第一章 函数

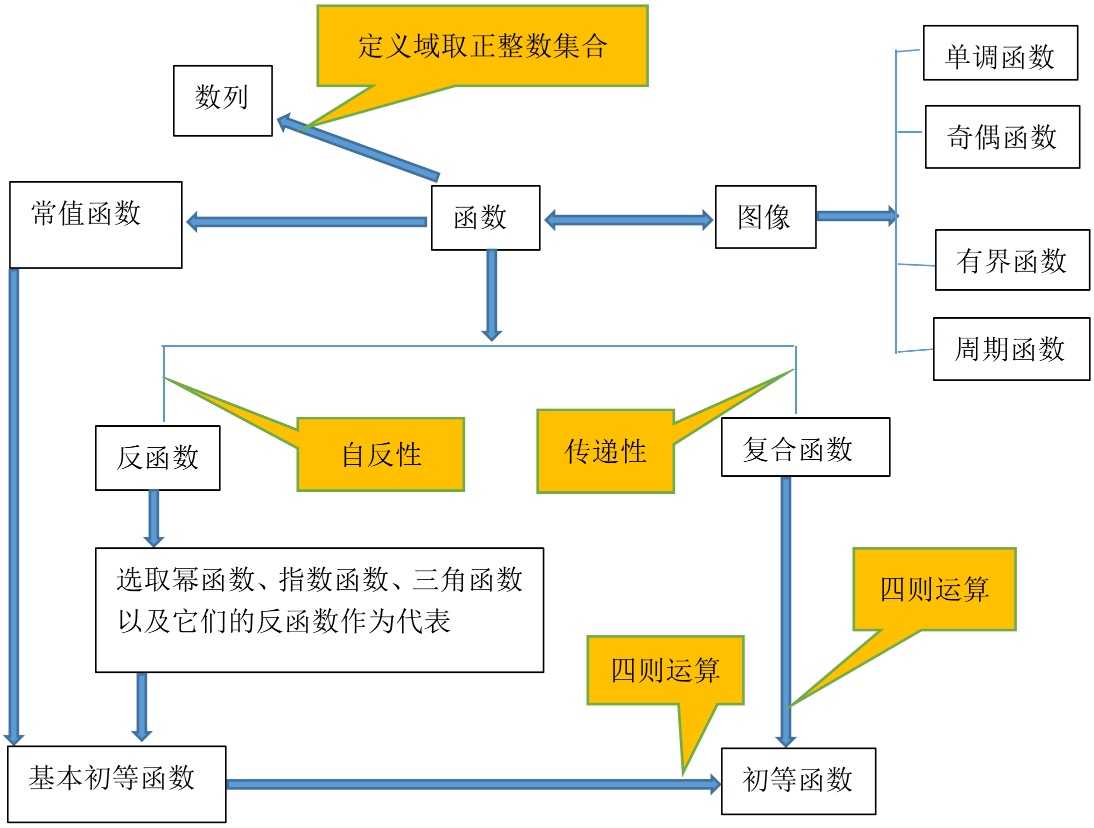


图 1 函数架构

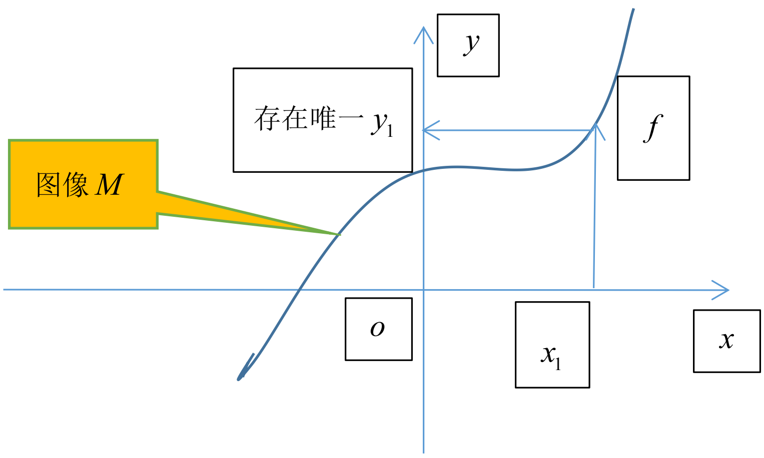


图 2 函数

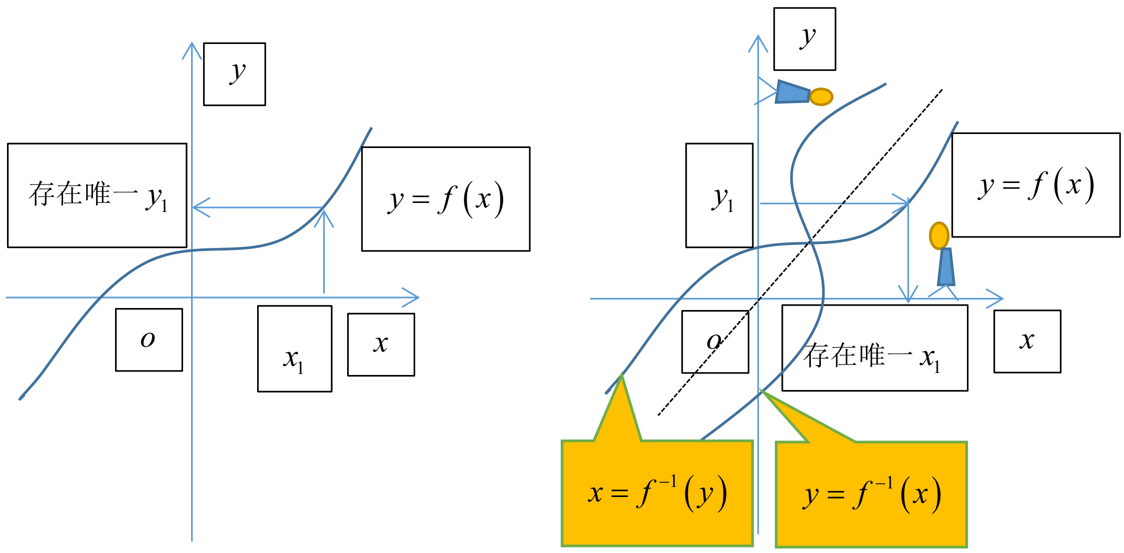


图 3 函数与反函数

注 1：一人站在自变量处（x 轴）看曲线 $y=f(x)$，等同于一人站在自变量处（y 轴）看曲线 $x=f^{-1}(y)$，如同于一人站在自变量处（x 轴）看曲线 $y=f^{-1}(x)$，所以 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一曲线，而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称。即记

$$M_1=\{(x,y)|\forall x\in D,y=f(x)\},M_2=\{(x,y)|\forall y\in f(D),x=f^{-1}(y)\}$$

和

$$M_3=\{(x,y)|\forall x\in f(D)D,y=f^{-1}(x)\}$$

易知 $M_1=M_2$，同时 M_1 与 M_2 关于 $y=x$ 对称。

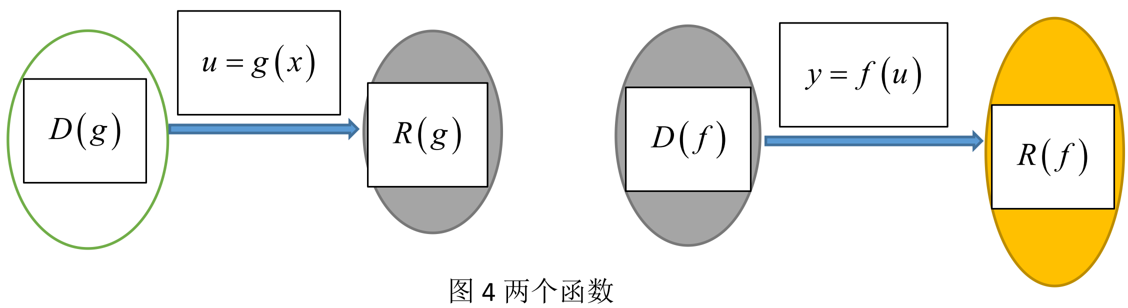


图 4 两个函数

注 2：$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 是两个函数，中学所讲求复合函数 $f(g(x))$ 定义域，若定义

域为空集，则复合函数无意义，即不存在，此时等价于$R(g)\cap D(f)=\phi$，因此$y=f(u)$与$u=g(x)$不能传递；若定义域不为空集，则复合函数有意义，即存在，此时等价于$R(g)\cap D(f)\neq\phi$，因此$y=f(u)$与$u=g(x)$能传递。如下图所示

