并以此数学工具创作了更多生成艺术。此外，本章内容和图论中的**循环图** (circulant graph) 也有关，请感兴趣的读者自行学习探究。



图 5. 心形线的扩展图形, 第 1 组 |  Bk2\_Ch30\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

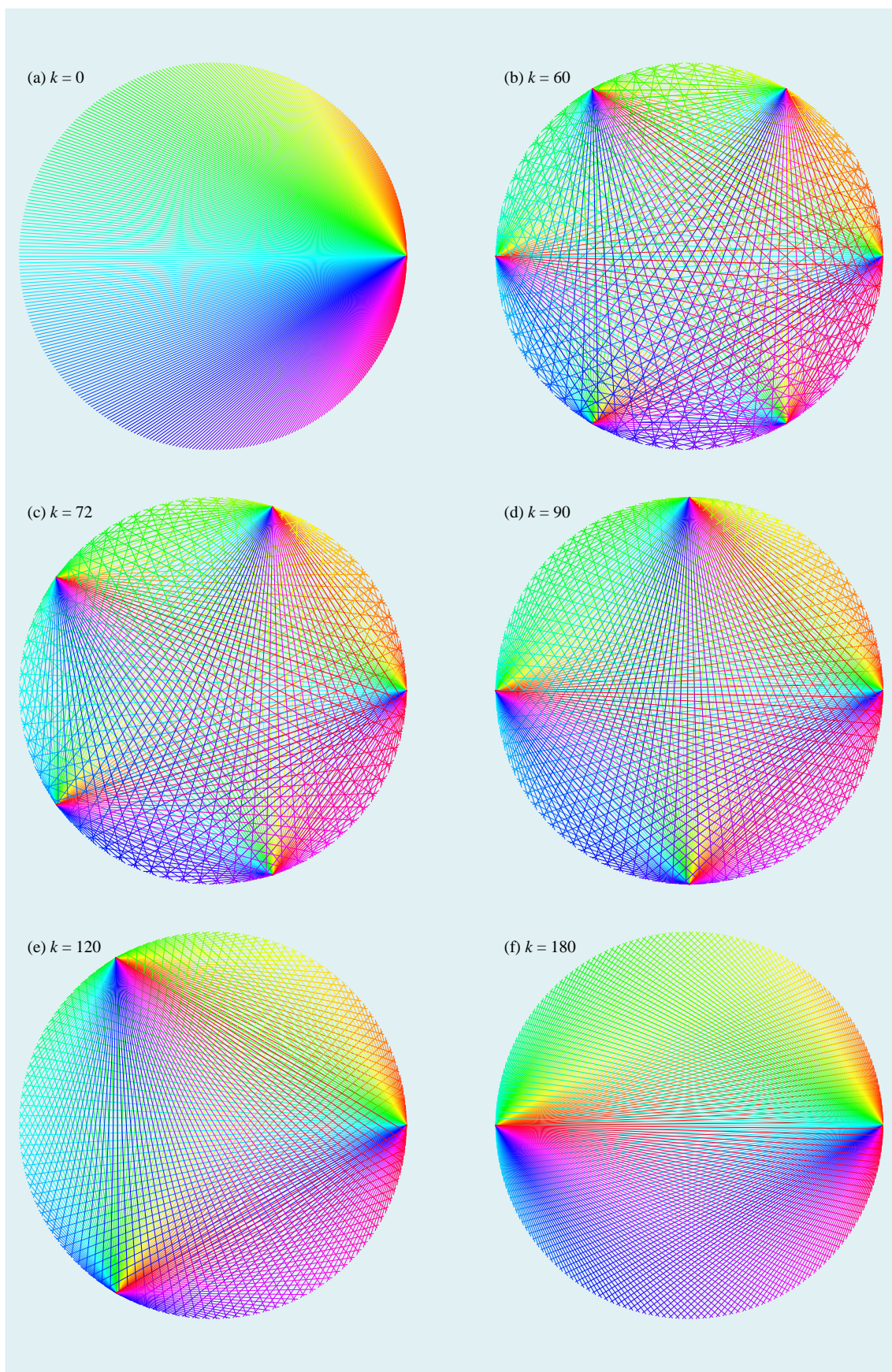

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 6. 心形线的扩展图形, 第 2 组 |  Bk2\_Ch30\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



