

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

04

Determinant

行列式

将方阵转化为标量，面积、体积 ...

4.1 2×2 矩阵行列式**本节你将掌握的核心技能：**

- ▶ 行列式运算特点：方阵专属，且结果为标量。
- ▶ 2×2 矩阵行列式表示平行四边形有符号面积。
- ▶ 单位矩阵：单位正方形。
- ▶ 对角方阵，对角线元素相同：列向量构成正方形。
- ▶ 对角方阵，对角线元素不同：列向量构成矩形。
- ▶ 上三角矩阵：列向量构成沿横轴剪切平行四边形。
- ▶ 下三角矩阵：列向量构成沿纵轴剪切平行四边形。
- ▶ 方阵行列式为 0 不可逆（下一章展开讲解）。

把最重要的写在前面，方阵的**行列式** (determinant) 是一个标量值。这句话有两个关键点：第一，只有**方阵**才有行列式；第二，行列式是**标量值**。

行列式在数学和应用领域中具有广泛的用途。

首先，行列式可以用来判断矩阵是否**可逆** (invertible)。只有当行列式不为零时，方阵才可逆，行列式为零则方阵称为**奇异矩阵** (singular matrix)，不可逆。这一性质在求解线性方程组、计算伴随矩阵和矩阵逆时尤为重要。本书后文将专门介绍逆矩阵。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

其次，在几何中，行列式与面积、体积变化密切相关。线性变换的行列式值表示该变换对面积、体积的缩放因子。例如，在二维平面上，行列式可以测量一个线性变换如何改变平行四边形的面积；在三维空间中，它决定了平行六面体的体积变化。这个几何视角是本章理解行列式的重要工具！

此外，行列式在线性代数中的应用还包括判断向量组的线性相关性，以及计算矩阵的特征值。这些概念对于深入理解线性变换、微分方程、计算机图形学和机器学习等领域都至关重要。

然而，行列式的计算和理解并不容易。为了帮助大家更直观地掌握行列式的本质，我们首先从几何角度切入。本节将借助平行四边形来理解 2×2 矩阵的行列式，下一节则通过平行六面体扩展到 3×3 矩阵的行列式。

2 × 2 矩阵的行列式

给定如下 2×2 矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

矩阵 A 的行列式为

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2)$$

首先，本书将常用 $\det()$ 作为行列式的运算符， \det 取自单词 **determinant** 的前三个字母。

在讨论行列式时，需要注意它仅适用于**方阵** (square matrix)，对于非方阵，行列式没有定义。回顾一下，方阵是行数、列数相等的矩阵，即一个 $n \times n$ 的矩阵。

简单来说，行列式运算的重要特性是，它能够将一个方阵映射到一个标量值。

这意味着，尽管方阵本身包含多个元素，但行列式的计算结果始终是一个单一的数值。这个数值在数学和应用中有着丰富的几何和代数意义。

对于 2×2 矩阵，我们很快会看到，它的行列式值与平面上某个平行四边形的面积密切相关。通过这种几何视角，我们可以更直观地理解行列式的计算方式及其在空间变换中的作用。

平行四边形面积

我们先从 2×2 方阵 A 入手，逐步构造平行四边形，并计算面积，然后理解行列式的几何含义。

首先将 2×2 方阵 A 拆成两个列向量

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad (3)$$

我们把列向量 a_1 、 a_2 画在平面上， a_1 、 a_2 起点位于原点。这个平行四边形正是我们在学习向量加法时提到的平行四边形法则。

如图 1 所示，我们构造的平行四边形 4 个顶点分别位于：

1) 原点 $(0, 0)$ ，即 a_1 、 a_2 向量起点；

- 2) 第一个列向量 \mathbf{a}_1 终点 (a, c) ;
- 3) 第二个列向量 \mathbf{a}_2 终点 (b, d) ;
- 4) 两个向量之和终点 $(a+b, c+d)$ 。

