

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

3.5 分块矩阵乘法



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 分块矩阵乘法：子矩阵形状匹配。
- ▶ 矩阵乘法第一视角：内积。
- ▶ 第一视角延展： A 切多行， B 切多列。
- ▶ 矩阵乘法第二视角：外积。
- ▶ 第二视角延展： A 切多列， B 切多行。
- ▶ 矩阵乘法第三视角：列向量线性组合。
- ▶ 矩阵乘法第四视角：行向量线性组合。

前文四种矩阵乘法视角，本质上都是分块矩阵乘法的不同形态。本节在总结前四种分块矩阵乘法基础上，再进一步扩展介绍其他常用分块矩阵乘法。

表 1 比较矩阵乘法四个视角，请大家自行比对回顾。

表 1. 比较矩阵乘法四个视角

$AB = C$	第一视角	第二视角	第三视角	第四视角
描述	内积	外积	列向量线性组合	行向量线性组合
分块	A 切成行 B 切成列	A 切成列 B 切成行	A 切成列	B 切成行
数学表达	$c_{i,j} = a^{(i)}b_j$	$C_k = a_k b^{(k)}$	$c_j = Ab_j$	$c^{(i)} = a^{(i)}B$
意义	A 的第 i 行和 B 的第 j 列的内积	A 的第 k 列和 B 的第 k 行的外积矩阵求和	A 的列向量根据 B 的每一列加权组合	B 的行向量根据 A 的每一行加权组合
形状	由 A 的行数 $\times B$ 的列数	每个外积结果是 $m \times$	A 的列向量于 C 的列向	B 的行向量于 C 的行向

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

	决定	n, 与最终矩阵相同	量维数相同	量维数相同
--	----	------------	-------	-------

矩阵乘法 AB 第一视角：A 切成行，B 切成列

对于矩阵乘法 $AB = C$ ，把左侧矩阵 A 切成行，右侧矩阵 B 切成列，如图 1 所示，我们实际上把矩阵乘法 AB 写成了 $m \times n$ 个矩阵乘法。