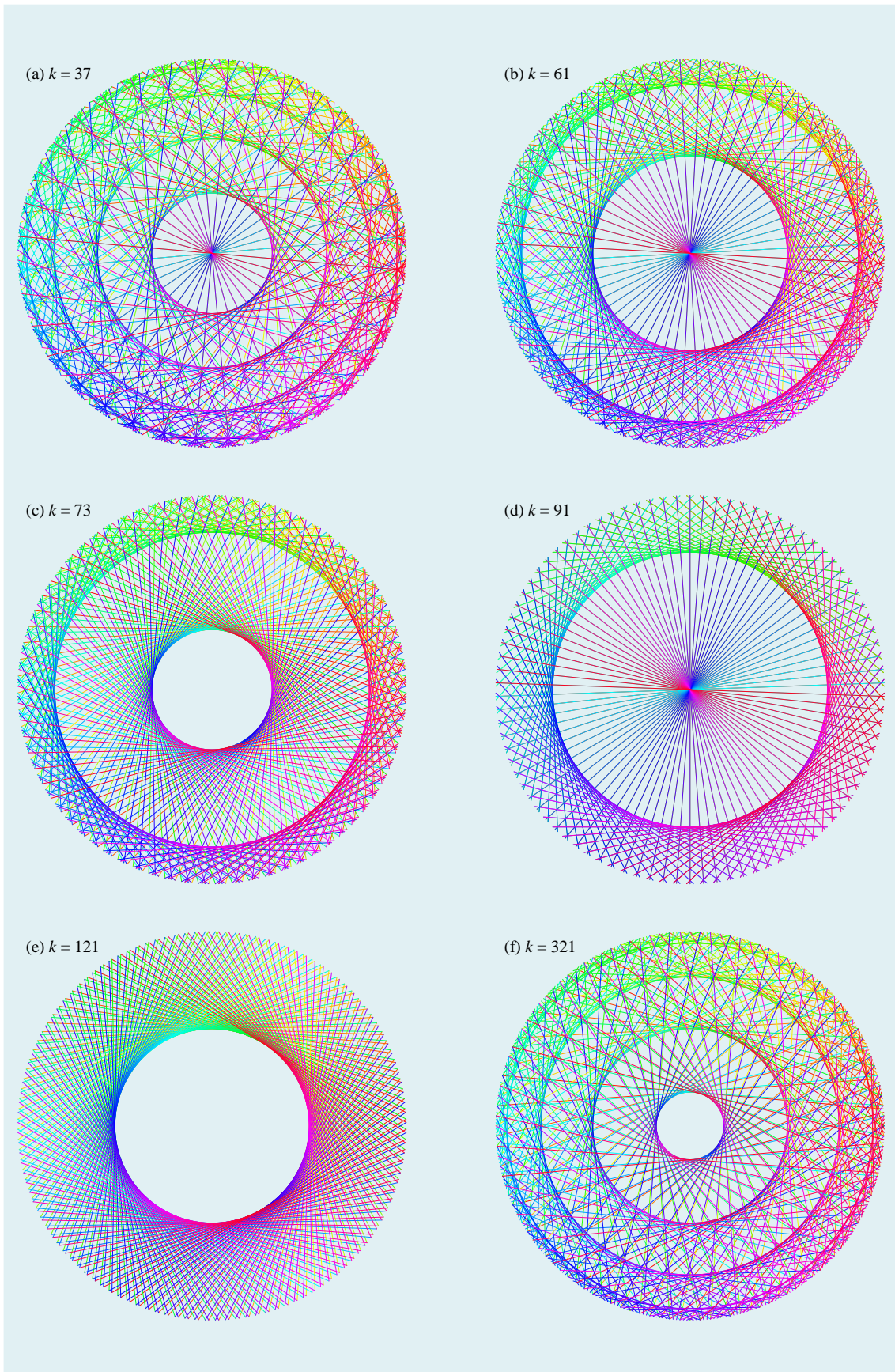



图 7. 心形线的扩展图形, 第 3 组 |  Bk2\_Ch30\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



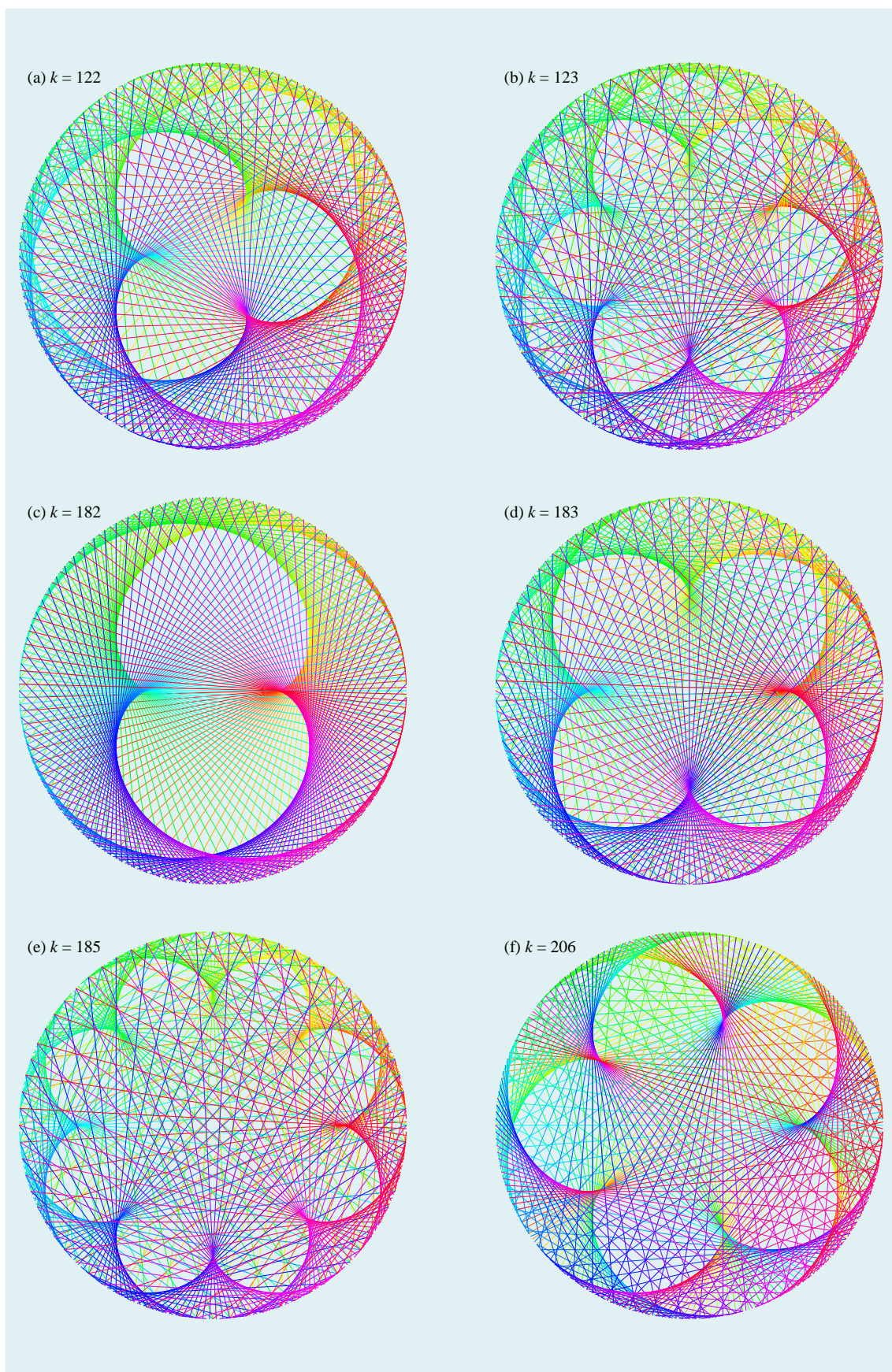



图 8. 心形线的扩展图形, 第 4 组 |  Bk2\_Ch30\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