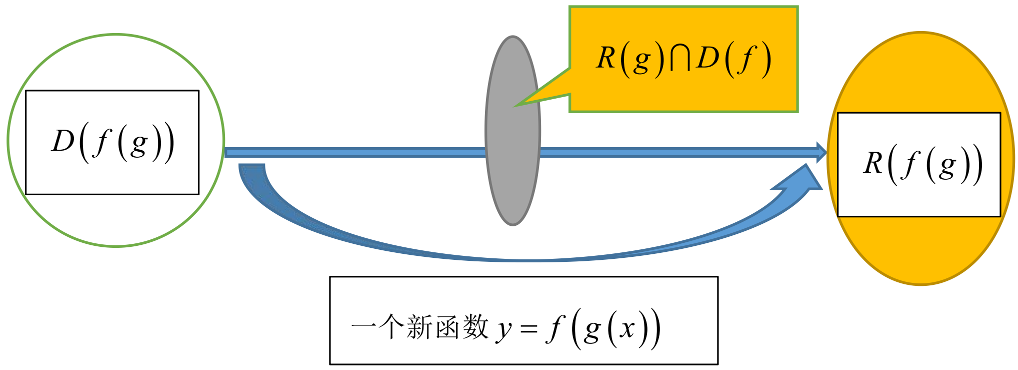


图 5 复合函数

第二章 极限与连续

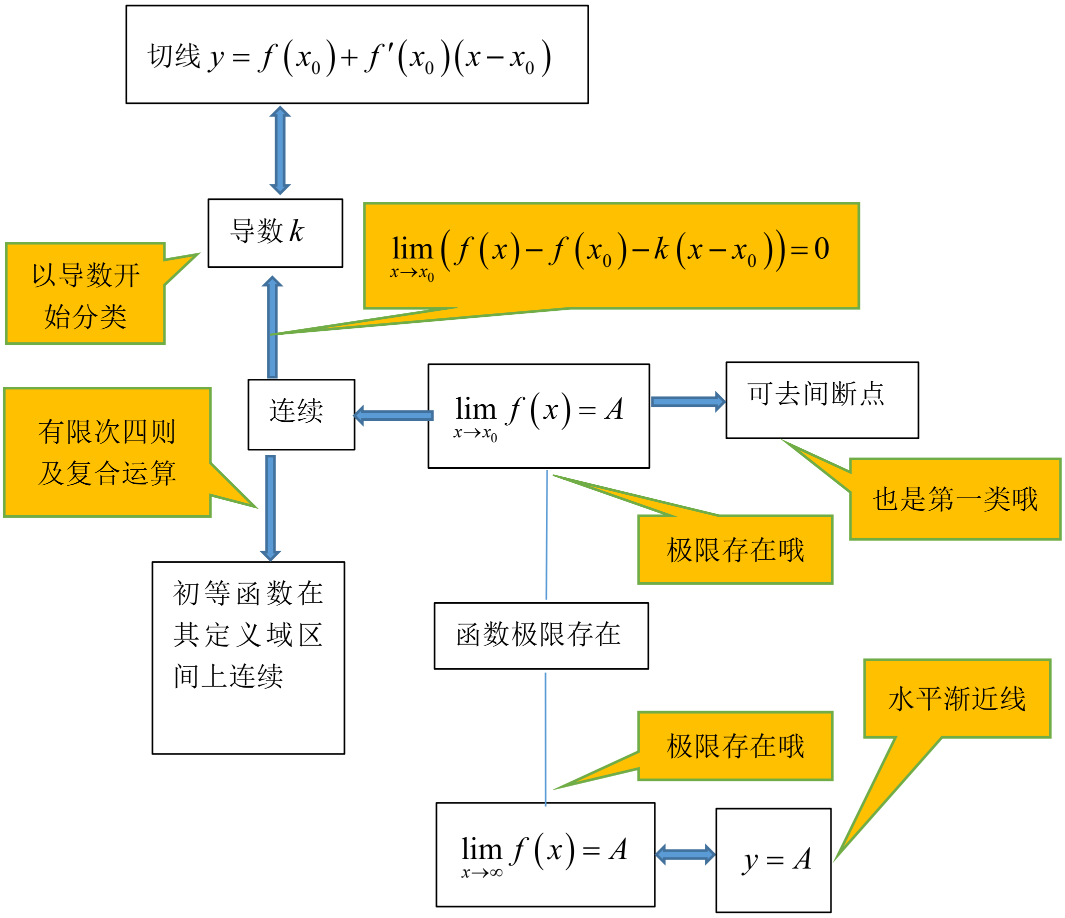


图 2 极限存在架构

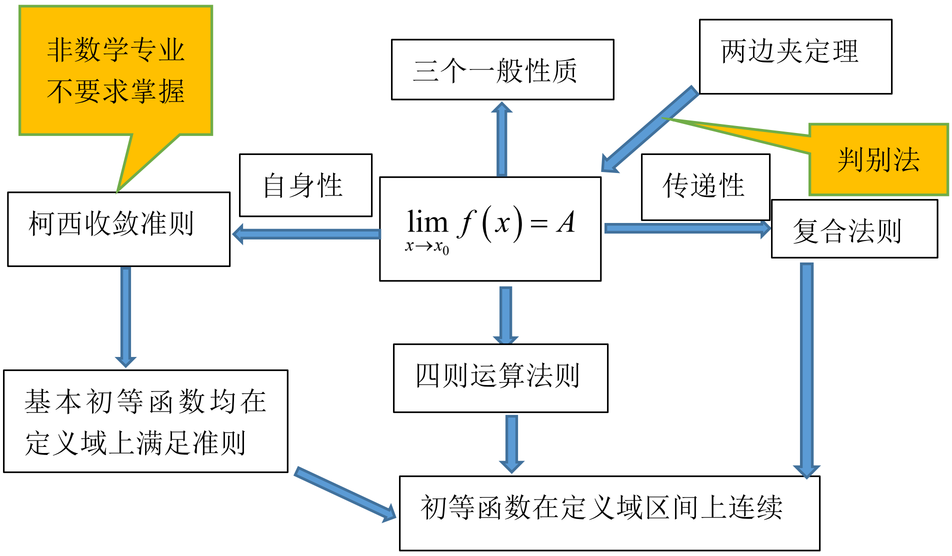


图 3 性质与法则架构

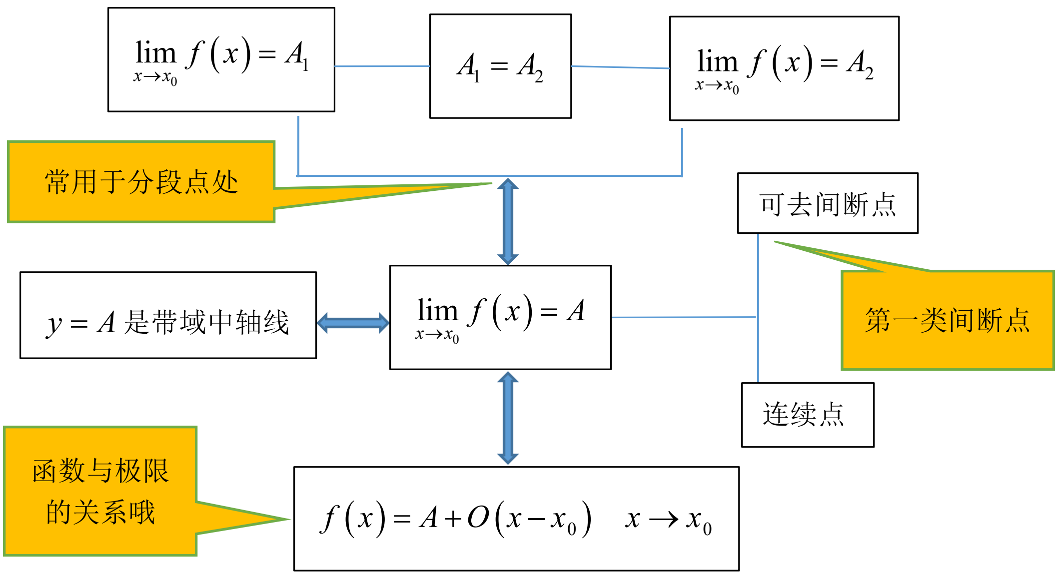


图 4 函数与极限关系（自变量趋于有限点）

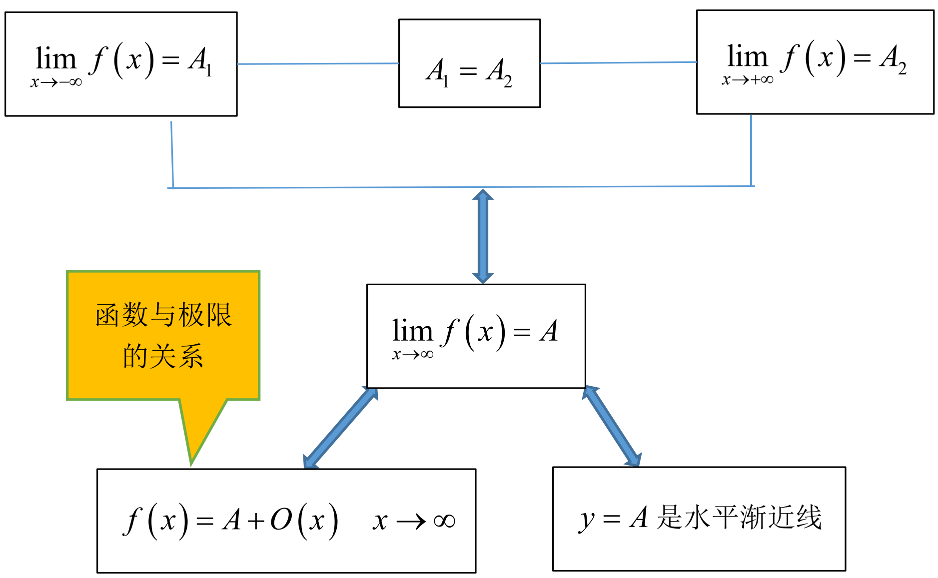


图 5 函数与极限关系（自变量趋于无穷大）

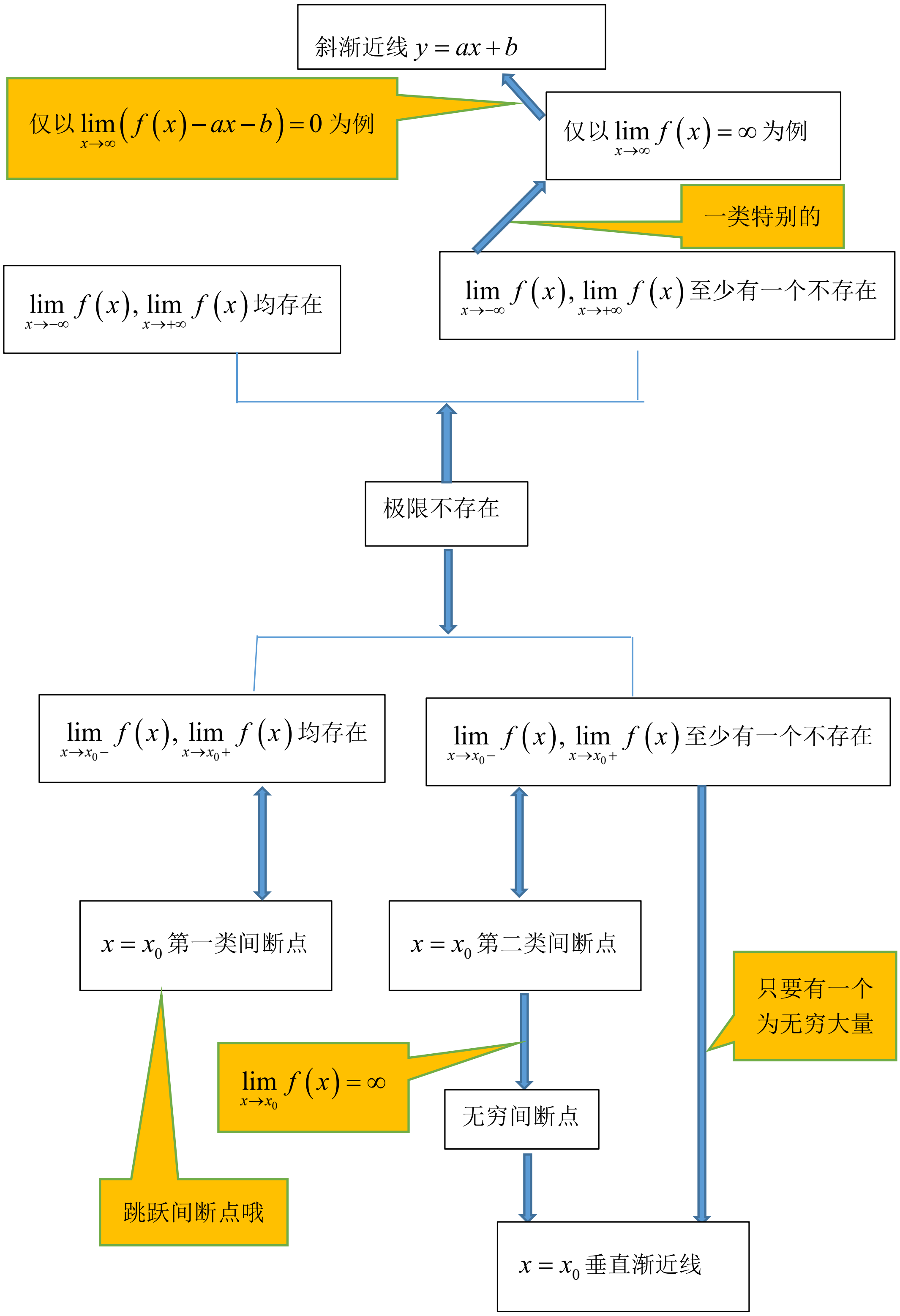

斜渐近线 $y=ax+b$
仅以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$ 为例
仅以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 为例
一类特别的
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 均存在
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 至少有一个不存在
极限不存在
$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x),\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ 均存在
$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x),\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ 至少有一个不存在
$x=x_0$ 第一类间断点
$x=x_0$ 第二类间断点
只要有一个
为无穷大量
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$
无穷间断点
跳跃间断点哦
$x=x_0$ 垂直渐近线