每个矩阵乘法， $a^{(i)} @ b_j = c_{i,j}$ ，得到的是结果 C 中的一个元素。

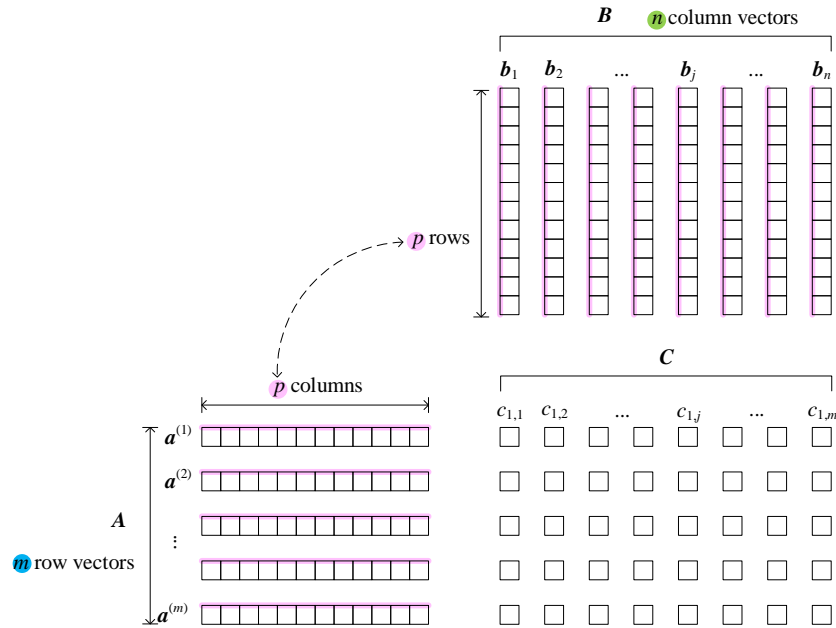


图 1. 矩阵乘积 AB ， A 切成行， B 切成列

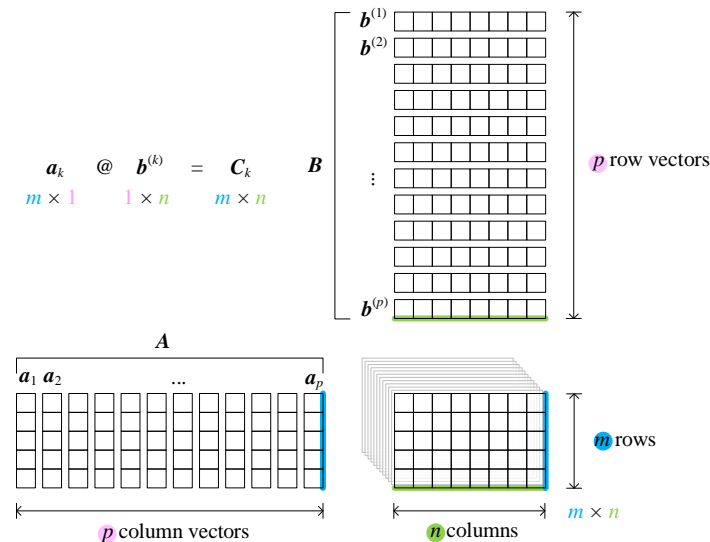
矩阵乘法 AB 第二视角：A 切成列，B 切成行

对于矩阵乘法 $AB = C$ ，把左侧矩阵 A 切成列，右侧矩阵 B 切成行，如图 2 所示，我们实际上把矩阵乘法 AB 写成了 p 个矩阵乘法的叠加。

每个矩阵乘法， $a_k @ b^{(k)} = C_k$ ，得到的是和结果 C 形状完全一致的矩阵。

把 p 个 C_k 叠加便得到矩阵 C 。

p 对应矩阵 A 的矩阵列数，也是矩阵 B 的行数，就是在矩阵 AB 乘法中被“消去”的维度。

图 2. 矩阵乘积 AB , A 切成列, B 切成行

矩阵乘法 AB 第三视角: B 切成列向量

对于矩阵乘法 $AB = C$, 把右侧矩阵 B 切成列, 如图 3 所示, 矩阵乘法结果 C 的每一列是矩阵 A 列向量的线性组合。

反向来看, 如果存在以下一组矩阵乘法运算:

$$Ab_1 = c_1, \quad Ab_2 = c_2, \quad \dots \quad Ab_p = c_p \quad (1)$$

其中, 列向量 $b_1, b_2 \dots b_p$ 的形状相同。(1) 中 p 个等式可以合成得到:

