安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《 高等数学 A（一)》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设有下列命题

① 数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$有界.

② 数列$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+l} = a$，其中$l$为某个确定的正整数.

③ 数列$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.

④ 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

则以上命题中正确的个数是（　　）

（A）1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

2. 下列叙述正确的是（　　）

（A）如果$f(x)$在x_0的任意去心领域内无界，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

（B）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则$f(x)$在$x_0$的任意去心领域内无界.

（C）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

（D）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

3. 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3}, & x > 0, \\ g(x)\cdot \arcsin^2 x, & x \le 0. \end{cases}$ 其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x=0$处（　　）

（A）极限不存在.　（B）极限存在，但不连续　（C）连续，但不可导　（D）可导

4. 设严格单调函数$y = f(x)$有二阶连续导函数，其反函数为$x = \varphi(y)$，且$f(1) = 2$，$f'(1) = 2$，$f''(1) = 3$，则$\varphi''(2) =$（　　）

（A）　$-\dfrac{3}{8}$　　（B）　$\dfrac{3}{8}$　　（C）　-3　　（D）　$\dfrac{1}{3}$

5. 下列各题计算过程中完全正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)'}{n'} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

（B）$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{3x^2-2x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi \cos \pi x}{6x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi^2 \sin \pi x}{6} = 0$.

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在.

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^3+1^2}+\dfrac{2n}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)=$______________.

7. 极坐标曲线$r=e^{\theta}$在点$(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程为______________.

8. 已知当$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则常数$a=$___________.

9. 设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$___________.

10. 设$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则$f'(t)=$__________.

三、分析计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 设$a_0>0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{9}{a_n}\right)$，（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

12. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)}$.

13. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

14. 利用泰勒展开计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$

15. 已知函数$y=y(x)$由方程$e^y+6xy+x^2=1$所确定，求$y''(0)$.

16. 已知$y=\varphi\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$，其中$\varphi$可导，求$dy$.

17. 设$f(x)=(x-a)^n g(x)$，其中$g(x)$在a的某邻域内有$n-1$阶连续导函数，求$f^{(n)}(a)$

四、综合分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{e^{nx}+x^2}$的间断点，并判断它们的类型.

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=1$，a,b为任意正数，证明：

（1）至少存在一点 $c \in (0,1)$ ，使得 $f(c) = \dfrac{a}{a+b}$ ；

（2）在 $(0,1)$ 内必存在 $\xi \neq \eta$ ，使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = a+b$.