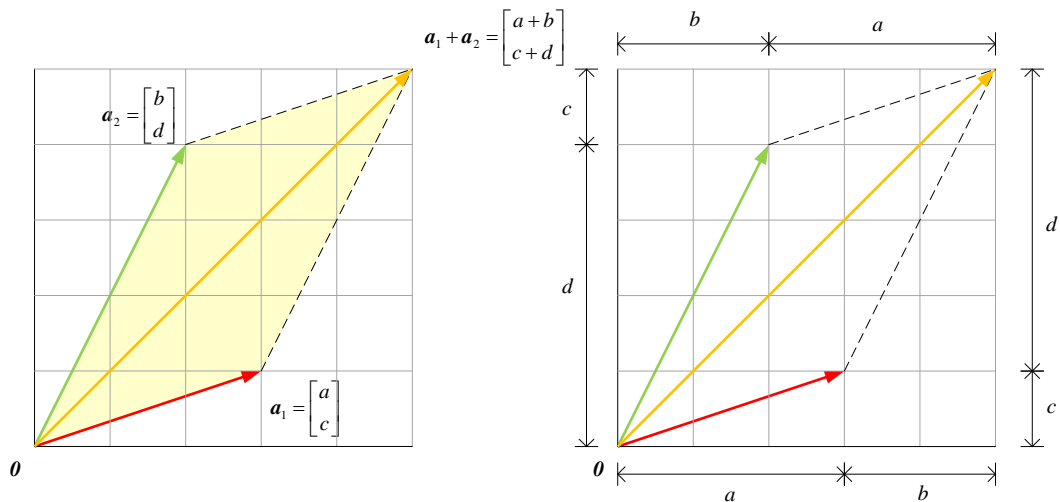


图 1. 构造平行四边形

为了计算这个平行四边形面积，我们先构造图 2 所示的矩形，然后通过减去多余的部分来得到最终的平行四边形的面积。

首先，构造一个以 $(0, 0)$ 、 (a, c) 、 (b, d) 和 $(a+b, c+d)$ 为顶点的平行四边形。我们可以发现，这个平行四边形被包含在一个以 $(0, 0)$ 和 $(a+b, c+d)$ 为对角顶点的外接矩形中，