$$A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{bmatrix} \quad (2)$$

⚠ 请大家格外注意这个视角, 本书之后的投影运算中经常见到这种展开方法。

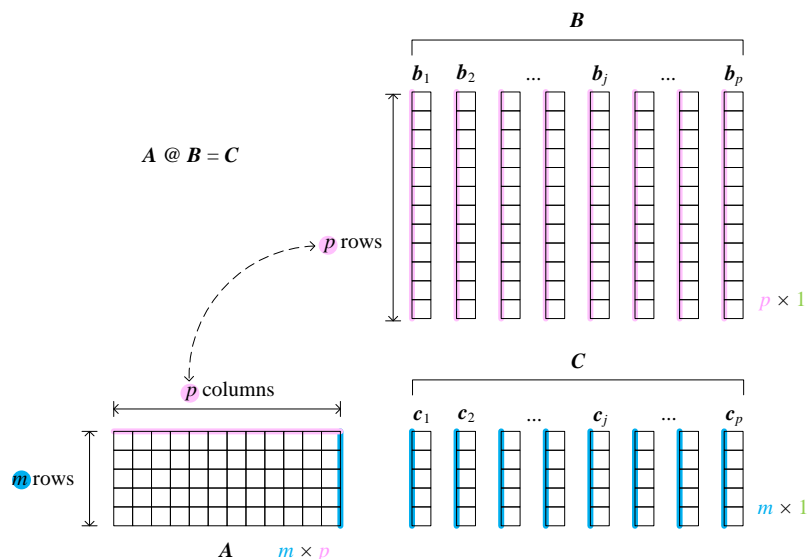
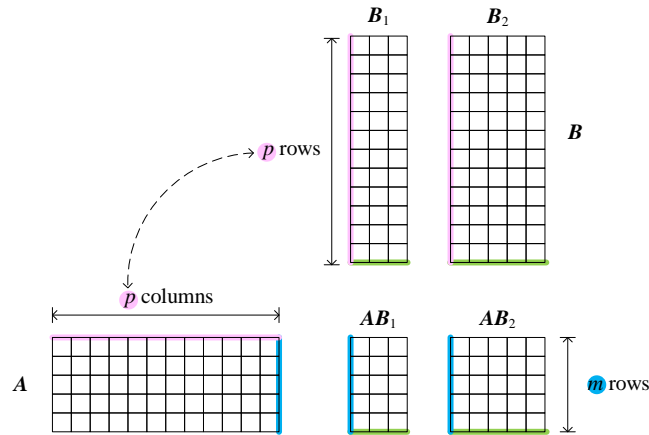
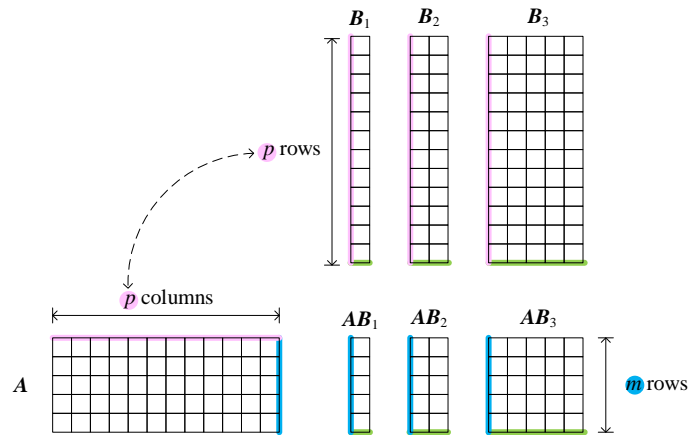


图 3. 矩阵乘积 AB , B 切成列

类似地, B 先左右切一刀后, AB 可以展开写成:

$$AB = A[B_1 \ B_2] = [AB_1 \ AB_2] \quad (3)$$

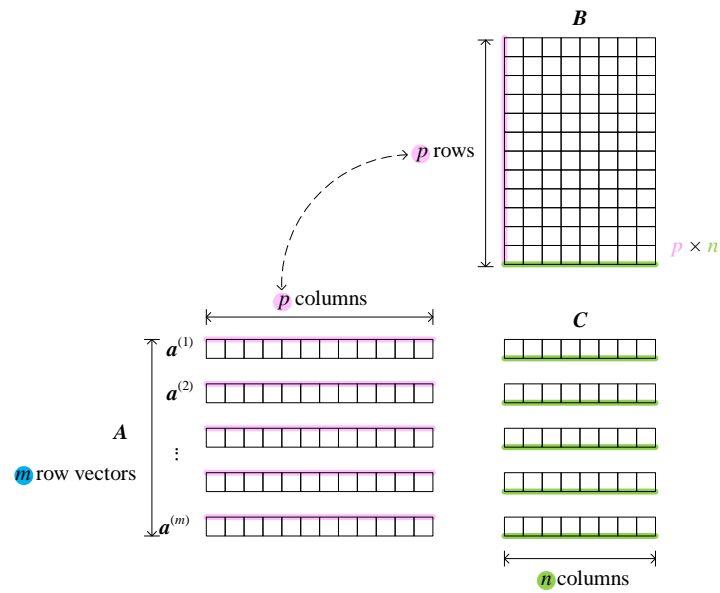
图 4 所示为上述运算示意图。图 5 告诉我们, 把矩阵 B 左右切若干刀, 最终也不影响矩阵乘法的结果。