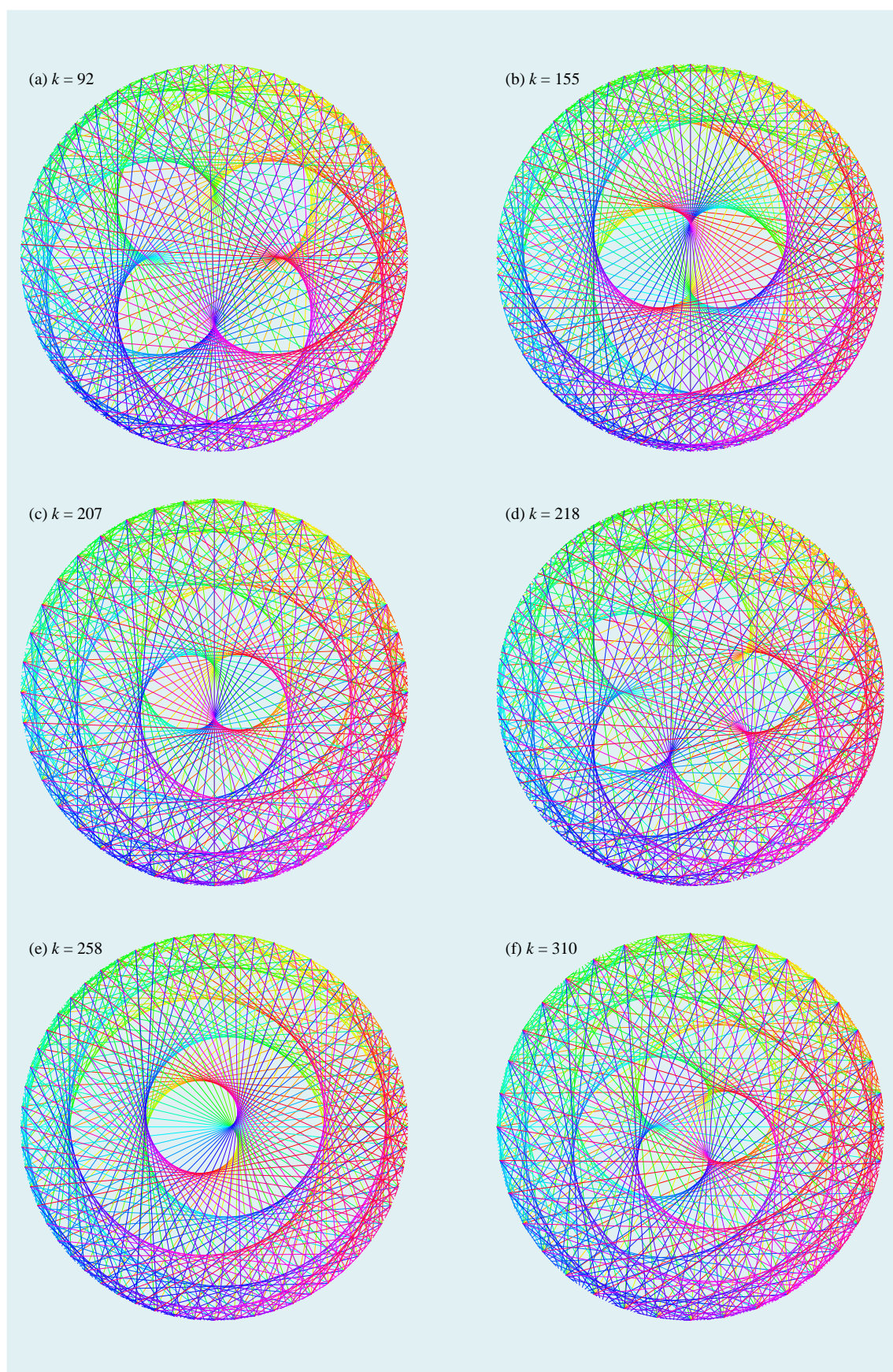



图 9. 心形线的扩展图形, 第 5 组 |  Bk2\_Ch30\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