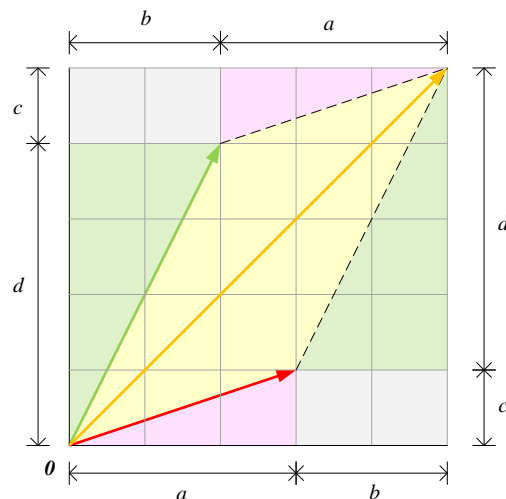


图 2. 构造并切割矩形

然而，这个矩形中包含了不属于平行四边形的部分，包括四个直角三角形和两个小矩形：

四个三角形：分别位于矩形的左下角、右上角，对应图 2 中的粉色、绿色。

两个小矩形：分别位于矩形的左上角、右下角，对应图 2 中的灰色。

如图 3 所示，平行四边形的面积可以通过从外接矩形的面积中减去这些部分来计算。

最终，计算结果恰好等于 2×2 方阵 A 的行列式

$$\det(A) = ad - bc \quad (4)$$

这正是 2×2 行列式在几何上的直观意义。

⚠ 注意，本节中，面积有正负；下一节中，体积有正负。

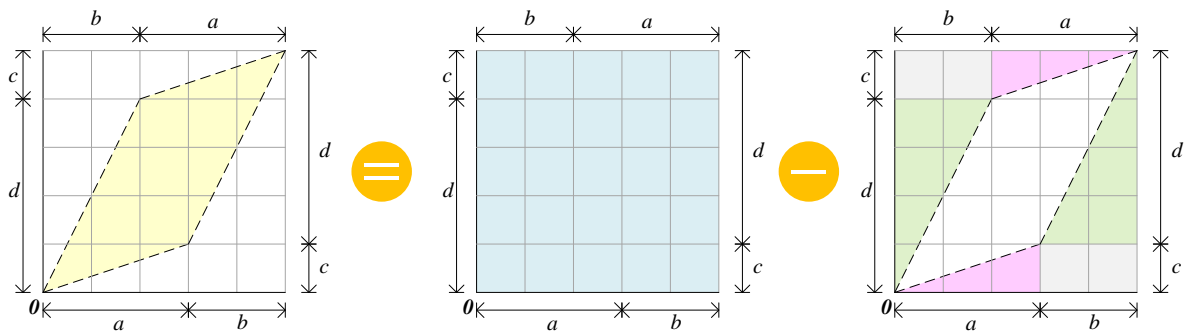


图 3. 计算平行四边形面积

下面，让我们看几个特殊的 2×2 方阵 A ，并计算它们的行列式。

单位矩阵

如果 2×2 方阵 A 为单位矩阵，把 A 写成两个列向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

行列式为

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \quad (6)$$

这告诉我们**单位矩阵的行列式为 1**。

如图 4 (a) 所示， a_1 、 a_2 构成的平行四边形为单位正方形。这个单位正方形的面积恰好为 1。

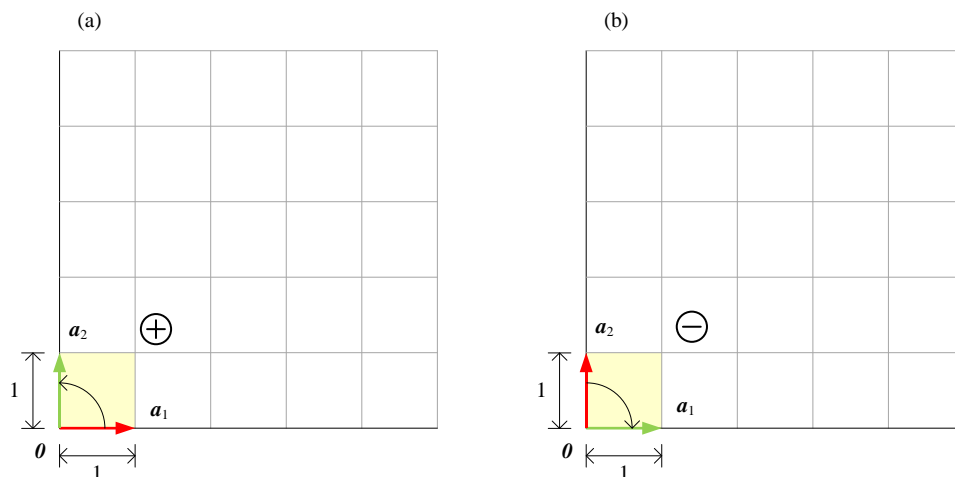


图 4. 单位正方形，第一组

如图 4 (a) 所示，逆时针 (180 度以内) 来看，红色向量 a_1 在先，绿色向量 a_2 在后。

本节默认，红色代表第一列列向量 a_1 ，绿色代表第二列列向量 a_2 。

如果我们把单位矩阵的两列交换，得到

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

这个方阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \quad (8)$$

如图 4 (b) 所示，这两个向量构成的平行四边形仍然是单位正方形，所以面积的绝对值仍然是 1。

然而，交换列向量后，原本逆时针方向的向量顺序变成了顺时针方向，这相当于将坐标系翻转，导致行列式的值变为 -1。

交换两列向量，相当于将坐标系翻转一次，因此行列式的值变号。

让我们再看两个例子。

如图 5 (a) 所示，这个 2×2 方阵也构成一个单位正方形，因此面积为 1；但是，逆时针来看，绿色向量领先于红色向量，因此行列式为负，即

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \times 1 - 0 \times 0 = -1 \quad (9)$$