图 4. 矩阵乘积 AB , 将 B 左右切一刀图 5. 矩阵乘积 AB , 将 B 左右切若干刀

矩阵乘法 AB 第四视角: A 切成一组行向量

对于矩阵乘法 $AB = C$, 把左侧矩阵 A 切成行, 如图 6 所示, 矩阵乘法结果 C 的每一行是矩阵 B 行向量的线性组合。

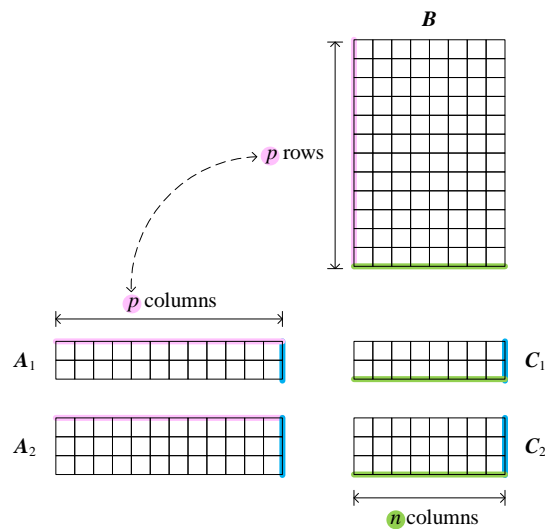
此外, 请大家也试着从“合成”角度, 逆向来看上述运算。

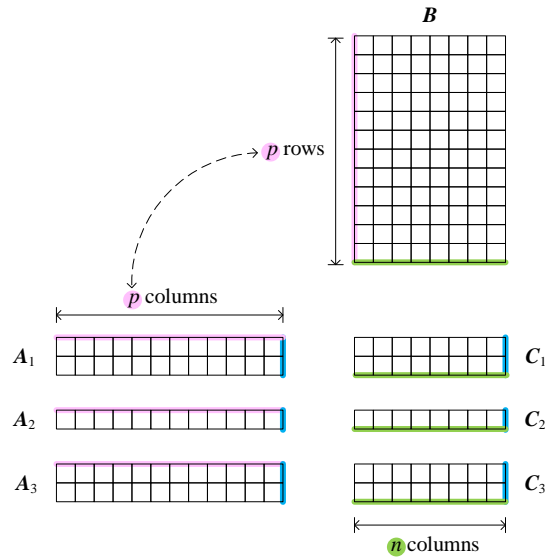
图 6. 矩阵乘积 AB , A 切成行

将 A 先上下切一刀，乘积 AB 结果为：

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix} \quad (4)$$

图 7 所示为上述运算示意图。图 8 告诉我们，把矩阵 A 上下切若干刀，最终也不影响矩阵乘法的结果。

图 7. 矩阵乘积 AB ，将 A 上下切一刀

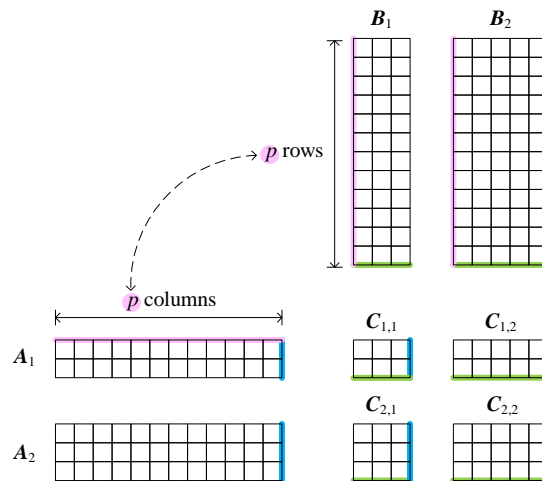
图 8. 矩阵乘积 AB ，将 A 上下切几刀

A 上下切， B 左右切

如图 9 所示，上下分块的 A 乘左右分块的 B ，乘积 AB 结果展开为：

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

我们可以把 A_1 和 A_2 视作矩阵 A 的两个元素， B_1 和 B_2 看成矩阵 B 的两个元素。这个视角类似矩阵乘法的第一视角。

图 9. 矩阵乘积 AB ， A 上下分块， B 左右分块

A 左右切， B 上下切

左右分块的 A 乘上下分块的 B ，乘积 AB 结果展开为：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$AB = [A_1 \quad A_2] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 \quad (6)$$