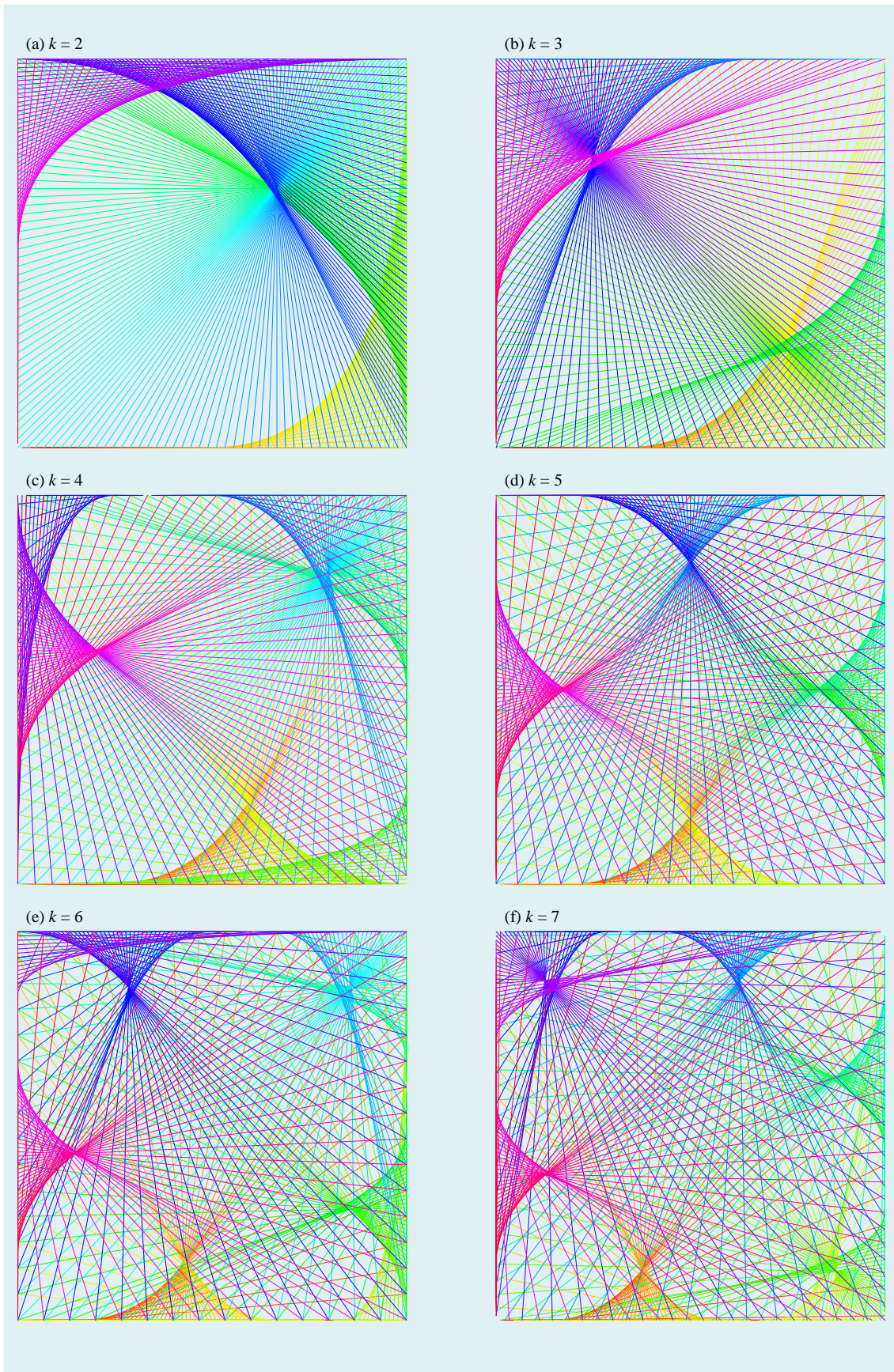

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 10. 可视化模数乘法，正方形，第 1 组 |  Bk2\_Ch30\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

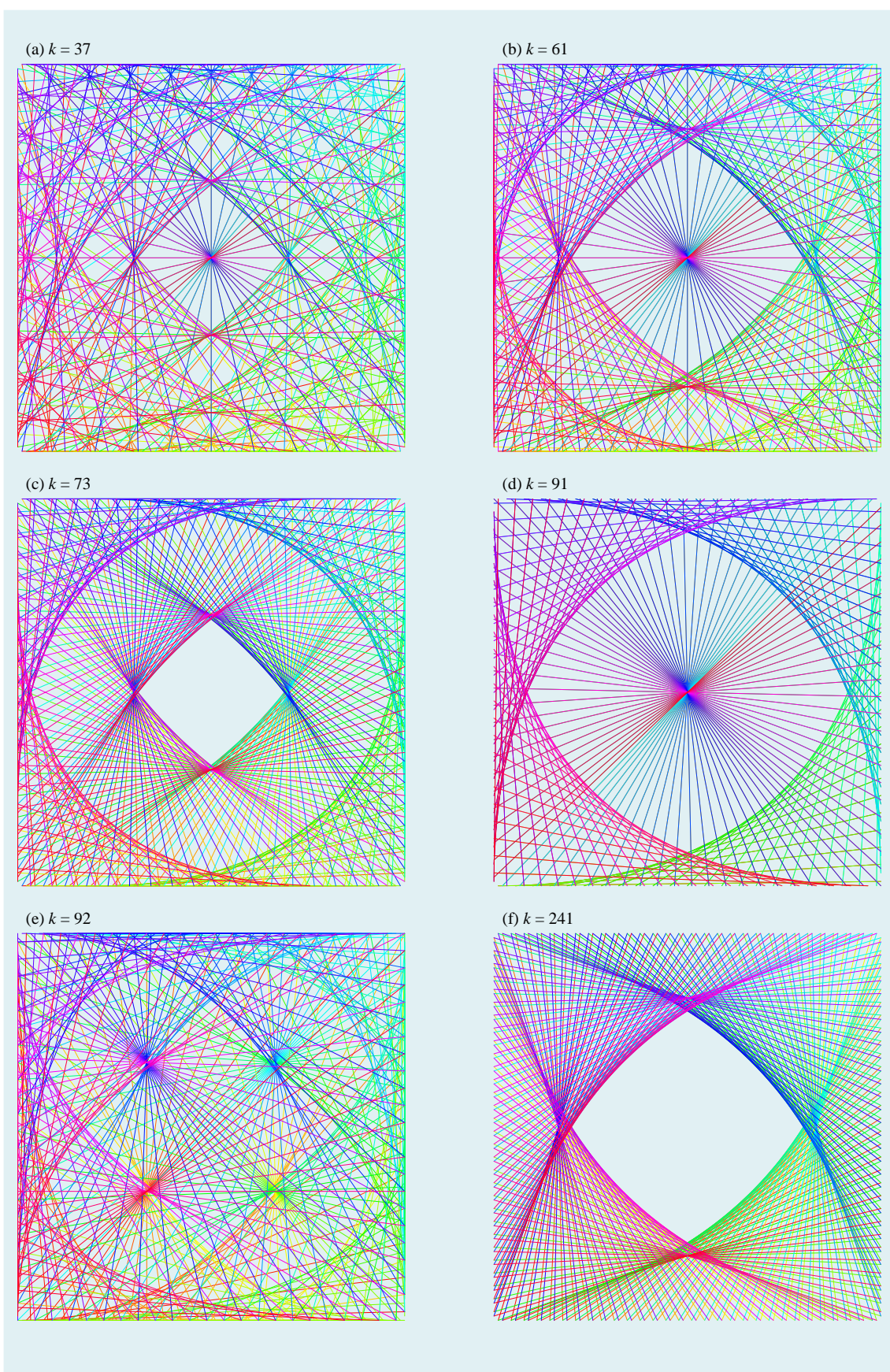

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 11. 可视化模数乘法，正方形，第 2 组 |  Bk2\_Ch30\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

