

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.2 缩放



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 变换矩阵行列式：面积、体积缩放比例。
- ▶ 挤压变换：理解在保持面积不变条件下的缩放。
- ▶ 缩放满足矩阵乘法交换律。
- ▶ 负缩放因子：缩放中含有镜像。
- ▶ 缩放因子为 0：几何变换中含有降维，变换不可逆，信息丢失。

在几何变换中，**缩放变换** (scaling transformation) 是最基本的操作之一。缩放可以通过矩阵乘法高效实现，并且可以处理各种情况，如等比例、不等比例缩放、连续缩放、负比例缩放等。本节系统介绍缩放，我们从二维平面入手，再扩展到三维空间。

平面等比例缩放

等比例缩放指的是图形在所有方向上按相同比例放大或缩小。平面等比例缩放对应的线性变换矩阵形式如下

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = sI \quad (1)$$

若， $s > 1$ 表示放大 (如图 1 (a))； $0 < s < 1$ 表示缩小 (如图 1 (b))。本书前文介绍过这个 (主对角线元素相同) 的对角矩阵，它的作用相当于矩阵数乘。

(1) 方阵行列式为 s^2 ；这意味着变换之后几何图形面积变化 s^2 倍。

(1) 中方阵 S 的列向量构成正交基。

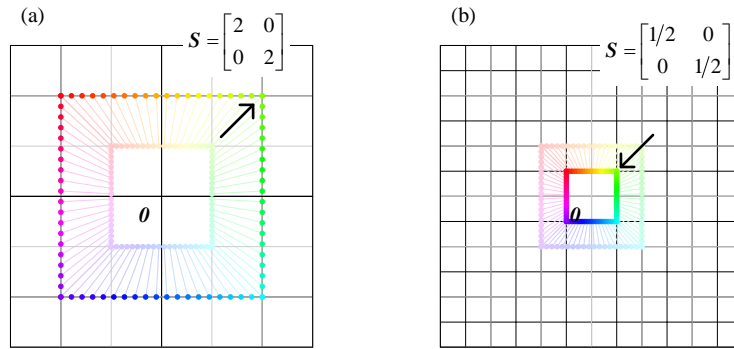


图 1. 等比例缩放，二维平面

对向量 $[x_1, x_2]^T$ 进行等比例缩放后，得到新向量为 $[y_1, y_2]^T$ ：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

缩放完成后，横纵轴的缩放比例一致，图形只是整体放大或缩小。

⚠ 注意，缩放前后，原点位置不发生改变。

不难发现，图 1 (a)、(b) 互为逆操作，也就是说

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

本书前文提过，若一个对角方阵的主对角线元素均不为零，则其逆矩阵也是对角方阵，主对角线元素是原矩阵对应元素的倒数。如果对角方阵主对角线元素存在不止一个 0，方阵不可逆。

不等比例缩放

(平面上) 不等比例缩放指的是水平方向和竖直方向缩放比例不同，变换矩阵为：

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中， s_1 、 s_2 均大于 0，且 $s_1 \neq s_2$ 。若任意缩放系数为 1，则说明对应方向上没有变换。

请大家自行分析图 2 这两幅图。

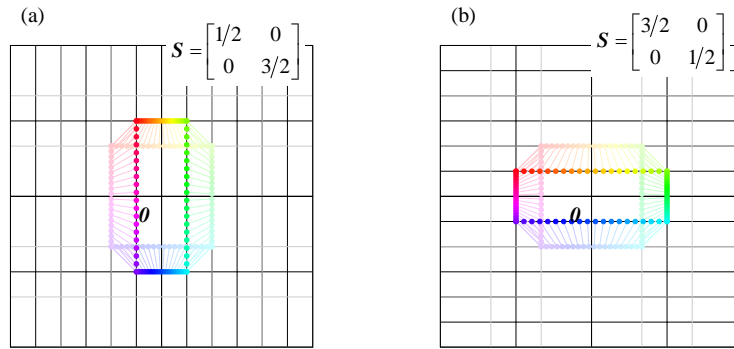


图 2. 非等比例缩放，二维平面

本书前文介绍过对角方阵的缩放作用，下面简单回顾一下。

比如，给定 2×2 矩阵 A ，矩阵乘法 $A@S$ 相当于对角方阵主对角线元素依次对 A 列项量进行缩放，即

$$AS = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 a_1 & s_2 a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

