院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末试卷（A 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则常数 a 满足（　　）

A． a=1　　B． a=0　　C． a 为无穷大　　D． 无法确定

2. $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt, \beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt,$ 当 $x\to 0, \alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）

A. 高阶无穷小量　　B. 低阶无穷小量

C. 等价无穷小量　　D. 同阶但非等价的无穷小量

3. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 有（　　）条渐近线

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导函数,且 $f(0)=f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则存在 $\delta>0$，有（　　）

A. $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx>0$　　B. $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx<0$

C. $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx=0$　　D. $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx>0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx<0$

5. 下列广义积分中，发散的是（ ）

A. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$　　B. $\int_0^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx$　　C. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^3}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(2021^n+2022^n+2023^n)^{\frac{1}{n}}=$____________________.

7. 已知 $y=x^x(x>0)$，则微分 $dy=$________________________.

8. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\cos x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$____________________.

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x^{2023}\sin^2 x}{1+x^2}+\cos^2 x\right)dx\ =$_______________.

10. 对数螺线 $r=e^{\theta}$ 从点 $(r,\theta)=(1,0)$ 到点 $(r,\theta)=(e^{2\pi},2\pi)$ 的弧长为__________________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\dfrac{n}{n^2+3^2}...+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

13. 计算不定积分 $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

14. 求一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$ 满足 $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

15. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上的最大值和最小值.

16. 过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，设此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形为 A，计算图形 A 的面积，并求平面图形 A 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上可导，且 $2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)$，证明：在 $\left(0,1\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上可导，$\delta>0$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 点二阶可导，且 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的泰勒公式为 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h,\ 0<\theta(h)<1, h\in(-\delta,\delta)$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$.