图 5 (b) 对应 2×2 方阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \times (-1) - 0 \times 0 = 1 \quad (10)$$



请大家从几何角度自行分析图 5 (b) 对应 2×2 方阵的大小、正负。

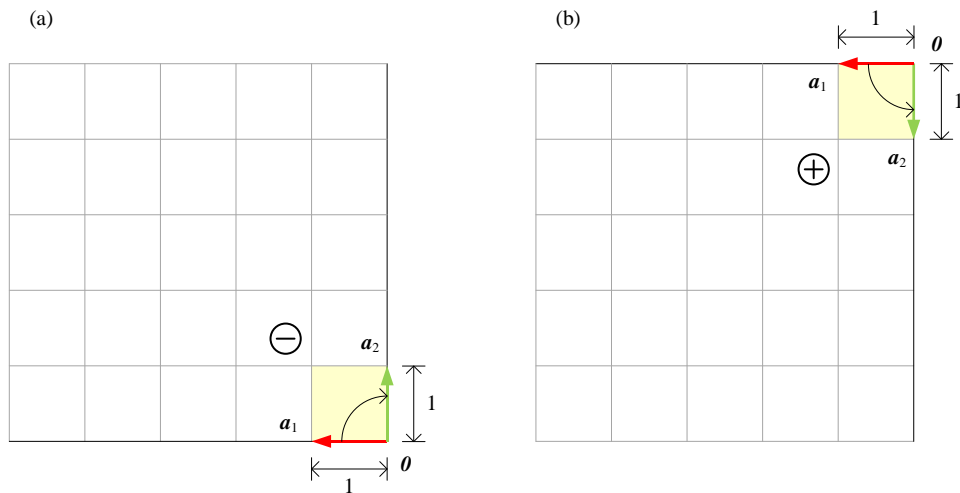


图 5. 单位正方形，第二组

对角方阵，主对角线元素相同

2×2 方阵 A 对角方阵，且主对角线上元素相同，比如

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

上述矩阵的行列式为

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \times 3 - 0 \times 0 = 9 \quad (12)$$

