

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

6.2 线性组合



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ $a_1 + ka_2$ ：过 a_1 终点，平行于 a_2 的直线。
- ▶ $a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$ ：过 a_1 终点，平行于 a_2 、 a_3 的平面。
- ▶ $ka_1 + (1-k)a_2$ ：过 a_1 、 a_2 终点直线，线性插值。
- ▶ $kI + (1-k)a$ ：过 I 、 a 终点直线，线性插值。
- ▶ $k_1a_1 + k_2a_2 + (1-k_1-k_2)a_3$ ：过 a_1 、 a_2 、 a_3 终点平面。

相信大家已经很熟悉线性组合；回顾一下，线性组合 (linear combination) 指的是通过一组向量和对应的标量 (系数) 的加权和来构造新的向量。本节让我们看看几组发生在 RGB 空间有趣的线性组合，以及它们如何联系代数、线性代数、几何。这一节没有习题，大家可以轻轻松松地阅读。

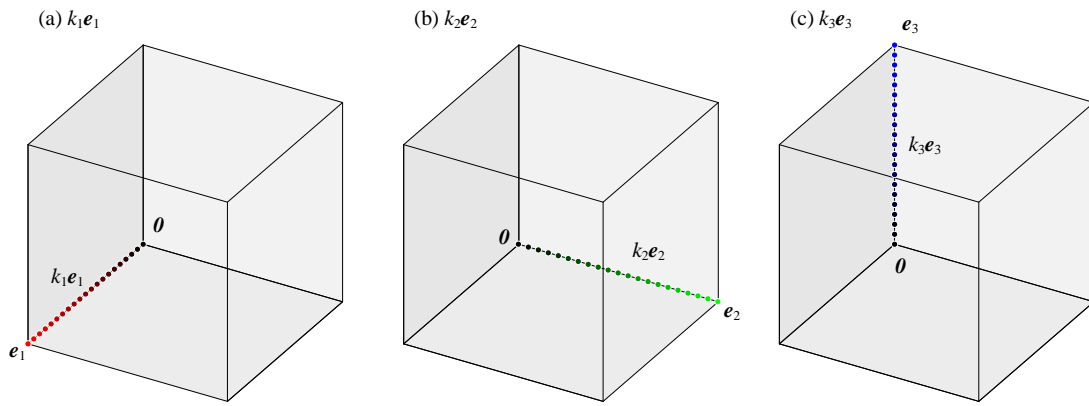
$$a_1 + ka_2$$

给定 a_2 为 n 维列向量，如果 k 为任意实数， ka_2 代表一维空间 $\text{span}(a_2)$ 。这个向量空间显然通过原点，即 0 。

$a_1 + ka_2$ 相当于 ka_2 平移 a_1 ，结果为仿射空间。

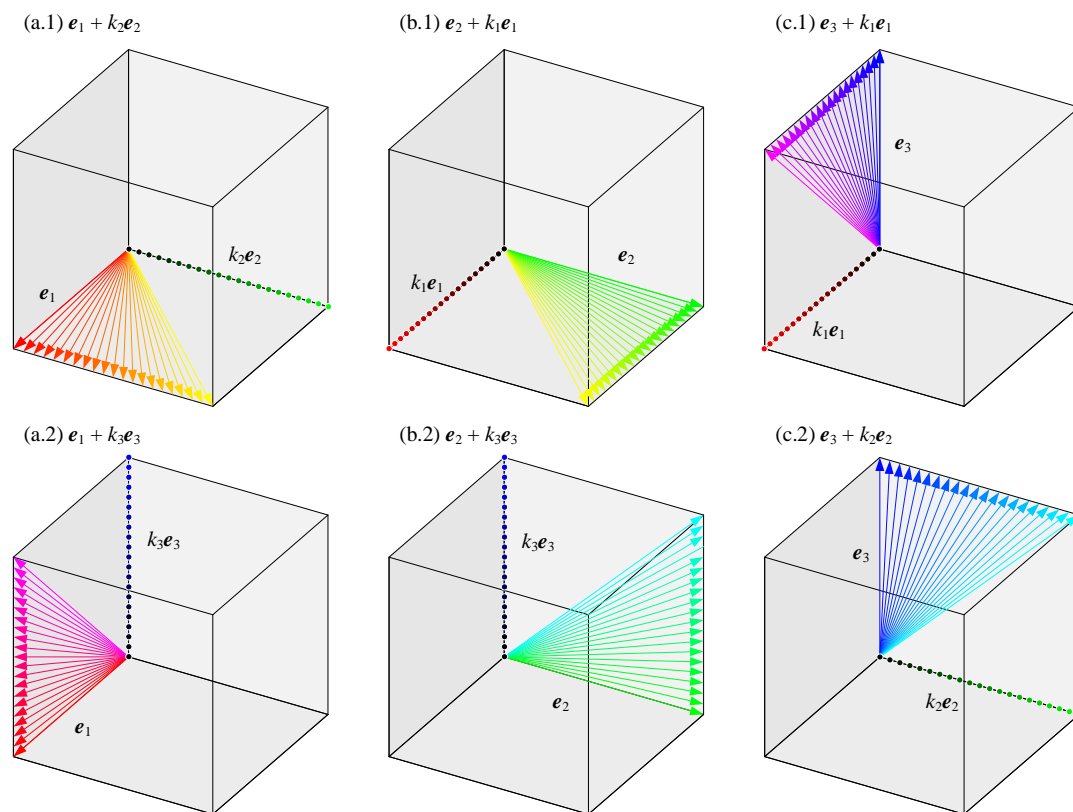
让我们来到 RGB 颜色空间，看看 $a_1 + ka_2$ 代表什么。

如图 2 (b) 所示， k_2e_2 代表“深绿色”，其中包括了纯绿色、纯黑色。向量空间角度来看， $\text{span}(e_2)$ 为一维。

图 1. RGB 颜色空间中的 ka_2

如图 2 (a.1) 所示，经过 e_1 平移之后得到 $e_1 + k_2e_2$ ，颜色从红色变为黄色，并不包含纯黑色向量，即不过原点。

? 请大家自行分析图 2 剩余子图。

图 2. RGB 颜色空间中的 $a_1 + ka_2$

$$a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$$

再看第二个线性组合的例子—— $a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$ 。

当 k_2, k_3 取任意实数, $k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3$ 撑起了一个平面, 即 $\text{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 。这个向量空间为二维。

然后, $\mathbf{a}_1 + (k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3)$ 代表对 $\text{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 平移 \mathbf{a}_1 , 得到的是放射空间。

如图 3 (a.1) 所示, $k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3$ 相当于用绿色向量、蓝色向量撑起了一个“蓝绿”平面; 这个平面包含黑色向量, 即零向量 $\mathbf{0}$ 。

平面 $k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3$ 平移 \mathbf{e}_1 , 得到图 3 (a.2)。