而矩阵乘法 $S@A$ 则相当于对角方阵主对角线元素依次对 A 行向量进行缩放，即

$$SA = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 a^{(1)} & s_2 a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

如图 3 所示， $\det(S) \neq 0$ ，缩放矩阵 S 存在逆，即

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_1 & 0 \\ 0 & 1/s_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

如果当 s_1 或 s_2 为 0 时，缩放矩阵 S 不可逆，变换不可恢复。

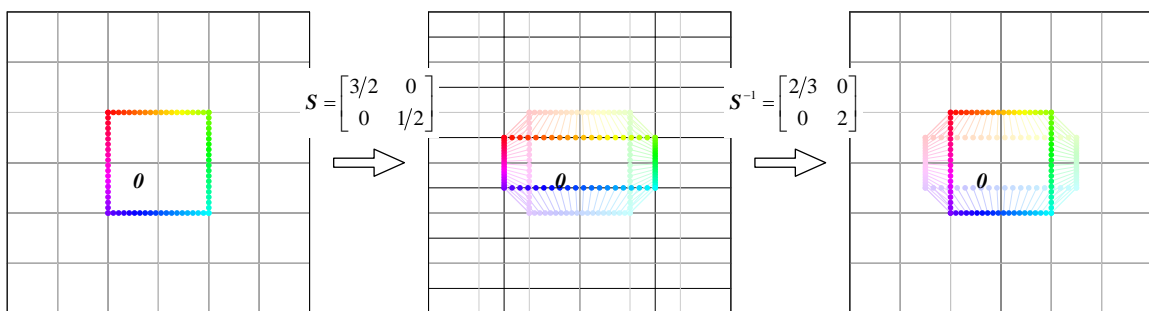


图 3. 缩放的逆运算

由于缩放矩阵 $S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ 为对角方阵，因此它的行列式很容易计算

$$\det(S) = s_1 s_2 \quad (8)$$

若 $|\det(S)| > 1$ ，说明平面几何图形面积放大； $0 < |\det(S)| < 1$ 则说明面积缩小。 $\det(S) = 0$ 则意味着发生降维，信息丢失，方阵不可逆。

水平、竖直缩放

仅水平方向发生缩放，对应的变换矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

这个对角方阵的行列式为 s ，意味着几何变换前后面积缩放 s 倍。图 4 (a)、(b) 给出两个水平缩放的例子。

仅竖直方向发生缩放，对应的变换矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (10)$$

图 4 (c)、(d) 给出两个水平缩放的例子。

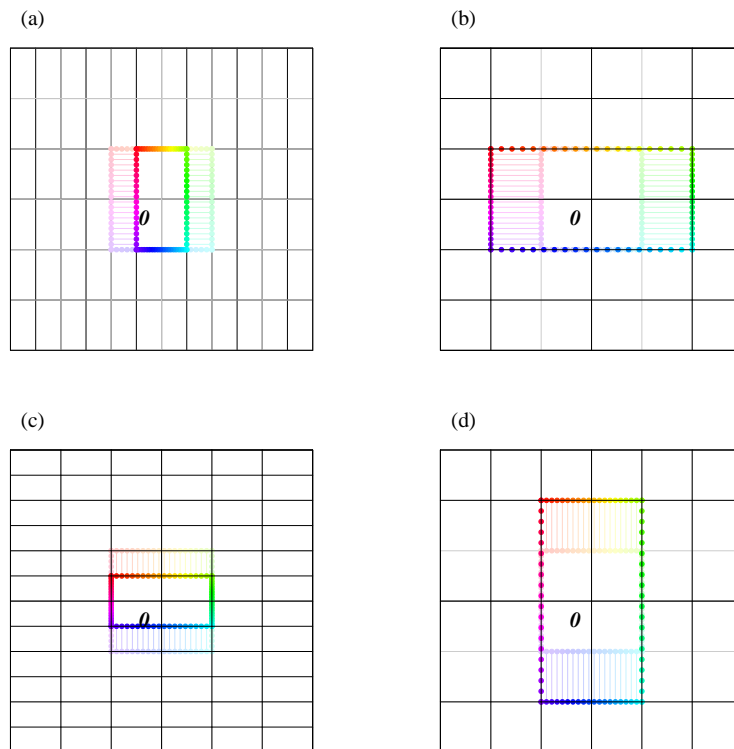


图 4. 水平、竖直缩放，二维平面

挤压

挤压 (squeeze) 是一种特殊的不等比例缩放，平面上的挤压指的是一个方向的缩放系数小于 1，而另一个方向的缩放系数大于 1；且两者乘积等于 1，满足 $s_1 s_2 = 1$ ，即行列式为 1。

