安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期中考试试卷大题答案详解

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11.【解】先证数列为有界数列。

$a_1=\sqrt{2}<2$，$a_2=\sqrt{2+a_1}<\sqrt{2+2}=2$，假设 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}<2$，

则数列 $\{a_n\}$ 有上界；

再证数列为单调递增数列。

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\dfrac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=-\dfrac{(a_n-2)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0$，得 $a_{n+1}>a_n$，

则数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

由单调有界必有极限，可知 $\{a_n\}$ 极限存在； 7 分

求极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 两边取极限，有 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$ 或 $A=-1$（舍去），则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. 9 分

12. 【解】 $\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+n}\le x_n\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}$ 7 分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}=\dfrac{1}{4}$，由夹边定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$ 9 分

13.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^3}=\frac{1}{4}$$ 9 分

14.【解】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$ 可知，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=4$，则 $x\to0$ 时，$f(x)\sim2x^2$； 5 分

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$ 9 分

15.【解】设 $y=f(x)$，则

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$， 4分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left[\frac{dx}{dy}\right]}{dy}=\frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{ae^x}{(ae^x)^3}=-\frac{1}{a^2e^{2x}}.$$

9分

16.【解】在方程中令$x=0$可得$y(0)=0$；

将方程两边对x求导，得$y+xy'+y'e^y=1$，　　　　（*）

将$x=0$和$y(0)=0$代入，有$y'(0)=1$； 5分

将（*）式两边再对x求导，得

$$2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0,$$

将$x=0$，$y(0)=0$和$y'(0)=1$代入，有$y''(0)=-3$ 9分

17.【解】因为$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(1+t)^2}$， 4分

令$\frac{1}{2(1+t)^2}=\frac{1}{8}$，得$t=1$和$t=-3$（舍去）； 6分

当$t=1$时，$x=3$，$y=\ln 2$，故所求切线方程为：

$y-\ln 2=\frac{1}{8}(x-3)$，即$y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+\ln 2$. 9分

四、分析题（每小题10分，共10分）

18.【解】$f(x)$在$x=1$点处可导必连续，则

$\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b=f(1)=1$，即$a+b=0$； 4分

又$f(x)$在$x=1$点处可导，则$f'_-(1)=f'_+(1)$，而

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1+a)=2+a$$

得$-1=2+a$．

得$a=-3$，$b=3$． 9分

五、证明题（每小题7分，共7分） 10分

19.【证明】

$$[u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$ 4分

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$ 7分

一、

1. C 2. D 3. B 4. D 5 C

二、 6. $\max\{a_1, a_2, \cdots a_k\}$

7. 1

8. 1

9. $-2019!$

10. $e^t(1+t)dt$