学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答题勿超装订线

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（ B ）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

$(x-\ln(1+x))'=1-\frac{1}{1+x}$

$(1-\frac{1}{1+x})'=-\frac{-1}{(1+x)^2}$

2．若函数 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ B ）间断点.

（A）可去　　（B）跳跃

（C）第二类无穷型　　（D）第二类振荡型

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1$

3．若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值，则下列命题中正确的是（ D ）.

（A）$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加

（B）在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)<0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)>0$

（C）$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$

（D）对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，恒有 $f(x)>f(x_0)$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

4．微分方程 $y''+4y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 的特解形式为（　　）.

（A）$ax\cos 2x$　　（B）$a\cos 2x$

（C）$ax\cos 2x+bx\sin 2x$　　（D）$a\cos 2x+b\sin 2x$

$x\sin 2x$

$(x\cos 2x)'=\cos 2x-2x\sin 2x$

$(x\cos 2x)''=-2\sin 2x-2\sin 2x-4x\cos 2x$

$=-4\sin 2x-4x\cos 2x$

$(x\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$

$(x\sin 2x)''=2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x$

$=4\cos 2x$

$-4x\sin 2x$

5．下列广义积分中，发散的是（ A ）.

（A）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$　　（B）$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$　　（C）$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$　　（D）$\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

$=\int_0^1\frac{1}{x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right)=$ $\frac{1}{2}$.

$\frac{n}{n^2}\cdot\frac{n}{(n+i)^2}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$

$=\frac{(1+x)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_0^1$

$=\frac{\frac{1}{2}-1}{-1}$

7．曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $y=x+2$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(1+\arcsin\frac{2}{x})}{x}$

$=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x(1+\arcsin\frac{2}{x})-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}$

$=2$

9. $S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin x}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

8. 曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率为____1____.

8. $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\to\frac{1}{1}$

9. 曲线段 $y=\ln\cos x$（$0\le x\le\frac{\pi}{6}$）的弧长为____$\frac{1}{2}\ln 3$____.

$y'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\to 0$

10. $\int_{-3}^{3}\left(x^3\cos x+\sqrt{9-x^2}\right)dx=$____$\frac{9}{2}\pi$____.

奇 偶

$=2\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$

$\frac{\pi 3^2}{4}$

$y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\to 1$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

12. 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程.

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}, x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, -1\le x<0\end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

15. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 满足条件 $y(1)=2$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围图形的面积.

16. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值和最小值.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

证明：方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的实根.

18. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=\frac{1}{2}$，$f(2)=2$.

证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

11. $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)}$

$= e^2$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}}{1}$

$= \lim_{x\to 0}(2\cos x-\sin x)$

$=2$

12. $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1 \rightarrow e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$

$e^{0+y(0)}-\cos 0=e-1$

$\Rightarrow y(0)=1$

$e^{1}(2+y'|_{x=0})+0=0$

$y'=-2$

$y-1=\frac{1}{2}x$

13. $\int_0^1 x f''(2x)\,dx$

$$\xlongequal[x=\frac{t}{2}]{t=2x} \int_0^2 \frac{t}{2} f''(t)\, d\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 t f''(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 t\, d f'(t)$$

$$= \frac{1}{4} t \cdot f'(t)\Big|_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 f'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot f'(2) - \frac{1}{4} f(t)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} f(2) + \frac{1}{4} f(0)$$

$$= \frac{1}{2}\times 5 - \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 1$$

$$= 2.$$

14. $f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$

$$\int_1^4 f(x-2)\,dx \xlongequal[x=t+2]{t=x-2} \int_{-1}^2 f(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos x}\,dx + \int_0^2 x e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\cos x}\,dx + \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^2 e^{-x^2}\,d(-x^2)$$

$$= \int_0^1 \sec^2\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^2$$

$$= \tan\frac{x}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}(e^{-4}-1)$$

$$= \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}$$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{x} = 2\frac{y}{x} - 1$

解：令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $y=ux$

从而 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x + u = 2u-1$

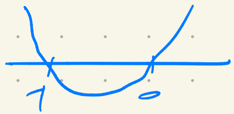
$$\frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x}$$

$u-1 = Cx$ （C为任意常数）

$$y-x = Cx^2$$

$y(1)=2$ $2-1=C \Rightarrow C=1$

$$y = x^2+x = x(x+1)$$



$$-\int_{-1}^{0}(x^2+x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$$

16. $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$

$f(0)=0$

$f'(x)=(2-x^2)e^{-x^2}\cdot 2x$

故 $f(x)$ 在 $[0,\sqrt{2}]\uparrow$ $[\sqrt{2},+\infty)\downarrow$.

· $f(0)=0$

· $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=e^{-2}+1$

· $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+1)$

$=1$

故 最大值 $f(\sqrt{2})=e^{-2}+1$ 最小值 $f(0)=0$.

$\int(2-t)e^{-t}dt$

$=2\int e^{-t}dt-\int te^{-t}dt$

$=-2e^{-t}+\int t\,de^{-t}$

$=-2e^{-t}+t\cdot e^{-t}-\int e^{-t}dt$

$=-2e^{-t}+t\cdot e^{-t}+e^{-t}+C$

$=t\cdot e^{-t}-e^{-t}+C$

$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$

$=te^{-t}-e^{-t}\Big|_0^{x^2}$

$=x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+1$

17.

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_1^x \frac{1}{f(t)}\,dt$$

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}$$

$F(x)\uparrow$

$$F(0)=\int_1^0 \frac{1}{f(t)}\,dt<0$$

有了!

$$F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt>0$$

18. 目标：$f'(x)x - 2f(x) = 0$

$$F(x) = \frac{f(x)}{x^2} \qquad F'(x) = \frac{f'(x)\,x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{f'(x)\cdot x - 2f(x)}{x^3}$$

$$F(1) = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = \frac{f(2)}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$\exists\, \xi$ s.t. $F'(\xi) = 0$