? 请大家自行分析图 3 剩余子图。

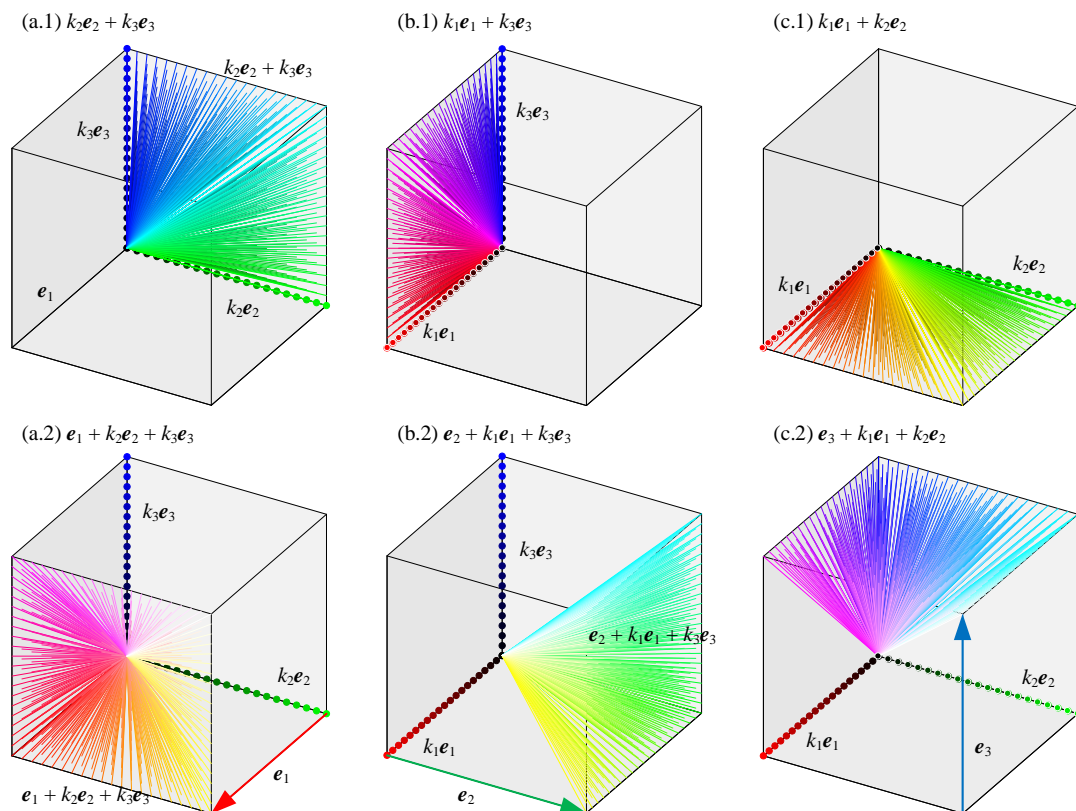


图 3. RGB 颜色空间中的 $\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3$

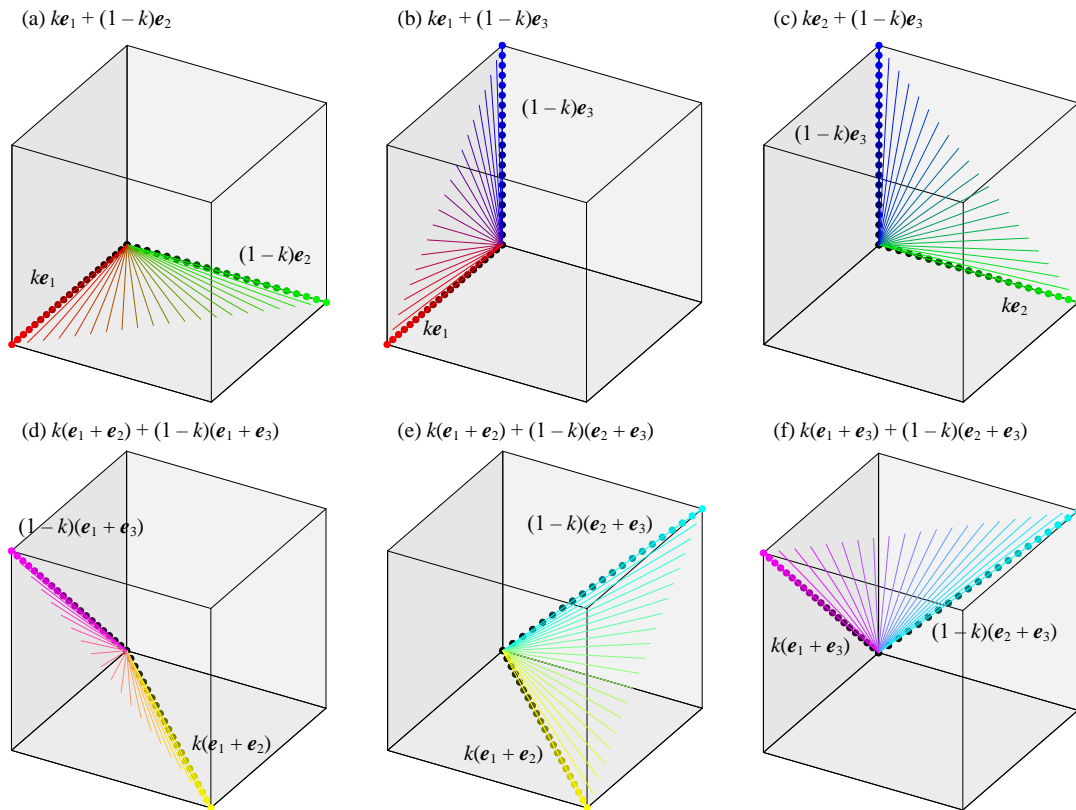
$$k\mathbf{a}_1 + (1-k)\mathbf{a}_2$$

当 k 取任意实数时, $k\mathbf{a}_1 + (1-k)\mathbf{a}_2$ 得到的是向量 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 终点的连线, 这相当于线性插值 (linear interpolation)。

