

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

13

Quadratic Form

二次型

既有大小，又有方向

本章将从“正定性”这一基础概念开始讲起，帮助大家建立正定、半正定、负定、半负定、不定等概念的几何直观理解。我们还会学习判断一个矩阵是否正定，并揭示正定矩阵与内积、二次型之间的紧密联系。在此基础上，我们引入两种常用的矩阵分解方法：Cholesky 分解、LDL 分解。接着，我们将深入探讨瑞利商，瑞利商的分子、分母都是二次型。最后，本章将介绍几种常见的距离度量方法，包括马氏距离，这是大家前文常见的旋转椭圆的来由。

13.1 正定性



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 正定、半正定、负定、半负定和不定矩阵的定义。
- ▶ 正定：开口朝上的抛物面。
- ▶ 半正定：山谷面。
- ▶ 负定：开口朝下的抛物面。
- ▶ 半负定：山脊面。
- ▶ 不定矩阵：马鞍面。
- ▶ 从特征值角度判断矩阵正定性。

二次型

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

简单来说，二次型 (quadratic form) 是关于向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 的二次多项式，一般形式如下

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1)$$

其中，矩阵 \mathbf{A} 是实对称矩阵。

如图 1 所示，(1) 对应的矩阵乘法结果为 1×1 矩阵，相当于标量。

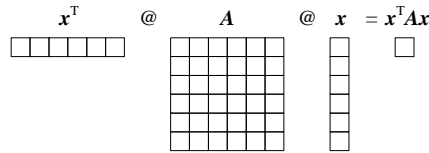


图 1. 二次型对应的矩阵乘法运算

(1) 本质上是个多元二次函数。

举个例子，给定如下对称矩阵 \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

容易得到二元二次函数 $f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \quad (3)$$

本节后续就要从二元函数角度讲解二次型和正定性。



《可视之美》介绍如何用“切豆腐”可视化三元二次型。

正定性

根据二次型的正负性质，我们可以将其分成五类。

当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (\mathbf{x} 为非零列向量) 时，如果满足：

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (4)$$

矩阵 \mathbf{A} 为**正定矩阵** (positive definite matrix)。

当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时，如果

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (5)$$

矩阵 \mathbf{A} 为**半正定矩阵** (positive semi-definite matrix)。

当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时，如果

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad (6)$$

矩阵 \mathbf{A} 为**负定矩阵** (negative definite matrix)。

当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时，如果

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \quad (7)$$

矩阵 \mathbf{A} 为**半负定矩阵** (negative semi-definite matrix)。

矩阵 \mathbf{A} 不属于以上任何一种情况， \mathbf{A} 为**不定矩阵** (indefinite matrix)。

几何视角看正定性

给定如下 2×2 实对称矩阵 \mathbf{A} ：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (8)$$

构造如下二元函数 $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$y = f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \quad (9)$$

在三维正交空间中，当矩阵 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 正定性不同时， $y = f(x_1, x_2)$ 对应曲面展现出不同的形状：

- ◀ 当 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 为正定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$ 为开口向上抛物面；
- ◀ 当 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 为半正定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$ 为山谷面；
- ◀ 当 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 为负定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$ 为开口向下抛物面；
- ◀ 当 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 为半负定矩阵时， $y = f(x_1, x_2)$ 为山脊面；
- ◀ 当 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 不定时， $y = f(x_1, x_2)$ 为马鞍面，也叫做双曲抛物面。

下面让我们展开聊聊。

正定

矩阵 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 是**正定** (positive definite)，意味着 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_{2 \times 2} \mathbf{x}$ 是个开口朝上的抛物面，形状像是碗。

先来看一个简单的例子。若矩阵 \mathbf{A} 为 2×2 单位矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

单位矩阵显然是正定矩阵。

构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 \quad (11)$$

二次函数的曲面和等高线如图 2 所示。

如图 2 (b) 所示，当 $x_1^2 + x_2^2 = c$ ($c > 0$) 时，等高线为正圆。

容易发现只有当 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$ 时，即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