如图 6 (a) 所示，这个 2×2 方阵 A 对应几何形状为正方形。

? 请大家自行分析图 6 (b) 对应 2×2 方阵 A 的行列式。

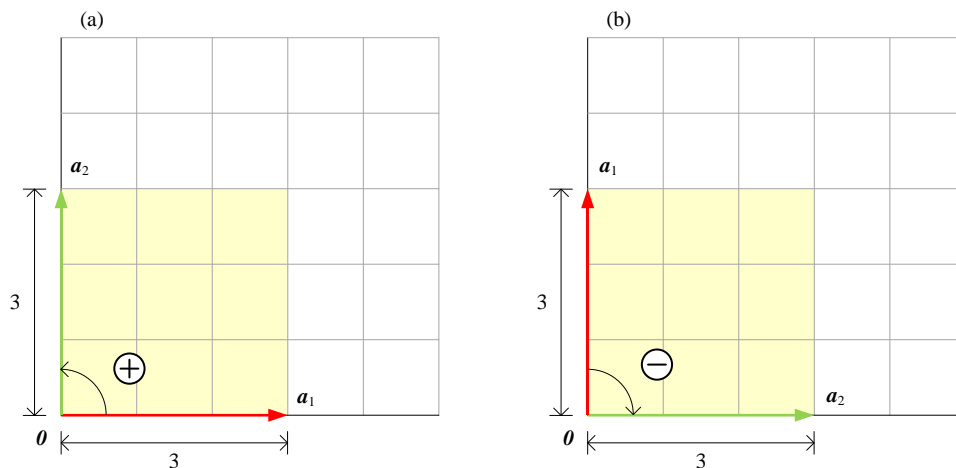


图 6. 正方形

对角方阵，主对角线元素不同

当 2×2 方阵 A 为对角方阵，但主对角线元素不同时， A 对应的几何形状为长方形。

如图 7 (a) 所示，这个 2×2 方阵 A 的面积为“长 \times 宽”，即

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \quad (13)$$

而对角方阵的作用像是给图形在水平、竖直方向进行缩放。

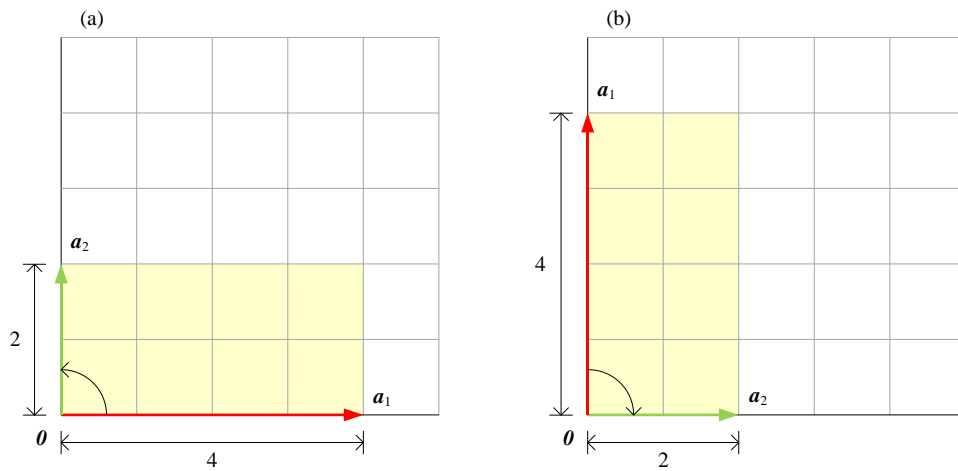


图 7. 矩形

从上述例子，我们可以看出**对角方阵的行列式等于其主对角线元素的乘积**，即

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \quad (14)$$

这也告诉我们，如果对角方阵的任意主对角线元素为 0，这个对角方阵的行列式为 0。

上三角矩阵

让我们再把目光看向上三角矩阵。

如图 8 (a) 所示，这个 2×2 上三角矩阵，第一个列向量 a_1 的方向始终平行于 x_1 轴，其 x_1 轴分量相当于平行四边形的底边长度。

只要第二个列向量 a_2 的 x_2 轴分量确定，即对应平行四边形的高度，无论 a_2 的 x_1 轴分量如何变化，平行四边形的面积始终保持不变。

换句话说， \mathbf{a}_2 的 x_1 轴分量变化仅影响平行四边形的倾斜程度，而不会改变其面积。

图 8 (a) 对应 2×2 上三角矩阵行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \quad (15)$$