从几何角度来看, 线性插值就是在两点之间作一条直线, 并在这条直线上找到对应的中间点。

图 4 (a) 所示为红色、绿色之间线性插值, 这条线段就是红色向量终点、绿色向量终点之间的连线。

? 请大家自行分析图 4 剩余子图。

图 4. RGB 颜色空间中的 $ka_1 + (1-k)a_2$

$$k\mathbf{I} + (1-k)\mathbf{a}$$

本书前文用给定颜色变深讲解向量标量乘法，并且留了一个问题——如何让给定颜色变浅？

线性组合 $k\mathbf{I} + (1-k)\mathbf{a}$ 就可以完成这个任务。全 1 列向量 \mathbf{I} 代表白色， \mathbf{a} 可以是给定的任意颜色向量。标量 k 的取值范围 $[0, 1]$ ， k 越靠近 1，颜色越靠近白色，颜色越浅； k 越靠近 0，颜色越靠近原色。

如图 5 所示，对于线性组合 $k\mathbf{I} + (1-k)\mathbf{e}_1$ ， k 取 0 时，颜色为红色； k 取 1 时，颜色为白色。



请大家自行分析图 5 剩余子图。

图 6 所示为 RGB 颜色空间颜色变浅的创意编程的两个案例。

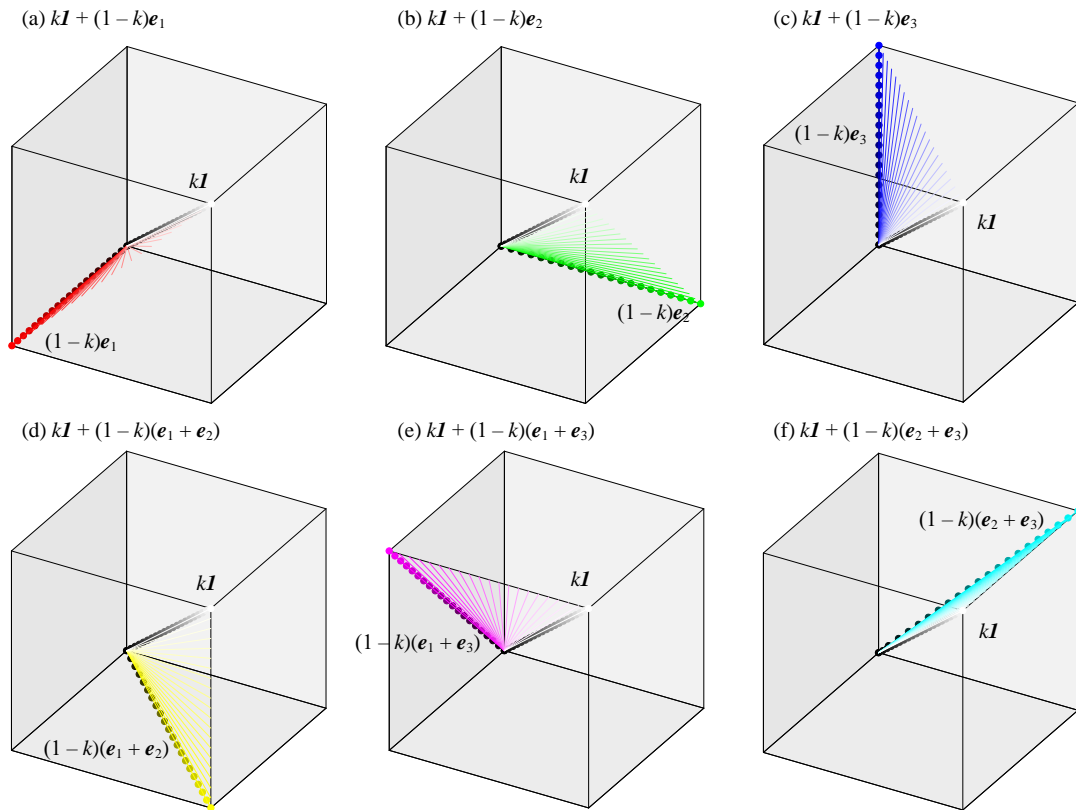
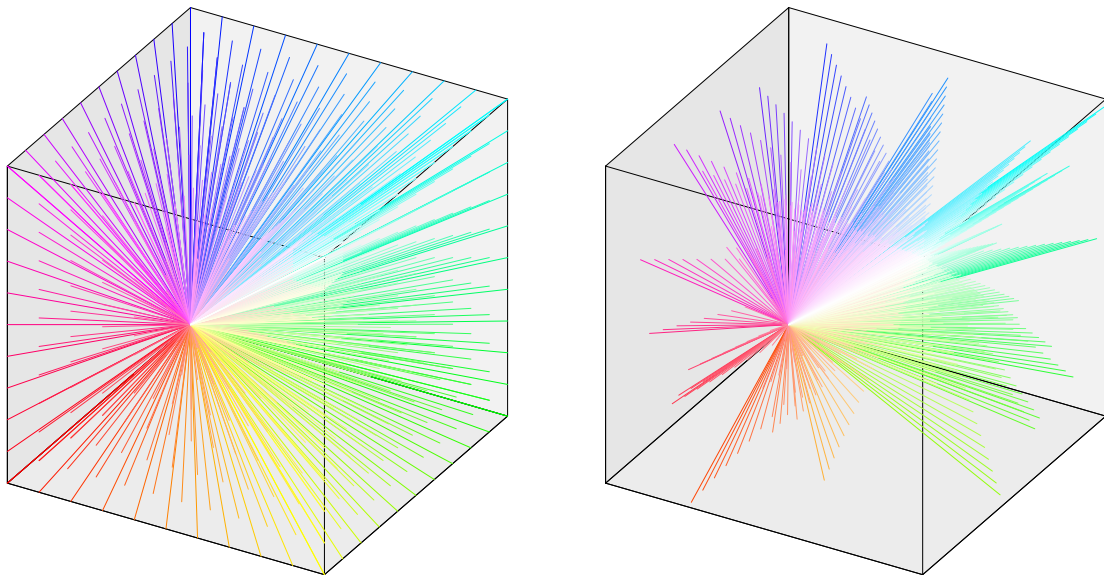
图 5. RGB 颜色空间中的 $kI + (1-k)a$ 