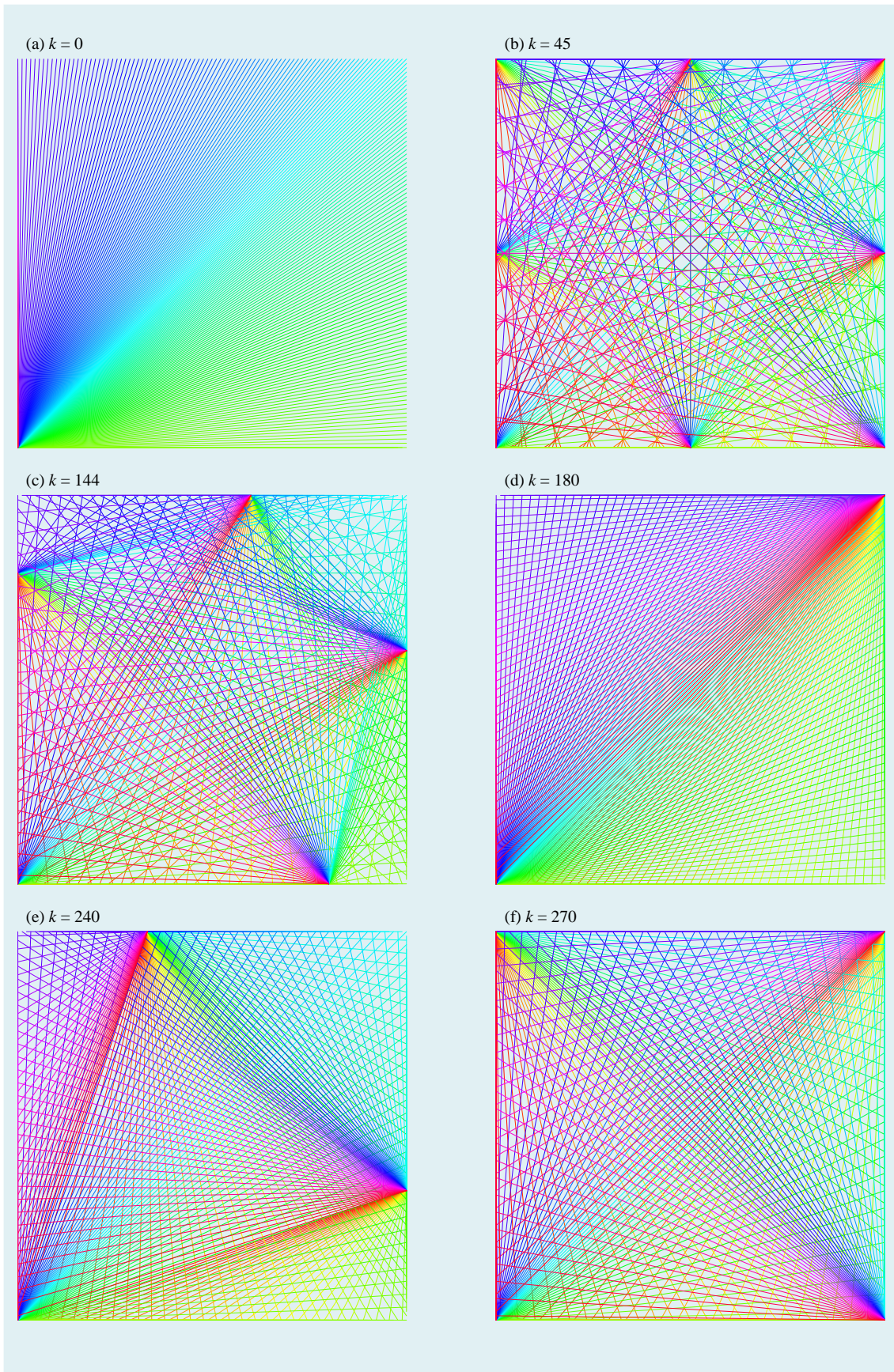

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 12. 可视化模数乘法，正方形，第 3 组 |  Bk2\_Ch30\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