图 8 (b) 对应 2×2 上三角矩阵行列式显然也是 6

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \quad (16)$$

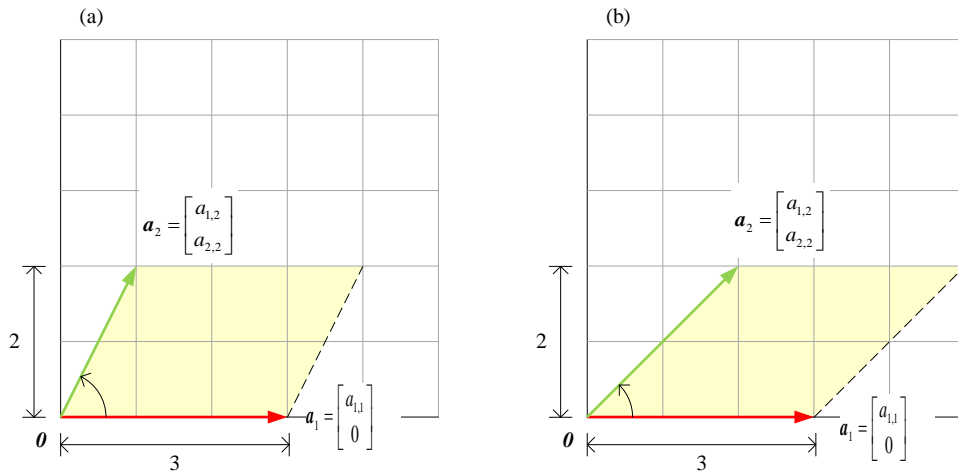


图 8. 上三角矩阵

从几何上看，图 8 中这种变换相当于对平行四边形施加了一种水平剪切 (+ 整体缩放)，即在不改变高度的情况下，沿 x_1 轴方向拉伸或压缩，使得平行四边形发生倾斜，但其面积不变。

因此， 2×2 上三角矩阵的行列式仅由主对角线元素决定，因为它们分别对应平行四边形底边长度和垂直高度，直接决定了最终的面积。

从上述例子告诉我们**上三角矩阵的行列式等于其主对角线元素的乘积**，即

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & * & * & * \\ & d_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \quad (17)$$