\mathbf{x} 取任意非零向量，(11) 均大于 0。

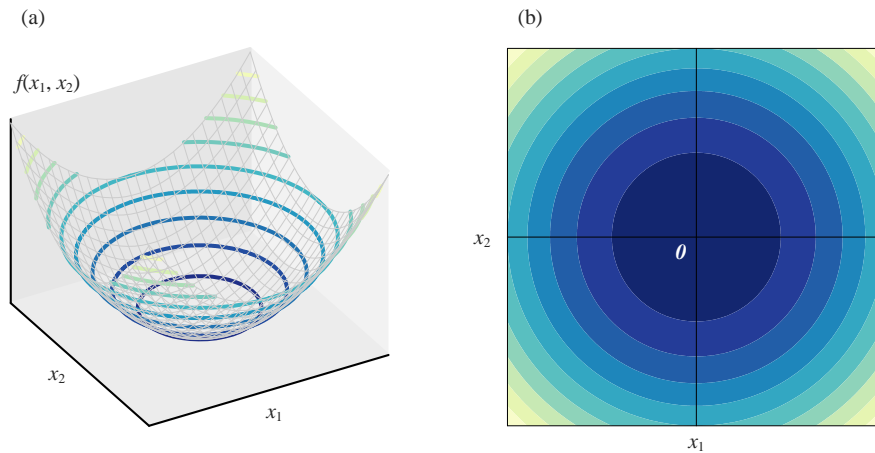


图 2. 开口朝上正圆抛物面

容易求得 (10) 中 \mathbf{A} 特征值分别为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 1$ ，对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

计算矩阵 \mathbf{A} 的秩， $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ 。

再看一个 2×2 正定矩阵例子。矩阵 \mathbf{A} 具体值如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

同样，构造二元函数 $f(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 \quad (14)$$

对于上式，只有 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$ 时， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

图 3 (a) 所示为 (14) 对应开口向上正椭圆抛物面；如图 3 (b) 所示，等高线为一系列正椭圆。

容易求得 \mathbf{A} 特征值分别为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$ ，对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

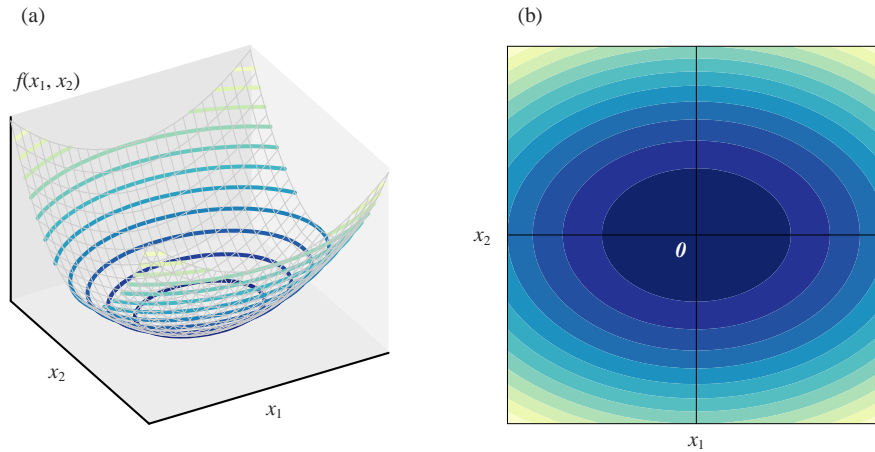


图 3. 开口朝上椭圆抛物面

下面再看一个旋转椭圆情况。方阵 A 具体如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

构造二元函数 $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1.5x_1^2 + x_1x_2 + 1.5x_2^2 \quad (17)$$

同样，只有当 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$ 时， $f(x_1, x_2) = 0$ 。

经过计算得到 A 特征值也是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$ ，(16) 的特征值分解（谱分解）为

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_V \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{V^T} \quad (18)$$