图 6. RGB 颜色空间颜色变浅的创意编程

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + (1 - k_1 - k_2) a_3$$

线性组合 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + (1 - k_1 - k_2) a_3$ 撑起了平面，这个平面通过 a_1 、 a_2 、 a_3 三个向量的终点。

图 7 (a) 所示为红色、绿色、蓝色向量构成的平面；图 7 (b) 所示为黄色、品红、青色构成的平面。

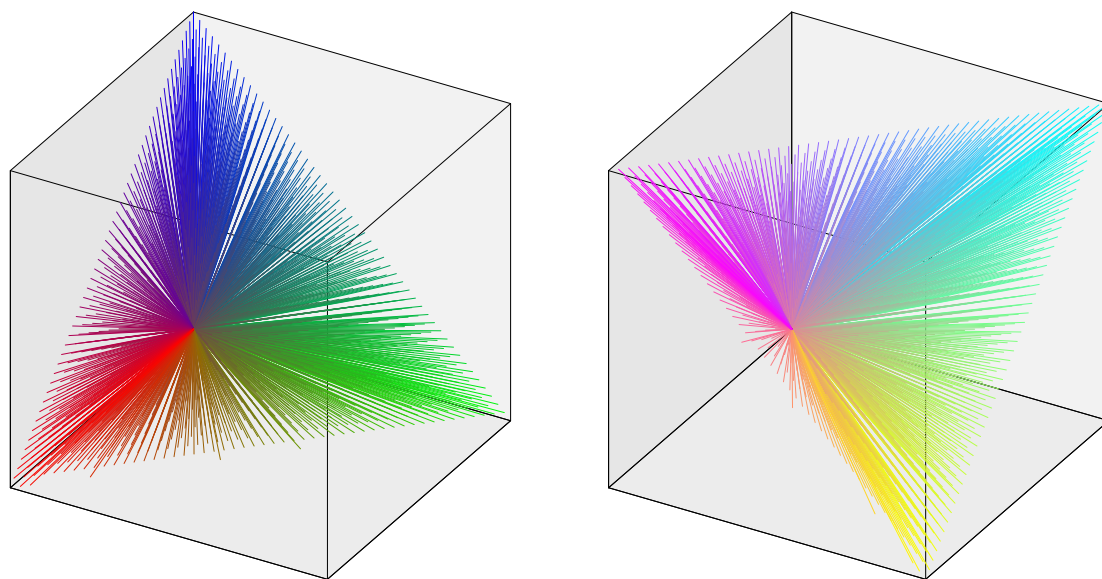


图 7. RGB 颜色空间撑起的平面