图 6 极限不存在架构

注 3：常见的几类函数极限之计算

一类：

设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, g(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}$ 分别为 n 和 m 多项式。

（1） $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

（2） $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} & g(x_0)\neq 0\\ \infty & f(x_0)\neq 0, g(x_0)=0\\ \text{消去分子与分母的公因子} & f(x_0)=g(x_0)=0\end{cases}$$

（3） $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

二类：

基本公式：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。依据复合函数极限法则，易推广：若 $\lim\alpha(x)=0$，则有

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1} \Longleftrightarrow \boxed{\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1}$$

所有过程都行哦

上面同一过程哦

三类：

基本公式：$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。依据复合函数极限法则，易推广：若 $\lim\alpha(x)=0$，则有 $\lim(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$。强化版：设 $\lim\alpha(x)=0, \lim\beta(x)=\infty$，若 $\lim\alpha(x)\beta(x)=l$，则有 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim\left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{\alpha(x)\beta(x)}=e^{l}$。

四类：熟练掌握利用等价无穷小计算函数极限。继后关注与洛必达法则的计算。

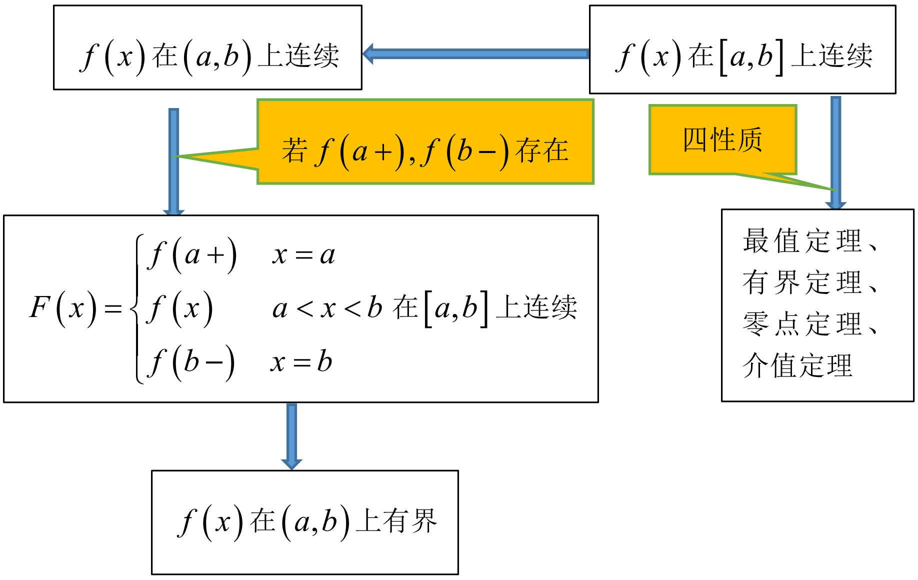


图 7　区间上的连续函数性质

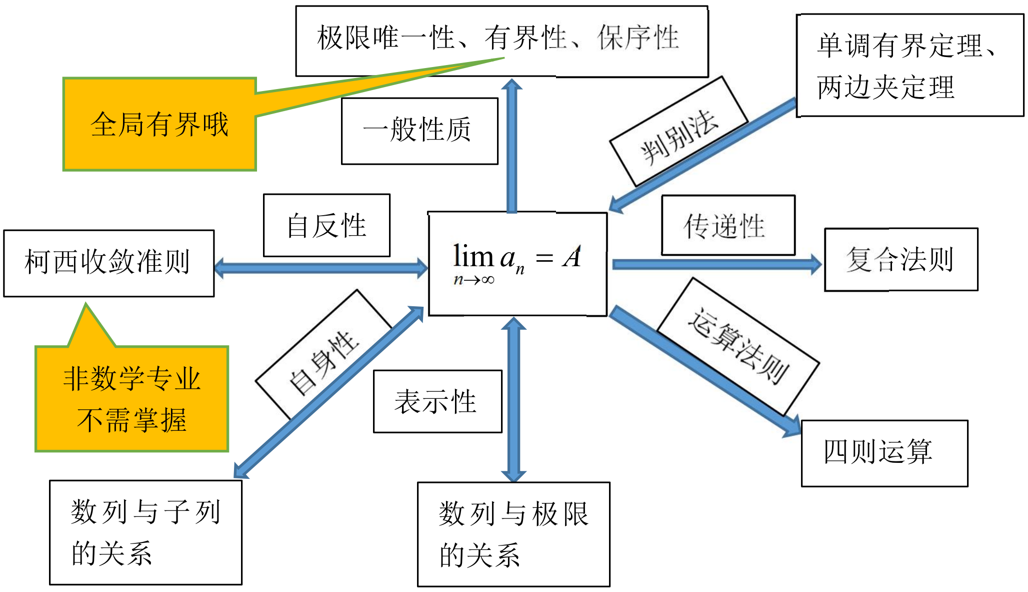


图 8 数列极限架构

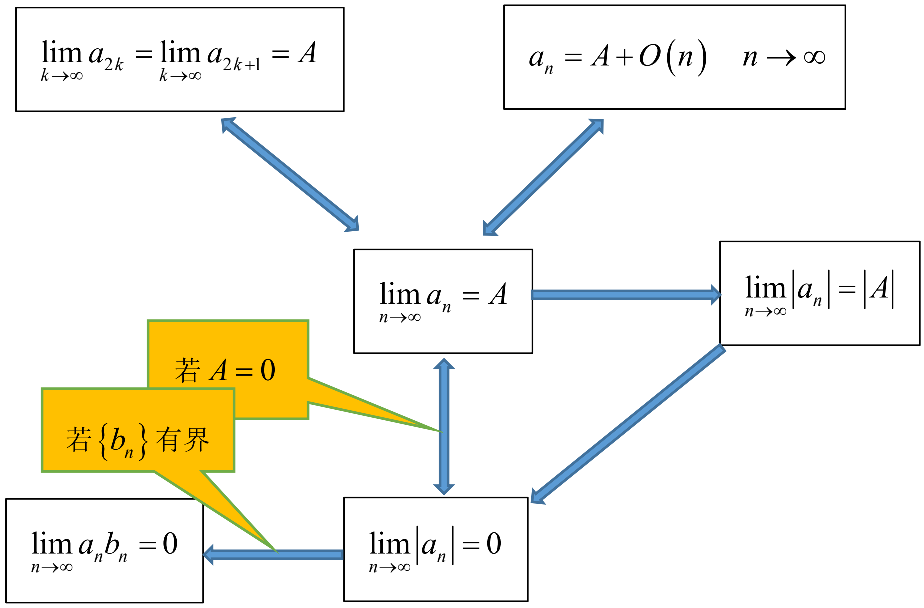


图 9 数列极限中常用的关系

注 4：函数极限与数列极限的关系式海涅定理。

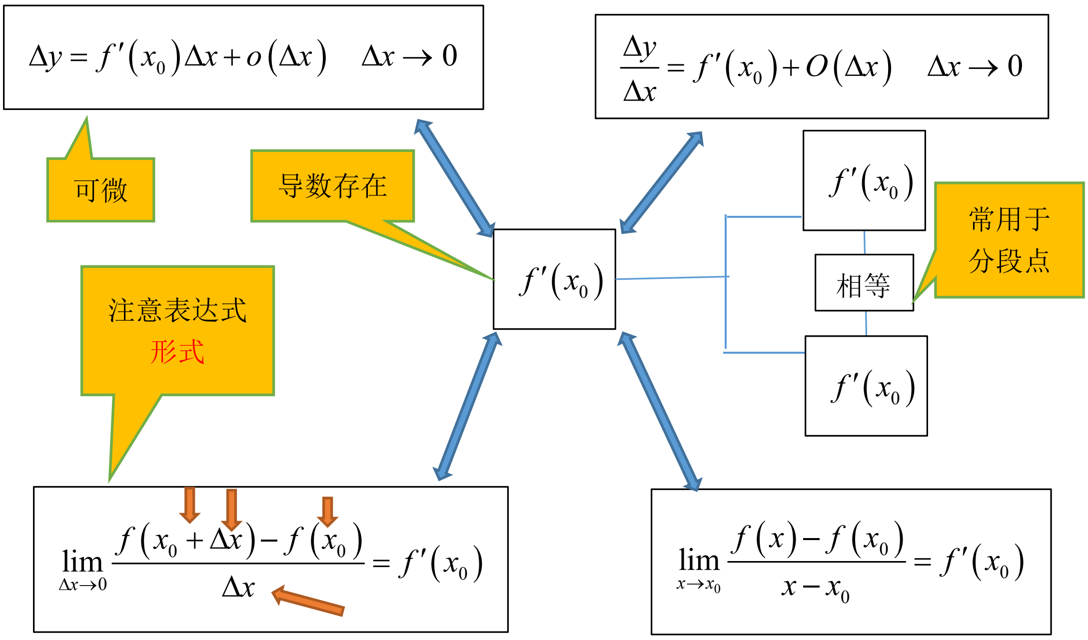
注 5：两类重要极限及推广

一类：基本公式 $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$。推广：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$。

二类：基本公式 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$。推广：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$，若 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = l$，则有

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left((1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right)^{a_n b_n} = e^l$$。

第三章　导数与微分



注 6：微分 $df\big|_{x_0} = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x$ 也称线性主部。

