安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《 高等数学 A（一)》期中考试试卷答案详解

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. C 2. B 3. C 4. A 5. D

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $\frac{1}{2}$ **7.** $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$ **8.** $-\frac{3}{2}$ **9.** $-\frac{1+t^2}{t^3}$ **10.** $(2t+1)e^{2t}dt$

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11、(1)【证明】因为$a_0>0$，由递推公式可知：$a_n>0$

而$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{9}{a_n}}=3$，所以$a_n$有下界为 3；

又$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{a_n^2}\right)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1\Rightarrow a_{n+1}\leq a_n$，所以$a_n$单调递减；

由单调有界必有极限可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. 5 分

(2)【解】令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right)$两边取$n\to\infty$的极限，即得：

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{9}{A}\right)\Rightarrow A=\pm3$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$ 9 分

12.【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x\left(\sqrt{1+\sin^2x}-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{3}$$ 9 分

13.【解】
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}$$ 9 分

14. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{12}$$ 9 分

15.【解】在方程中令 $x=0$ 可得 $y(0)=0$；

将方程两边对 x 求导，得 $e^y y'+6y+6xy'+2x=0$， （*）

将 $x=0$ 和 $y(0)=0$ 代入，有 $y'(0)=0$； 4 分

将（*）式两边再对 x 求导，得

$$e^y\left(y'\right)^2+e^y y''+12y+6xy''+2=0,$$

将 $x=0$， $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$ 代入，有 $y''(0)=-2$ 9 分

16.【解】 $dy=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot d\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$$=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=-\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$$ 9 分

17.【解】

$$f^{(n-1)}(x)=C_{n-1}^0(x-a)^n g^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}g^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-1}n(n-1)\cdots 2(x-a)g(x)$$

$$=(x-a)^n g^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}g^{(n-2)}(x)+\cdots+n!(x-a)g(x)$$

$f^{(n-1)}(a)=0$

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}n!g(x)=n!g(a)$$ 9 分

四、综合分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. $f(x)=\begin{cases} 0, & x>0, \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0, \end{cases}$ 4 分

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\overset{-\frac{1}{x}=t}{=}\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^t}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，

则 $x=0$ 为第一类的可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}=\dfrac{\pi}{2e}$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2}=-\dfrac{\pi}{2e}$，

则 $x=-1$ 为第二类的跳跃间断点. 10 分

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19.【证明】

〖证明〗（1）（零点定理） 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$，

因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$F(0)=f(0)-\dfrac{a}{a+b}=-\dfrac{a}{a+b}<0$，

而 $F(1)=f(1)-\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{a+b}>0$，由零点定理可得至少存在一点 $c\in(0,1)$，

使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$ 3 分

（2）拉格朗日中值定理

$f(x)$ 分别在 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{a}{(a+b)c}，\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-\dfrac{a}{a+b}}{1-c}=\frac{b}{(a+b)(1-c)}$$

其中 $0<\xi<c<\eta<1$

于是有 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$. 7 分