如图 4 (b) 所示，正交矩阵 V 列向量构成的规范正交基 $[v_1, v_2]$ 将椭圆摆正。

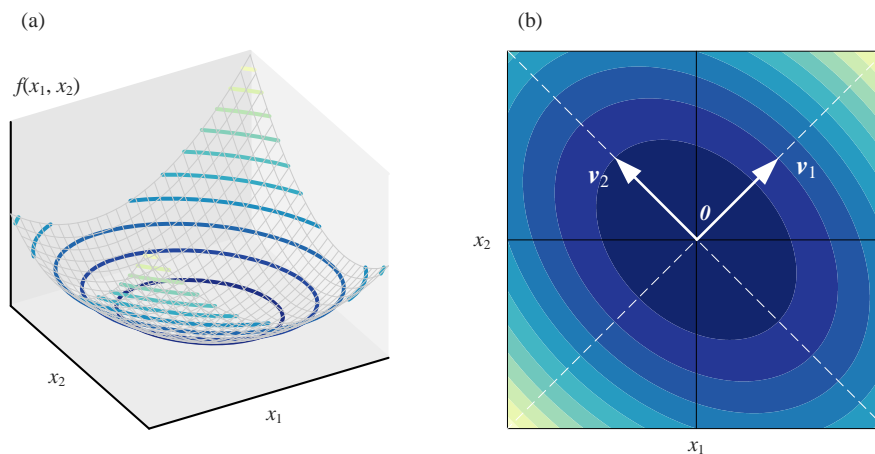


图 4. 开口朝上旋转椭圆抛物面

半正定

矩阵 $A_{2 \times 2}$ 是**半正定** (positive semi-definite), 意味着 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_{2 \times 2} \mathbf{x}$ 是个开口朝上的山谷面。

让我们看第一个例子。矩阵 A 取值如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

容易判定 $\text{rank}(A) = 1$, 行列式为 0。

构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 \quad (20)$$

$x_1 = 0$ 时, 不管 x_2 取任何值, 上式为 0。也就是说, 除了零向量 $\mathbf{0}$ 以外, 还有无数个向量使得上式为 0; 这就是为什么 (19) 中矩阵 A 叫半正定的原因。

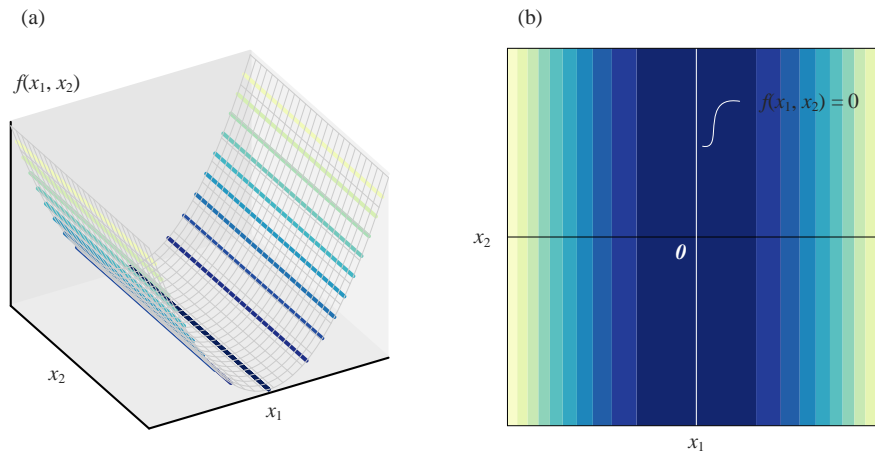


图 5. 山谷面

下式中矩阵 A 也是半正定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

矩阵 A 的行列式为 0, 秩为 1。

构造函数 $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$y = f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.5x_1^2 - x_1x_2 + 0.5x_2^2 \quad (22)$$

(22) 配方得到：

$$f(x_1, x_2) = 0.5x_1^2 - x_1x_2 + 0.5x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \quad (23)$$

容易发现, 除了零向量 $\mathbf{0}$ 以外, 任何在 $x_1 = x_2$ 直线上的向量, 都会使得 $y = f(x_1, x_2)$ 为 0。

(22) 中矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = 1$ ，对应特征向量如下：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

(21) 中矩阵 A 的特征值分解 (谱分解) 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \quad (25)$$