如图 10 所示， A_1 列数等于 B_1 行数， A_2 列数等于 B_2 行数。如图 11 所示，我们也可以把 A 和 B 切的更细碎一些。

这类似前面讲到的矩阵乘法的第二视角。

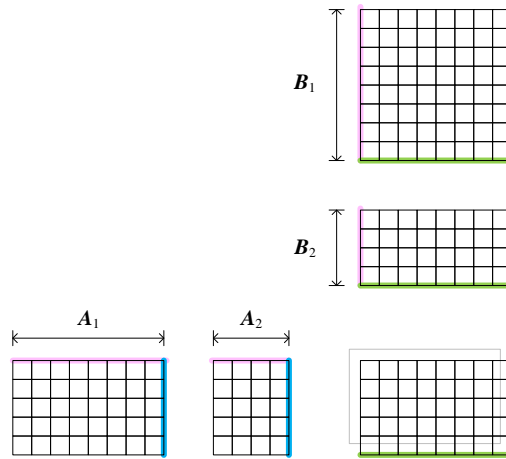


图 10. 矩阵乘积 AB ， A 上下分块， B 左右分块

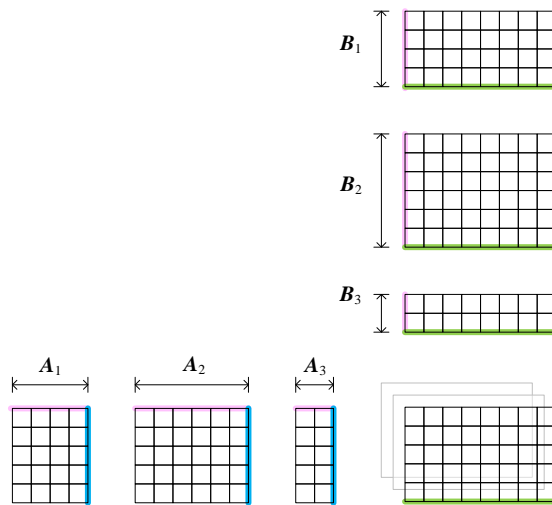


图 11. 矩阵乘积 AB ， A 上下切几块， B 左右切几块

A 和 B 都“大卸四块”

A 和 B 都上下左右分块，乘积 AB 结果为：

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

如图 12 所示， $A_{1,1}$ 、 $A_{1,2}$ 、 $A_{2,1}$ 、 $A_{2,2}$ 的列数分别等于 $B_{1,1}$ 、 $B_{2,1}$ 、 $B_{1,2}$ 、 $B_{2,2}$ 的行数。

图 12 中给出的分块矩阵乘法相当于两个 2×2 矩阵相乘，结果 C 还是 2×2 。这也相当于矩阵乘法的第一视角。

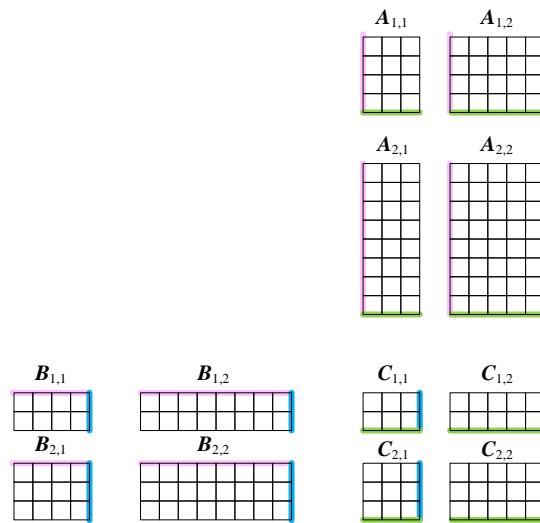


图 12. A 和 B 都上下左右分块

本书有关矩阵乘法的专题到此结束；但是，矩阵乘法的应用才刚刚开始。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 请自学爱因斯坦求和约定。

<https://numpy.org/doc/2.2/reference/generated/numpy.einsum.html>