学号____ 姓名____ 专业____ 年级____ 院/系____

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末模拟卷一

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，以下结论一定正确的是　　（　　）

A．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

B．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

C．若 $x_n y_n$ 有界，则必有 x_n 与 y_n 都有界

D．若 $x_n y_n$ 无界，则必有 x_n 无界或 y_n 无界

2．若函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x = 0$ 是其　　（　　）

A．连续点　　B．无穷间断点

C．跳跃间断点　　D．可去间断点

3．设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，下列说法一定**错误**的是　　（　　）

A．x_0 可能是区间端点　　B．x_0 可能是 $f(x)$ 的驻点

C．x_0 可能是 $f(x)$ 的间断点　　D．$(x_0, f(x_0))$ 可能是曲线 $f(x)$ 的拐点

4．设 $f(x)$ 是 $e^{-x} + \cos x$ 的一个原函数，则下列各式中可能是 $f(x)$ 的原函数的是　　（　　）

A．$e^{-x} + \cos x$　　B．$e^{-x} + \sin x$　　C．$e^{-x} - \cos x$　　D．$e^{-x} - \sin x$

5．设 $f(x)$，$g(x)$ 均在区间 $[0,2]$ 上二阶可导，$f(0) = g(0) = 0, f(2) = g(2) = 1$，且对任意 $x \in [0,2]$，$f''(x) > 0$，$g''(x) < 0$，记 $S_1 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x, S_2 = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$，则（　　）

A．$S_1 < S_2 < 1$　　B．$1 < S_2 < S_1$

C．$S_1 < 1 < S_2$　　D．$S_2 < 1 < S_1$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$x \to 0$ 时，函数 $\ln(1 + x\sin x)$ 是 x 的__________阶无穷小量（填数字）.

7．设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0,0)$，且当自变量在 $x = 0$ 处取得增量 Δx 时，相应的函数值增量 $\Delta y = 3\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n f(\dfrac{1}{n}) =$____________.

8．若函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$______________.

9．曲线 $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}$（$x>1$）的斜渐近线方程是______________________.

10．曲线 $y=\ln\cos x$ 上从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 一段的弧长 $s=$_____________.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

12．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，求 $f'(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

13．求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ 满足初始条件 $y(0)=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

14．计算不定积分计算 $\int\dfrac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$ . .

15．计算 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．设 D 是曲线 $y=\ln x$ 及其切线 $y=\dfrac{x}{e}$ 与 x 轴所围的平面图形

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\dfrac{1}{2})<0$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

18．已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\ge 0$， $F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$

证明：在 (a,b) 内 $F'(x)\ge 0$.