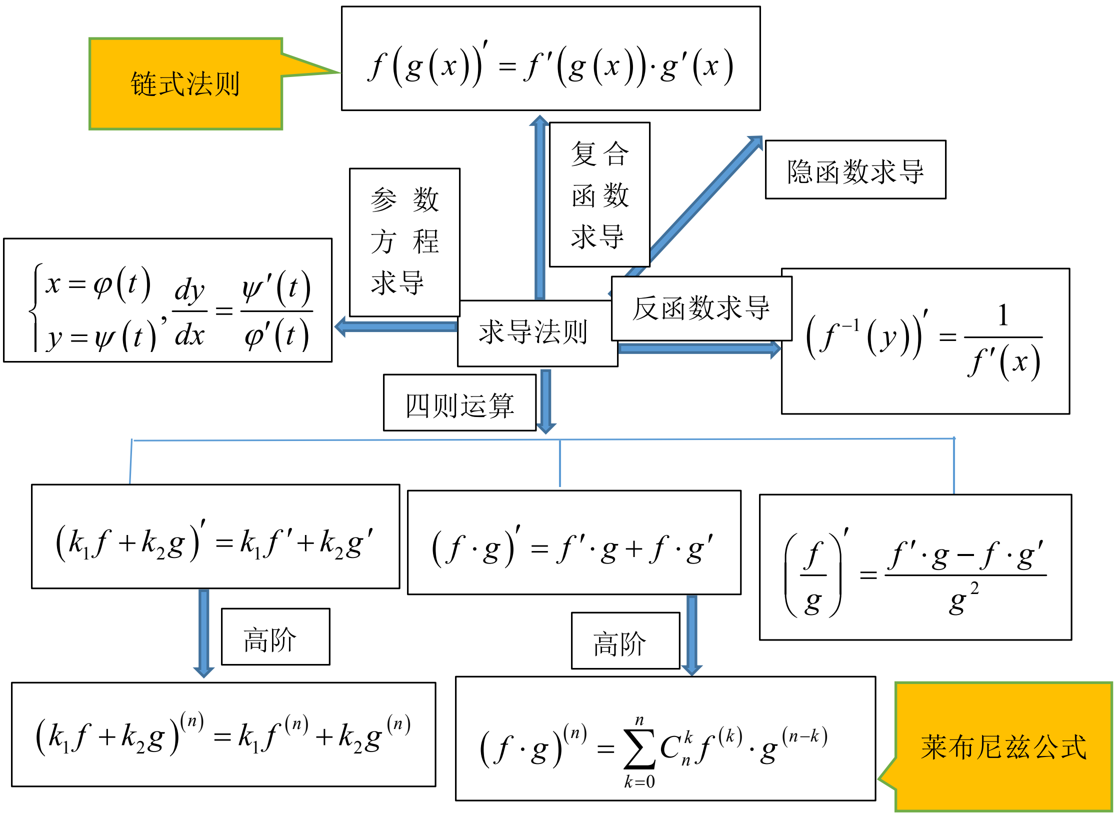


图 7 导数运算法则架构

复合函数：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$

$\downarrow$

反函数：$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f'(x)},\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$

$\downarrow$

参数方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{(\varphi')^3}$

图 8 功能性的二阶导数公式

注 7：对于参数方程与复合函数求高阶导数，一般不建议直接利用公式。一步一步计算即可。
注 8：对于方程确定的隐函数计算导数，注意因变量的函数要作为复合函数处理，即此时因变量看成中间变量。隐函数求二阶导数需具体例子，略。

一阶微分形式不变性

相应的微分运算：

$$d(kf+lg)=kdf+ldg,d(fg)=gdf+fdg,d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2},df(u)=f'(u)du$$

线性运算

图 9 微分运算公式

第四章　微分中值定理及应用

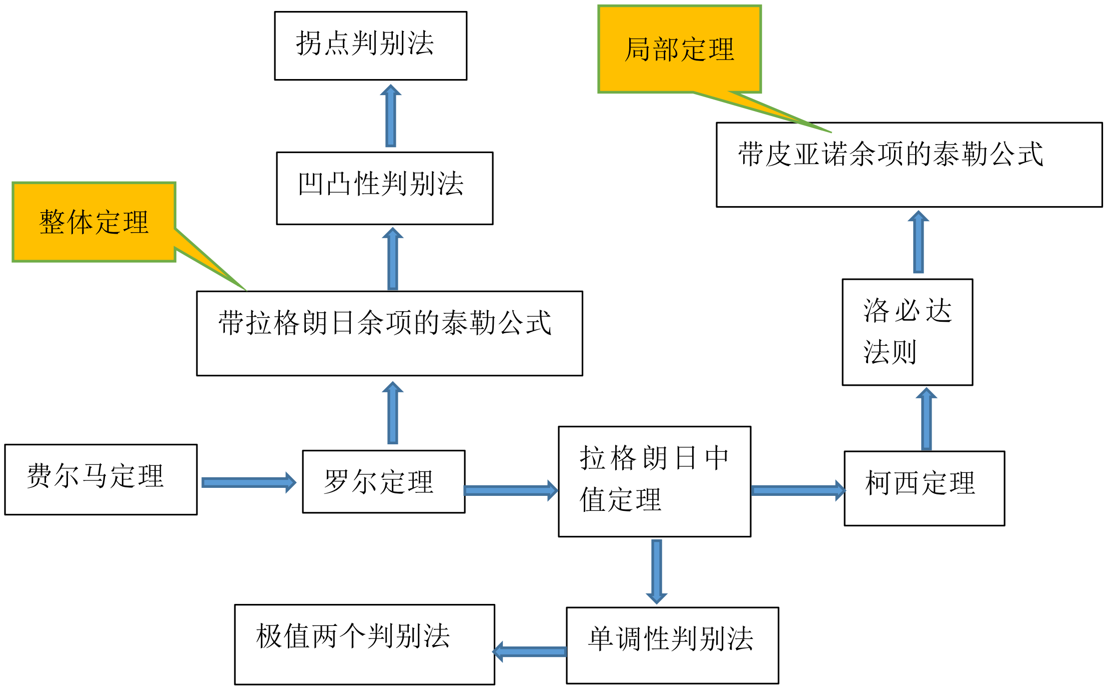


图 10 中值定理及应用架构

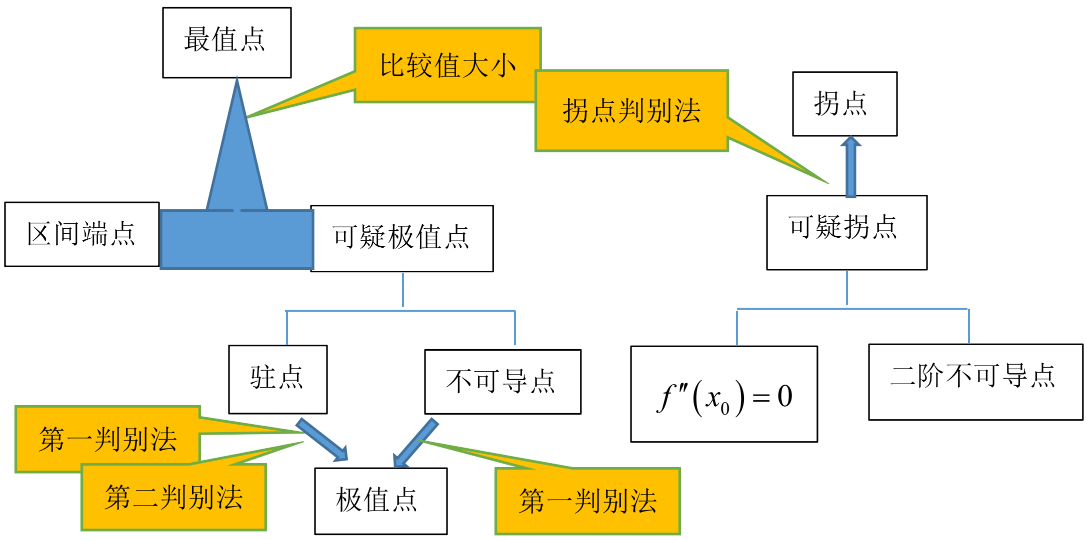


图 11 几点关系

注 9：一阶导数符号确定单调区间，其刻化曲线增减（走向）方向，极值点为增减转折点。二阶导数符号确定凹凸区间，其刻化曲线弯曲方向，拐点为弯曲转折点。进一步，曲率是刻化曲线弯曲程度。渐近线是刻化曲线向无穷远伸展的走向。

第五章 不定积分

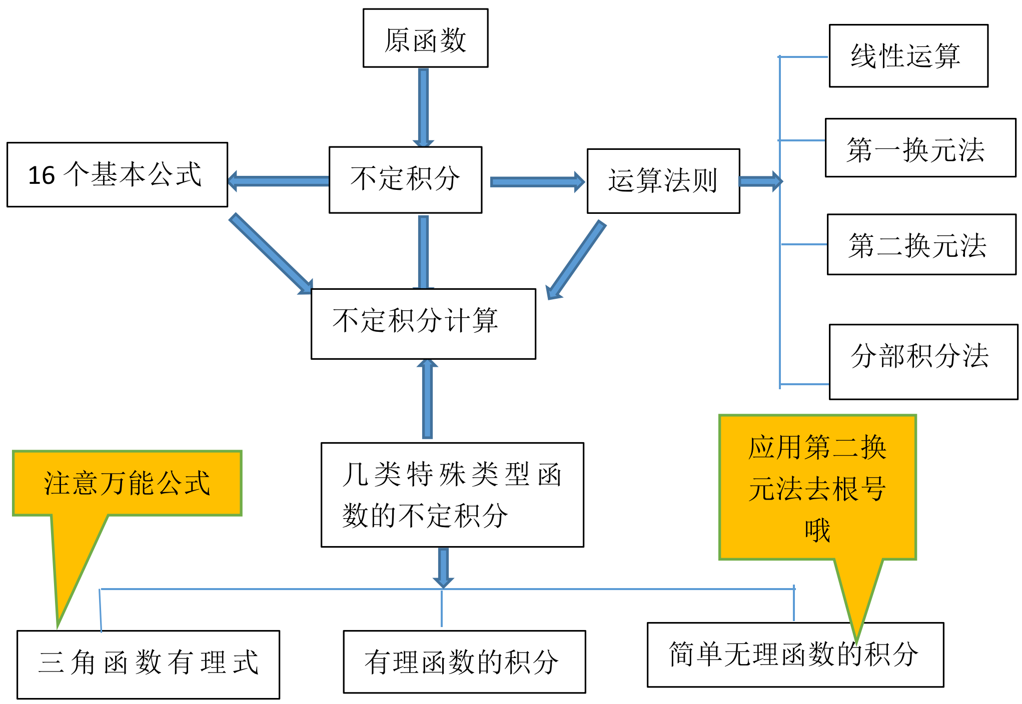


图 12 不定积分架构

注 10：万能公式：令 $u=\tan\frac{x}{2}\quad(-\pi<x<\pi)$，则有 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$。

