安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．B　　3．A　　4．D　　5．B

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．0　　7．1　　8．-2　　9．2　　10．$e^x\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)\right]dx$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\dfrac{n}{(2n)^2}\le\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\le\dfrac{n}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n)^2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^2}=0$，由夹逼准则知

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2})=0$ ……………………… （10 分）

12．解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

………………（10 分）

13．解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{\left(x^2-1\right)\cdot\frac{x^2}{x^2-1}}$

其中，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$，故原式$=e^1=e$

………………（10 分）

14．解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=2$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=0\Rightarrow a=9$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=-\dfrac{b}{6}=2$

$\Rightarrow b=-12$

………………（10 分）

15．解：方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边同时对 x 求导，有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$$

令 $x=0, y=1$ 带入上式，得 $y'(0)=1$，故切线方程 $y=x+1$

………………（10 分）

16．解：

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right]=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

………………（10 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令 $f(x)=2^x+\sin x-2$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$f(0)=-1<0$， $f(1)=\sin 1>0$，

由零点定理知，至少存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，故

方程 $2^x+\sin x=2$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

………………（5 分）

18．证明：显然 $a_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$， $a_2-a_1=\frac{a_1}{1+a_1}>0$，即 $a_2>a_1$，

设 $a_n>a_{n-1}$，则 $a_{n+1}-a_n=(1+\frac{a_n}{1+a_n})-(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}})=\frac{a_n-a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}>0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 单调增加；

因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}<2$，故数列 $\{a_n\}$ 有上界；

由单调有界定理，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

………………（5 分）