图 6 展示 (22) 对应的旋转山谷面。

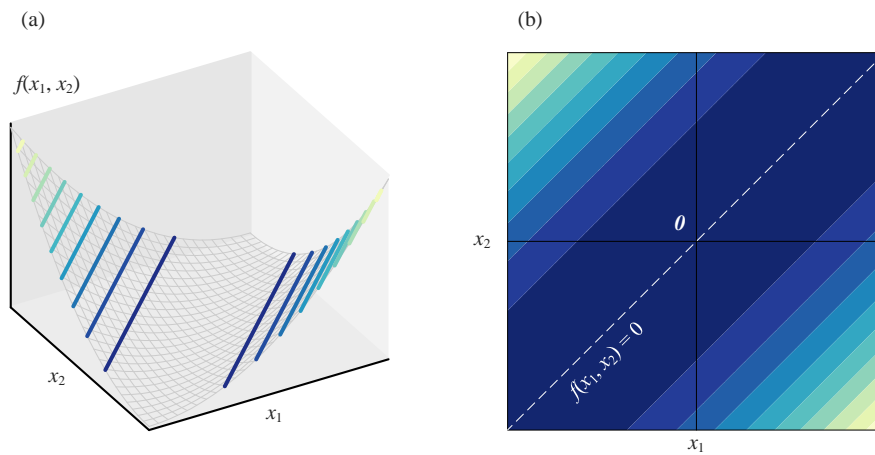


图 6. 旋转山谷面

负定

矩阵 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 是**负定** (negative definite)，意味着 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T @ \mathbf{A}_{2 \times 2} @ \mathbf{x}$ 是个开口朝下的抛物面。

最简单的负定矩阵是单位矩阵取负，即 $-\mathbf{I}$ 。 $-\mathbf{I}$ 的特征值都为 -1 。

图 7 所示为 $-\mathbf{I}$ 对应的开口朝下的正圆抛物面。



请大家写出图 7 对应的二元函数。

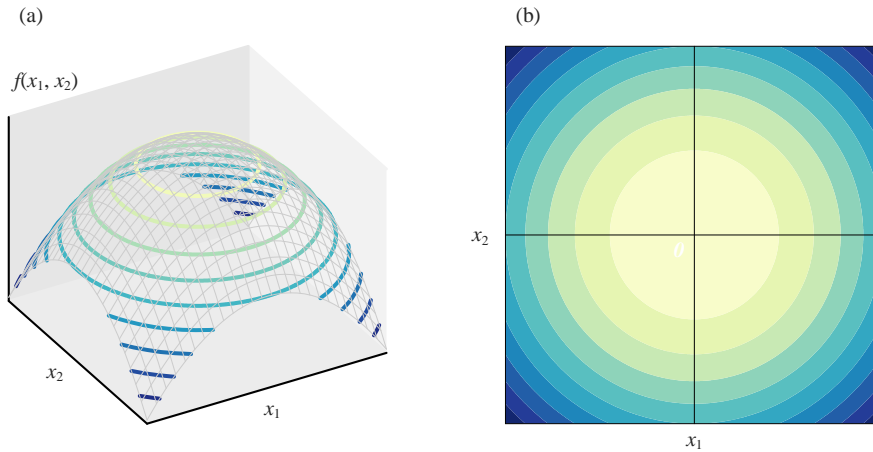


图 7. 开口朝下正圆抛物面

下面也用 2×2 矩阵讨论负定。如下 A 为负定矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

构造如下二元函数 $y = f(x_1, x_2)$ ：

$$y = f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 - 2x_2^2 \quad (27)$$

如图 8 所示， 容易发现只有当 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$ 时， $y = f(x_1, x_2) = 0$ 。

很容易求得 A 特征值分别为 $\lambda_1 = -2$ 和 $\lambda_2 = -1$ ， 对应特征向量分别为：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

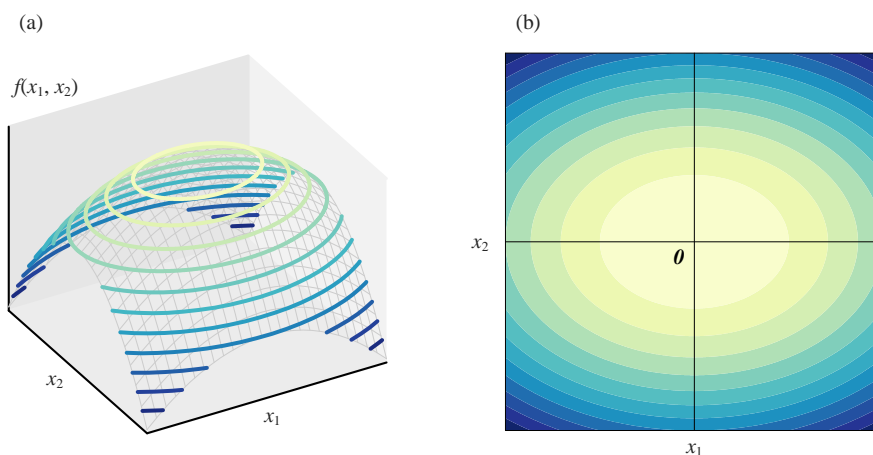


图 8. 开口朝下椭圆抛物面

如下负定矩阵 A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (29)$$

则对应开口朝下的旋转椭圆抛物面。

? 请大家计算 (29) 的行列式、秩。

构造如下二元函数 $y = f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = -1.5x_1^2 - x_1x_2 - 1.5x_2^2 \quad (30)$$