注 11：积分的线性运算、第一换元法、第二换元法及分部积分法分别对应导数的线性运算、复合函数法则、复合函数与反函数结合求导及乘法求导法则。

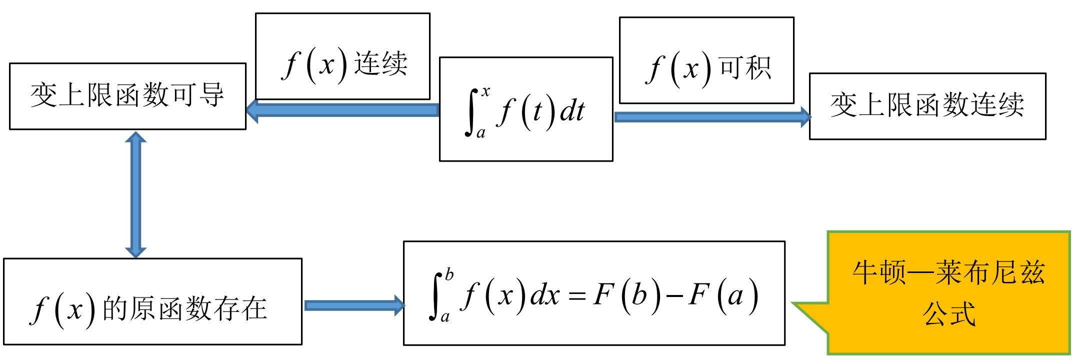


图 13 变上限函数与微积分基本公式

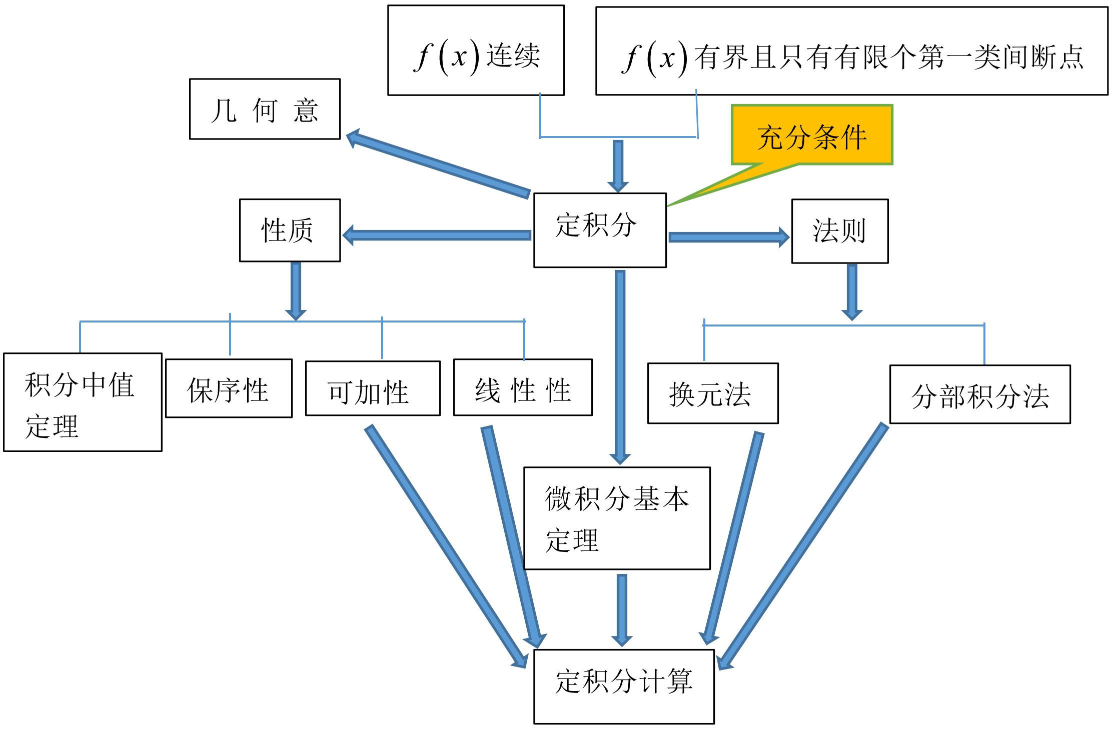


图 14 定积分架构

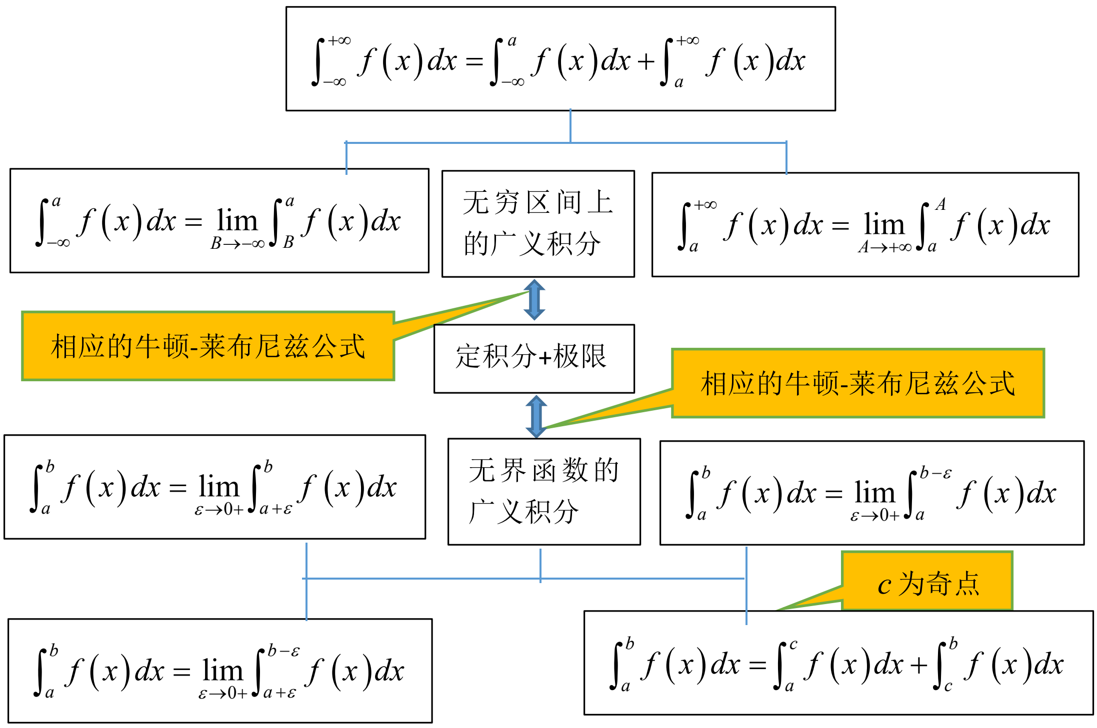


图 15 广义积分架构

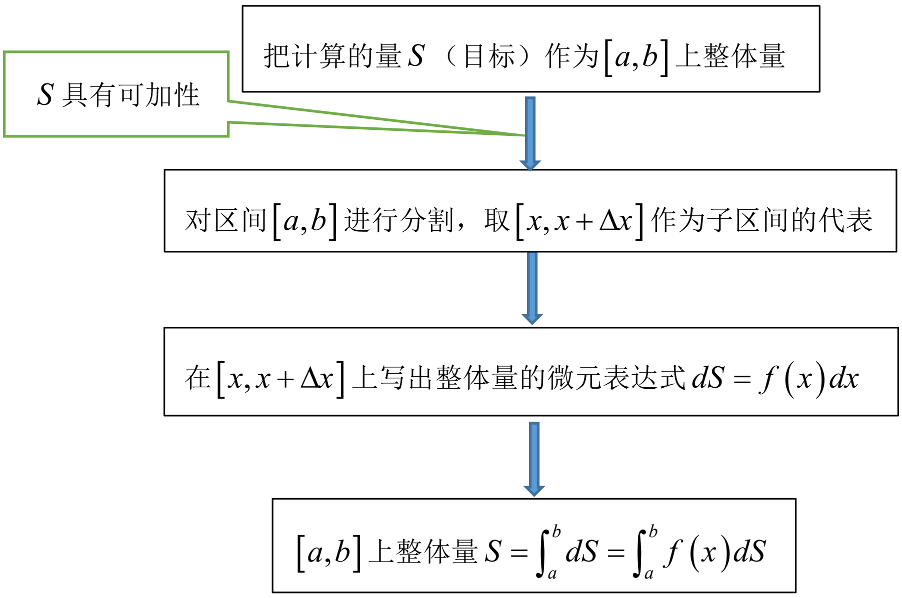


图 16 微元法过程

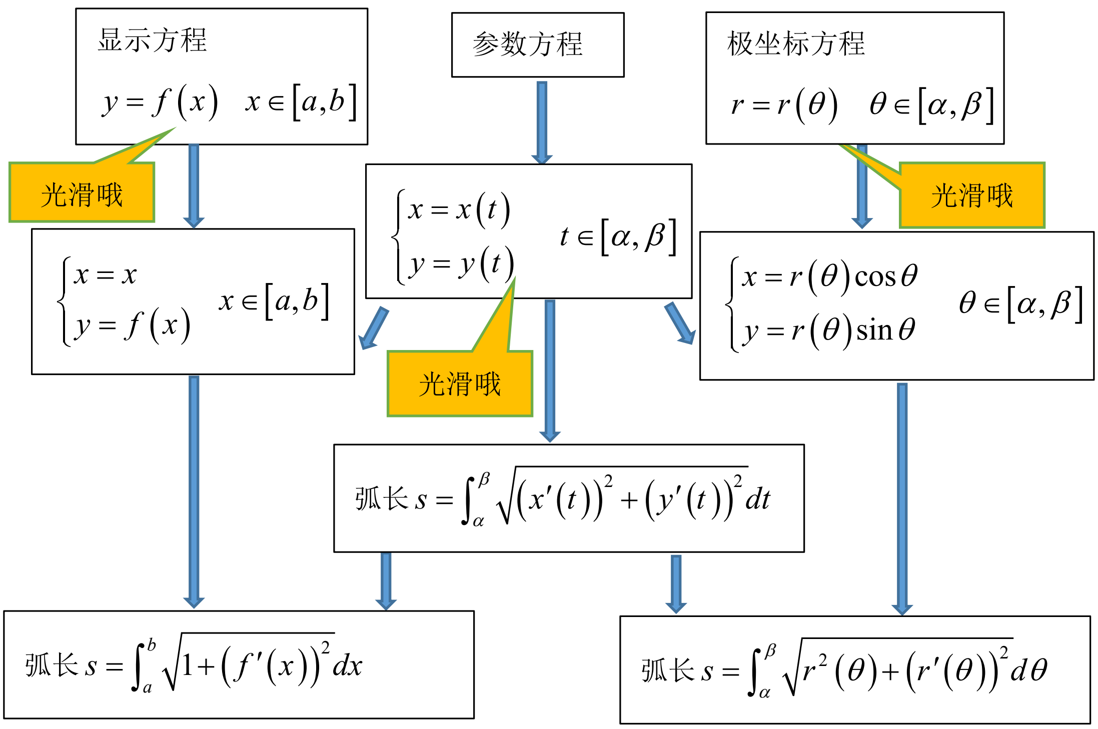


图 17 光滑曲线弧长

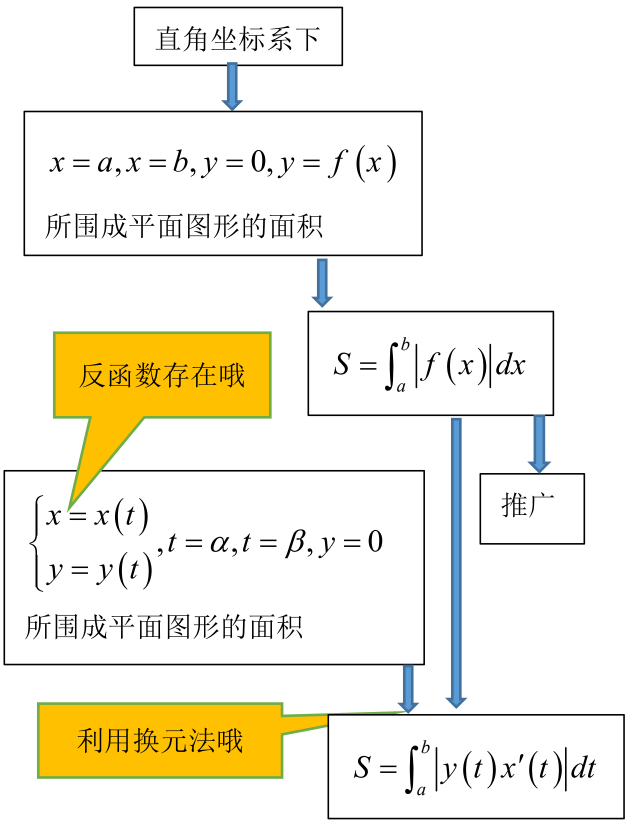


图 18 平面图形的面积

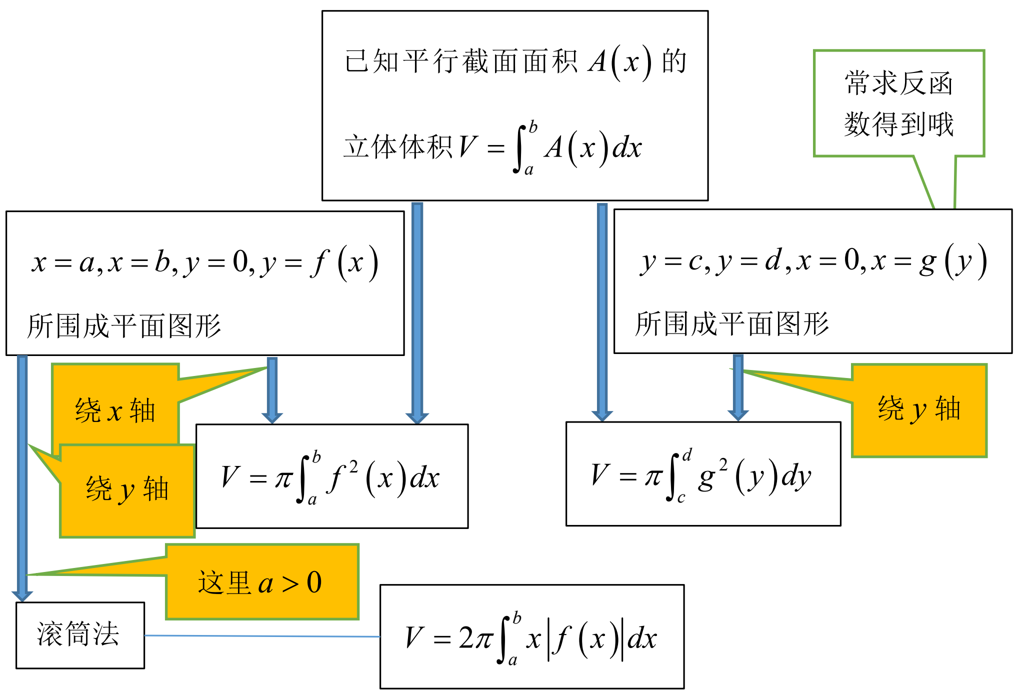
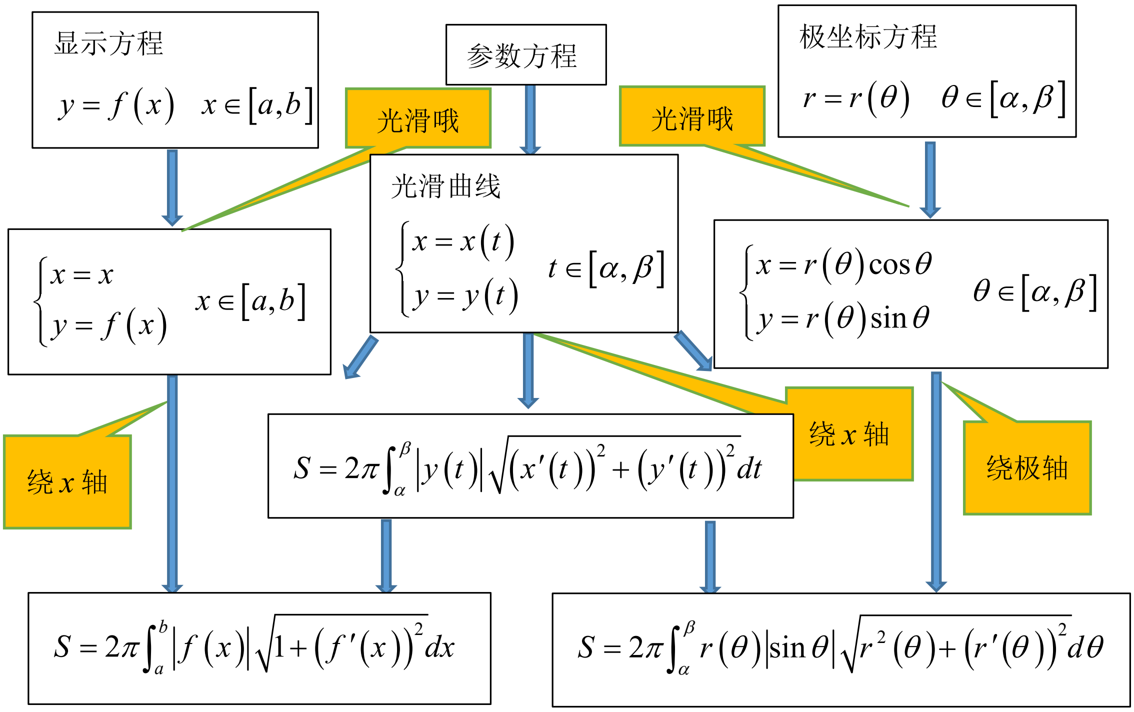


图 19 旋转体的体积



显示方程
$y=f(x)\quad x\in[a,b]$
参数方程
极坐标方程
$r=r(\theta)\quad \theta\in[\alpha,\beta]$
光滑哦
光滑哦
光滑曲线
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$
$\begin{cases}x=x\\y=f(x)\end{cases}\quad x\in[a,b]$
$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}\quad \theta\in[\alpha,\beta]$
绕 x 轴
$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$
绕 x 轴
绕极轴
$S=2\pi\int_{a}^{b}|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$
$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)|\sin\theta|\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}d\theta$