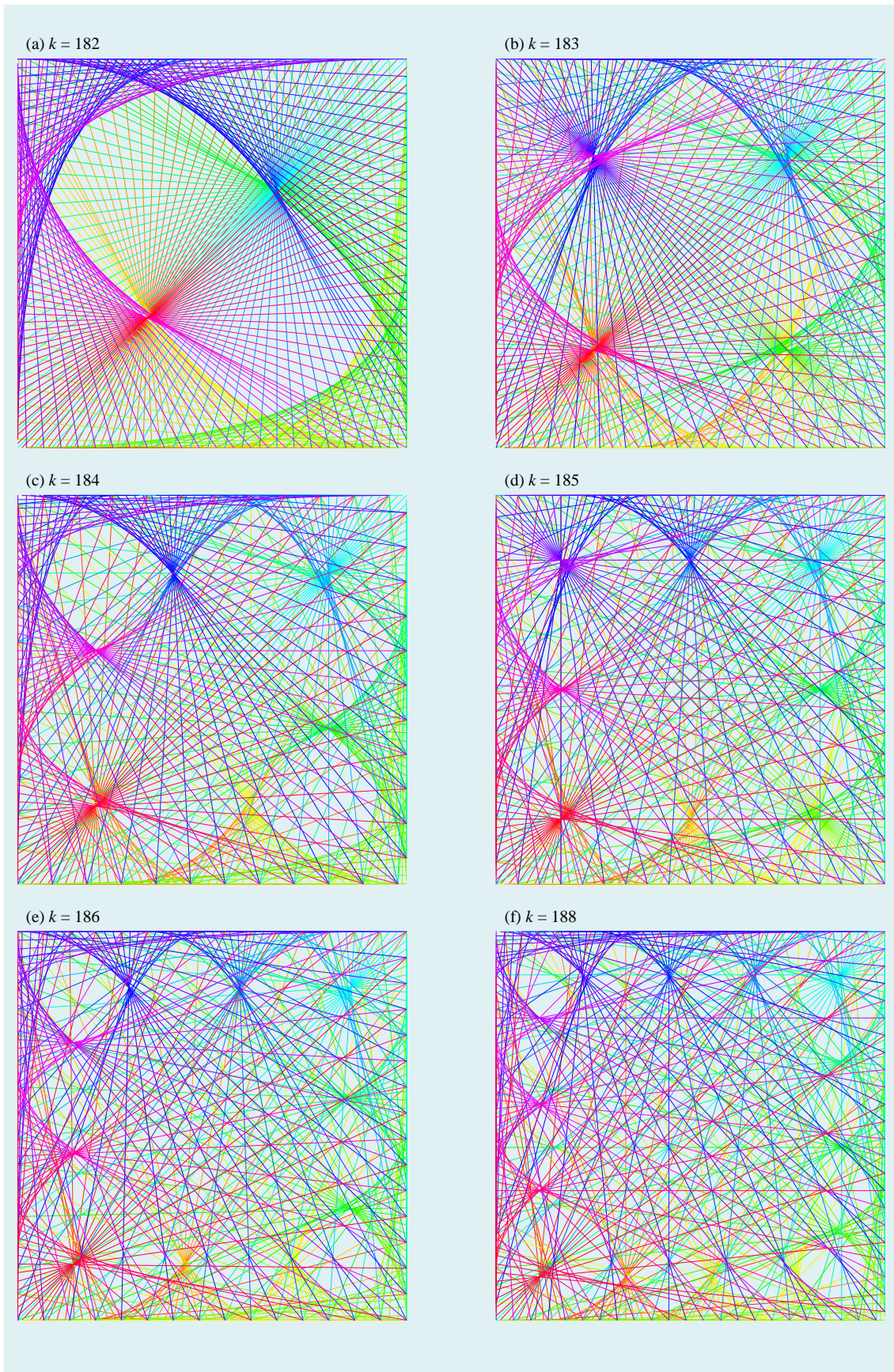


图 13. 可视化模数乘法，正方形，第 4 组 |  Bk2\_Ch30\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



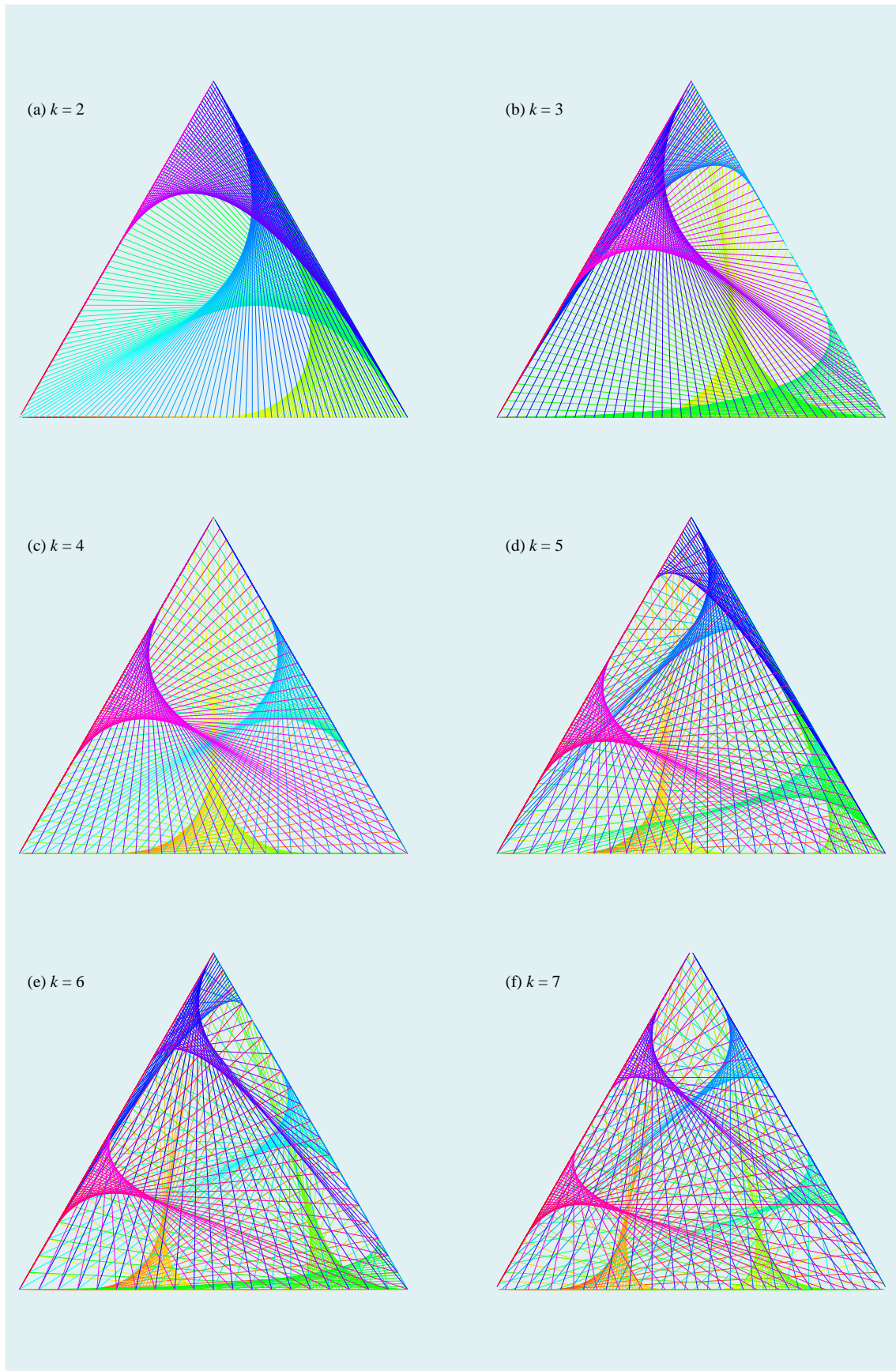



图 14. 可视化模数乘法，等边三角形，第 1 组 |  Bk2\_Ch30\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