比如 $0 < s_1 < 1$ 且 $s_2 > 1$ ，则图形在 x_1 方向上被压缩，而在 x_2 方向上被拉伸，但总面积保持不变。

图 5 (a) 中， $s_1 = 0.5$ 且 $s_2 = 2$ ，意味着水平方向缩小 0.5 倍，而竖直方向放大 2 倍，总面积不变。

请大家自行分析图 5 (b)。

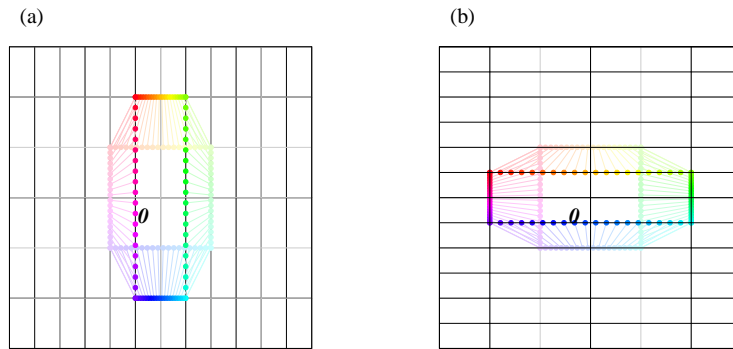


图 5. 挤压

连续缩放

本书前文介绍过，在一般情况下，矩阵乘法不满足交换律；即对于两个矩阵 A 和 B ，即便 $A @ B$ 和 $B @ A$ 同时满足乘法规则，通常 $A @ B \neq B @ A$ 。

但是，缩放变换中，缩放矩阵 S 是一个对角矩阵，我们可以把缩放矩阵 S 写成两个不同矩阵乘法

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 告诉我们，特殊情况下，矩阵乘法可以满足交换律。

(11) 的第一个式子代表先进行 x_2 方向缩放，再完成 x_1 方向缩放，即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