(29) 中矩阵 \mathbf{A} 的特征值分解为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \quad (31)$$

两个特征值均小于 0。(30) 的等高线也是旋转椭圆。如图 9 (b) 所示，正交矩阵 \mathbf{V} 是摆正旋转椭圆的规范正交基。

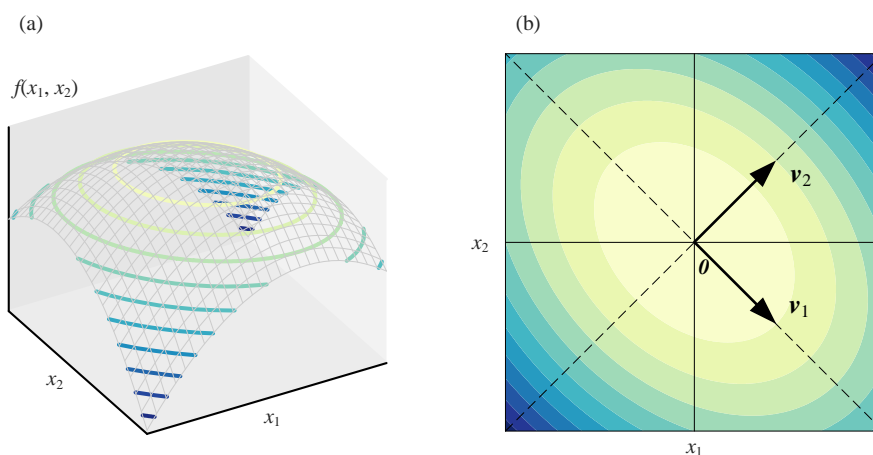


图 9. 开口朝下旋转椭圆抛物面

半负定

矩阵 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 是**半负定** (negative semi-definite)，意味着 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_{2 \times 2} \mathbf{x}$ 是个开口朝下的山脊面。

下面看一个半负定矩阵例子，矩阵 \mathbf{A} 取值如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

构造 $y = f(x_1, x_2)$:

$$y = f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2^2 \quad (33)$$

$x_2 = 0$, x_1 为任意值, 上式为 0。矩阵 A 的秩为 1, $\text{rank}(A) = 1$ 。

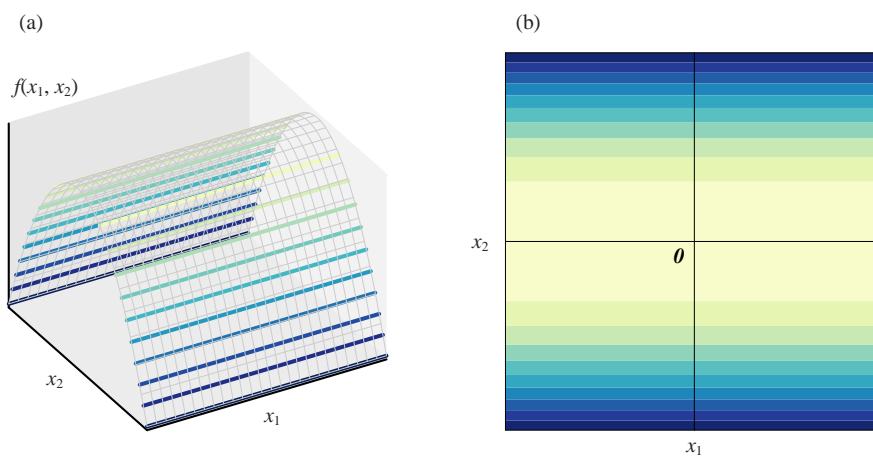


图 10. 山脊面

再看一个例子。如下负定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (34)$$

? 请大家计算 (34) 的行列式、秩。

对应的二元函数为

$$f(x_1, x_2) = -0.5x_1^2 + x_1x_2 - 0.5x_2^2 \quad (35)$$

图 11 展示 (35) 对应的曲面和等高线。

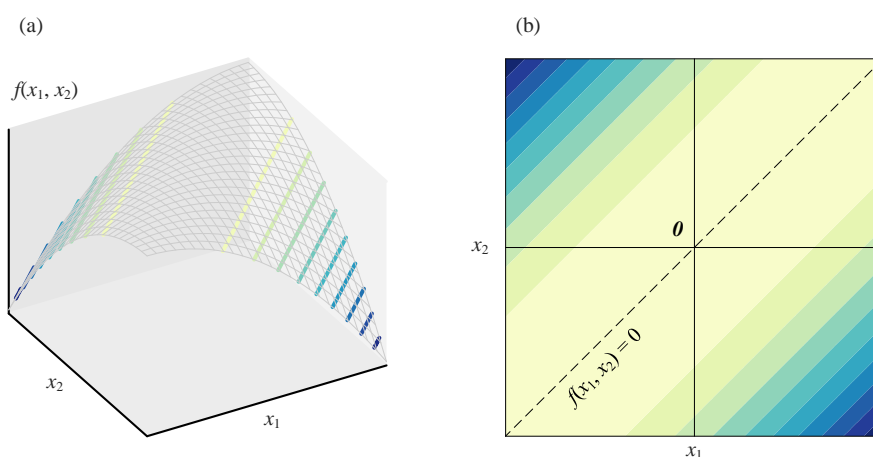


图 11. 旋转山脊面

不定

矩阵 $A_{2 \times 2}$ 不定 (indefinite)，意味着 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_{2 \times 2} \mathbf{x}$ 是个马鞍面， $(0, 0)$ 为鞍点。 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_{2 \times 2} \mathbf{x}$ 符号不定。

举个例子， A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

构造函数 $f(x_1, x_2)$ ：

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2 \quad (37)$$

求得矩阵 A 对应特征值为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$ ，对应特征向量如下：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

图 12 展示 $y = f(x_1, x_2)$ 对应曲面。

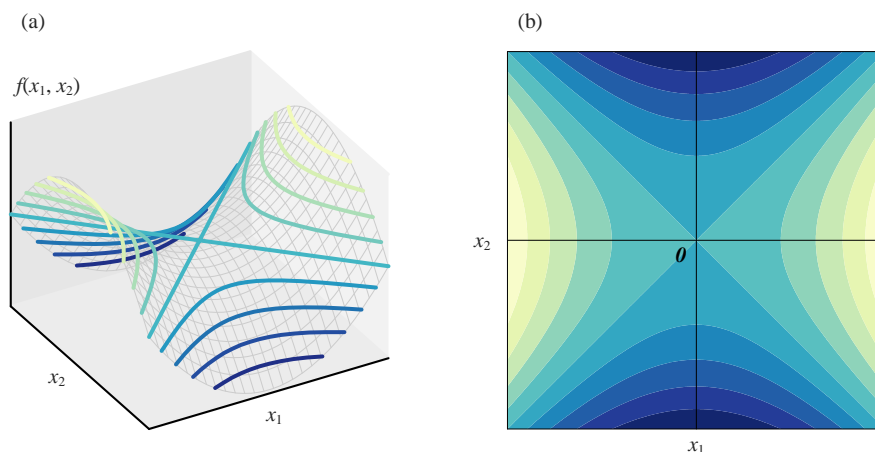


图 12. 马鞍面

当 $f(x_1, x_2) \neq 0$ ，曲面对应等高线为双曲线。

图 12 所示马鞍面中心 C 既不是极小值点，也不是极大值点；图 12 中马鞍面中心点被称之为鞍点 (saddle point)。

图 12 中马鞍面顺时针旋转 45° 得到图 13 曲面。图 13 曲面对应矩阵 A 如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