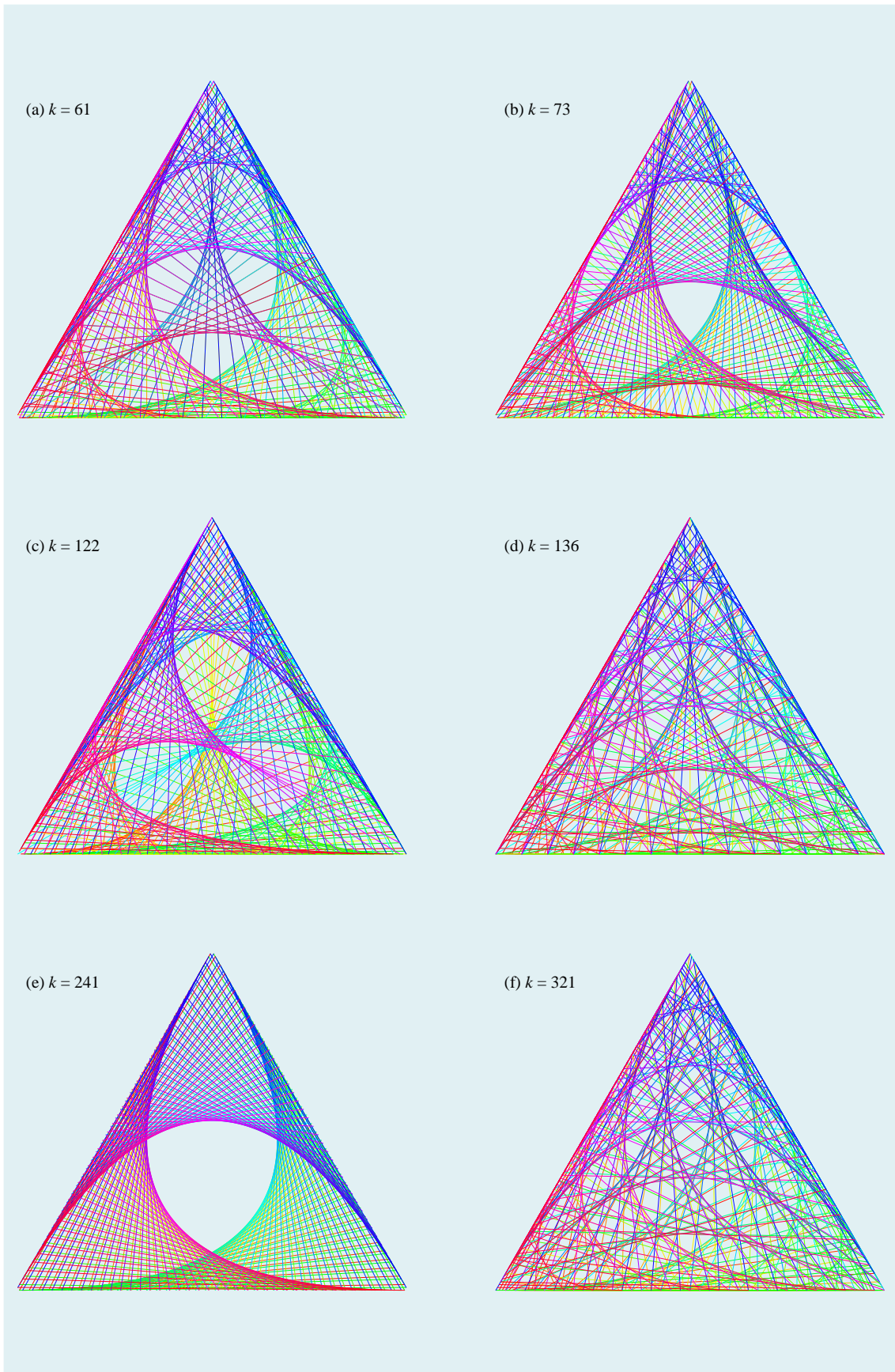



图 15. 可视化模数乘法，等边三角形，第 2 组 |  Bk2\_Ch30\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



