安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设数列 $\{x_n\}$，下列命题**不正确**的是（　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$ 存在

2. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　）

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界，但不是无穷小　　(D) 无界，但不是无穷大

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$（　）

(A) 在 $x=-1$ 处连续，在 $x=1$ 处间断　　(B) 在 $x=-1$ 处间断，在 $x=1$ 处连续

(C) 在 $x=-1$，在 $x=1$ 处都连续　　(D) 在 $x=-1$，在 $x=1$ 处都间断

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列**错误**的是（　）

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

5. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为（　）

(A) $[f(x)]^{2n}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $n![f(x)]^{n+1}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)^{\frac{1}{n}}=$__________.

k

7. 已知当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\ln(\cos x)$ 是等价的无穷小，则 $a=$________.

8. 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)$ 存在，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lambda=$ ________.

9. 已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$，则 $f'(1)=$ ________.

10. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{tx}$，则 $d\,f(t)=$ ________.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 已知 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 极限存在，并求此极限值.

12. 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=\frac{1}{2n^2+1}+\frac{2}{2n^2+2}+\cdots+\frac{n}{2n^2+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x^2)}$.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

15. 已知 $f'(x)=ae^x$（$a>0$ 且为常数），求反函数的二阶导数.

16. 设 $y=y(x)$ 是由 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$ 的值.

17. 求曲线 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 上与直线 $8x+y=1$ 垂直的切线方程.

四、分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. 确定常数 a，b，使得 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x<1,\\ \frac{1}{x}, & x\geq1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 点处可导.

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19. 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 均可导，利用**导数定义**证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$