图 20 旋转体的侧面积

第七章　常微分方程

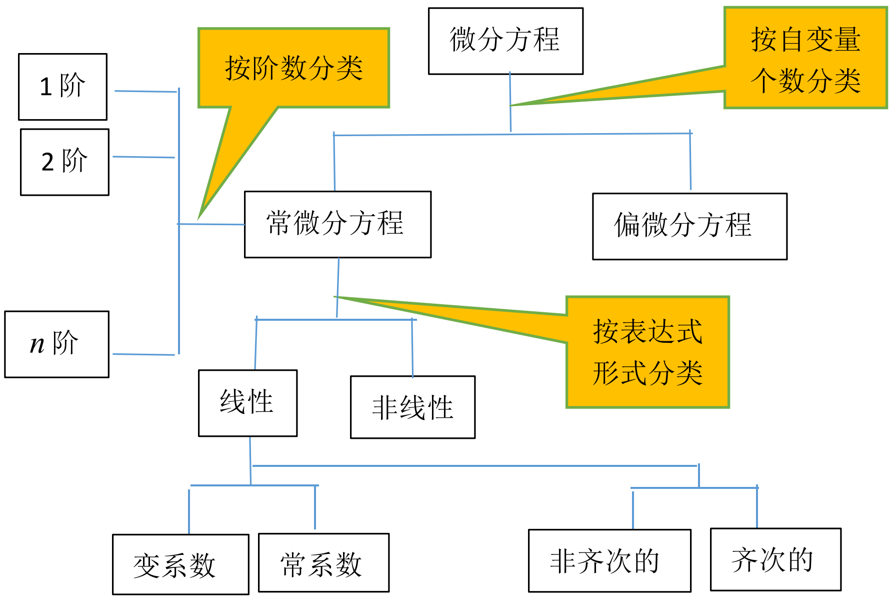


图 21　微分方程分类

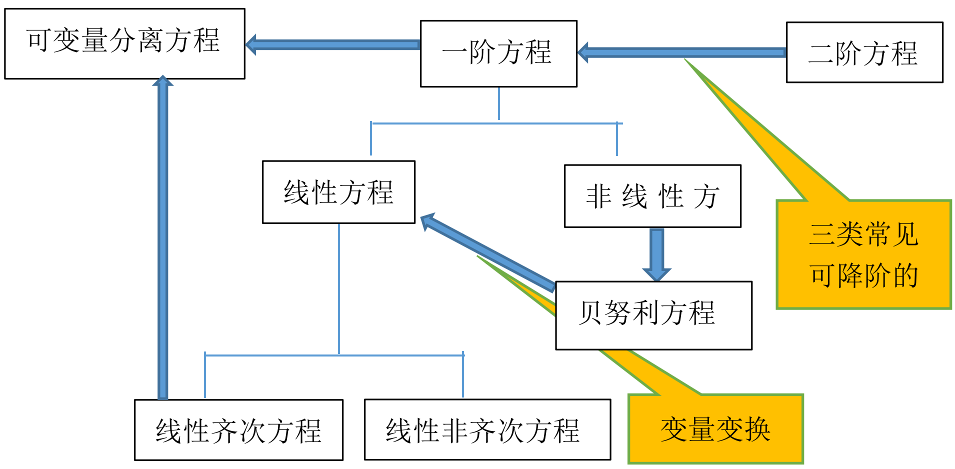


图 22　一阶可求解的方程之关系

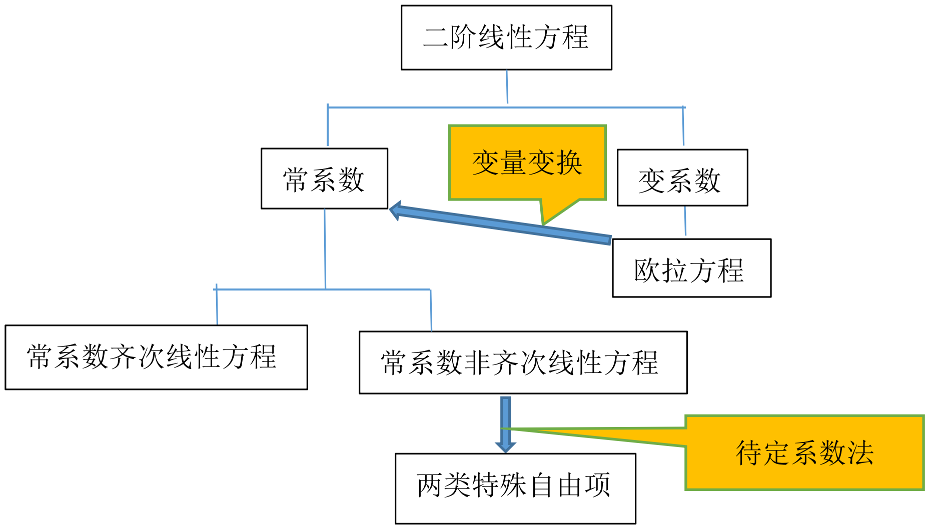


图 23　二阶可求解的方程之关系

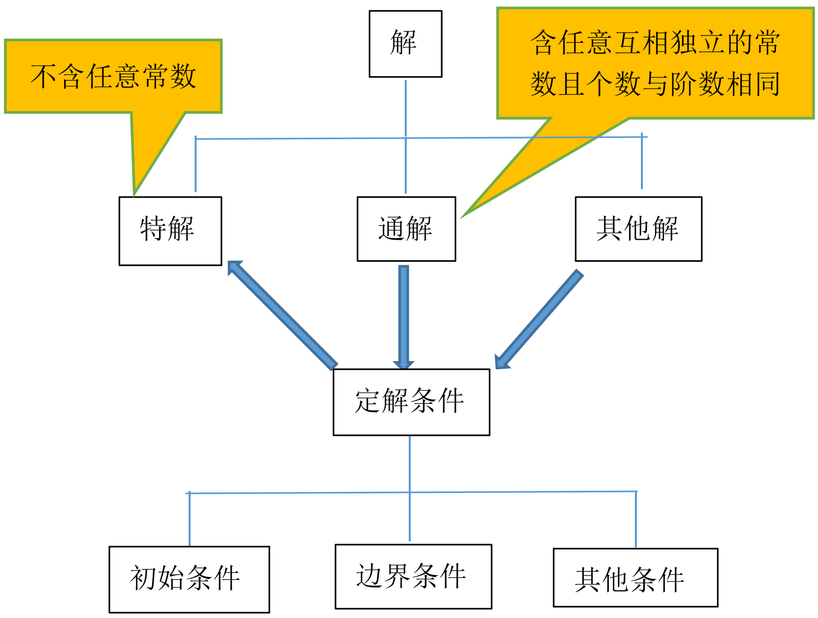


图 24　解的架构

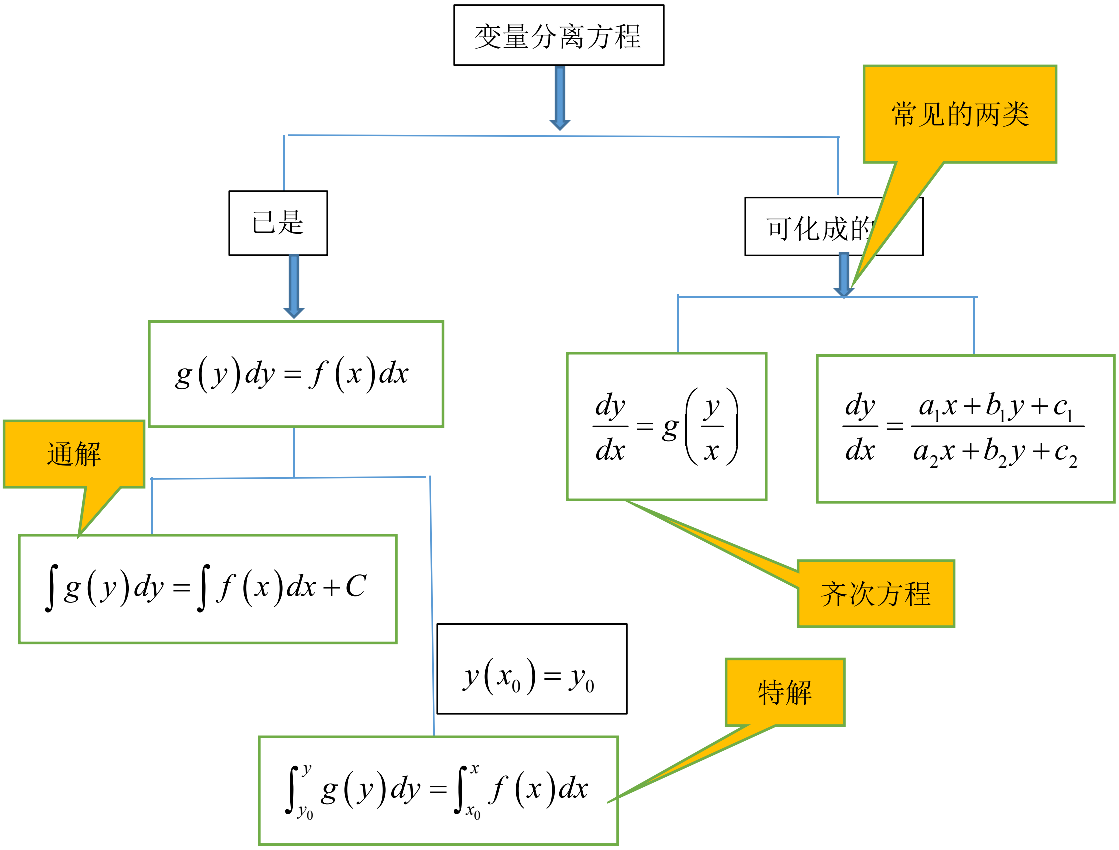


图 25　变量分离方程架构

注 12：

1. 形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$ 和 $M_1(x)\cdot M_2(y)dx=N_1(x)\cdot N_2(y)dy$ 两形式，可能有常值函数解。
2. 通解一定含有一个任意常数，别忘了写哦。