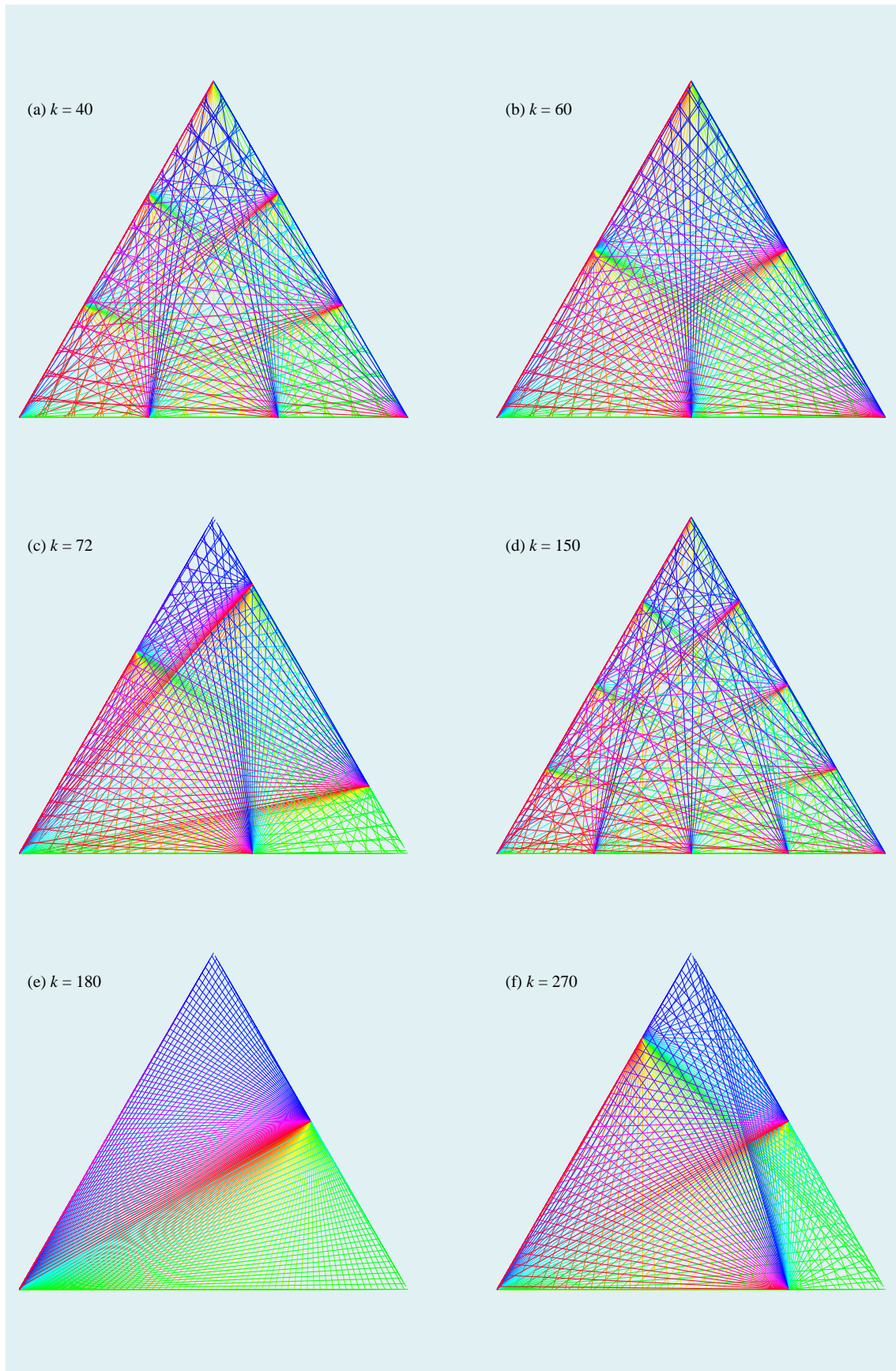



图 16. 可视化模数乘法，等边三角形，第 3 组 |  Bk2\_Ch30\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



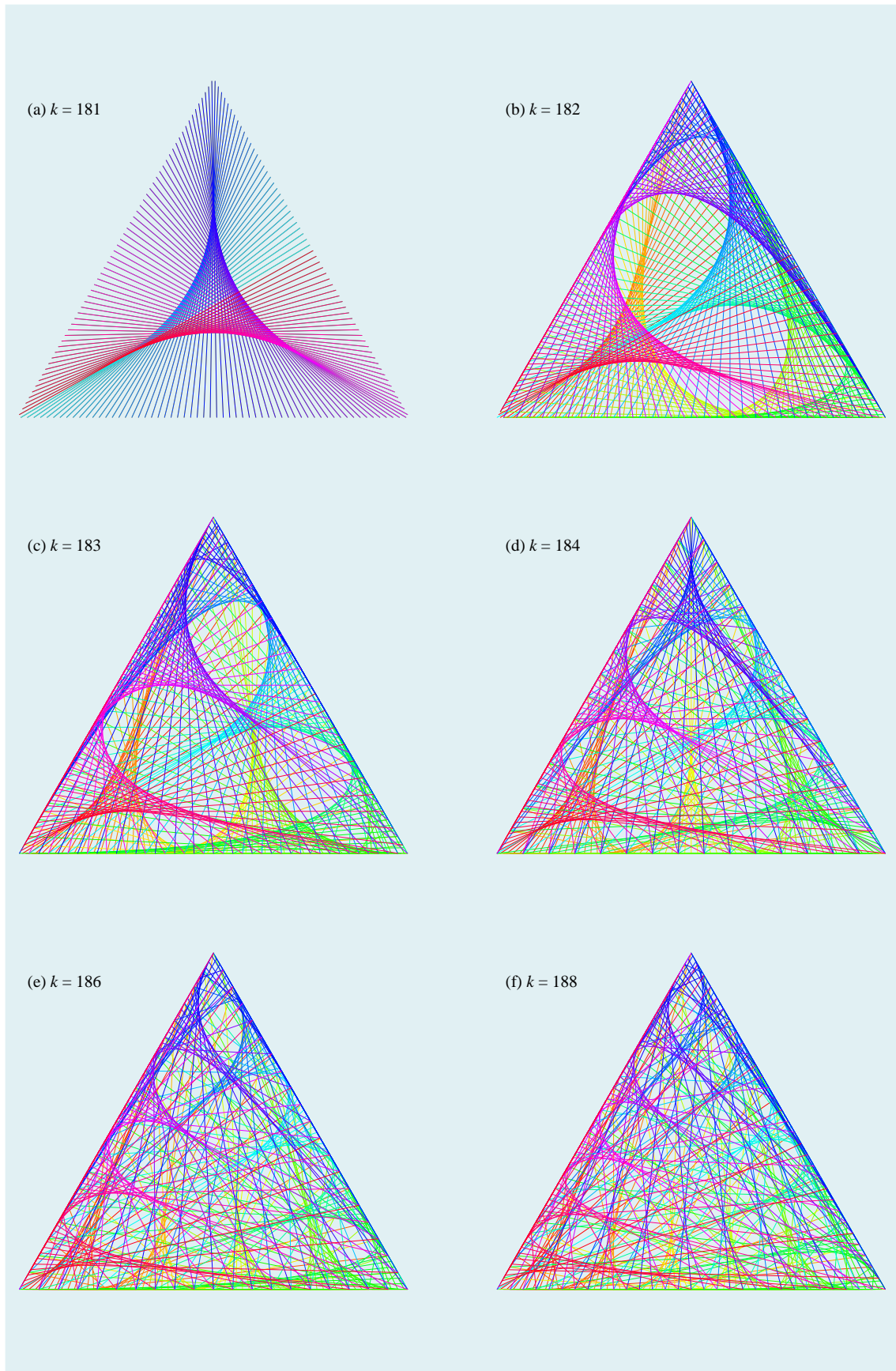



图 17. 可视化模数乘法，等边三角形，第 4 组 |  Bk2\_Ch30\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)