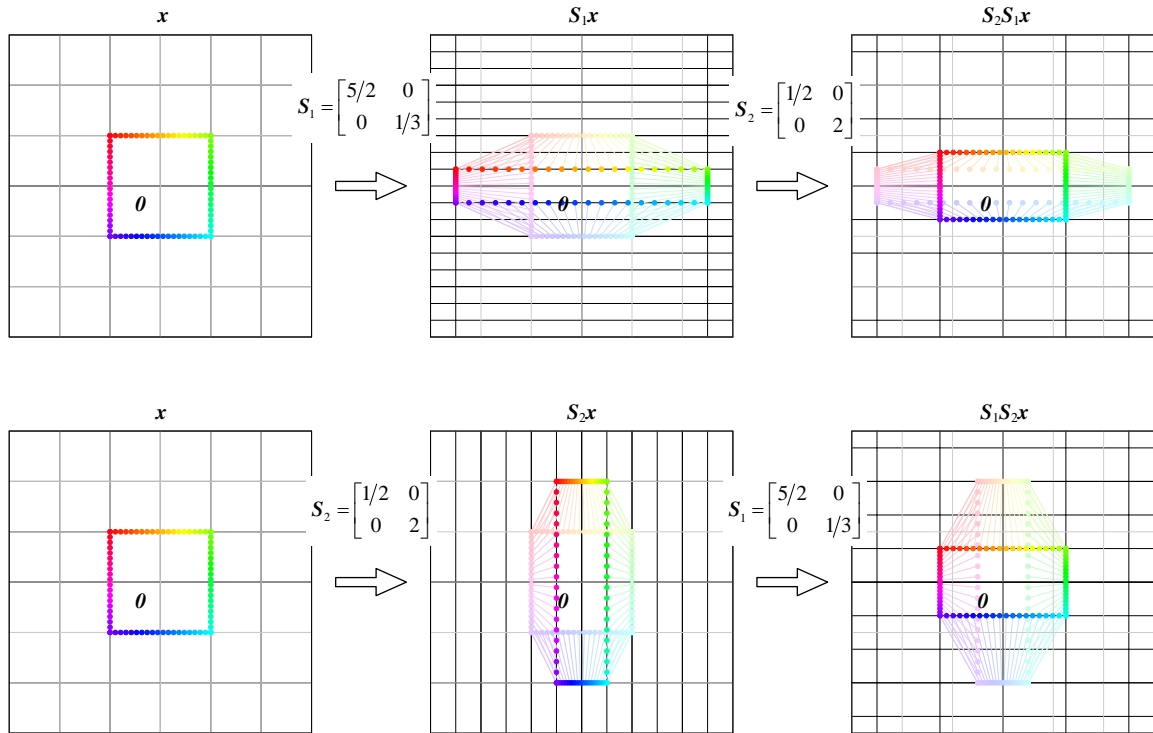
(11) 的第二个式子则反之，请大家自己写出矩阵乘法运算。

几何上，这说明横轴、纵轴的缩放次序可以调换。

此外，给定任意两个缩放矩阵 S_1 、 S_2 ，满足

$$S_1 @ S_2 = S_2 @ S_1 \quad (13)$$

这意味着多个平面缩放操作的先后顺序不会影响最终结果，请大家观察图 6。

图 6. 两个 2×2 缩放矩阵连乘满足交换律

缩放系数为负

如果存在缩放系数为负的情况，意味着对应方向上发生翻转。也就是说，负比例缩放相当于“缩放 + 镜像”的复合变换。

图 7 (a) 应对如下矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式还告诉我们，这两个几何操作的次序不影响结果。

请大家自行分析图 7 (b)。

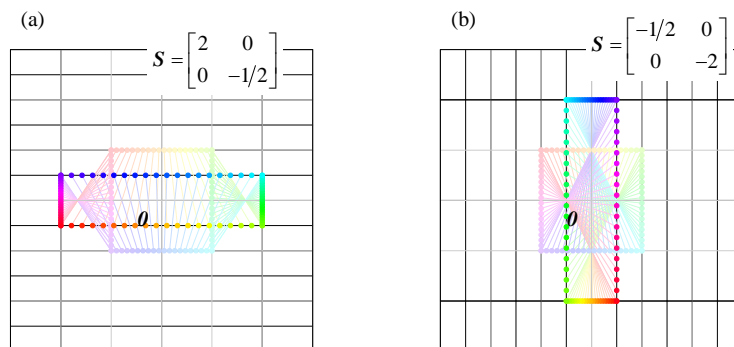


图 7. 缩放因子存在负数情况

缩放系数为 0

如果存在缩放系数为 0 的情况，意味着对应方向发生投影。此时，几何变换相当于“缩放 + 投影”的复合变换。

图 8 对应如下运算

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

所有点被投影到纵轴上，信息发生丢失；行列式为 0，这也意味着矩阵不可逆。本节前文提过，如果一个对角方阵的主对角线元素中存在一个或更多的零，则方阵不可逆。

这时，变换矩阵 S 的列向量不能构成基底，因为列向量之间存在线性相关。

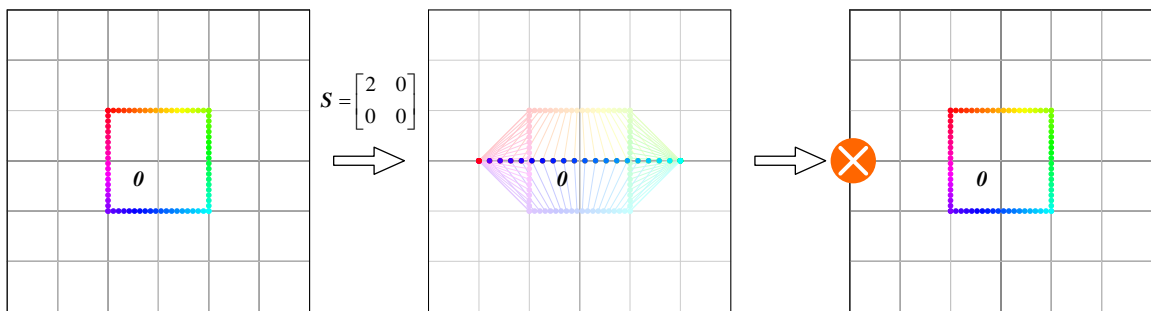


图 8. 不可逆地“压扁”