类似对角方阵，如果上三角矩阵的任意主对角线元素为 0，这个上三角矩阵的行列式为 0。

下三角矩阵

有了上三角矩阵行列式，理解下三角矩阵行列式就很容易了。

如图 9 (a) 所示，在 2×2 下三角矩阵中，第二个列向量 \mathbf{a}_2 的方向始终平行于 x_2 轴。

而第一个列向量 \mathbf{a}_1 的 x_1 分量决定了平行四边形的高。平行四边形的面积和 \mathbf{a}_1 的 x_2 分量无关！

图 9 (a) 对应这个下三角矩阵，

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 \quad (18)$$

图 9 (b) 对应

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 \quad (19)$$

从几何上看，这种变换相当于对平行四边形施加了一种垂直剪切 (+ 缩放)。

2×2 下三角矩阵的行列式也仅由主对角线元素决定，因为它们分别对应平行四边形底边长度和垂直高度，直接决定了最终的面积。

类似对角方阵、上三角矩阵，**下三角矩阵的行列式等于其主对角线元素的乘积。**

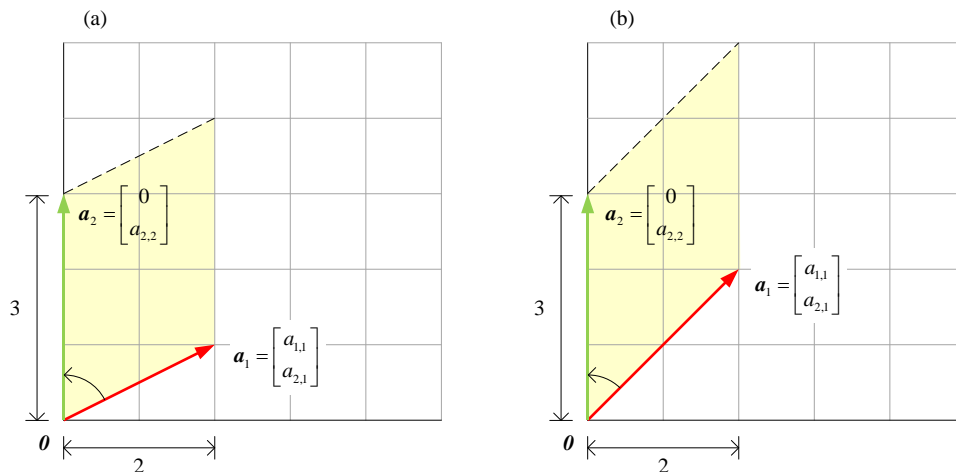


图 9. 下三角矩阵

代码 1 可视化本节矩阵列向量及平行四边形。

下面聊聊其中关键词句。

- a** 创建一个二维数组，代表矩阵 \mathbf{A} 。
- b** $\mathbf{A}[:, 0]$ 从矩阵 \mathbf{A} 中取出第一列，也就是矩阵左边那一列。: 表示“所有的行”，0 表示“第 0 列” (Python 从 0 开始计数)。类似地， $\mathbf{A}[:, 1]$ 从矩阵 \mathbf{A} 中取出第二列。
- c** 为了准备绘制一个平行四边形所需的四个点。然后，用 `np.array([P1, P2, P3, P4])` 把这四个点装进一个数组里，形成一个点序列，准备把这个点序列描绘成图形。
- d** 先用 `arrow()` 画出第一个向量 \mathbf{a}_1 ，从原点出发。前四个参数是箭头的位置：从哪出发、往哪走。这里 `*origin` 表示解包原点坐标（相当于写 `0, 0`），`*a1` 表示箭头沿各个方向的大小。`head_width=0.2` 表示箭头头部宽一点，`length_includes_head=True` 表示箭头的长度包括箭头头部，`color='red'` 设置箭头颜色为红色。

然后用同样的办法绘制第二个向量，不同的是颜色为绿色。

e 用 `ax.fill()` 函数画出一个封闭区域，比如本例中的平行四边形。这里传入的是四个点的坐标，`parallelogram[:, 0]` 表示所有点的横坐标，`parallelogram[:, 1]` 表示所有点的纵坐标。`edgecolor='k'` 表示边界颜色是黑色（k 是 black 的简写），`linestyle='--'` 表示边界是虚线，`alpha=0.3` 表示透明度是 30%，`facecolor='yellow'` 表示填充颜色是黄色。

代码 1. 可视化 2×2 方阵对应的平行四边形 | LA_04_01_01.ipynb

```
## 初始化
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## 定义一个  $2 \times 2$  的矩阵 A
a A = np.array([[2, 1],
                [1, 3]])

## 提取两列向量`
b a1 = A[:, 0] # 第一列向量
  a2 = A[:, 1] # 第二列向量

## 构建平行四边形
c origin = np.array([0, 0])
  # 起点为原点
  P1 = origin
  P2 = a1
  P3 = a1 + a2
  P4 = a2
  parallelogram = np.array([P1, P2, P3, P4])

## 可视化
fig, ax = plt.subplots()

# 绘制向量箭头
d ax.arrow(*origin, *a1, head_width=0.2,
           length_includes_head=True, color='red')
  ax.arrow(*origin, *a2, head_width=0.2,
           length_includes_head=True, color='green')

# 绘制平行四边形
e ax.fill(parallelogram[:, 0], parallelogram[:, 1],
          edgecolor = 'k', linestyle = '--',
          alpha=0.3, facecolor='yellow')

# 图像装饰
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlim(-1, max(P3[0], P2[0], P4[0]) + 1)
ax.set_ylim(-1, max(P3[1], P2[1], P4[1]) + 1)
ax.axhline(0, color='k', lw=1)
ax.axvline(0, color='k', lw=1)
ax.grid(True, color = '0.88')
```



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请计算如下对角方阵的行列式，并在方格纸上画出这些矩阵的列向量对应的平行四边形。

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q2. 请计算下面几个上三角矩阵的行列式，并在方格纸上画出这些矩阵的列向量对应的平行四边形。

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Q3. 请计算下面几个下三角矩阵的行列式，并在方格纸上画出这些矩阵的列向量对应的平行四边形。

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Q4. 请将 **Q1**、**Q2**、**Q2** 题目中列向量调换，再计算行列式。

Q5. 请探究行列式、向量叉乘 (cross product of vectors) 之间的联系。