安徽大学 2022—2023 学第一学期

《高等数学 A 一》答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、D　　3、B　　4、D　　5、D

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. e

7. $-\frac{5}{2}$

8. 2

9. $\left(-2022!\right)dx$

10. $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$

三、计算题（共 60 分，每题 10 分）

11. **解：由夹逼准则**

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}\ldots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}\ldots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

12. 解

$$a>0,\sigma>0,a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})\ge\sqrt{a\frac{\sigma}{a}}=\sqrt{\sigma}$$

$$,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})\ge\sqrt{a_n\frac{\sigma}{a_n}}=\sqrt{\sigma},n=1,2,\ldots$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})-a_n=\frac{1}{2a_n}(\sigma-a_n{}^2)\le 0$$

单调下降有下界，所以收敛，设为 a, 对于递推式两边同时取极限，

$$a=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})$$

$$a=\sqrt{\sigma}$$

（由极限保号性将负值舍去）

13 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\tan^2 x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x+\sin x}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}(2\frac{\sin x}{x}+\cos x)=\frac{1}{4}(2\cdot1+1)=\frac{3}{4}.$$

14 解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0 & x=-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

$x=1$是跳跃型间断点，$f(x)$在$x\neq1$的区域内是连续的

15 解：利用隐函数求导

$xy+e^y=x+1$

$y+xy'+e^yy'=1$

$x=0,y=0,y'(0)=1$

$y'+xy''+y'+e^y(y')^2+e^yy''=0$

$y''(0)=-3$

16 解

$f'(x)=(f(x))^3$

$f''(x)=3(f(x))^2f'(x)=3(f(x))^5$

$f'''(x)=3\bullet5(f(x))^4f'(x)=3\bullet5(f(x))^7$

$f^{(4)}(x)=3\bullet5\bullet7(f(x))^6f'(x)=3\bullet5\bullet7(f(x))^9$

....

$f^{(n)}(x)=(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1(f(x))^{2n+1}=(2n-1)!!(f(x))^{2n+1}$

必须要用数学归纳法证明

四、证明题（共 10 分，每小题 5 分）

17 解

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$$
$$f(x)(1-f(0))=0$$
$$f(0)=1, f(x)=0(\text{舍去})$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$
$$=f(x)$$

18 解

构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)$，

$F(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续，且

$F(a)=f(a)-f\left(a+\dfrac{b-a}{2}\right)=f(a)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，$F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f(b)$；

分两种情况讨论：

若 $f(a)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$，

$F(a)$ 与 $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 异号，

$\xi\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)\subset[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

否则，$\xi=a$ 或 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$

综上所述，命题得证