可视化平面缩放

代码 1 用来可视化平面缩放，可视化结果如图 9 所示。

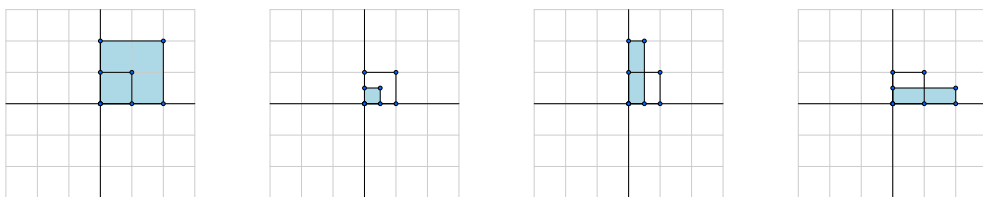


图 9. 可视化平面缩放

下面让我们聊聊代码 1 关键语句。

- a 用 `numpy.array()` 创建线性变换矩阵；请大家尝试其他的 2×2 方阵。
- b 定义了一个单位正方形的顶点列表，从左下角出发，并再回到起点形成闭环。每个点是一个二维坐标，组成一个形状为 5×2 的数组。注意，行向量代表平面上一个点。
- c 定义单位向量，分别指向横轴正方向、纵轴正方向。
- d 用矩阵 A 完成矩阵乘法，即线性变换。


e 为可视化代码。比如，`ax.plot(square_data[:,0], square_data[:,1], c = 'k', lw = '0.5', marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '--')` 这句画出原始正方形的边界线。

`square_data[:,0]` 表示取正方形所有点的横轴坐标，`square_data[:,1]` 表示它们的纵轴坐标。

`c='k'` 表示线的颜色是黑色，`lw='0.5'` 是线宽为 0.5。

`marker='o'` 画出每个点的小圆圈，`markerfacecolor='#0066FF'` 设置圆点为蓝色。

`ls='--'` 表示线型为虚线。

代码 1. 可视化平面缩放 |  LA_Ch08_02_01.ipynb

```
## 初始化
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## 线性变换矩阵
a A = np.array([[2, 0],
                [0, 2]])

## 单位正方形顶点数据
b square_data = np.array([[0, 0],
                          [1, 0],
                          [1, 1],
                          [0, 1],
                          [0, 0]])

## 定义单位向量 e1 和 e2
c e1 = np.array([[1], [0]])
  e2 = np.array([[0], [1]])

## 线性变换
d transformed_square = square_data @ A.T
  transformed_e1 = A @ e1
  transformed_e2 = A @ e2

## 可视化
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

e ax.plot(square_data[:,0], square_data[:,1],
          c = 'k', lw = '0.5',
          marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '--')
  ax.plot(transformed_square[:,0], transformed_square[:,1],
          c = 'k', lw = '0.5',
          marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '--')
  ax.fill(transformed_square[:,0], transformed_square[:,1],
          color='lightblue')

ax.set_aspect('equal'); ax.grid(True, c = '0.8')
ax.axhline(y = 0, c = 'k'); ax.axvline(x = 0, c = 'k')
ax.set_xlim(-3, 3); ax.set_ylim(-3, 3)
```

三维等比例缩放

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均分布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

在三维空间，等比例缩放矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中， s 为缩放因子，不为 0。

对应的坐标变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ sx_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