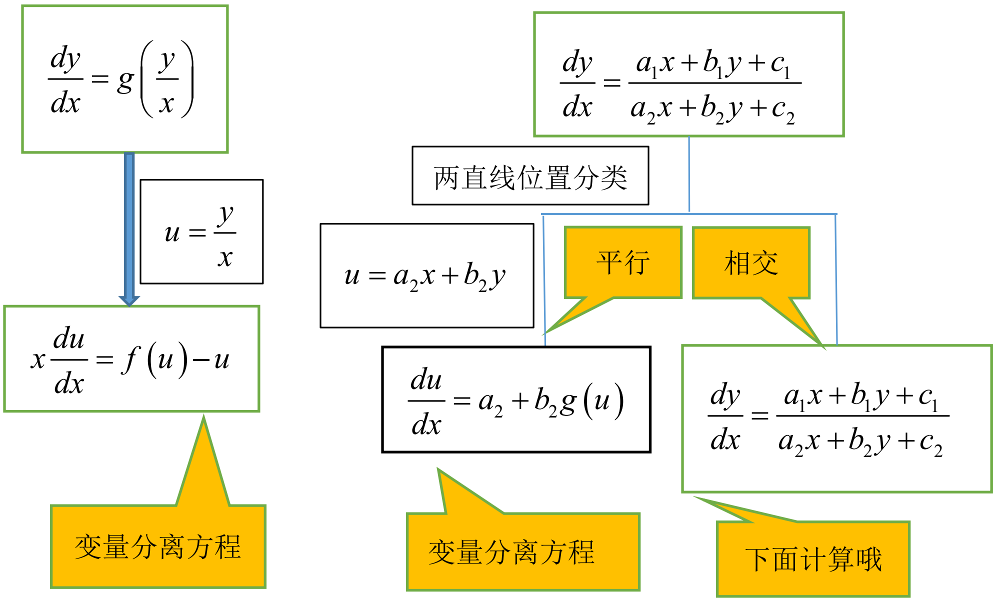


图 26　两类常见的可化为变量分离方程求解过程

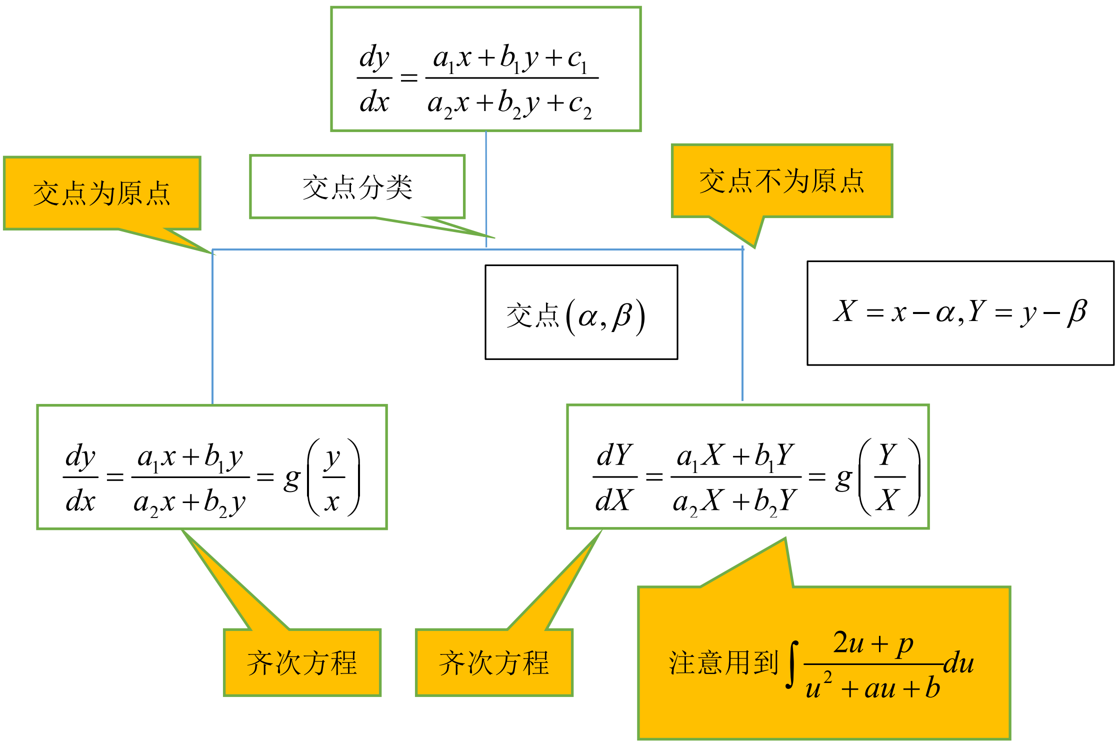


图 27 有交点时求解过程

注 13：对于两类常见的可化为变量分离方程，一定别忘了带回原变量哦。

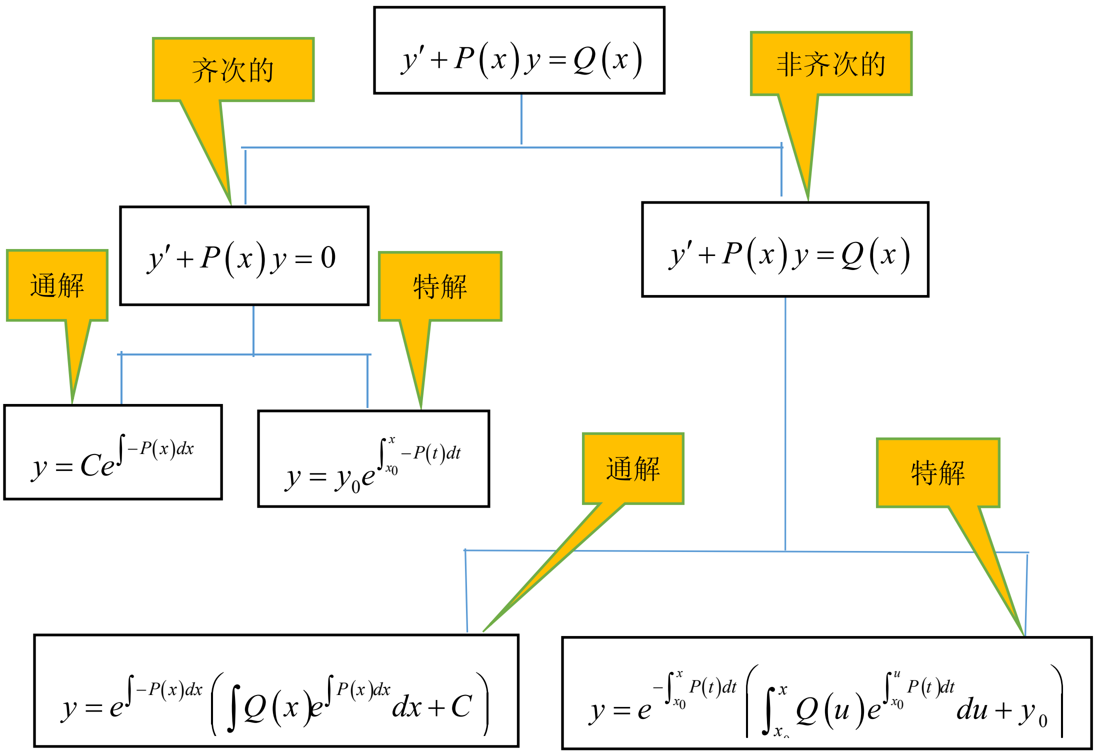


图 28　一阶线性方程求解过程

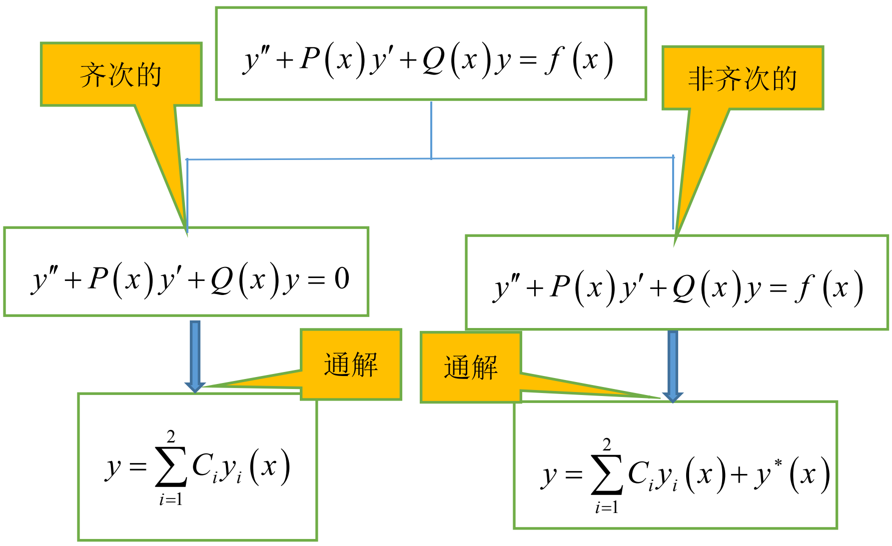
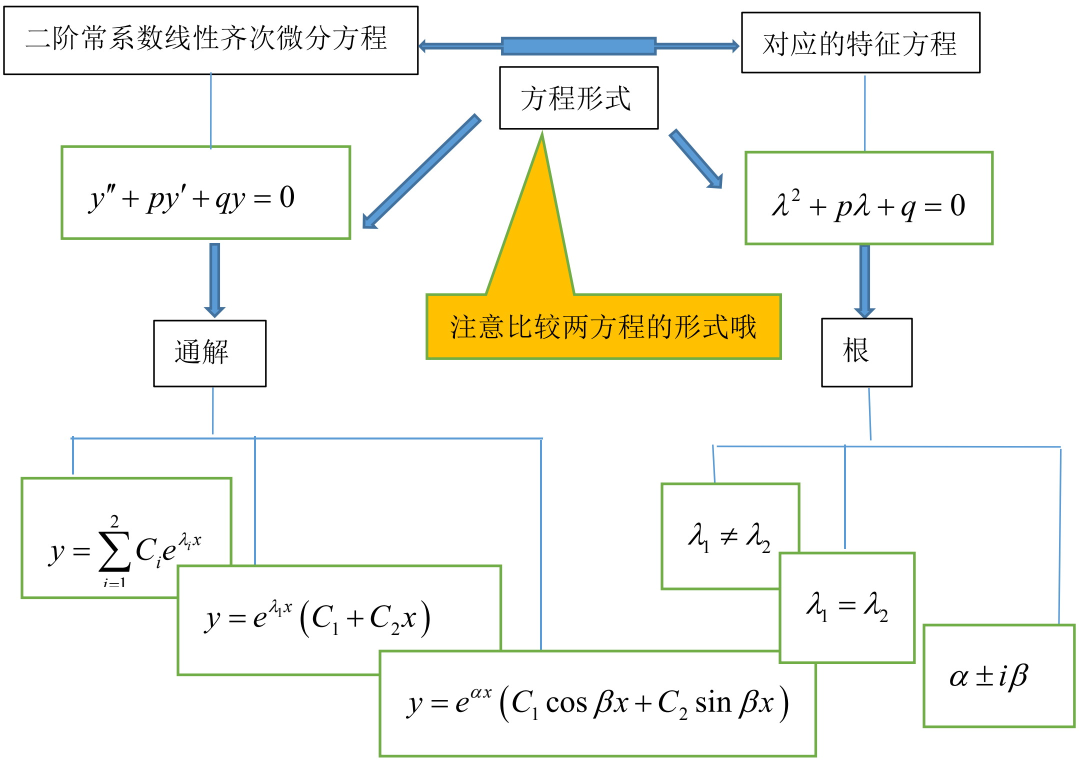


图 29　二阶线性微分方程解的结构

注 14：$y=y_1(x),y=y_2(x)$是二阶齐线性微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的两个线性无关解。$y=y^*(x)$是二阶非齐线性微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的一个特解。



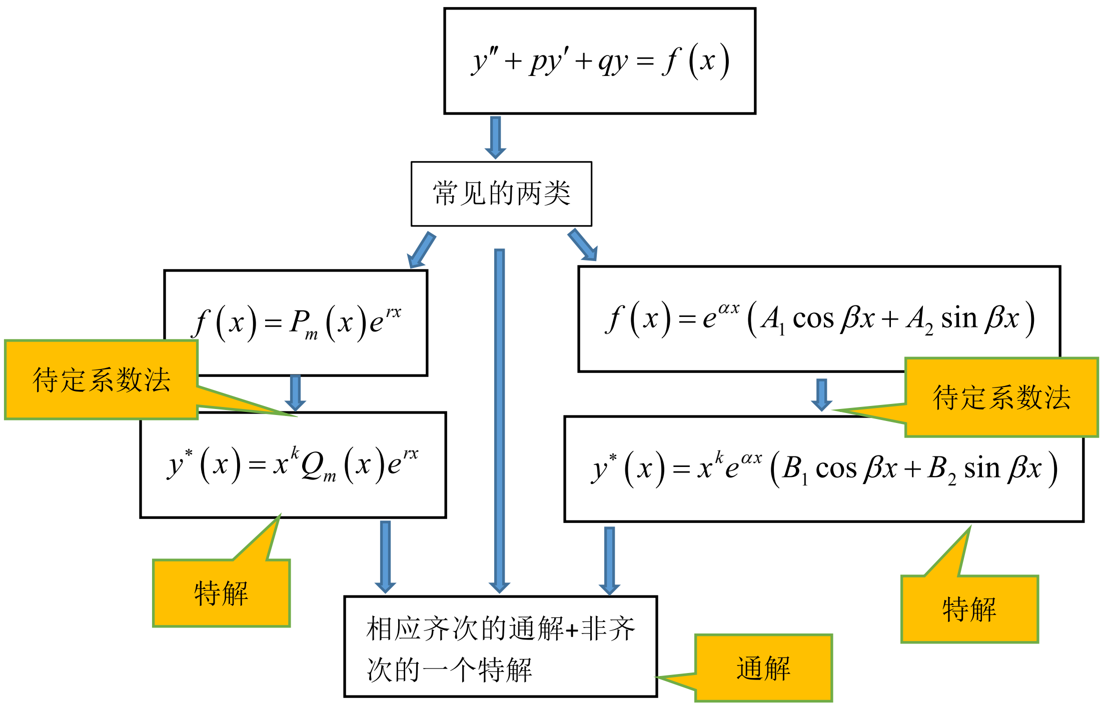


图 31　二阶常系数非齐次微分方程求解过程

1. 注 15：1.注意 k 的选取；2. $Q_m(x)$ 为与 $P_m(x)$ 同次的待定多项式；3. B_1,B_2 为待定系数。