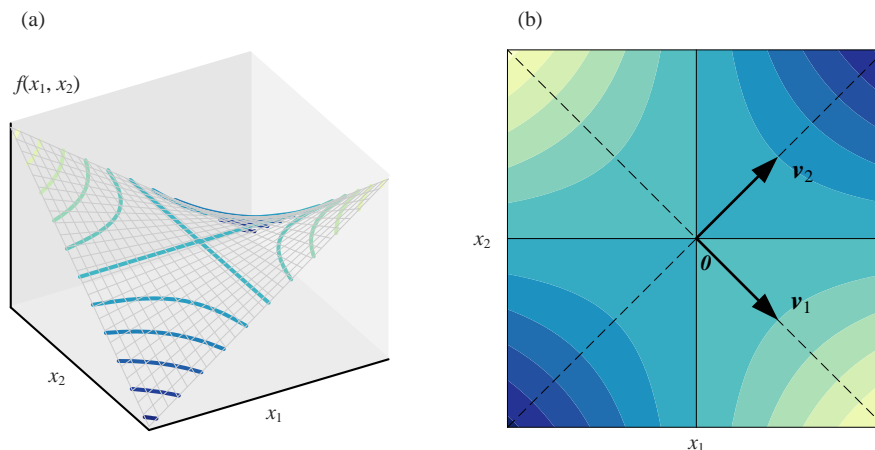


图 13. 旋转马鞍面

构造如下二元函数 $y = f(x_1, x_2)$:

$$y = f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1x_2 \quad (40)$$

当 $f(x_1, x_2)$ 取得非零值时，上式相当于反比例函数。

(39) 中矩阵 \mathbf{A} 的特征值分解为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \quad (41)$$

特征值分解

实对称矩阵 \mathbf{A} 进行特征值分解得到：

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (42)$$

将 (42) 代入 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \mathbf{x} \\ &= \left(\mathbf{V}^T \mathbf{x} \right)^T \mathbf{\Lambda} \left(\mathbf{V}^T \mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

令：

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^T \mathbf{x} \quad (44)$$

(43) 可以写成：

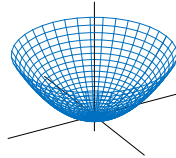
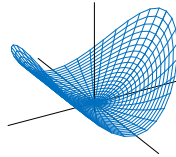
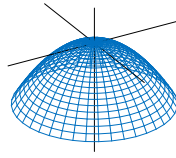
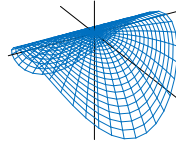
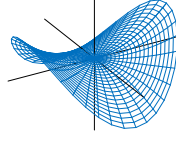
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{z}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{z} \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_D z_D^2 = \sum_{j=1}^D \lambda_j z_j^2 \end{aligned} \quad (45)$$

当上式中特征值均为正数，除非 $z_1, z_2 \dots z_n$ 均为 0 (即 z 为零向量)，否则上式大于 0，这时 A 为正定。

表 1 总结了矩阵 A 不同正定性条件下对应的曲面形状。简单来说，

- ▶ 若 A 特征值均为正值， A 为正定。
- ▶ 若 A 特征值非负 (正值或 0)， A 为半正定。
- ▶ 若 A 的特征值均为负值，则矩阵 A 为负定。
- ▶ 若 A 特征值非正 (负值或 0)，则矩阵 A 为半负定。
- ▶ 若 A 特征值有正有负，则矩阵 A 为不定。

表 1. 正定性的几何意义

$A_{n \times n}$	特征值	$x^T A_{2 \times 2} x$ 二次型形状
$A_{n \times n}$ 为正定矩阵 $x^T A x > 0, x \neq 0$	n 个特征值均为正值	
$A_{n \times n}$ 为半正定矩阵，秩为 r $x^T A x \geq 0, x \neq 0$	r 个正特征值， $n - r$ 个特征值为 0	
$A_{n \times n}$ 为负定矩阵 $x^T A x < 0$	n 个特征值均为负值	
$A_{n \times n}$ 为半负定矩阵，秩为 r $x^T A x \leq 0$	r 个负特征值， $n - r$ 个特征值为 0	
$A_{n \times n}$ 为不定矩阵	特征值符号正负不定	



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请判断如下方阵的正定性。

▶ $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$

Q2. 请指出 **Q1** 各个矩阵对应的二次型的曲面形状、等高线特征。

Q3. 请把如下二次多项式写成 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 形式，并指出曲面形状，**A** 正定性

▶ $-x_1^2 + x_2^2$

▶ $-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

▶ x_2^2

▶ $x_1^2 + x_2^2$

▶ $2x_1x_2$

▶ $2x_1^2 + 2x_2^2$

▶ $-2x_1x_2$

▶ $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

▶ $-x_1^2$