在三维空间中，等比例缩放通过一个缩放因子 s 对所有三个维度进行相同的缩放操作。

容易计算 (16) 中变换矩阵行列式为 s^3 ，这意味着几何变换后，体积变化了 s^3 倍。

如图 10 所示， $s > 1$ 时，单位正方体等比例放大；如图 11 所示， $0 < s < 1$ 时，单位正方体等比例放大。

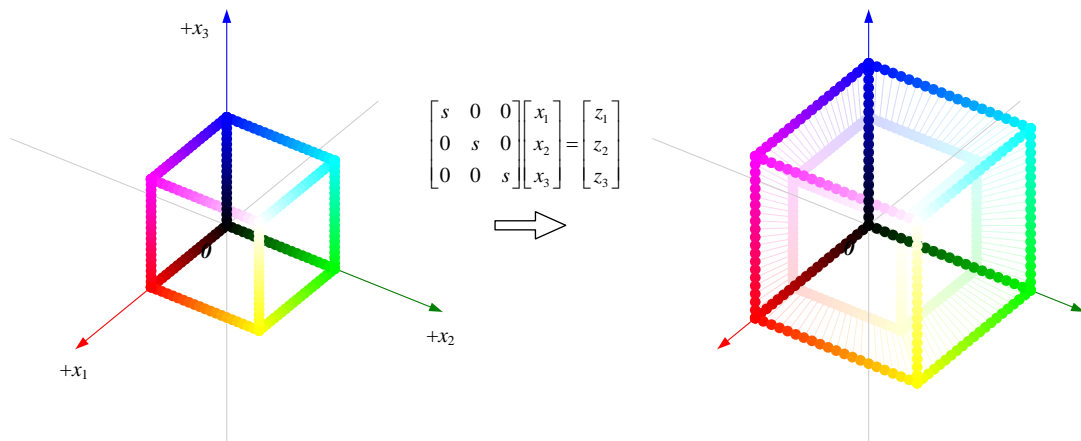


图 10. 等比例放大 ($s > 1$), 三维空间

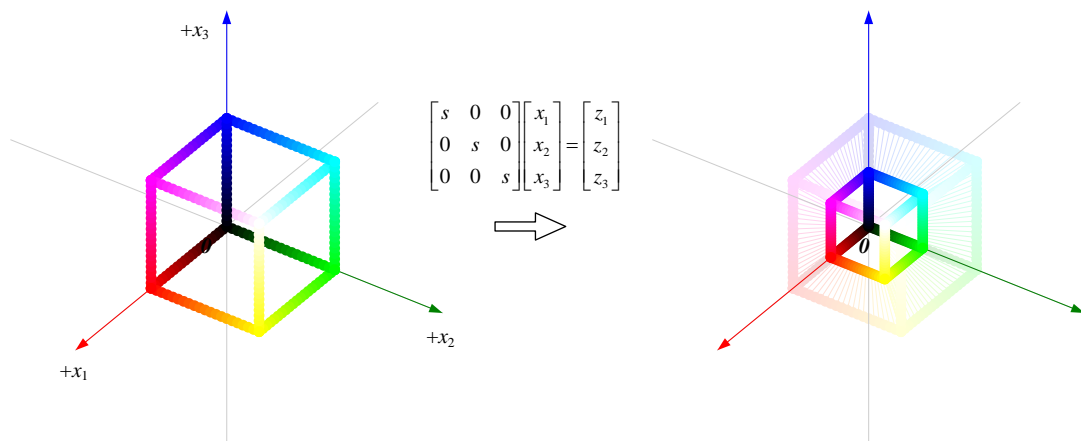


图 11. 等比例缩小 ($0 < s < 1$), 三维空间

我们也可以把 (16) 拆解成沿不同轴分别缩放

$$S_1 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (18)$$

以上三个矩阵分别对应图 12、图 13、图 14。这三个矩阵对应的行列式都为 s ，这意味着几何变换导致的体积缩放比例都是 s 。

(18) 这三个对角方阵不管以何种顺序相乘得到的都是 (16)，即

$$S = S_1 S_2 S_3 = S_1 S_3 S_2 = S_2 S_1 S_3 = S_2 S_3 S_1 = S_3 S_1 S_2 = S_3 S_2 S_1 \quad (19)$$

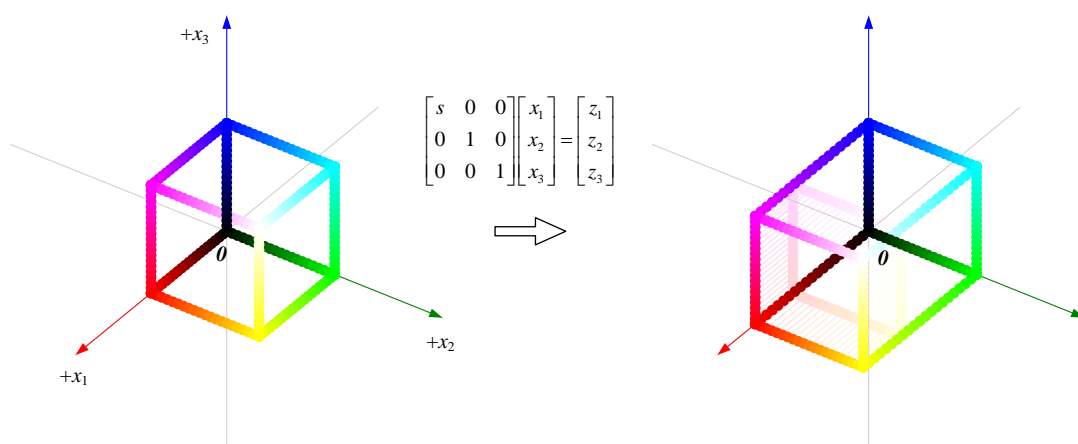


图 12. 沿 x_1 轴缩放，三维空间

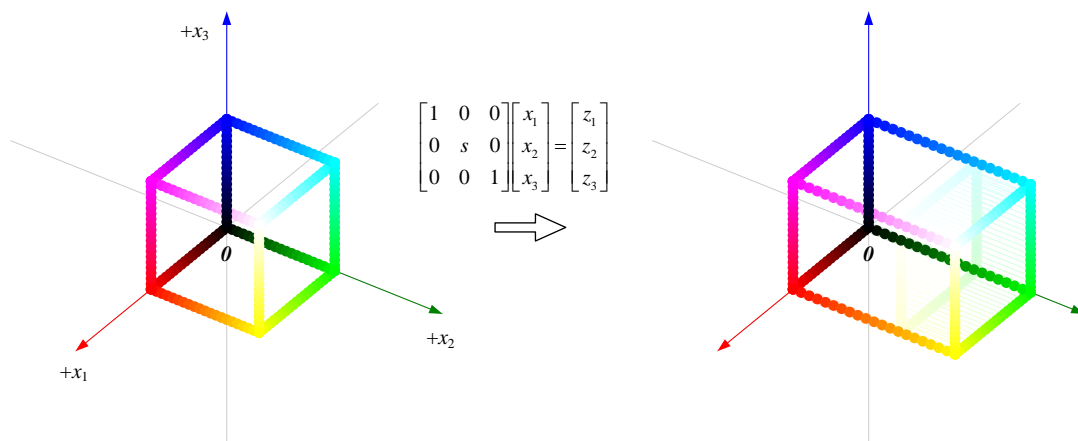
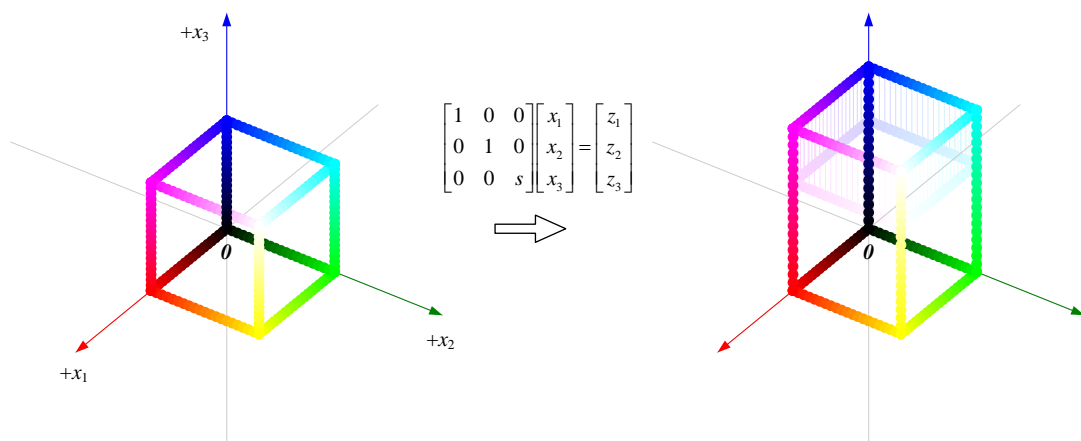


图 13. 沿 x_2 轴缩放，三维空间

图 14. 沿 x_3 轴缩放，三维空间

三维非等比例缩放

在三维空间中，非等比例缩放是指对 x_1 、 x_2 、 x_3 轴分别应用不同的缩放因子。

缩放矩阵扩展为：

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中， s_1 控制 x_1 方向缩放， s_2 控制 x_2 方向缩放， s_3 控制 x_3 方向缩放。

对应的坐标变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \\ s_3 x_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

如图 15 所示，如果缩放因子绝对值大于 1，则沿对应方向放大；缩放因子绝对值小于 1，则沿该方向缩小。

此外，如果缩放因子小于 0，意味着在缩放的基础上，还有镜像操作；如果缩放因子出现 0，这意味着发生“降维”，图形被压扁，如图 16 所示。

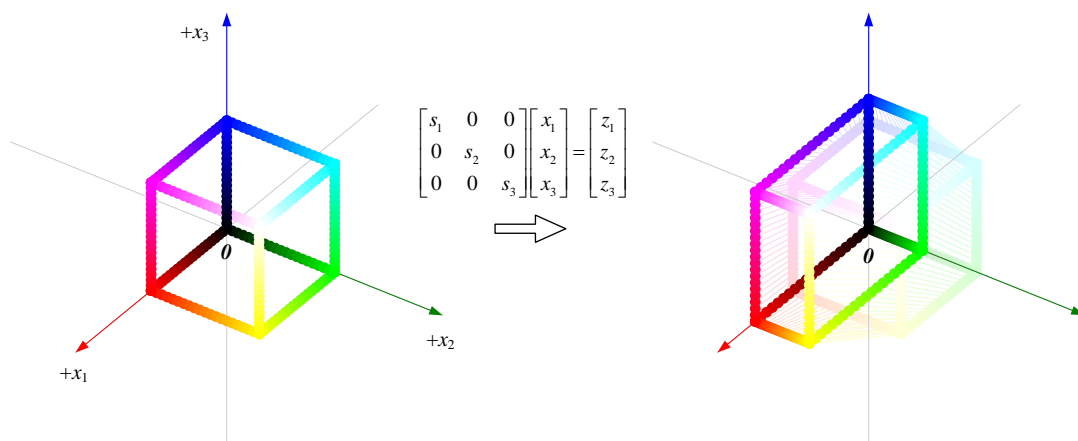


图 15. 非等比例缩放，三维空间

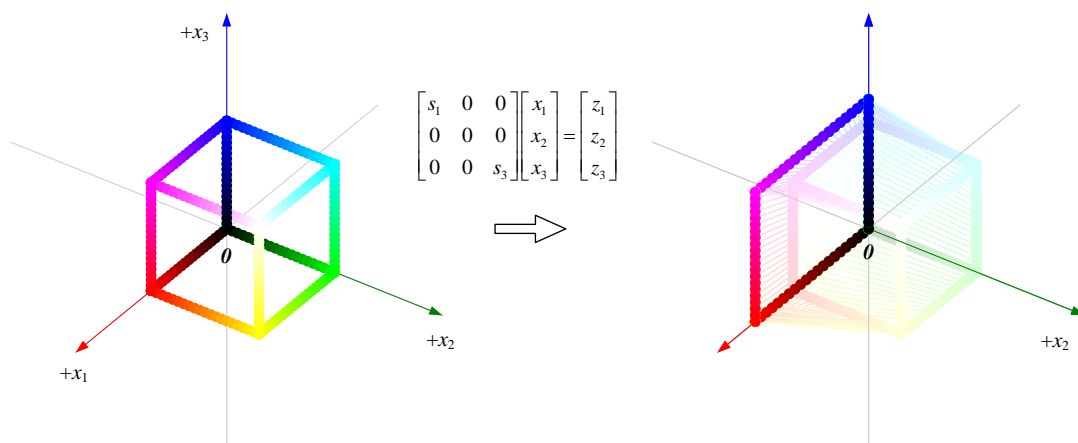


图 16. 缩放 + 压扁，三维空间



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 平面上的缩放变换，若横轴放大 2 倍，纵轴缩小 1/2，对应的缩放矩阵？

Q2. 三维空间的缩放变换，若 x_1 轴放大 3 倍， x_2 轴缩小 1/3， x_3 轴不变，对应的缩放矩阵？

Q3. 给定缩放矩阵 $S = \begin{bmatrix} -2 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ ，点 (3, 4) 经过缩放变换后，坐标变为多少？

Q4. 给定两个缩放矩阵 $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ 、 $S_2 = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ ，对点 (1, 2) 依次用 S_1 、 S_2 缩放，求变换后的坐标。如果交换缩放次序，即先 S_2 ，再 S_1 ，结果如何？

Q5. 如果缩放矩阵行列式 $\det(S) = 4$ ，意味着缩放变换对几何图形有何影响？如果 $\det(S) = -4$ ，又说明什么？

Q6. 编写一个 Python 函数 `scale_2D(x1, x2, s1, s2)`，输入点坐标 (x1, x2) 和缩放系数 s1、s2，返回变换后的坐标。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

- Q7.** 给定 5 个点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, 编写 Python 代码, 使这些点按比例 $s_1 = 2$ 、 $s_2 = 0.5$ 进行缩放, 并输出变换后的点集。
- Q8.** 使用 Matplotlib 绘制一个单位正方形, 它的四个顶点位于 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,0)$; 单位正方形按比例 $s_1 = 2$ 、 $s_2 = 0.5$ 进行缩放, 显示原始图形和变换后的图形。
- Q9.** 请用下一节 LA_08_03_01.ipynb 可视化三维缩放。